

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
БАЙКАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И ПРАВА

В.И. КУСТОВА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ.
НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
В ЭКОНОМИКЕ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Часть IV

**Издательство БГУЭП
2002**

УДК 519.85:338(075.8)

ББК 22.1

К 94

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета экономики и права

Рецензенты канд. физ.-мат. наук, доцент А.В.Аргучинцев
канд. физ.-мат. наук, доцент Н.М.Эринчек

Кустова В.И.

К 94 Исследование операций. Нелинейное программирование в экономике: Учеб. пособие. Ч. 4. - Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2002. – 72 с.

ISBN 5-7253-0704-2

Подготовлено в соответствии с программой курса «Исследование операций» и является продолжением ранее изданного пособия в трех частях под названием «Математическое программирование». Подробно изложены основные методы нелинейного программирования, позволяющие произвести выбор наилучшего плана распределения неоднородных ограниченных ресурсов. Описание каждого метода сопровождается развернутыми экономическими примерами с подробными решениями. Для отработки навыков подготовки и принятия управленческих решений в конце учебного пособия приводятся 25 прикладных задач нелинейного программирования из различных областей экономики. Все они снабжены ответами и указаниями.

Рекомендуется для студентов, аспирантов и преподавателей экономических специальностей вузов; может быть использовано и специалистами, интересующимися оптимизационным аппаратом выработки управленческих решений (действующими и потенциальными предпринимателями, менеджерами, специалистами по маркетингу и коммерции, финансистами и др.).

ББК 22.1

ISBN 5-7253-0704-2

©Кустова В.И., 2002
© Издательство БГУЭП, 2002

Введение

В данном учебном пособии автор стремился изложить в доступной форме основные разделы линейного и нелинейного программирования, являющихся мощным средством для решения многочисленных задач из различных областей экономики. Их методы нашли широкое применение в промышленности, торговле и управлении, как в местных, так и в государственных масштабах. С помощью методов линейного и нелинейного программирования можно решить многие задачи, связанные с эффективным использованием ограниченных ресурсов, с минимизацией затрат при выполнении ряда работ в заданных объемах, с оперативно-календарным планированием, с управлением технологическими процессами, с созданием оптимальных конструкций, с управлением грузопотоками, персоналом и т. д.

Объектом для теоретического изучения как в линейном, так и в нелинейном программировании являются задачи оптимизации, начиная от их постановок и заканчивая отысканием эффективного алгоритма решения таких задач. При этом цель решения оптимизационной задачи является принципиальным признаком для последствий управленческих решений. Для того, чтобы оценить последствия реализации той или иной цели, необходимо иметь хорошую модель анализируемого явления, с помощью которой можно оценить все варианты результата.

Отсюда основная цель создания такого учебного пособия заключалась в том, чтобы познакомить студентов с различными экономическими проблемами, часто возникающими в экономических исследованиях и на практике; научить их правильно строить математические модели этих проблем, как правило, представляющие задачи математического программирования; определять класс исследуемых задач и в соответствии с этим осуществлять выбор одного из известных методов их решения; затем с помощью имеющихся программных реализаций данных методов производить анализ получаемых результатов и на основе этого анализа принимать правильное решение. Это пособие может быть использовано и специалистами, интересующимися оптимизационным аппаратом выработки управленческих решений (действующими и потенциальными предпринимателями, менеджерами, специалистами по маркетингу и коммерции, финансистами и др.). Одновременно оно может оказаться полезным и для преподавателей при чтении лекций, ведении практических занятий, составлении экзаменационных билетов. Все предлагаемые в нем задачи могут быть успешно решены студентами с помощью персональных компьютеров в рамках лабораторных занятий.

Структура данного учебного пособия такова. Оно состоит из четырех частей, содержащих материал, который можно прочесть за два семестра. Каждая из частей, в свою очередь, разделена на главы. I-у часть

составляет глава 1, называемая «Экономико-математические модели и их геометрическая интерпретация»; II-ю часть – глава 2 под названием «Исследование задач линейного программирования в общем случае»; III-я часть включает три главы: главу 3 под названием «Решение двойственных задач линейного программирования», главу 4 под названием «Целочисленные задачи линейного программирования», главу 5 под названием «Транспортная задача линейного программирования» и, наконец, завершает учебное пособие IV-я часть с главой 6 под названием «Задачи нелинейного программирования». В главе 1 обсуждаются вопросы, связанные с экономико-математическим моделированием и с геометрической интерпретацией определенных экономических задач, отражающих основные идеи математического программирования. Глава 2 представляет краткое и строгое изложение теории линейного программирования. Основное внимание в ней уделено симплекс-методу и его модификациям как инструменту исследования разнообразных задач линейного программирования, а также анализу конкретных экономических ситуаций и интерпретации получаемых результатов. Материал главы 3 сосредоточен на таком основном понятии, как двойственность. Здесь рассматривается целый ряд экономических задач, которые удобно изучать в постановке двойственных задач. В главе 4 приводятся целочисленные задачи линейного программирования, и дается сжатое описание алгоритмов их решения. Глава 5 посвящена исследованию транспортных задач в различных формулировках. В главе 6 подробно описываются методы нелинейного программирования, позволяющие произвести выбор наилучшего плана распределения неоднородных ограниченных ресурсов.

Изучение материала предполагает наличие знаний у читателя по математическому анализу и линейной алгебре в объеме соответствующих вузовских курсов для экономических специальностей. В каждой главе даются решения типовых экономических задач с исчерпывающими объяснениями, что позволяет быстрее освоить методы решения оптимизационных задач. Эти примеры образуют единое целое с основным текстом. Они либо иллюстрируют существо излагаемого материала, либо указывают на возможности его применения. По всем темам предлагаются индивидуальные контрольные задания: всего приведено 390 задач, в основном, экономического содержания. Все задачи снабжены ответами, по решению некоторых даны указания.

I и II части были изданы в 1994 году, а III-я часть – в 1998 году издательством ИГЭА. IV-я часть представлена главой 6 в этом учебном пособии. Она содержит 10 параграфов, посвященных изложению методов нелинейного программирования. Очевидно, что нелинейное программирование существенно расширяет возможности постановки реальных экономических задач. В действительности такие величины, как прибыль, себестоимость, капитальные затраты на единицу продукции, удельный расход различных ресурсов зависят от объема производства; затраты на пе-

ревозку единицы груза – от объема перевозок и т.д., а в соответствующих задачах линейного программирования их приходится считать постоянными. Учет же указанных факторов приводит к нелинейным зависимостям.

В общем виде математическая постановка задачи нелинейного программирования состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции при условиях, записываемых в форме линейных и нелинейных равенств и неравенств (целевая функция при этом также может представлять нелинейную функцию). Эта общая задача нелинейного программирования и ее экономическая интерпретация приведены в §1 главы 6. Здесь также производится сравнение по степени сложности решения двух задач (связанных с определением оптимального плана выпуска продукции), одна из которых имеет единственное решение, а другая – несколько решений. В §2 рассмотрен частный случай общей задачи нелинейного программирования (здесь ограничения заданы только в форме равенств), и для ее решения описан классический метод множителей Лагранжа. В конце параграфа с помощью этого метода исследована задача распределения нефти между тремя нефтеперерабатывающими заводами, в которой прибыль представлена в виде нелинейной функции. §3 посвящен наиболее изученному классу задач нелинейного программирования: задачам выпуклого программирования, в результате решения которых определяют минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве. Здесь исследованы свойства выпуклых множеств и выпуклых функций, на примере производственной функции дана экономическая интерпретация выпуклости, сформулирована вместе с доказательством теорема Куна-Таккера, на которой основывается большинство эффективных алгоритмов решения задач выпуклого программирования. В §4 уделяется внимание подробно разработанным задачам квадратичного программирования, в которых требуется найти максимум (или минимум) квадратичной функции при условии, что ее переменные удовлетворяют некоторой системе линейных неравенств и (или) линейных уравнений. Применение описанных методов демонстрируется на примере составления рационального плана работы предприятия. В §5 достаточно полно описан метод кусочно-линейной аппроксимации, позволяющий находить приближенное решение задач нелинейного программирования с сепарабельными функциями. В конце данного параграфа показывается, как можно эффективно использовать этот метод при отыскании оптимального плана товарооборота одного магазина с ограниченными трудовыми ресурсами и площадями помещений. В §6 детально изучен еще один класс специальных задач нелинейного программирования – задач дробно-линейного программирования, в которых целевая функция представляет отношение двух линейных функций, а функции, определяющие допустимую область, также линейны. Целевые функции такого вида входят в математические модели многих экономических задач. Одна из них исследована в этом

параграфе. В §7-§10 проведен оптимизационный поиск с помощью градиентных методов: метода наискорейшего спуска (подъема) и метода возможных направлений, а также методов внешних и внутренних штрафных функций. Описание каждого метода сопровождается развернутыми экономическими примерами с подробными решениями. Для отработки навыков подготовки и принятия управленческих решений в конце главы 6 приводится 25 прикладных задач нелинейного программирования из различных областей экономики. Все они снабжены ответами и указаниями.

Глава 6

Задачи нелинейного программирования

6.1. Общая задача нелинейного программирования и ее экономическая интерпретация

Как уже отмечалось в главе 1, всякая задача вида: найти точку $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in R^n$, удовлетворяющую системе ограничений

$$g_i(x) = b_i, \quad i=1, \dots, k, \quad (6.1)$$

$$g_i(x) \leq b_i, \quad i=k+1, \dots, m \quad (6.2)$$

и доставляющую минимум (максимум) функции $f(x)$, т.е.

$$f(x) \rightarrow \min (\max), \quad (6.3)$$

в которой хотя бы одна из функций $f(x)$, $g_i(x)$, $i=1, \dots, m$, представляет нелинейную функцию, называется задачей нелинейного программирования (НП).

Замечаем, что класс задач нелинейного программирования шире класса задач линейного программирования (ЛП). Возникает задача отыскания эффективных методов решения задач НП. Для решения общей задачи НП вида (6.1)-(6.3) не существует универсальных методов. Однако для отдельных классов этих задач, в которых сделаны дополнительные ограничения относительно свойств функций $f(x)$ и $g_i(x)$, разработаны эффективные методы их решения.

В главе 1 при исследовании задач НП с помощью геометрических построений отмечалось, что в этих задачах точка x^* располагается либо внутри допустимого множества X , определяемого совокупностью ограничений вида (6.1)-(6.2), либо на его границе. Кроме того, в ряде задач НП целевая функция $f(x)$ может иметь несколько локальных экстремумов, и лишь некоторые из них одновременно являются глобальными экстремумами. При решении некоторых из них с помощью существующих методов можно найти точку локального экстремума, но нельзя установить, является ли она точкой глобального экстремума. Таким образом, при решении задач НП возникает больше трудностей, нежели при решении задач ЛП. Очевидно, что нелинейное программирование существенно расширяет возможности постановки реальных экономических задач. В действительности такие величины, как прибыль, себестоимость, капитальные затраты на единицу продукции, удельный расход различных ресурсов зависят от объема производства; затраты на перевозку единицы груза - от объема перевозок и т. д., а в соответствующих задачах ЛП их приходится считать постоянными. Учет же указанных факторов приводит к нелинейным зависимостям.

Пример 6.1. Между двумя предприятиями определенной отрасли необходимо распределить выпуск некоторой однородной продукции. Затра-

ты, связанные с производством 1 изделия на первом предприятии, равны $3x_1 + 10$ у. е.; затраты, обусловленные изготовлением 1 изделия на втором предприятии, составляют $4x_2 + 8$ у. е. Здесь x_1 и x_2 - количество изделий, изготавливаемых за сутки соответственно первым и вторым предприятиями. Зная, что изделий должно быть выпущено за сутки не менее 30 единиц, составить такой план производства изделий предприятиями за сутки, при котором общие затраты на их выпуск были минимальными.

Решение. Математическая модель описанной экономической ситуации будет представлять следующую задачу НП:

$$f(x) = (3x_1 + 10)x_1 + (4x_2 + 8)x_2 \rightarrow \min$$

на множестве ограничений $X = \{x \in R^2: x_1 + x_2 \geq 30; x_1, x_2 \geq 0\}$.

Так как в данной задаче содержатся лишь две переменные x_1 и x_2 , то найдем ее оптимальное решение x^* с помощью геометрических построений по той же схеме исследования, которая была предложена в главе 1.

В начале построим допустимое множество X , ограниченное прямыми $x_1 + x_2 = 30$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ (см. рис. 6.1). Замечаем, что линии уровня целевой функции $f(x)$ (т. е. множества вида: $L_\alpha = \{x \in R^2: f(x) = \alpha\}$) представляют для любых α эллипсы:

$$3(x_1 + 5/3)^2 + 4(x_2 + 1)^2 = \alpha + 37/3 = \alpha_1 \text{ или } \frac{(x_1 + 5/3)^2}{\alpha_1/3} + \frac{(x_2 + 1)^2}{\alpha_1/4} = 1 \text{ с центром}$$

в точке $(-5/3; -1)$ и полуосями, равными соответственно $\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\sqrt{\alpha_1}}{2}$.

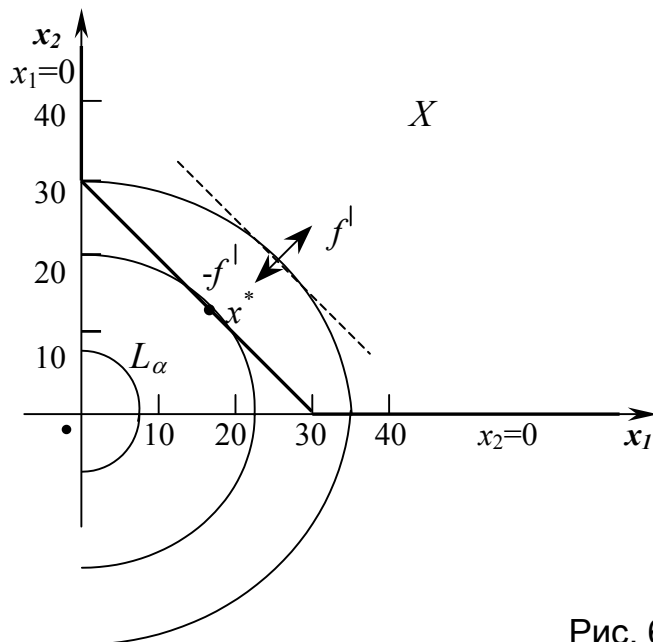


Рис. 6.1.

Геометрически ясно, что здесь L_{α^*} - это тот эллипс $\frac{(x_1 + 5/3)^2}{\alpha^*/3} + \frac{(x_2 + 1)^2}{\alpha^*/4} = 1$

$+ \frac{(x_2 + 1)^2}{\alpha^* / 4 + 37 / 12} = 1$, который касается прямой $x_1 + x_2 = 30$. Таким образом,

решением данной задачи является единственная точка x^* , координаты которой определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 30 \\ 3x_1^2 + 10x_1 + 4x_2^2 + 8x_2 = \alpha^* \end{cases}$$

Так как количество неизвестных переменных в данной системе, равное 3, больше числа ее уравнений, то такая система уравнений имеет бесконечное множество решений. Для выбора из этого множества единственного оптимального решения x^* рассматриваемой задачи НП необходимо, как уже указывалось в I главе, добавить к приведенной системе уравнений еще одно, третье уравнение, получаемое из равенства угловых коэффициентов прямой $x_1 + x_2 = 30$ и касательной к эллипсу

$3x_1^2 + 10x_1 + 4x_2^2 + 8x_2 = \alpha^*$ в точке x^* : $3x_1 - 4x_2 = -1$. Тогда решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 30 \\ 3x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1^2 + 10x_1 + 4x_2^2 + 8x_2 = \alpha^* \end{cases}$$

является точка $x^* = (17; 13)$ и $\alpha^* = 1817$. Таким образом, первое предприятие за сутки должно выпускать 17 изделий, а второе предприятие - 13 изделий. При этом суммарные затраты составят 1817 у. е.

Пример 6.2. Производственное объединение, состоящее из двух небольших автомобильных заводов, выпускает автомобили 2-х марок А и В, причем первый автозавод производит автомобили марки А, а второй автозавод - автомобили марки В. Производительности первого и второго автозаводов не превышают 7 и 8 автомобилей в сутки соответственно. На рынке можно реализовать в течение суток не менее 5 машин обеих марок. Стоимость 1 автомобиля марки А и В равны соответственно $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$ у. д. е.; затраты же на производство 1 автомобиля марки А и В составляют соответственно 8 - x_1 и 10 - x_2 у.д.е. Здесь x_1 и x_2 представляют суточный выпуск автомобилей соответственно марки А и В. Определить выпуск автомобилей обеих марок, т. е. x_1 и x_2 , при котором суммарные затраты не превосходили величины, равной 23 у.д.е., а суммарная стоимость продукции была бы максимальной.

Решение. Математическая модель данной экономической задачи будет представлять следующую задачу НП:

$$f(x) = (x_1 - 1)x_1 + (x_2 - 1)x_2 \rightarrow \max$$

на множестве ограничений $X = \{x \in R^2 : x_1 \leq 7; x_2 \leq 8; x_1 + x_2 \geq 5;$

функции, непрерывные вместе со своими первыми частными производными:

$$f(x) \rightarrow \min (\max) \quad (6.4)$$

$$g_i(x) = b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.5)$$

В курсе математического анализа такую задачу называют задачей на условный экстремум или классической задачей оптимизации. Для ее решения можно воспользоваться классическим методом множителей Лагранжа. Для этого вводят набор переменных $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, называемых множителями Лагранжа, и для задачи (6.4)-(6.5) составляют функцию Лагранжа:

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - g_i(x)). \quad (6.6)$$

Затем находят частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n$, и $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, i = 1, \dots, m$;

приравнивают их нулю и получают систему из $n + m$ уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n; \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (6.7)$$

с $n + m$ неизвестными $x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Замечаем, что в основе метода множителей Лагранжа лежит утверждение, что если точка $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ представляет решение задачи (6.4)-(6.5), то существует такой вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$, что точка (x^*, λ^*) является решением системы (6.7) или стационарной точкой функции Лагранжа. Таким образом, в виде системы уравнений (6.7) записаны необходимые условия существования локального экстремума функции $f(x)$ на множестве точек, удовлетворяющих ограничениям (6.5). Существуют также и достаточные условия, но этот вопрос решается на основании исследования знака второго дифференциала функции Лагранжа. Обычно достаточные условия редко используются на практике и главным образом представляют теоретический интерес.

Таким образом, можно указать следующий порядок решения задачи (6.4)-(6.5) с помощью метода множителей Лагранжа:

- 1) составляют функцию Лагранжа (6.6);
- 2) находят частные производные от функции Лагранжа по всем переменным $x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m$ и приравнивают их нулю;
- 3) решают систему уравнений вида (6.7) и находят таким образом все стационарные точки функции Лагранжа, т.е. точки, в которых целевая функция $f(x)$ может иметь условный экстремум;

4) среди стационарных точек, взятых без координат $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, выбирают такие точки, в которых функция $f(x)$ имеет условные локальные экстремумы при наличии ограничений (6.5), и вычисляют значения функции $f(x)$ в этих точках; этот выбор осуществляется, например, с применением достаточных условий локального экстремума: если матрица вторых производных от функции Лагранжа в стационарной точке положительно (отрицательно) определена, то эта точка является точкой локального минимума (максимума).

Пример 6.3. Нефтедобывающей компании необходимо оптимально распределить нефть в количестве 735 усл. ед. между тремя нефтеперерабатывающими заводами. При этом прибыль, которую может получить данная компания при выделении j -ому заводу x_j усл. ед. нефти, определяется величиной, равной $c_j \sqrt{x_j}$ у. д. е., где $c_1=16$; $c_2=20$; $c_3=18$.

Решение. Математическая модель данной экономической задачи имеет следующий вид:

$$f(x) = 16\sqrt{x_1} + 20\sqrt{x_2} + 18\sqrt{x_3} \rightarrow \max$$

при условии $x_1 + x_2 + x_3 = 735, x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Решим эту задачу, используя метод множителей Лагранжа, не учитывая при этом условия неотрицательности переменных. В начале составим функцию Лагранжа: $F(x; \lambda) = 16\sqrt{x_1} + 20\sqrt{x_2} + 18\sqrt{x_3} + \lambda(735 - x_1 - x_2 - x_3)$. Затем вычислим ее частные производные по x_1, x_2 и λ и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{8}{\sqrt{x_1}} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{10}{\sqrt{x_2}} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = \frac{9}{\sqrt{x_3}} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 735 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Выразив из первых трех уравнений переменные $x_j, j=1, 2, 3$, через λ , т. е. $x_1 = 64/\lambda^2; x_2 = 100/\lambda^2; x_3 = 81/\lambda^2$, подставим эти выражения вместо соответствующих переменных в четвертое уравнение:

$$\frac{64}{\lambda^2} + \frac{100}{\lambda^2} + \frac{81}{\lambda^2} = 735.$$

Отсюда $\lambda^2 = \frac{735}{245} = \frac{1}{3}$, т. е. $\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}$, и, следовательно, $x_1 = 192$; $x_2 = 300$; $x_3 = 243$. Таким образом, найдена стационарная точка $\bar{x} = (192; 300; 243)$.

Вычислив вторые частные производные по x_1, x_2, x_3 от функции Лагранжа, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} &= \frac{-4}{x_1 \sqrt{x_1}}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = 0; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} &= 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -\frac{5}{x_2 \sqrt{x_2}}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = 0; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} &= 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = \frac{-9}{2x_3 \sqrt{x_3}}, \end{aligned}$$

определяем матрицу вторых производных в стационарной точке \bar{x} :

$$F''(192; 300; 243; \sqrt{\frac{1}{3}}) = \begin{pmatrix} \frac{-4}{192\sqrt{192}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{300\sqrt{300}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-9}{486\sqrt{243}} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что эта матрица является отрицательно определенной, следовательно, точка $x^* = (192; 300; 243)$ представляет оптимальное решение рассматриваемой задачи. Отсюда первому заводу компания должна выделить 192 усл. ед. нефти, второму заводу- 300 усл. ед. нефти и третьему заводу – 243 усл. ед. нефти. Максимальная прибыль, полученная нефтедобывающей компанией при таком распределении, будет равна $f^* = 16\sqrt{192} + 20\sqrt{300} + 18\sqrt{243} \approx 837$ у. д. е.

Замечаем, что метод множителей Лагранжа можно применять и в том случае, когда ограничения представляют собой неравенства. Так, если требуется найти экстремум $f(x)$ при условии $g(x) \leq b$, то сначала следует найти точки безусловного экстремума функции $f(x)$, решив при этом систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Затем среди этих точек отобрать те, координаты которых удовлетворяют условию $g(x) < b$, и, наконец, определить точки, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad g(x) = b. \quad \text{Точки, найденные в}$$

результате решения этой системы, вместе с точками, определенными на первом этапе и удовлетворяющими условию $g(x) < b$, подлежат дальнейшему исследованию, как и при нахождении безусловного экстремума.

Поскольку решение системы (6.7) удастся получить лишь в простейших случаях, то этим определяется ограниченность использования метода множителей Лагранжа для многих практических задач.

В заключении приведем экономическую интерпретацию множителей Лагранжа. Для этого обратимся к простейшей классической задаче оптимизации:

$$f(x) \rightarrow \min (\max) \quad (6.8)$$

$$\text{при условии } g(x) = b, \text{ где } x = (x_1, x_2). \quad (6.9)$$

Предположим, что условный экстремум достигается в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Соответствующее экстремальное значение функции (6.8): $f^* = f(x^*)$. Допустим, что в ограничениях (6.9) величина b может изменяться, тогда координаты точки экстремума x_1^* и x_2^* , а, следовательно, и экстремальное значение f^* функции $f(x)$ станут величинами, зависящими от b , т. е. $x_1^* = x_1^*(b)$, $x_2^* = x_2^*(b)$, $f^* = f(x_1^*(b), x_2^*(b))$. Поэтому производная функции $f(x)$ по b будет равна:

$$\frac{\partial f^*}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1^*}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial b}. \quad (6.10)$$

С другой стороны, в силу условия (6.9) $g(x_1^*(b), x_2^*(b)) = b$, откуда после дифференцирования обеих частей данного соотношения по b имеем

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1^*}{\partial b} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial b} = 1. \quad (6.11)$$

Кроме того, в точке экстремума x^* выполняются необходимые условия (6.7). Из этих равенств для $n = 2$ и $m = 1$ получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}. \quad (6.12)$$

Подставляя выражения (6.12) в соотношение (6.10) и, учитывая равенство (6.11), находим, что

$$\frac{\partial f^*}{\partial b} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1^*}{\partial b} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial b} = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1^*}{\partial b} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial b} \right) = \lambda$$

или $\frac{\partial f^*}{\partial b} = \lambda$. Для задачи (6.4)-(6.5) аналогично получаем $\frac{\partial f^*}{\partial b} = \lambda_i$, $i = 1, \dots, m$. Если $f(x)$ интерпретировать как доход или стоимость, а b_i как запасы i -го ресурса, то множители Лагранжа λ_i показывают, как изменится минимальная стоимость (или максимальный доход), если запасы i -го ресурса увеличатся на единицу.

6.3. Задача выпуклого программирования

Важный класс задач НП составляют задачи выпуклого программирования, т.е. задачи вида:

$$f(x) \rightarrow \min(\max) \quad (6.13)$$

$$\text{при ограничениях: } g_i(x) \leq b_i, i = 1, \dots, m, \quad (6.14)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \quad (6.15)$$

где $f(x)$ – выпуклая (вогнутая) функция, и допустимое множество X , определяемое неравенствами (6.14)-(6.15), представляет выпуклое множество.

6.3.1. Выпуклые множества и выпуклые функции

Исследуем свойства выпуклых множеств и выпуклых функций и дадим экономическую интерпретацию выпуклости.

Определение 1. Пусть $x^1, x^2 \in R^n$. Множество точек $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$ при $\alpha \in [0, 1]$ называется отрезком прямой с концами x^1 и x^2 в пространстве R^n и обозначается $[x^1, x^2]$.

Естественной геометрической интерпретацией введенного понятия в случае $n = 1$ ($n = 2, n = 3$) является известное из геометрии понятие отрезка на прямой (на плоскости, в трехмерном пространстве) (рис. 6.3).

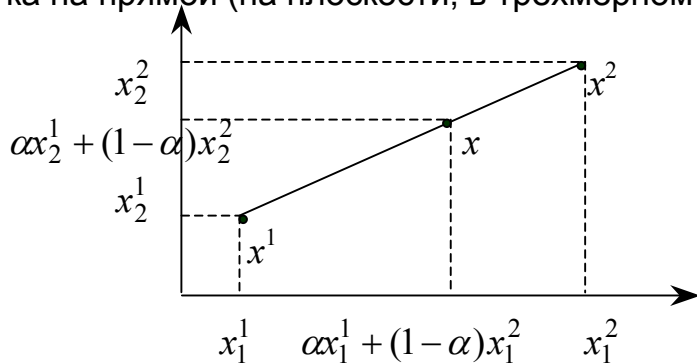


Рис. 6.3.

Определение 2. Множество X из пространства R^n называется выпуклым, если для всех точек $x^1, x^2 \in X$ выполняется $\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2 \in X$ для всех $\alpha \in [0, 1]$.

Можно дать определение выпуклого множества в эквивалентной форме.

Определение 3. Множество $X \subset R^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками $x^1, x^2 \in X$ оно содержит и весь отрезок, их соединяющий, т.е. $[x^1, x^2] \subseteq X$.

На рис. 6.4 изображены выпуклые множества, а на рис. 6.5 - множества, не обладающие свойством выпуклости.

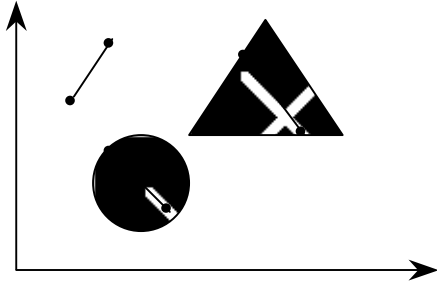


Рис. 6.4.

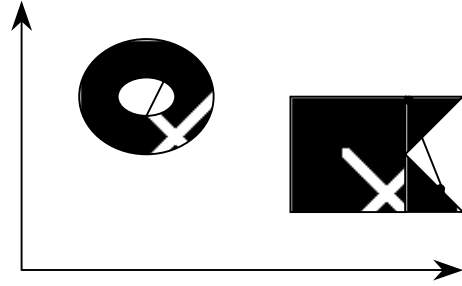


Рис. 6.5.

Определение 4. Будем говорить, что точка x является выпуклой комбинацией точек x^1, \dots, x^m , если найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ такие, что

$$x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_m x^m,$$

$$\text{где } \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, m; \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1.$$

Отметим некоторые простейшие свойства выпуклых множеств.

Лемма 1. Если точки x^1, x^2, \dots, x^m принадлежат выпуклому множеству X , то множество X содержит все их выпуклые комбинации.

Доказательство. Доказательство удобнее провести индукцией по числу точек. Для $m = 2$ утверждение следует из определения выпуклого множества. Пусть это свойство доказано для $m \leq k$. Покажем, что

$$x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_k x^k + \alpha_{k+1} x^{k+1} \in X$$

для любых α_i таких, что $\alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1} = 1$.

Поскольку можно считать, что $\alpha_i > 0$, то $1 - \alpha_{k+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_i > 0$. По пред-

положению индукции $y = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_{k+1}} x^1 + \dots + \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} x^k \in X$, ибо $\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} =$

$= \frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. Но тогда $x = (1 - \alpha_{k+1})y + \alpha_{k+1}x^{k+1} \in X$ по определению

выпуклого множества.

Лемма 2. Пусть I – произвольное множество индексов i , X_i выпукло для каждого $i \in I$. Тогда множество $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ также выпукло.

Доказательство. Если x^1 и x^2 принадлежат X , то $x^1, x^2 \in X_i, i \in I$, и $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \in X_i$ для любого $i \in I$, т. е. $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \in X$, следовательно, X – выпукло.

Определение 5. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subset R^n$, называется выпуклой, если для всех точек $x^1, x^2 \in X$ и любого $\alpha \in [0,1]$ выполняется

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2). \quad (6.16)$$

Если в соотношении (6.16) при любом $\alpha \in (0,1)$ и любых $x^1, x^2 \in X$, таких, что $x^1 \neq x^2$, имеет место строгое неравенство, то $f(x)$ называется строго выпуклой.

Аналогично вводятся понятие вогнутой и строго вогнутой функции $f(x)$ на выпуклом множестве X : если для всех $x^1, x^2 \in X$ и для любого $\alpha \in [0,1]$ выполняется

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \geq \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2), \quad (6.17)$$

то функция $f(x)$ называется вогнутой. Если для всех $x^1, x^2 \in X$, таких, что $x^1 \neq x^2$, для любого $\alpha \in (0,1)$ соотношение (6.17) выполняется как строгое неравенство, то $f(x)$ называется строго вогнутой функцией.

Геометрическая иллюстрация данных определений для двумерного пространства ясна из рис. 6.6 и рис. 6.7: график выпуклой функции (вогнутой функции) $f(x)$ располагается на отрезке $[x^1, x^2]$ не выше (не ниже) секущей, проходящей через точки $(x^1, f(x^1))$ и $(x^2, f(x^2))$.

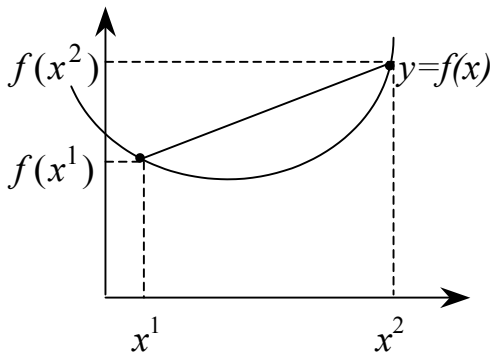


Рис. 6.6.

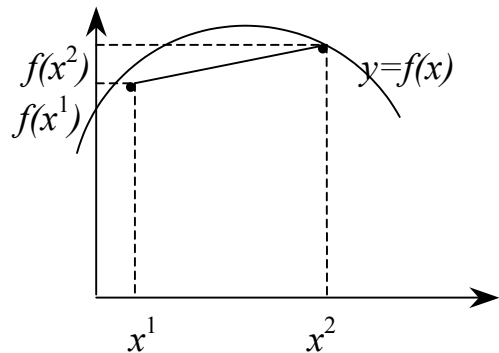


Рис. 6.7.

Пример 6.4. Линейная функция $f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ является как выпуклой, так и вогнутой функцией, но не обладает свойством строгой выпуклости и строгой вогнутости:

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) = c_0 + c_1(\alpha x_1^1 + (1-\alpha)x_1^2) + c_2(\alpha x_2^1 + (1-\alpha)x_2^2) + \dots +$$

$$+ c_n(\alpha x_n^1 + (1-\alpha)x_n^2) = \alpha(c_0 + c_1x_1^1 + c_2x_2^1 + \dots + c_nx_n^1) + (1-\alpha)(c_0 + c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \dots + c_nx_n^2) = \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2).$$

Пример 6.5. Квадратичная форма $f(x) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \dots + a_{n1}x_nx_1 + \dots + a_{nn}x_n^2 = x^T Ax$, где A - симметричная матрица, является выпуклой функцией, если матрица A представляет положительно полуопределенную матрицу, т.е. $y^T Ay \geq 0$ для любого $y \in R^n$, и является вогнутой функцией, если матрица A представляет отрицательно полуопределенную матрицу, т.е. $y^T Ay \leq 0$ для любого $y \in R^n$:

$$\begin{aligned} f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) &= [\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2]^T A[\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2] = \alpha^2 (x^1)^T Ax^1 + \\ &+ 2\alpha(1-\alpha)(x^1)^T Ax^2 + (1-\alpha)^2 (x^2)^T Ax^2 = \alpha(x^1)^T Ax^1 + (1-\alpha)(x^2)^T Ax^2 + \\ &+ [(1-\alpha)^2 - (1-\alpha)](x^2)^T Ax^2 + (\alpha^2 - \alpha)(x^1)^T Ax^1 + 2\alpha(1-\alpha)(x^1)^T Ax^2 = \alpha f(x^1) + \\ &+ (1-\alpha)f(x^2) + 2\alpha(1-\alpha)(x^1)^T Ax^2 - \alpha(1-\alpha)(x^1)^T Ax^1 - \alpha(1-\alpha)(x^2)^T Ax^2 = \\ &= \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2) - \alpha(1-\alpha)(x^1 - x^2)^T A(x^1 - x^2). \end{aligned}$$

Отсюда, если A - положительно полуопределенная матрица, то

$$(x^1 - x^2)^T A(x^1 - x^2) \geq 0,$$

и, следовательно, последнее соотношение переписывается в виде следующего неравенства:

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2),$$

т. е. $f(x)$ будет представлять выпуклую функцию, и, наоборот, если A - отрицательно полуопределенная матрица, то

$$(x^1 - x^2)^T A(x^1 - x^2) \leq 0,$$

и, следовательно, $f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \geq \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2)$, т. е. в этом случае $f(x)$ уже является вогнутой функцией.

Пример 6.6. Рассмотрим производственную функцию Кобба-Дугласа $f(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, где $A > 0, \alpha \in (0, 1)$; K - объем основных фондов, L - затраты труда, $f(K, L)$ - объем выпущенной продукции. Здесь $f(K, L)$ является вогнутой функцией во всей области определения $X = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Это означает, что для любых двух наборов ресурсов (K_1, L_1) и $(K_2, L_2) \in X$ и произвольного $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

$$A(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2)^\alpha (\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2)^{1-\alpha} \geq \alpha AK_1^\alpha L_1^{1-\alpha} + (1-\alpha)AK_2^\alpha L_2^{1-\alpha}. \quad (6.18)$$

В частном случае $\alpha = 1/2$ легко установить справедливость неравенства $[(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2)(\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2)]^{1/2} \geq \alpha(K_1 L_1)^{1/2} + (1-\alpha)(K_2 L_2)^{1/2}$.

Заметим, что если наборы ресурсов (K_1, L_1) и (K_2, L_2) пропорциональны, т. е. $K_1 = \beta K_2, L_1 = \beta L_2$, где $\beta > 0$, то (6.18) уже реализуется как равенство.

Условие вогнутости часто накладывают на производственную функцию. Этому условию обычно придают следующую экономическую интерпретацию: если затратить $\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$ – «смесь» любых двух наборов ресурсов x^1 и x^2 , то в результате выпуск будет не меньше, чем соответствующая «смесь» выпусков $\alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2)$.

Приведем некоторые очевидные свойства выпуклых функций.

Можно доказать, что если функции $f_i(x), i = 1, \dots, k$, являются выпуклыми на некотором выпуклом множестве X , то выпуклой на X будет и неотрицательная линейная комбинация этих функций, т. е. функция $f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x)$ при $\alpha_i \geq 0$; в частности, выпуклой будет и сумма выпуклых функций.

Теорема 1. Если $g(x)$ – выпуклая функция при всех $x \geq 0$, то будет выпуклым и множество решений системы $g(x) \leq b, x \geq 0$.

Доказательство. Проверим, что вместе с решениями x^1 и x^2 системы $g(x) \leq b, x \geq 0$, множеству решений этой системы принадлежит и любой вектор $x^0 = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$, где $\alpha \in [0,1]$. Ясно, что $x^0 \geq 0$. Остается показать, что $g(x^0) \leq b$. По свойству выпуклости функции $g(x): g(x^0) = g(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \leq \alpha g(x^1) + (1-\alpha)g(x^2)$. (6.19)

Но $g(x^1) \leq b$ и $g(x^2) \leq b$, поэтому для любого $\alpha \in [0,1]$ справедливы неравенства $\alpha g(x^1) \leq \alpha b$ и $(1-\alpha)g(x^2) \leq (1-\alpha)b$. Складывая эти неравенства, получаем, что $\alpha g(x^1) + (1-\alpha)g(x^2) \leq \alpha b + (1-\alpha)b = b$. С учетом соотношения (6.19) приходим к неравенству $g(x^0) \leq b$.

Аналогично доказывается утверждение, что если $g(x)$ – вогнутая функция при всех $x \geq 0$, то будет выпуклым и множество решений системы $g(x) \geq b, x \geq 0$.

Данные утверждения можно обобщить: множество решений системы неравенств $x \geq 0, g_i(x) \leq b_i, i = 1, \dots, m$ выпукло, если $g_i(x)$ – выпуклые функции для $x \geq 0$, и множество решений системы неравенств $x \geq 0, g_i(x) \geq b_i, i = 1, \dots, m$, выпукло, если $g_i(x)$ – вогнутые функции для $x \geq 0$.

Доказывается, что выпуклая функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X , непрерывна в любой внутренней точке этого множества.

Теорема 2. Если выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема во внутренних точках выпуклого множества X , то для любых внутренних точек $x^1, x^2 \in X$ имеет место неравенство:

$$f(x^2) - f(x^1) \geq f'(x^1) \cdot (x^2 - x^1), \quad (6.20)$$

и, наоборот, если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке выпуклого множества X и для любых внутренних точек $x^1, x^2 \in X$ имеет место неравенство (6.20), то $f(x)$ является выпуклой функцией. Для вогнутости $f(x)$ необходимо и достаточно выполнение неравенства: $f(x^2) - f(x^1) \leq f'(x^1) \cdot (x^2 - x^1)$ (символ « \cdot » - скалярное произведение).

Доказательство. Пусть $f(x)$ выпукла, тогда для любых внутренних точек x^2, x^1 выпуклого множества X и любого $\alpha \in (0,1)$ справедливо неравенство $f(x^1 + \alpha(x^2 - x^1)) \leq f(x^1) + \alpha[f(x^2) - f(x^1)]$. Отсюда

$$\frac{f(x^1 + \alpha(x^2 - x^1)) - f(x^1)}{\alpha} \leq f(x^2) - f(x^1).$$

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, получим слева производную по направлению $S = x^2 - x^1$, поэтому $f'(x^1) \cdot (x^2 - x^1) \leq f(x^2) - f(x^1)$, что и требовалось доказать.

Докажем обратное утверждение. Пусть $x^1, x^2 \in X, \alpha \in [0,1]$ и $x = (1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2$. Так как $x \in X$, то справедливы неравенства:

$$f'(x) \cdot (x^1 - x) + f(x) \leq f(x^1),$$

$$f'(x) \cdot (x^2 - x) + f(x) \leq f(x^2).$$

Умножая первое неравенство на $(1 - \alpha)$, второе - на α , и складывая их, выводим

$$f(x) = f((1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2) \leq (1 - \alpha)f(x^1) + \alpha f(x^2),$$

т. е. $f(x)$ является выпуклой функцией.

Теорема 3. Выпуклая функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X , достигает своего глобального минимума в каждой точке x^0 , в которой градиент функции обращается в нуль; вогнутая же функция в точке x^0 будет достигать своего глобального максимума.

Доказательство. Итак, в точке x^0 градиент $f'(x^0) = 0$. Покажем, что в этой точке функция $f(x)$ имеет глобальный минимум, т. е. что для любой точки $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x^0)$. Известно, что для выпуклой функции $f(x)$ на множестве X справедливо неравенство (6.20), где x^1 и x^2 - любые внутренние точки множества X . Полагая в не-

равенстве (6.20) $x^1 = x^0$ и $x^2 = x$, получаем $f(x) - f(x^0) \geq f'(x^0) \cdot (x - x^0)$; но так как $f'(x^0) = 0$, то выводим, что $f(x) \geq f(x^0)$. Таким образом, теорема 3 доказана.

Теорема 4. Всякий локальный минимум (максимум) выпуклой (вогнутой) функции $f(x)$, определенной на выпуклом множестве X , совпадает с ее глобальным минимумом (максимумом) на этом множестве.

Доказательство. Пусть x^* – точка локального минимума выпуклой функции $f(x)$ на выпуклом множестве X , тогда существует $\varepsilon > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих $|x - x^*| < \varepsilon$, будет выполняться неравенство: $f(x^*) \leq f(x)$. Предположим, что существует $y^* \in X$, для которого $f(y^*) < f(x^*)$. Выберем такое $\alpha, \alpha \in (0,1)$, чтобы $x = (1 - \alpha)x^* + \alpha y^* \in X$ удовлетворяла неравенству $|x - x^*| < \varepsilon$. Тогда

$$f((1 - \alpha)x^* + \alpha y^*) \leq (1 - \alpha)f(x^*) + \alpha f(y^*) < (1 - \alpha)f(x^*) + \alpha f(x^*) = f(x^*),$$

т. е. получили противоречие, откуда следует, что x^* – точка глобального минимума. Аналогично для вогнутой функции $f(x)$ доказывается, что всякий ее локальный максимум одновременно является и глобальным максимумом на выпуклом множестве X .

Поскольку в задаче выпуклого программирования все локальные минимумы (максимумы) являются глобальными, поэтому для ее решения достаточно найти какую-либо точку локального минимума (максимума). Для решения задач выпуклого программирования разработаны достаточно эффективные методы, основывающиеся на теореме Куна-Таккера.

6.3.2. Теорема Куна-Таккера

Определение 6. Говорят, что множество $X = \{x \in R^n : g_i(x) \leq b_i, i = 1, \dots, m; x \geq 0\}$ удовлетворяет условию Слейтера, если существует такая точка $\bar{x} \in X$, что $g_i(\bar{x}) < b_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Определение 7. Функцией Лагранжа задачи выпуклого программирования (6.13)-(6.15) называется функция

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - g_i(x)), \quad (6.21)$$

где $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, – множители Лагранжа.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования (6.13)-(6.15) при условии, что определяется минимум функции $f(x)$, т. е.

$$f(x) \rightarrow \min \quad (6.22)$$

при ограничениях $g_i(x) \leq b_i, i = 1, \dots, m; x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$.

Определение 8. Точка (x^*, λ^*) называется седловой точкой функции Лагранжа (6.21) для задачи (6.22), если

$$F(x^*, \lambda) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x, \lambda^*). \quad (6.23)$$

Замечаем, что в теории выпуклого программирования центральное место занимает теорема Куна-Таккера, устанавливающая связь между оптимальным решением задачи (6.22) и седловой точкой функции Лагранжа (6.21). Сформулируем эту теорему.

Теорема 5. Пусть в задаче выпуклого программирования (6.22) допустимое множество X удовлетворяет условию Слейтера. Тогда для того, чтобы x^* являлась оптимальным решением задачи (6.22), необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$, где $\lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, m$, чтобы (x^*, λ^*) была седловой точкой функции Лагранжа.

Доказательство. Первоначально эта теорема была доказана только для случая дифференцируемых функций $f(x)$ и $g_i(x)$. Обобщение на случай выпуклых функций принадлежит Слейтеру. Если предположить, что функции $f(x)$ и $g_i(x)$ непрерывно дифференцируемы, то теорема Куна-Таккера может быть дополнена аналитическими выражениями, определяющими необходимые и достаточные условия того, чтобы точка (x^*, λ^*) являлась седловой точкой функции Лагранжа, т.е. x^* – оптимальным решением задачи выпуклого программирования. Эти выражения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} \geq 0, j = 1, \dots, n \quad (6.24)$$

$$x_j^* \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n \quad (6.25)$$

$$x_j^* \geq 0, j = 1, \dots, n \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} \leq 0, i = 1, \dots, m \quad (6.27)$$

$$\lambda_i^* \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0, i = 1, \dots, m \quad (6.28)$$

$$\lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, m. \quad (6.29)$$

Если требуется найти максимум функции $f(x)$, то неравенства (6.23) заменяются на неравенства:

$$F(x, \lambda^*) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x^*, \lambda), \quad (6.30)$$

а условия существования седловой точки функции Лагранжа принимают вид:

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (6.31)$$

$$x_j^* \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n \quad (6.32)$$

$$x_j^* \geq 0, j = 1, \dots, n \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (6.34)$$

$$\lambda_i^* \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0, i = 1, \dots, m \quad (6.35)$$

$$\lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, m. \quad (6.36)$$

Покажем, например, что если выполняются условия (6.24)-(6.26), то справедливы и неравенства (6.23), где $x^* \geq 0, \lambda^* \geq 0$. При фиксированном λ^* функция Лагранжа $F(x, \lambda^*)$ является выпуклой по x , поэтому в соответствии с соотношением (6.20) будет иметь место неравенство

$$F(x, \lambda^*) - F(x^*, \lambda^*) \geq \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x} \cdot (x - x^*).$$

Отсюда с учетом равенства (6.32) получаем, что $F(x, \lambda^*) \geq F(x^*, \lambda^*) + x \cdot \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x}$. Поскольку $x \geq 0$, то опуская неотрицательное второе слагаемое в правой части последнего неравенства, получаем лишь усиленное неравенство: $F(x, \lambda^*) \geq F(x^*, \lambda^*)$. Таким образом, доказана выполнимость правого неравенства в соотношении (6.23). Аналогично доказывается выполнимость для $\lambda \geq 0$ и левого неравенства в соотношении (6.23). Также нетрудно установить, что из условий (6.23), где $x^* \geq 0, \lambda^* \geq 0$, будут следовать и условия (6.24)-(6.29).

6.4. Задача квадратичного программирования и ее решение

К классу задач нелинейного программирования, изученному наиболее основательно, относятся задачи с линейными ограничениями и нелинейной целевой функцией. Но даже для таких задач вычислительные методы разработаны лишь в тех случаях, когда целевая функция $f(x)$ имеет определенные свойства, например, записана в виде суммы линейной и квадратичной форм. Такие нелинейные задачи, т.е. задачи вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j \rightarrow \min (\max) \quad (6.37)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m, \quad (6.38)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \quad (6.39)$$

называются задачами квадратичного программирования. Чтобы быть уверенным, что оптимальное решение в этом случае может быть найдено, на матрицу $D = (d_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}$ квадратичной формы $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j$ следует

наложить некоторые ограничения. Если отыскивается минимальное значение функции $f(x)$, то матрица D предполагается симметричной и неотрицательно определенной; в этом случае функция $f(x)$ будет выпуклой. Если же отыскивается максимальное значение функции $f(x)$, то матрица D должна представлять симметричную и неположительно определенную матрицу; здесь функция $f(x)$ будет уже вогнутой. Так как допустимое множество X , определяемое ограничениями вида (6.38)-(6.39), является выпуклым, следовательно, задача квадратичного программирования (6.37)-(6.39) относится к классу задач выпуклого программирования. Замечаем, что эта задача удовлетворяет всем приведенным выше требованиям, позволяющим записать необходимые и достаточные условия для седловой точки (x^*, λ^*) функции Лагранжа. Поэтому, применяя для решения задачи квадратичного программирования теорему Куна-Таккера, сведем эту задачу к нахождению допустимой точки некоторой задачи линейного программирования.

Итак, пусть требуется найти минимальное значение целевой функции $f(x)$ вида (6.37) при условиях (6.38)-(6.39). Переходя к решению такой задачи, составим локальные условия Куна-Таккера (6.24)-(6.29), являющиеся необходимыми и достаточными условиями оптимальности решения x^* . Функция Лагранжа в данном случае будет иметь вид:

$$F(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right).$$

Найдем частные производные этой функции:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = c_j + 2 \sum_{k=1}^n d_{kj} x_k + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij}, j = 1, \dots, n, \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i, i = 1, \dots, m. \quad (6.41)$$

Обозначим в равенствах (6.40)-(6.41)

$$c_j + 2 \sum_{k=1}^n d_{kj} x_k + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} = v_j, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i = -w_i, i = 1, \dots, m.$$

С учетом этих обозначений условия (6.24)-(6.29), записанные в координатной форме, примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} c_j + 2 \sum_{k=1}^n d_{kj} x_k + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} = v_j \geq 0 \\ x_j v_j = 0, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i = -w_i \leq 0 \\ \lambda_i (-w_i) = 0, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

Объединяя соотношения (6.42)-(6.43), окончательно выводим

$$2 \sum_{k=1}^n d_{kj} x_k + \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i - v_j = -c_j, j = 1, \dots, n; \quad (6.44)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + w_i = b_i, i = 1, \dots, m; \quad (6.45)$$

$$x_j \geq 0, v_j \geq 0, j = 1, \dots, n; w_i \geq 0, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m; \quad (6.46)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j v_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i = 0. \quad (6.47)$$

Равенства (6.44)-(6.45) образуют систему $n + m$ линейных уравнений с $2(n + m)$ неотрицательными неизвестными $x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, w_1, \dots, w_m$. Итак, в соответствии с локальными условиями Куна-Таккера решение x^* является оптимальным решением задачи квадратичного программирования (6.37)-(6.39) тогда и только тогда, когда совместно с решением $v = (v_1, \dots, v_n)$ существуют решения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и $w = (w_1, \dots, w_m)$ такие, что $u = (x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, w_1, \dots, w_m)$ является решением системы (6.44)-(6.46) при условии выполнения равенства (6.47). Таким образом, применение теоремы Куна-Таккера для решения задачи квадратичного программирования позволяет нелинейную задачу сводить к решению системы линейных алгебраических уравнений при соблюдении дополнительного комбинаторного условия (6.47). Это условие требует, чтобы из каждых двух ограниченных по знаку переменных x_j и v_j (соответственно λ_i и w_i) хотя бы одна равнялась нулю. Иначе говоря, не все решения u системы (6.44)-(6.46) удовлетворяют условию (6.47), а только те, в кото-

рых по крайней мере $n + m$ компонент равны нулю, т.е. столько, сколько уравнений в системе. Но таким свойством обладают базисные допустимые решения системы. Значит искать решение, которое удовлетворяло бы условию (6.47), имеет смысл только среди базисных допустимых решений. Как известно из предыдущих глав, с базисными допустимыми решениями оперирует симплекс-метод или его модификации, например, метод искусственного базиса. Отсюда будем определять неотрицательное решение u системы линейных уравнений (6.44)-(6.45), удовлетворяющее условию (6.47), с помощью метода искусственного базиса, примененного для нахождения минимального значения искусственной целевой функции $\bar{F}(z) = \sum_l z_l$ при условиях (6.44), (6.45), (6.47) с учетом

(6.46). Здесь z_l – искусственные базисные переменные, введенные в те уравнения (6.44)-(6.45), которые не содержат базисных переменных.

После конечного числа шагов, проведенных с помощью метода искусственного базиса, либо установим неразрешимость, либо получим оптимальное решение задачи квадратичного программирования.

Таким образом, процесс отыскания решения задачи квадратичного программирования (6.37)-(6.39) включает следующие этапы:

- 1) составляют функцию Лагранжа;
- 2) записывают в виде выражений (6.44)-(6.47) необходимые и достаточные условия существования седловой точки для функции Лагранжа;
- 3) используя метод искусственного базиса, либо устанавливают отсутствие седловой точки для функции Лагранжа, либо находят ее координаты;
- 4) записывают оптимальное решение исходной задачи и вычисляют на нем значение целевой функции.

Пример 6.7. Предприятие выпускает некоторую продукцию, используя для этого два технологических способа производства. При первом технологическом способе изготовление x_1 ед. продукции требует затрат, равных $10 + 6x_1 + x_1^2$ у.д.е., а при втором технологическом способе затраты на изготовление x_2 ед. продукции составляют $15 + 4x_2 + 2x_2^2$ у.д.е. Расход ресурсов, используемых на выпуск 1 ед. продукции при различных способах производства, и запасы этих ресурсов представлены в следующей таблице:

Способ производства	Расход ресурса на выпуск 1 ед. продукции			
	сырье	станки	раб. сила	энергия
1	3	2	5	2
2	2	4	6	1
Запасы ресурсов	36	40	90	20

Необходимо спланировать работу данного предприятия из условия получения максимальной прибыли, если известно, что стоимость 1 ед. продукции, изготовленной по первому технологическому способу, равна 46 у.д.е., а по второму технологическому способу – 32 у.д.е.

Решение. Математическая модель данной экономической задачи будет представлять следующую задачу квадратичного программирования:

$$f(x) = 40x_1 - x_1^2 + 28x_2 - 2x_2^2 - 25 \rightarrow \max$$

на множестве ограничений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 36, & 2x_1 + 4x_2 \leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 90, & 2x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ является вогнутой, а система ограничений задачи включает только лишь линейные неравенства. Следовательно, можно воспользоваться теоремой Куна-Таккера.

В начале составим функцию Лагранжа:

$$F(x, \lambda) = 40x_1 - x_1^2 + 28x_2 - 2x_2^2 - 25 + \lambda_1(36 - 3x_1 - 2x_2) + \lambda_2(40 - 2x_1 - 4x_2) + \lambda_3(90 - 5x_1 - 6x_2) + \lambda_4(20 - 2x_1 - x_2);$$

затем найдем частные производные этой функции:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 40 - 2x_1 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 5\lambda_3 - 2\lambda_4 = -v_1 \leq 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 28 - 4x_2 - 2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 6\lambda_3 - \lambda_4 = -v_2 \leq 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 36 - 3x_1 - 2x_2 = w_1 \geq 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 40 - 2x_1 - 4x_2 = w_2 \geq 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = 90 - 5x_1 - 6x_2 = w_3 \geq 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_4} = 20 - 2x_1 - x_2 = w_4 \geq 0. \end{cases}$$

Тогда необходимые и достаточные условия существования седловой точки функции Лагранжа (6.31)-(6.36) примут следующий вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 - v_1 = 40, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 + \lambda_4 - v_2 = 28, \\ 3x_1 + 2x_2 + w_1 = 36, \\ 2x_1 + 4x_2 + w_2 = 40, \\ 5x_1 + 6x_2 + w_3 = 90, \\ 2x_1 + x_2 + w_4 = 20, \\ x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0, \\ x_1v_1 + x_2v_2 + \lambda_1w_1 + \lambda_2w_2 + \lambda_3w_3 + \lambda_4w_4 = 0. \end{cases},$$

Для отыскания базисного допустимого решения полученной системы линейных уравнений воспользуемся методом искусственного базиса. В первое и второе уравнения этой системы, не содержащие базисных переменных, добавим искусственные базисные переменные $z_1 \geq 0$ и $z_2 \geq 0$ соответственно и рассмотрим задачу линейного программирования, состоящую в определении максимального значения искусственной целевой функции

$$\bar{F}(z) = -z_1 - z_2 \quad (6.48)$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 - v_1 + z_1 = 40, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 + \lambda_4 - v_2 + z_2 = 28, \\ 3x_1 + 2x_2 + w_1 = 36, \\ 2x_1 + 4x_2 + w_2 = 40, \\ 5x_1 + 6x_2 + w_3 = 90, \\ 2x_1 + x_2 + w_4 = 20, \\ x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4, z_1, z_2 \geq 0. \end{cases} \quad (6.49)$$

Будем решать задачу (6.48)-(6.49) с помощью симплекс-метода; учитывая, что $x_1v_1 + x_2v_2 + \lambda_1w_1 + \lambda_2w_2 + \lambda_3w_3 + \lambda_4w_4 = 0$, будем выбирать в качестве переменной, вводимой в базис, такую, чтобы одновременно в базисе не оказались такие пары переменных, как x_1 и v_1 , x_2 и v_2 , λ_1 и w_1 , λ_3 и w_3 , λ_4 и w_4 :

Ба- зис	C_b	Зн-я баз. пер.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	Θ_i	
			x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	v_1	v_2	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2		
z_1	-1	40	2	0	3	2	5	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	-	$\rightarrow \min$
z_2	-1	28	0	④	2	4	6	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	7	
w_1	0	36	3	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	18	
w_2	0	40	2	4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	10	
w_3	0	90	5	6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	15	

w_4	0	20	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	20	
$\bar{F}(z)$		-58	-2	-4	-5	-6	-11	-3	1	1	0	0	0	0	0	0		
z_1	-1	40	2	0	3	2	5	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	20	$\rightarrow \min$
x_2	0	7	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	-	
w_1	0	22	3	0	-1	-2	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{22}{3}$	
w_2	0	12	②	0	-2	-4	-6	-1	0	1	0	1	0	0	0	-1	6	
w_3	0	48	5	0	-3	-6	-9	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{48}{5}$	
w_4	0	13	2	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{13}{2}$	
$\bar{F}(z)$		-40	-2	0	-3	-2	-5	-2	1	0	0	0	0	0	0	1		
z_1	-1	28	0	0	5	6	11	3	-1	-1	0	-1	0	0	1	1	$\frac{14}{3}$	$\rightarrow \min$
x_2	0	7	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	7	
w_1	0	4	0	0	2	4	6	1	0	-1	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	1	1	
x_1	0	6	1	0	-1	-2	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	-	
w_3	0	18	0	0	2	4	6	1	0	-1	0	$-\frac{5}{2}$	1	0	0	1	$\frac{9}{2}$	
w_4	0	1	0	0	$\frac{3}{2}$	③	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	-1	0	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	
$\bar{F}(z)$		-28	0	0	-5	-6	-11	-3	1	1	0	1	0	0	0	0		
z_1	-1	26	0	0	2	0	2	$\frac{3}{2}$	-1	0	0	1	0	-2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{52}{3}$	$\rightarrow \min$
x_2	0	$\frac{20}{3}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	-	
w_1	0	$\frac{8}{3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	-	
x_1	0	$\frac{20}{3}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	0	0	-	
w_3	0	$\frac{50}{3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{7}{6}$	1	$-\frac{4}{3}$	0	0	-	
λ_2	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	
$\bar{F}(z)$		-26	0	0	-2	0	-2	$-\frac{3}{2}$	1	0	0	-1	0	2	0	$\frac{1}{2}$		
z_1	-1	24	0	0	-1	-6	-7	0	-1	$\frac{3}{2}$	0	③	0	-4	1	-2	8	$\rightarrow \min$
x_2	0	$\frac{20}{3}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	20	
w_1	0	$\frac{8}{3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	-	
x_1	0	$\frac{20}{3}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	0	0	-	
w_3	0	$\frac{50}{3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{7}{6}$	1	$-\frac{4}{3}$	0	0	-	
λ_4	0	$\frac{4}{3}$	0	0	2	4	6	1	0	-1	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	-	
$\bar{F}(z)$		-24	0	0	1	6	7	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	-3	0	4	0	3		
w_2	0	8	0	0	$-\frac{1}{3}$	-2	$-\frac{7}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$		
x_2	0	4	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$		
w_1	0	4	0	1	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{18}$	0	$-\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	1	0	0	$-\frac{14}{9}$	$\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{9}$		
x_1	0	8	1	0	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{18}$	0	$-\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{9}$		
w_3	0	26	0	0	$-\frac{7}{18}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{49}{18}$	0	$-\frac{7}{18}$	$\frac{7}{12}$	0	0	1	$-\frac{26}{9}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{7}{9}$		
λ_4	0	12	0	0	$\frac{14}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{26}{9}$	1	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$		
$\bar{F}(z)$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1		

Таким образом, найдено базисное допустимое решение системы уравнений (6.49): $x_1^* = 8$; $x_2^* = 4$; $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = 0$; $\lambda_4^* = 12$; $v_1 = v_2 = 0$; $w_1 = 4$; $w_2 = 8$; $w_3 = 26$; $w_4 = 0$. Так как $x_1^* v_1 = 0$, $x_2^* v_2 = 0$, $\lambda_1^* w_1 = 0$, $\lambda_2^* w_2 = 0$,

$\lambda_3^* w_3 = 0$, $\lambda_4^* w_4 = 0$, то $(x^*, \lambda^*) = (8; 4; 0; 0; 0; 12)$ является седловой точкой функции Лагранжа. Следовательно, $x^* = (8; 4)$ - оптимальное решение рассматриваемой задачи. Отсюда, если предприятие будет выпускать по первому технологическому способу 8 ед. продукции, а по второму технологическому способу - 4 ед. продукции, то может достичь максимальной прибыли, равной $f^* = f(x^*) = 311$ у. д. е.

6.5. Решение задач нелинейного программирования с сепарабельными функциями

Определение 9. Функция $f(x), x \in R^n$, называется сепарабельной, если для нее справедливо представление: $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$. Будем рассматривать задачу нелинейного программирования, в которой целевая функция и функции в системе ограничений являются сепарабельными, т.е. задачу вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \rightarrow \min (\max) \quad (6.50)$$

на множестве ограничений

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}(x_j) \leq b_i, i = 1, \dots, m \quad (6.51)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \quad (6.52)$$

Приближенное решение такой задачи можно найти с помощью метода кусочно-линейной аппроксимации: для всех $f_j(x_j)$ и $g_{ij}(x_j)$ строятся их кусочно-линейные аппроксимации, и нелинейная задача заменяется приближенной задачей линейного программирования, которая решается симплекс-методом. При этом находится ее локальный экстремум, который будет приближенным локальным экстремумом данной задачи. Если задача (6.50)-(6.52) является задачей выпуклого программирования, то найденный приближенный локальный экстремум будет одновременно и глобальным. Поэтому рассмотрим использование метода кусочно-линейной аппроксимации для решения задачи выпуклого программирования, т. е. задачи вида (6.50)-(6.52), в которой $f(x)$ представляет выпуклую (вогнутую) функцию, а допустимое множество X , описываемое неравенствами (6.51)-(6.52), является выпуклым множеством.

Замену нелинейной функции ее кусочно-линейной аппроксимацией рассмотрим на примере непрерывной функции $f(x)$ одной переменной, определенной на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$. Разделим отрезок $[\alpha_1, \alpha_2]$ точками $x_0 = \alpha_1, x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, x_r = \alpha_2$ и вычислим соответствующие значения

функции $f(x)$ в точках деления $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_r)$. Точки $(x_k, f(x_k))$ на кривой $f(x)$ соединим отрезками прямых линий (см. рис. 6.8).

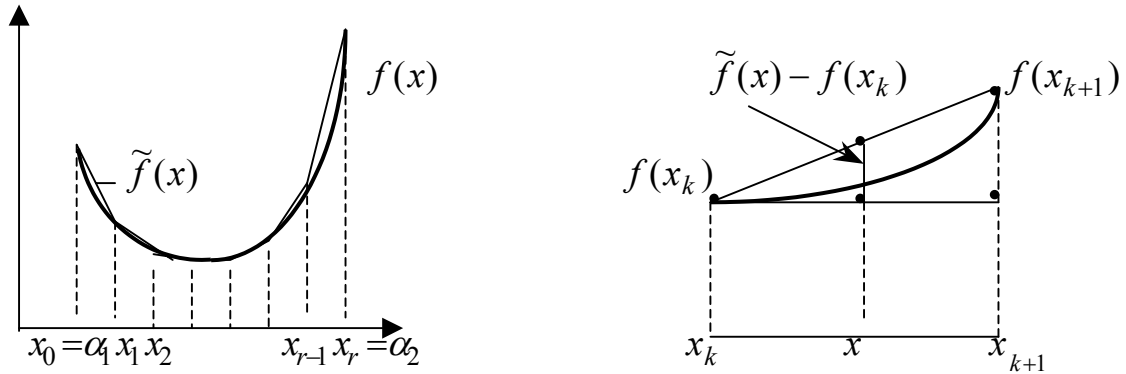


Рис. 6.8.

Мы получим таким образом кусочно-линейную аппроксимацию, т.е. функцию $\tilde{f}(x)$, которая приближает данную функцию $f(x)$. При измельчении частичных отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ приближение уточняется.

Как уже отмечалось в § 6.3 данной главы, выпуклая (вогнутая) функция, определенная на выпуклом множестве, непрерывна в любой внутренней точке этого множества и, кроме того, сумма выпуклых (вогнутых) функций представляет выпуклую (вогнутую) функцию, а множество решений системы неравенств $x \geq 0, g_i(x) \leq b_i, i = 1, \dots, m$, выпукло, если $g_i(x)$ – выпуклые функции для всех $x \geq 0$. Отсюда все функции $f_j(x_j)$ и $g_{ij}(x_j)$ в задаче выпуклого программирования (6.50)–(6.52) будут непрерывными.

Разобьем отрезок $[0, \alpha_j]$ (α_j – максимальное значение переменной x_j), из которого переменная x_j может принимать значения, на r_j частичных отрезков точками x_{kj} ; при этом $x_{0j} = 0; x_{r_j j} = \alpha_j$. Используя описанный выше способ, построим кусочно-линейные аппроксимации $\tilde{f}_j(x_j)$ и $\tilde{g}_{ij}(x_j)$ для всех функций $f_j(x_j)$ и $g_{ij}(x_j)$, и перейдем от задачи (6.50)–(6.52) к приближенной задаче:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j(x_j) \rightarrow \min (\max) \quad (6.53)$$

на множестве ограничений

$$\sum_{j=1}^n \tilde{g}_{ij}(x_j) \leq b_i, i = 1, \dots, m; \quad (6.54)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \quad (6.55)$$

Теперь определим локальный экстремум полученной приближенной задачи (6.53)–(6.55). С этой целью прежде всего найдем аналитический

вид каждой аппроксимирующей функции $\tilde{f}_j(x_j), \tilde{g}_{ij}(x_j)$ на отрезке $[x_{kj}, x_{k+1j}]$.

Из рис. 6.8 видно, что

$$\tilde{f}_j(x_j) = f_j(x_{kj}) + \frac{f_j(x_{k+1j}) - f_j(x_{kj})}{x_{k+1j} - x_{kj}}(x_j - x_{kj}), \quad (6.56)$$

$$\tilde{g}_{ij}(x_j) = g_{ij}(x_{kj}) + \frac{g_{ij}(x_{k+1j}) - g_{ij}(x_{kj})}{x_{k+1j} - x_{kj}}(x_j - x_{kj}), \quad (6.57)$$

где x_j – произвольная точка отрезка $[x_{kj}, x_{k+1j}]$. Однако каждую фиксированную точку x можно представить в виде: $x_j = (1 - \alpha)x_{kj} + \alpha x_{k+1j}$, где $\alpha \in [0, 1]$, или $x_j - x_{kj} = \alpha(x_{k+1j} - x_{kj})$. Подставляя в (6.56)-(6.57) вместо $x_j - x_{kj}$ выражение $\alpha(x_{k+1j} - x_{kj})$, получаем

$$\tilde{f}_j(x_j) = f_j(x_{kj}) + \alpha[f_j(x_{k+1j}) - f_j(x_{kj})] = (1 - \alpha)f_j(x_{kj}) + \alpha f_j(x_{k+1j}), \quad (6.58)$$

$$\tilde{g}_{ij}(x_j) = (1 - \alpha)g_{ij}(x_{kj}) + \alpha g_{ij}(x_{k+1j}). \quad (6.59)$$

Обозначив в равенствах (6.58)-(6.59) $1 - \alpha = \alpha_{kj}$, $\alpha = \alpha_{k+1j}$, будем иметь, что на отрезке $[x_{kj}, x_{k+1j}]$

$$\tilde{f}_j(x_j) = \alpha_{kj} f_j(x_{kj}) + \alpha_{k+1j} f_j(x_{k+1j}),$$

$$\tilde{g}_{ij}(x_j) = \alpha_{kj} g_{ij}(x_{kj}) + \alpha_{k+1j} g_{ij}(x_{k+1j}),$$

где $\alpha_k \geq 0, \alpha_{k+1} \geq 0, \alpha_k + \alpha_{k+1} = 1, x_j = \alpha_k x_{kj} + \alpha_{k+1} x_{k+1j}$. Обобщив полученные соотношения так, чтобы с их помощью можно было определить любую точку $x_j \in [0, \alpha_j]$ и любые соответствующие функции $\tilde{f}_j(x_j)$ и $\tilde{g}_{ij}(x_j)$, получаем

$$\tilde{f}_j(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \alpha_{kj} f_j(x_{kj}), \quad (6.60)$$

$$\tilde{g}_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \alpha_{kj} g_{ij}(x_{kj}), \quad (6.61)$$

$$\text{где } x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \alpha_{kj} x_{kj}, \alpha_{kj} \geq 0, \sum_{k=0}^{r_j} \alpha_{kj} = 1 \text{ при всех } k, j; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n, \quad (6.62)$$

причем для данного j не более двух соседних по индексу k значений α_{kj} могут быть положительными, ибо только в этом случае, точки, определяемые выражениями (6.62), (6.60) и (6.62), (6.61), будут лежать на аппроксимирующей ломаной. Подчеркнем, что при построении функций $\tilde{f}_j(x_j)$ и $\tilde{g}_{ij}(x_j)$ используется одно и то же разбиение отрезка $[0, \alpha_j]$.

При этом точки x_{kj} выбираются так, чтобы обеспечить нужную точность аппроксимации всех функций $f_j(x_j)$ и $g_{ij}(x_j)$.

Подставляя выражения (6.60)-(6.62) в соотношения (6.53)-(6.55), получаем следующую приближенную задачу линейного программирования:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{r_j} \alpha_{kj} f_j(x_{kj}) \rightarrow \min (\max) \quad (6.63)$$

на множестве ограничений

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{r_j} \alpha_{kj} g_{ij}(x_{kj}) \leq b_i, i = 1, \dots, m; \quad (6.64)$$

$$\sum_{k=0}^{r_j} \alpha_{kj} = 1, j = 1, \dots, n; \alpha_{kj} \geq 0, k = 0, \dots, r_j, j = 1, \dots, n. \quad (6.65)$$

Заметим, что в соотношениях (6.63)-(6.64) $f_j(x_{kj})$ и $g_{ij}(x_{kj})$ – фиксированные числа, поэтому в полученной приближенной задаче вместо переменных x_j используются переменные α_{kj} . Решая задачу линейного программирования (6.63)-(6.65) с помощью симплекс-метода при дополнительном условии, что в базис могут одновременно входить при каждом j не более 2-х соседних по индексу k переменных α_{kj} , найдем α_{kj}^* , а затем по формуле $x_j^* = \sum_{k=0}^{r_j} \alpha_{kj}^* x_{kj}$ определим значения координат точки экстремума приближенной задачи. При этом точность полученного решения будет зависеть от выбранного шага разбиения промежутка $[0, \alpha_j]$. Чем меньше шаг, тем более точным является полученное решение.

Таким образом, процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования вида (6.50)-(6.52) с помощью метода кусочно-линейной аппроксимации включает следующие этапы:

1) каждую из сепарабельных функций $f_j(x_j)$ и $g_{ij}(x_j)$ заменяют кусочно-линейной аппроксимацией вида (6.60)-(6.61); здесь для упрощения вычислений переменные, входящие в задачу линейно, не следует выражать через α_{kj} ;

2) строят приближенную задачу линейного программирования вида (6.63)-(6.65);

3) находят ее решение, используя для этого симплекс-метод;

4) определяют оптимальное решение исходной задачи и вычисляют на нем значение целевой функции.

Пример 6.8. Магазин оптовой торговли реализует два вида продукции A_1 и A_2 . Полезная площадь помещений этого магазина с учетом коэффициента оборачиваемости составляет 480 м²; рабочее же время работ-

ников, используемое в течение недели, ограничено величиной, равной 720 чел.-ч. Затраты этих ресурсов на реализацию 1 тыс. руб. продукции каждого вида заданы в таблице:

Ресурсы	Затраты ресурсов на реализацию 1 тыс. руб.	
	A_1	A_2
Полезная площадь, м ²	2	2
Рабочее время, чел.-ч.	3	4

Прибыль, получаемая магазином от реализации 1 тыс. руб. продукции каждого вида A_j , зависит линейно от x_j – объема реализованной продукции вида A_j , выраженного в тыс. руб.: прибыль от реализации 1 тыс. руб. продукции A_1 равна $720 - 3x_1$, а продукции $A_2 - 560 - 2x_2$. Необходимо найти такой план товарооборота за неделю, при котором магазин смог бы получить максимальную прибыль.

Решение. Составим математическую модель данной экономической задачи:

$$f(x) = 720x_1 - 3x_1^2 + 560x_2 - 2x_2^2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 480 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 720 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

В данной задаче целевую функцию $f(x)$ можно представить как сумму двух функций: $f_1(x_1) = 720x_1 - 3x_1^2$ и $f_2(x_2) = 560x_2 - 2x_2^2$, каждая из которых есть функция одной переменной. Таким образом, $f(x)$ является сепарабельной функцией, кроме того, она представляет вогнутую функцию (как квадратичная форма с неположительно определенной матрицей). Допустимое множество X , определяемое ограничениями задачи, выпукло. Значит, рассматриваемая задача нелинейного программирования с сепарабельными функциями и для отыскания глобального максимума ее целевой функции можно использовать метод кусочно-линейной аппроксимации. Так как нелинейной функцией является только целевая функция, следовательно, только ее следует заменить кусочно-линейной аппроксимацией. Анализируя ограничения исходной задачи, можно заключить, что переменная x_1 будет принимать значения из промежутка $[0; 240]$; x_2 – из промежутка $[0; 180]$. Выберем в качестве шага разбиения этих промежутков на частичные отрезки шаг, равный 30. Тогда отрезок $[0; 240]$ для переменной x_1 разобьется на 8 частичных отрезков точками $x_{01} = 0; x_{11} = 30; x_{21} = 60; x_{31} = 90; x_{41} = 120; x_{51} = 150; x_{61} = 180; x_{71} = 210; x_{81} = 240$, а отрезок $[0; 180]$ для переменной x_2 – на 6 частичных отрезков точками

$x_{02} = 120; x_{12} = 30; x_{22} = 60; x_{32} = 90; x_{42} = 120; x_{52} = 150; x_{62} = 180$. Вычислим теперь значения $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ в соответствующих точках:

x_{k1}	0	30	60	90	120	150	180	210	240
$f_1(x_{k1})$	0	18900	32400	40500	43200	40500	32400	18900	0

x_{k2}	0	30	60	90	120	150	180
$f_2(x_{k2})$	0	15000	26400	34200	38400	39000	36000

Используя формулы (6.60), (6.62), находим

$$\tilde{f}_1(x_1) = 18900\alpha_{11} + 32400\alpha_{21} + 40500\alpha_{31} + 43200\alpha_{41} + 40500\alpha_{51} + 32400\alpha_{61} + 18900\alpha_{71},$$

$$x_1 = 30\alpha_{11} + 60\alpha_{21} + 90\alpha_{31} + 120\alpha_{41} + 150\alpha_{51} + 180\alpha_{61} + 210\alpha_{71} + 240\alpha_{81},$$

$$\tilde{f}_2(x_2) = 15000\alpha_{12} + 26400\alpha_{22} + 34200\alpha_{32} + 38400\alpha_{42} + 39000\alpha_{52} + 36000\alpha_{62},$$

$$x_2 = 30\alpha_{12} + 60\alpha_{22} + 90\alpha_{32} + 120\alpha_{42} + 150\alpha_{52} + 180\alpha_{62}.$$

Подставляя полученные выражения в исходную задачу, получаем следующую приближенную задачу линейного программирования:

$$\tilde{f} = 18900\alpha_{11} + 32400\alpha_{21} + 40500\alpha_{31} + 43200\alpha_{41} + 40500\alpha_{51} + 32400\alpha_{61} + 18900\alpha_{71} + 15000\alpha_{12} + 26400\alpha_{22} + 34200\alpha_{32} + 38400\alpha_{42} + 39000\alpha_{52} + 36000\alpha_{62} \rightarrow \max \text{ при условиях}$$

$$\begin{cases} 60\alpha_{11} + 120\alpha_{21} + 180\alpha_{31} + 240\alpha_{41} + 300\alpha_{51} + 360\alpha_{61} + 420\alpha_{71} + 480\alpha_{81} + \\ + 60\alpha_{12} + 120\alpha_{22} + 180\alpha_{32} + 240\alpha_{42} + 300\alpha_{52} + 360\alpha_{62} + \underline{x_3} = 480; \\ 90\alpha_{11} + 180\alpha_{21} + 270\alpha_{31} + 360\alpha_{41} + 450\alpha_{51} + 540\alpha_{61} + 630\alpha_{71} + 720\alpha_{81} + \\ + 120\alpha_{12} + 240\alpha_{22} + 360\alpha_{32} + 480\alpha_{42} + 600\alpha_{52} + 720\alpha_{62} + \underline{x_4} = 720; \\ \underline{\alpha_{01}} + \alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} + \alpha_{41} + \alpha_{51} + \alpha_{61} + \alpha_{71} + \alpha_{81} = 1; \\ \underline{\alpha_{02}} + \alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32} + \alpha_{42} + \alpha_{52} + \alpha_{62} = 1; \\ x_3, x_4 \geq 0; \lambda_{k1} \geq 0, k = 0, \dots, 8; \lambda_{k2} \geq 0, k = 0, \dots, 6. \end{cases}$$

Система линейных уравнений является канонической, так как каждое ее уравнение содержит свою базисную переменную (в системе она выделена) и имеет неотрицательную правую часть. Отсюда решение полученной приближенной задачи линейного программирования может быть найдено с помощью симплекс-метода. Это решение будет выглядеть следующим образом:

$$\tilde{\alpha}_{01} = \tilde{\alpha}_{11} = \tilde{\alpha}_{21} = \tilde{\alpha}_{41} = \tilde{\alpha}_{51} = \tilde{\alpha}_{61} = \tilde{\alpha}_{71} = \tilde{\alpha}_{81} = 0; \tilde{\alpha}_{31} = 1; \tilde{\alpha}_{02} = \tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\alpha}_{22} = \tilde{\alpha}_{52} = \tilde{\alpha}_{62} = 0; \tilde{\alpha}_{32} = 1/4; \tilde{\alpha}_{42} = 3/4; \tilde{x}_3 = 75; \tilde{x}_4 = 0.$$

По найденным $\tilde{\alpha}_{k1}$ и $\tilde{\alpha}_{k2}$ определяем приближенное решение исходной задачи: $\tilde{x}_1 = 90 \cdot 1 = 90$; $\tilde{x}_2 = 90 \cdot 1/4 + 120 \cdot 3/4 = 225/2$. Прибыль при этом будет равна $\tilde{f} = 78187,5$ тыс. руб. Оптимальным же решением данной задачи является $x_1^* = \frac{1120}{11} = 101\frac{9}{11}$; $x_2^* = \frac{1140}{11} = 103\frac{7}{11}$; $f^* = f(x^*) = 78763\frac{7}{11}$ тыс. руб. (его можно найти с помощью геометрических построений). Для улучшения полученного приближения следует выбрать шаг разбиения промежутков меньший, например, равный 15 и т.д.

6.6. Задачи дробно-линейного программирования и их решения

К задачам дробно-линейного программирования относят задачи следующего вида:

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} \rightarrow \min (\max) \quad (6.66)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m; \quad (6.67)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \quad (6.68)$$

где $c_j, d_j, j = 0, \dots, n$; $a_{ij}, b_i, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ – заданные числа.

Замечаем, что целевые функции вида (6.66) входят в математические модели многих экономических задач. Например, предположим, что завод производит однотипную продукцию, используя для этого оборудование различных типов. Пусть c_j – это затраты на производство продукции с использованием одного комплекта оборудования j – го типа за некоторое время; d_j – количество единиц продукции, произведенной с помощью этого комплекта за то же время. На заводе установлено x_j комплектов оборудования j – го типа. Тогда затраты на производство единицы продукции завода будут равны

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j},$$

т.е. затраты на производство единицы продукции описываются целевой функцией вида (6.66).

Предположим, что допустимое множество X , определенное условиями (6.67)-(6.68), не содержит точки, в которой знаменатель функции (6.66) обращался бы в нуль, т.е. функция $\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0$ сохраняет свой знак на всем допустимом множестве X . Для определенности будем считать его положительным. Если это не так, то умножим числитель и знаменатель дроби (6.66) на (-1) . Обозначим знаменатель дроби (6.66) через $\frac{1}{y_0}$, т.е.

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0}, \text{ и введем новые переменные:}$$

$$y_j = y_0 x_j, j = 1, \dots, n. \quad (6.69)$$

В этих переменных исходная задача (6.66)-(6.68) примет следующий вид:

$$\tilde{f}(y) = \sum_{j=1}^n c_j y_j + c_0 y_0 \rightarrow \min (\max)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n d_j y_j + d_0 y_0 = 1,$$

$$y_j \geq 0, j = 0, 1, \dots, n,$$

т.е. преобразуется в задачу линейного программирования. Найдя ее оптимальное решение $y^* = (y_0^*, \dots, y_n^*)$, с помощью соотношений (6.69) можно определить оптимальное решение исходной задачи (6.66)-(6.68):

$$x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*}, j = 1, \dots, n.$$

Замечание. Если при решении задачи линейного программирования окажется, что $y_0^* = 0$, то делается вывод, что допустимое множество X не ограничено, и минимум (максимум) функции $f(x)$ вида (6.66) на нем не достигается.

Пример 6.9. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на всех трех типах оборудования. Время обработки каждого из изделий на оборудовании данного типа приведено в таблице. В ней также указаны затраты, связанные с производством 1 изделия каждого вида:

Тип оборудования	Затраты времени (ч.) на обработку 1 изделия	
	А	В
1	2	8
2	1	1
3	12	3
Затраты на производство 1 изделия (\$)	2	3

Оборудование 1 и 3 типов предприятие может использовать не более 26 ч. и 39 ч. При этом оборудование 2 типа целесообразно использовать не менее 4 ч. Требуется определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы себестоимость 1 изделия была минимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида А и x_2 изделий вида В. Тогда общие затраты на их производство будут равны $2x_1 + 3x_2$ \$, а себестоимость 1 изделия в \$ составит $f(x) = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$. Отсюда математическая модель данной экономической задачи запишется в виде:

$$f(x) = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \min$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \leq 26 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ 12x_1 + 3x_2 \leq 39 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Преобразуем эту модель в задачу вида (6.66)-(6.68), т.е. в задачу дробно-линейного программирования:

$$f(x) = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \min$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ 12x_1 + 3x_2 + x_5 = 39 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Замечаем, что допустимое множество X , состоящее из точек $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, которые удовлетворяют условиям данной задачи, не содержит точек, первые две компоненты которых равнялись бы нулю, т.е.

точек, в которых знаменатель целевой функции $f(x)$ обращался бы в нуль. Отсюда $x_1 + x_2 > 0$ для всех $x \in X$. Обозначим знаменатель целевой функции через $1/y_0$, т.е. $1/y_0 = x_1 + x_2$, и введем новые переменные:

$$y_j = \frac{x_j}{x_1 + x_2}, j = 1, \dots, 5.$$

Тогда рассматриваемая задача дробно-линейного программирования сведется к следующей задаче линейного программирования:

$$\tilde{f}(y) = 2y_1 + 3y_2 \rightarrow \min$$

при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 + y_3 - 26y_0 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_4 - 4y_0 = 0 \\ 12y_1 + 3y_2 + y_5 - 39y_0 = 0 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_k \geq 0, k = 0, \dots, 5. \end{cases}$$

Ее система уравнений не является канонической, так как второе и четвертое уравнения не содержат базисных переменных. Поэтому будем решать эту задачу с помощью метода искусственного базиса. На его первом этапе приведем систему уравнений к каноническому виду, решив для этого вспомогательную задачу:

$$F(z) = z_1 + z_2 \rightarrow \min$$

при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 + \underline{y_3} - 26y_0 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_4 - 4y_0 + \underline{z_1} = 0 \\ 12y_1 + 3y_2 + \underline{y_5} - 39y_0 = 0 \\ y_1 + y_2 + z_2 = 1 \\ y_k \geq 0, k = 0, \dots, 5; z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, \end{cases}$$

где z_1, z_2 — искусственные базисные переменные.

Так как система уравнений вспомогательной задачи является канонической, следовательно, решение этой задачи можно найти с помощью симплекс-метода.

Ба- зис	\tilde{c}_0	Зн-е базис- ной пере- менной	0	0	0	0	0	0	1	1	Θ_i	
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_0	z_1	z_2		
y_3	0	0	2	8	1	0	0	-26	0	0	0	$\Rightarrow \min$
z_1	1	0	①	1	0	-1	0	-4	1	0	0	
y_5	0	0	12	3	0	0	1	-39	0	0	0	

z_2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	
$F(z)$		1	2	2	0	-1	0	-4	0	0		
y_3	0	0	0	6	1	2	0	-18	-2	0	-	
y_1	0	0	1	1	0	-1	0	-4	1	0	-	
y_5	0	0	0	-9	0	12	1	⑨	-12	0	0 \Rightarrow	min
z_2	1	1	0	0	0	1	0	4	-1	1	1/4	
$F(z)$		1	0	0	0	1	0	4	-2	0		
y_3	0	0	0	-12	1	26	2	0	-26	0	-	
y_1	0	0	1	-3	0	13/3	4/9	0	-13/3	0	-	
y_0	0	0	0	-1	0	4/3	1/9	1	-4/3	0	-	
z_2	1	1	0	④	0	-13/3	-4/9	0	13/3	1	1/4 \Rightarrow	min
$F(z)$		1	0	4	0	-13/3	-4/9	0	10/3	0		
y_3	0	3	0	0	1	13	2/3	0	-13	3		
y_1	0	3/4	1	0	0	13/12	1/9	0	-13/12	3/4		
y_0	0	1/4	0	0	0	1/4	0	1	-1/4	1/4		
y_2	0	1/4	0	1	0	-13/12	-1/9	0	13/12	1/4		
$F(z)$		0	0	0	0	0	0	0	-1	-1		

Отсюда система уравнений преобразована в каноническую систему вида:

$$\begin{cases} \underline{y_3} + 13\underline{y_4} + \frac{2}{3}\underline{y_5} = 3 \\ \underline{y_1} + \frac{13}{12}\underline{y_4} + \frac{1}{9}\underline{y_5} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\underline{y_4} + \underline{y_0} = \frac{1}{4} \\ \underline{y_2} - \frac{13}{12}\underline{y_4} - \frac{1}{9}\underline{y_5} = \frac{1}{4} \\ y_k \geq 0, k = 0, \dots, 5. \end{cases}$$

Замечаем, что ее базисное допустимое решение $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_0^*) = (3/4, 1/4, 3, 0, 0, 1/4)$ представляет оптимальное решение задачи линейного программирования. Отсюда используя соотношения:

$$x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*}, j = 1, \dots, 5,$$

найдем оптимальное решение исходной задачи: $x_1^* = \frac{3/4}{1/4} = 3$;

$x_2^* = \frac{1/4}{1/4} = 1$; $x_3^* = \frac{3}{1/4} = 12$; $x_4^* = 0$; $x_5^* = 0$. Следовательно, предприятие должно изготовить 3 изделия вида А и 1 изделие вида В; себестоимость 1 изделия $f^* = f(x^*) = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{3 + 1} = 2,5\$$ при этом будет минимальной.

6.7. Решение задач нелинейного программирования с помощью градиентных методов

В предыдущих параграфах были описаны методы решения задач нелинейного программирования, основывающиеся на преобразовании этих задач к виду, допускающему применение симплекс-метода. Природа такого «преобразования» очень сильно зависит от типа рассматриваемой задачи. В одних случаях не требуется никакой предварительной аппроксимации, в других аппроксимация нужна. В этом и последующих параграфах данной главы будут описаны градиентные методы, с помощью которых можно, вообще говоря, решить любую задачу нелинейного программирования. Однако в общем случае при дополнительных ограничениях относительно свойств функций $f(x)$, $g_i(x)$ применение этих методов позволяет найти точку локального экстремума. Поэтому более целесообразно использовать градиентные методы для нахождения решения задач выпуклого программирования, в которых всякий локальный экстремум является одновременно и глобальным.

Замечаем, что любой из градиентных методов представляет собой итерационный процесс, в котором, начиная с некоторой точки x^0 , переходят шаг за шагом к некоторым другим точкам, улучшая при этом значение целевой функции, и такой переход осуществляется до тех пор, пока не будет найдено приемлемое решение исходной задачи.

Сначала изложим суть градиентного поиска точки экстремума при решении задач нелинейного программирования без ограничений, т.е. задач вида: $f(x) \rightarrow \min(\max)$, где $f(x)$ представляет нелинейную дифференцируемую функцию.

Выбирается произвольно точка x^0 , и с помощью антиградиента $-f'(x^0)$ (градиента $f'(x^0)$), вычисленного в этой точке, определяется направление, в котором функция $f(x)$ убывает (возрастает) с наибольшей скоростью, а затем, сделав небольшой шаг в найденном направлении, осуществляется переход в новую точку x^1 . Потом снова определяется наилучшее направление $-f'(x^1)$ ($f'(x^1)$) для перехода в следующую точку x^2 и т.д. Таким образом, строится последовательность точек

$x^0, x^1, \dots, x^k, \dots$ так, чтобы она сходилась к точке минимума (максимума) x^* , т.е. для точек последовательности выполнялись бы условия:

$$f(x^0) > f(x^1) > \dots > f(x^k) > \dots (f(x^0) < f(x^1) < \dots f(x^k) < \dots).$$

Движение из точки x^k в новую точку x^{k+1} осуществляется по прямой, проходящей через точку x^k и имеющей уравнение:

$$x = x^k - \lambda_k f'(x^k) \quad (x = x^k + \lambda_k f'(x^k)), \quad (6.70)$$

где λ_k – числовой параметр, от которого зависит величина шага. Как только значение параметра в уравнении (6.70) выбрано: $\lambda_k = \lambda_k^0$, так становится определенной следующая точка:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k^0 f'(x^k) \quad (x^{k+1} = x^k + \lambda_k^0 f'(x^k)).$$

Градиентные методы отличаются друг от друга способом выбора величины шага, т.е. значения λ_k^0 параметра λ_k . Можно, например, двигаться из точки в точку с постоянным шагом $\lambda_k = \lambda$, т.е. при любом k $x^{k+1} = x^k - \lambda f'(x^k)$ ($x^{k+1} = x^k + \lambda f'(x^k)$). Если при этом окажется, что $f(x^{k+1}) > f(x^k)$ ($f(x^{k+1}) < f(x^k)$), то следует возвратиться в точку x^k и уменьшить значение параметра, например, до $\frac{\lambda}{2}$.

Иногда величину шага λ_k^0 можно находить из решения следующей задачи одномерной минимизации (максимизации):

$$f(x^k - \lambda_k f'(x^k)) \rightarrow \min \quad (f(x^k + \lambda_k f'(x^k)) \rightarrow \max).$$

Замечаем, что градиентные методы, как правило, позволяют получать точное решение задачи нелинейного программирования за бесконечное число шагов и только в некоторых случаях – за конечное. В связи с этим градиентные методы относят к приближенным методам решения.

Если ищется приближенное решение, то поиск можно прекратить, основываясь на следующих соображениях. После каждой серии из определенного числа шагов сравнивают достигнутые значения целевой функции $f(x)$. Если после очередной серии изменение $f(x)$ не превышает некоторого наперед заданного малого числа ε , поиск прекращают и достигнутое значение $f(x)$ рассматривают как искомый приближенный минимум (максимум), а соответствующее ему x принимают за x^* . Если целевая функция $f(x)$ выпуклая (вогнутая), то необходимым и достаточным условием оптимальности точки x^* является равенство нулю градиента функции в этой точке.

Наиболее распространенным вариантом градиентного поиска является метод наискорейшего спуска (подъема). Суть его состоит в следующем.

После определения антиградиента $-f'(x^k)$ (градиента $f'(x^k)$) в точке x^k движение вдоль прямой $x = x^k - \lambda_k f'(x^k)$ ($x = x^k + \lambda_k f'(x^k)$) производится до точки x^{k+1} , в которой достигается минимальное (максимальное) значение функции $f(x)$ в направлении антиградиента $-f'(x^k)$ (градиента $f'(x^k)$). Затем в точке x^{k+1} вновь определяется антиградиент $-f'(x^{k+1})$ (градиент $f'(x^{k+1})$), и движение совершается по прямой $x = x^{k+1} - \lambda_{k+1} f'(x^{k+1})$ ($x = x^{k+1} + \lambda_{k+1} f'(x^{k+1})$) в направлении нового антиградиента $-f'(x^{k+1})$ (градиента $f'(x^{k+1})$) до точки x^{k+2} , в которой достигается минимальное (максимальное) в этом направлении значение $f(x)$. Движение продолжается до тех пор, пока не будет достигнута точка x^* , соответствующая наименьшему (наибольшему) значению целевой функции $f(x)$.

На рис. 6.9 приведена схема движения к оптимальной точке x^* методом наискорейшего подъема.

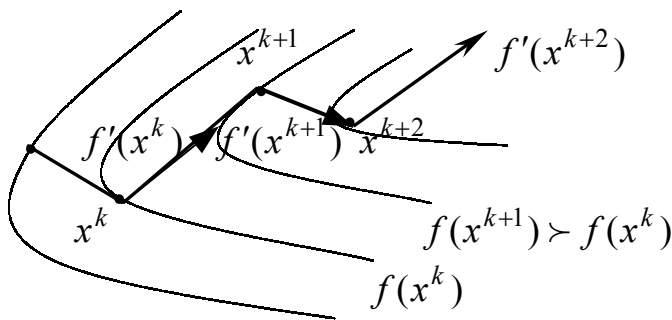


Рис. 6.9.

В данном случае направление градиента $f'(x^k)$ в точке x^k является касательным к линии уровня функции $f(x)$ в точке x^{k+1} , следовательно, градиент $f'(x^{k+1})$ в точке x^{k+1} ортогонален градиенту $f'(x^k)$. Действительно, перемещение из точки x^k в точку $x^{k+1} = x^k + \lambda_k f'(x^k)$ сопровождается возрастанием функции $f(x)$ на величину

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x^{k+1}) - f(x^k) = \\ &= f(x_1^{k+1}; x_2^{k+1}; \dots; x_n^{k+1}) - f(x_1^k; x_2^k; \dots; x_n^k) = f(x_1^k + \lambda_k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1}; \dots; x_n^k + \lambda_k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_n}) - \\ &- f(x_1^k; \dots; x_n^k). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Из выражения (6.71) видно, что приращение Δf является функцией переменной λ_k , т.е. $\Delta f = \Delta f(\lambda_k)$. При нахождении максимума функции

$f(x)$ в направлении градиента $f'(x^k)$ необходимо выбирать шаг перемещения (множитель λ_k), обеспечивающий наибольшее возрастание приращению функции $\Delta f(\lambda_k)$. Эта величина λ_k может быть определена из необходимого условия существования экстремума функции $\Delta f(\lambda_k)$:

$$\frac{d(\Delta f(\lambda_k))}{d\lambda_k} = 0. \quad (6.72)$$

Найдем выражение для производной, дифференцируя равенство (6.71) по λ_k как сложную функцию:

$$\frac{d(\Delta f(\lambda_k))}{d\lambda_k} = \frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_n} = f'(x^{k+1}) \cdot f'(x^k).$$

Подставляя этот результат в равенство (6.72), получаем

$$\frac{d(\Delta f(\lambda_k))}{\partial \lambda_k} = f'(x^{k+1}) \cdot f'(x^k) = 0. \quad (6.73)$$

Последнее соотношение имеет простое геометрическое истолкование: градиент в следующей точке x^{k+1} ортогонален градиенту в предыдущей точке x^k .

Пример 6.10. Найти выпуск продукции x_1 и x_2 соответственно 1 и 2 вида, при котором прибыль, выражаемая в виде функции:

$$f(x) = 6x_1 - 2x_1^2 + 10x_2 - 2x_2^2, \text{ будет максимальной.}$$

Решение. Начнем оптимизационный поиск с точки $x^0 = (3/2; 1/2)$. Будем сопровождать решение задачи графической иллюстрацией (рис. 6.10). Уравнение линий уровня целевой функции $f(x)$:

$$6x_1 - 2x_1^2 + 10x_2 - 2x_2^2 = \alpha,$$

где $\alpha \in (-\infty; +\infty)$, представляет уравнение окружностей:

$$2(x_1 - 3/2)^2 + 2(x_2 - 5/2)^2 = 17 - \alpha \text{ или } (x_1 - 3/2)^2 + (x_2 - 5/2)^2 = \frac{17 - \alpha}{2} = R^2$$

с общим центром в точке $(3/2; 5/2)$ и радиусом $R = \sqrt{\frac{17 - \alpha}{2}}$.

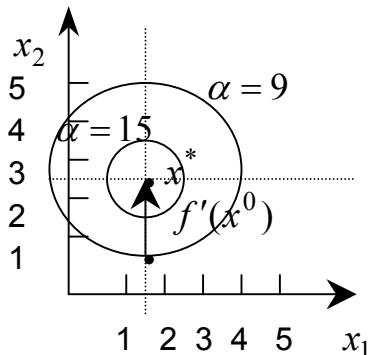


Рис. 6.10.

При $\alpha = 9; 15$ радиусы окружностей будут равны 2; 1. Найдем градиент функции $f(x)$:

$$f'(x) = (6 - 4x_1; 10 - 4x_2).$$

Шаг 1. Вычисляем $f'(x^0) = f'(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}) = (0; 8)$.

На рис. 6.10 с началом в точке $x^0 = (\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ построен вектор $\frac{1}{4}f'(x^0) = (0; 2)$, указывающий направление наискорейшего возрастания функции в точке x^0 . На этом направлении расположена следующая точка $x^1 = x^0 + \lambda_0 \cdot f'(x^0) = (\frac{3}{2}; \frac{1}{2}) + \lambda_0(0; 8) = (\frac{3}{2}; \frac{1}{2} + 8\lambda_0)$. В этой точке $f'(x_1) = (6 - 4 \cdot \frac{3}{2}; 10 - 4 \cdot (\frac{1}{2} + 8\lambda_0)) = (0; 8 - 32\lambda_0)$. Используя далее условие (6.73), получаем

$$\frac{d(\Delta f(\lambda_0))}{d\lambda_0} = f'(x^1) \cdot f'(x^0) = (0; 8 - 32\lambda_0) \cdot (0; 8) = 8(8 - 32\lambda_0) = 0.$$

Отсюда $\lambda_0 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. Так как $\frac{d^2(\Delta f(\lambda_0))}{d\lambda_0^2} = \frac{d}{d\lambda_0}(8(8 - 32\lambda_0)) = -256 < 0$,

то найденное значение $\lambda_0 = \frac{1}{4}$ является точкой максимума $\Delta f(x)$. Находим $x^1 = (\frac{3}{2}; \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{4}) = (\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$.

Шаг 2. Начальная точка для второго шага - $x^1 = (\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$. Вычисляем в ней градиент: $f'(x^1) = (0; 0)$. Следовательно, $x^1 = (\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$ – стационарная точка. Но так как $f(x)$ представляет вогнутую функцию, то в найденной точке $(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$ достигается ее глобальный максимум $f^* = f(x^*) = 17$.

6.8. Решение задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями

Сразу же отметим тот факт, что если целевая функция $f(x)$ в задаче выпуклого программирования с ограничениями имеет единственный экстремум, и он находится внутри допустимой области, то для поиска этого экстремума применяется выше изложенная методика без каких-либо изменений.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования с линейными ограничениями:

$$f(x) \rightarrow \max (\min) \tag{6.74}$$

$$A_i x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{6.75}$$

$$x \geq 0. \quad (6.76)$$

Предполагается, что $f(x)$ является вогнутой (выпуклой) функцией и имеет непрерывные частные производные в каждой точке допустимого множества; $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $A_i = (a_{i1} \ a_{i2} \dots \ a_{in})$.

Сначала геометрически проиллюстрируем процесс решения этой задачи (см. рис. 6.11). Пусть начальная точка x^0 расположена внутри допустимого множества X . Из точки x^0 можно двигаться в направлении градиента $f'(x^0)$ до тех пор, пока $f(x)$ не достигнет максимума. В данном случае $f(x)$ все время возрастает, поэтому надо остановиться в точке x^1 на граничной прямой. Если далее двигаться в направлении градиента $f'(x^1)$, то выйдем из допустимого множества. Поэтому надо найти другое направление перемещения, которое, с одной стороны, не выводит из допустимого множества, а с другой – обеспечивает наибольшее возрастание $f(x)$.

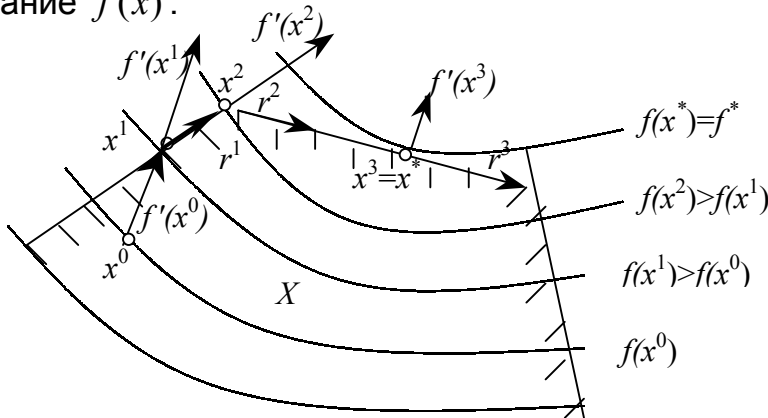


Рис. 6.11.

Такое направление определит вектор r^1 , составляющий с вектором $f'(x^1)$ наименьший острый угол по сравнению с любым другим вектором, выходящим из точки x^1 и лежащим в допустимом множестве. Этот вектор можно найти из условия максимизации скалярного произведения $f'(x^1) \cdot r_1 > 0$. В данном случае вектор r^1 совпадает с одной из граничных прямых.

Таким образом, на следующем шаге нужно двигаться по граничной прямой до тех пор, пока возрастает $f(x)$, т.е. до точки x^2 . Из рисунка 6.11 видно, что далее следует перемещаться в направлении вектора r^2 , который находится из условия максимизации скалярного произведения $f'(x^2) \cdot r_2 > 0$, т.е. по другой граничной прямой. Движение заканчивается в точке x^3 , поскольку в этой точке завершается оптимизационный поиск, ибо в ней функция $f(x)$ имеет локальный максимум. Ввиду вогнутости в

этой точке $f(x)$ достигает также и глобального максимума на допустимом множестве X . Градиент в точке максимума $x^3 = x^*$ составляет тупой угол с любым вектором r_k из допустимого множества, проходящим через x^3 , поэтому скалярное произведение $f'(x^3) \cdot r_k$ будет отрицательным для любого допустимого r_k , кроме r_3 , направленного по граничной прямой. Для него скалярное произведение $f'(x^3) \cdot r_3 = 0$, т.к. $f'(x^3)$ и r_3 взаимно перпендикулярны (граничная прямая касается в точке x^3 линии уровня поверхности $f(x)$). Это равенство и подтверждает тот факт, что в точке $x^* = x^3$ функция $f(x)$ достигла максимума.

Теперь рассмотрим аналитическое решение задачи (6.74)-(6.76). Если оптимизационный поиск начинается с точки, лежащей внутри допустимого множества X (все ограничения задачи выполняются как строгие неравенства), то перемещаться следует по направлению градиента так, как установлено выше. Однако выбор λ_k в уравнении (6.70) усложняется теперь требованием, чтобы очередная точка $x^{k+1} = x^k + \lambda_k \cdot f'(x^k)$ оставалась в допустимом множестве. Это означает, что ее координаты должны удовлетворять ограничениям (6.75)-(6.76), т.е. должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} A_i(x^k + \lambda_k \cdot f'(x^k)) \leq b_i, i = 1, \dots, m, \\ x^k + \lambda_k \cdot f'(x^k) \geq 0. \end{cases} \quad (6.77)$$

Решая систему линейных неравенств (6.77), находим отрезок $[\lambda'_k, \lambda''_k]$ допустимых значений параметра λ_k , при которых точка x^{k+1} будет принадлежать допустимому множеству. Значение λ_k^* (определяемое в результате решения уравнения (6.73): $f'(x^k + \lambda_k \cdot f'(x^k)) \cdot f'(x^k) = 0$), при котором $f(x)$ имеет локальный максимум по λ_k в направлении $f'(x^k)$, должно принадлежать отрезку $[\lambda'_k, \lambda''_k]$. Если же найденное значение λ_k выходит за пределы указанного отрезка, то в качестве λ_k^* принимается λ''_k . В этом случае очередная точка поисковой траектории оказывается на граничной гиперплоскости, соответствующей тому неравенству системы (6.77), по которому при решении системы была получена правая конечная точка λ''_k отрезка допустимых значений параметра λ_k .

Если оптимизационный поиск начат с точки, лежащей на граничной гиперплоскости, или очередная точка поисковой траектории оказалась на граничной гиперплоскости, то для продолжения движения к точке максимума прежде всего необходимо найти наилучшее направление движения.

С этой целью следует решить вспомогательную задачу математического программирования: максимизировать функцию

$$T_k = f'(x^k) \cdot r_k \quad (6.78)$$

при ограничениях $A_i \cdot r_k \leq 0 \quad (6.79)$

для тех i , при которых $A_i \cdot x^k = b_i, \quad (6.80)$

$$|r_k| = 1, \quad (6.81)$$

где $r_k = (r_{k1}, \dots, r_{kn})$; $|r_k| = \sqrt{\sum_{j=1}^n r_{kj}^2}$.

В результате решения задачи (6.78)-(6.81) будет найден вектор r_k , составляющий с градиентом наименьший острый угол. Условие (6.80) говорит о том, что точка x^k принадлежит границе допустимого множества, а условие (6.79) означает, что перемещение из x^k по вектору r_k будет направлено внутрь допустимого множества или по его границе. Условие (6.81) – условие нормализации необходимо для ограничения величины r_k , так как в противном случае значение целевой функции (6.78) можно сделать сколь угодно большим. Известны различные формы условий нормализации, и в зависимости от этого задача (6.78)-(6.81) может быть линейной или нелинейной.

После определения направления r_k находится значение λ_k^* для следующей точки $x^{k+1} = x^k + \lambda_k^* \cdot r_k$ поисковой траектории. При этом используется необходимое условие экстремума в форме, аналогичной уравнению (6.73), но с заменой $f'(x^k)$ на вектор r_k , т.е.

$$f'(x^{k+1}) \cdot r_k = 0. \quad (6.82)$$

Оптимизационный поиск прекращается, когда достигнута точка x_k^* , в которой $\max T_k = f'(x_k^*) \cdot r_k = 0$.

Пример 6.11. Завод выпускает два вида продукции. Цена одного изделия 1-го вида равна 6 д.е., а изделия 2-го вида – 8 д.е. Затраты на производство одного изделия 1-го и 2-го вида составляют соответственно $\frac{1}{2}x_1$ и x_2 д.е. Здесь x_1 и x_2 – суточный выпуск изделий соответственно 1-го и 2-го вида. Расходы ресурсов типа А и В на выпуск одного изделия обоих видов, их суточные запасы приведены в таблице:

Тип ресурса	Расход ресурсов на изготовление 1 изделия (д.е.)		Суточные запасы ресурсов (д.е.)
	1 вида	2 вида	
Ресурс А	6	5	30
Ресурс В	2	4	12

Найти оптимальный выпуск продукции обоих видов, обеспечивающий заводу за сутки максимальную прибыль.

Решение. Для наглядного представления процесса оптимизации будем сопровождать его графической иллюстрацией. Математическая модель данной задачи представляет задачу выпуклого программирования с линейными ограничениями:

$$f(x) = 6x_1 + 8x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$$

при ограничениях на ресурсы

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 30; \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 12; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

На рис. 6.12 изображены несколько линий уровня функции $f(x)$ (являющихся эллипсами с центром в точке $(6; 4)$) и допустимое множество X , в котором следует найти точку $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, доставляющую максимальное значение данной функции.

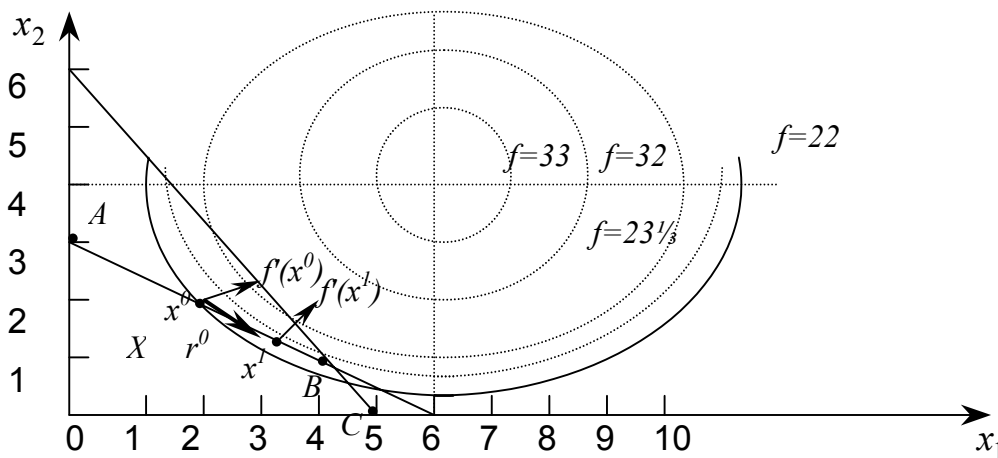


Рис. 6.12.

Начнем оптимизационный поиск, например, с точки $x^0 = (2; 2)$, лежащей на граничной прямой AB : $2x_1 + 4x_2 = 12$. В этой точке $f(x^0) = 22$. Найдем значение градиента $f'(x) = (6 - x_1; 8 - 2x_2)$ в данной точке: $f'(x^0) = (4; 4) \neq (0; 0)$.

На рисунке 6.12 видно, что через допустимое множество X проходят линии уровня со значениями α , большими, чем $f(x^0) = 22$. Поэтому необходимо искать направление $r_0 = (r_{01}; r_{02})$ перемещения в следующую

точку x^1 , более близкую к оптимальной x^* . С этой целью решаем задачу (6.78)-(6.81), которая для нашего примера переписывается в виде:

$$T_0 = f'(x_0) \cdot r_0 = (4; 4)(r_{01}; r_{02}) = 4r_{01} + 4r_{02} \rightarrow \max$$

при ограничениях $A_2 \cdot r_0 = 2r_{01} + 4r_{02} = 0$, $|r_0| = \sqrt{r_{01}^2 + r_{02}^2} = 1$.

Так как точка x^0 располагается только на одной (второй) граничной прямой: $2x_1 + 4x_2 = 12$, то система неравенств (6.79) записывается в форме одного равенства. Система ограничительных уравнений этой задачи имеет только два решения: $(r_{01}, r_{02}) = (-2r_{02}, r_{02}) = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ и $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$. Подставляя эти значения r_{01} и r_{02} в функцию T_0 , устанавливаем, что максимальное значение T_0 отлично от нуля и достигается при решении $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$. Таким образом, перемещаться из x^0 нужно по направлению вектора $r_0 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$, т.е. по граничной прямой АВ.

Для определения координат следующей точки $x^1 = (x_1^1; x_2^1)$, где

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^0 + r_{01} \cdot \lambda_0 = 2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \lambda_0, \\ x_2^1 &= x_2^0 + r_{02} \cdot \lambda_0 = 2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_0, \end{aligned} \quad (6.83)$$

необходимо найти значение λ_0^* параметра λ_0 , при котором функция $f(x)$ в точке x^1 достигает большего значения. Но сначала найдем интервал допустимых значений параметра λ_0 , при которых точка x^1 будет принадлежать допустимому множеству X . Система неравенств (6.77) в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} 6(2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \lambda_0) + 5(2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_0) \leq 30; \\ 2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \lambda_0 \geq 0; \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_0 \geq 0; \\ \lambda_0 \geq 0. \end{cases} \quad (6.84)$$

Второе ограничение мы опустили, поскольку точка x^1 лежит на прямой АВ, соответствующей этому ограничению. Решая систему (6.84), устанавливаем, что $\lambda_0 \in [0; \frac{8\sqrt{5}}{7}]$. Найдем значение λ_0^* , при котором достигается наибольшее возрастание приращения Δf функции $f(x)$, вы-

званное перемещением из точки x^0 в точку x^1 . В соответствии с условием (6.82) имеем

$$\frac{d(\Delta f)}{d\lambda_0} = f'(x^1) \cdot r_0 = (6 - 2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\lambda_0; 8 - 4 + \frac{2}{\sqrt{5}}\lambda_0) \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{8}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}}\lambda_0 - \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5}\lambda_0 = 0, \text{ откуда } \lambda_0 = \frac{2\sqrt{5}}{3} \in [0; \frac{8\sqrt{5}}{7}]. \text{ При этом } \frac{d^2(\Delta f)}{d\lambda_0^2} = -\frac{6}{5} < 0,$$

следовательно, $\lambda_0^* = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. По формулам (6.83) находим координаты новой точки $x^1 = (2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3}; 2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3}) = (\frac{10}{3}; \frac{4}{3})$. В ней

$f(x^1) = 23 \frac{1}{3}$; $f'(x^1) = (6 - \frac{10}{3}; 8 - \frac{8}{3}) = (\frac{8}{3}; \frac{16}{3}) \neq (0; 0)$, поэтому ищем новое направление $r_1 = (r_{11}; r_{12})$. Для этого решаем задачу:

$$T_1 = f'(x^1) \cdot r_1 = (\frac{8}{3}; \frac{16}{3}) \cdot (r_{11}; r_{12}) \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$2r_{11} + 4r_{12} = 0, \sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2} = 1.$$

Находим два решения:

$$(r_{11}; r_{12}) = (-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}) \text{ и } (r_{11}; r_{12}) = (\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}});$$

на обоих решениях $T_1 = f'(x^1) \cdot r_1 = 0$. Последнее означает, что точка

$x^1 = (\frac{10}{3}; \frac{4}{3})$ является оптимальным решением x^* рассматриваемой

задачи. При этом максимальное значение прибыли $f(x^*) = 23 \frac{1}{3}$ д.е. На

рисунке 6.12 видно, что в точке x^1 одна из линий уровня $f(x) = 23 \frac{1}{3}$

касается границы допустимого множества, а в точке x^1 градиент $f'(x^1)$ перпендикулярен граничной и прямой $2x_1 + 4x_2 = 12$.

6.9. Методы внешних штрафных функций

Методы решения задачи нелинейного программирования на условный экстремум:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X \subset R^n, \quad (6.85)$$

сводящие ее к решению последовательности вспомогательных задач безусловной минимизации некоторой специальной функции:

$$F_k(x) = f(x) + \Psi_k(x) \rightarrow \min, x \in R^n, k = 1, 2, \dots, \quad (6.86)$$

называют методами штрафных функций. Здесь $\Psi_k(x)$ – функция, учитывающая ограничения задачи (6.85).

Решение каждой из вспомогательных задач (6.86) можно найти, используя методы безусловной минимизации. Различают две группы основных методов построения последовательности таких вспомогательных задач безусловной минимизации. К первой группе относятся так называемые методы внешних штрафных функций. При их использовании за выход из допустимого множества «платится» штраф, аддитивно добавляемый к целевой функции $f(x)$, причем с ростом k штраф в виде функции $\Psi_k(x)$ растет, и при $k \rightarrow \infty$ штраф стремится к $+\infty$ для любой точки $x \notin X$. Таким образом, можно ввести следующее определение внешних штрафных функций.

Определение 10. Пусть $X \subset R^n$ – заданное множество. Последовательность неотрицательных функций $\{\Psi_k(x)\}$, определенных в R^n и обладающих свойством:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in X, \\ +\infty, & \text{если } x \notin X, \end{cases} \quad (6.87)$$

называется последовательностью внешних штрафных функций множества X .

Пусть $\{R_k\}$ – какая-либо возрастающая числовая последовательность с положительными членами и $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = +\infty$, а функция $\Psi(x)$ тако-

$$\text{ва, что } \Psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in X, \\ > 0, & \text{если } x \notin X. \end{cases} \quad (6.88)$$

Тогда последовательность функций

$$\Psi_k(x) = R_k \cdot \Psi(x) \quad (6.89)$$

удовлетворяет условию (6.87).

Зададим множество X в задаче нелинейного программирования (6.85) неравенствами

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.90)$$

где $g_i(x)$ – выпуклые функции, причем ограничения $x \geq 0$ включены в систему неравенств (6.90). Тогда в качестве функции $\Psi(x)$ в (6.89) можно

взять $\Psi(x) = \sum_{i=1}^m \Pi(g_i(x))$, где $\Pi(t)$ – непрерывная функция, причем

$\Pi(t) = 0$, если $t \leq 0$, и $\Pi(t) > 0$ при $t > 0$. $\Pi(t)$ можно выбрать так, чтобы функции $\Psi_k(x)$ обладали свойствами, упрощающими решение вспомогательных задач безусловной минимизации (6.86), например, такими, как выпуклость, существование производных и т.д. Рассмотрим широко

используемые типы внешних штрафов и различные процедуры учета ограничений при переходе к задачам безусловной минимизации.

Пусть функция $F_k(x)$, обобщенная для функции $f(x)$, имеет вид:

$$F_k(x) = F(x, R) = f(x) + R \cdot \Psi(x), \quad (6.91)$$

где R – некоторое положительное число, называемое коэффициентом штрафа; $\Psi(x)$ – непрерывная функция внешнего штрафа, удовлетворяющая условиям (6.88). В качестве этой функции обычно выбирают

а) либо $\Psi(x) = \sum_{i=1}^m (\max\{g_i(x), 0\})^\alpha$, где $\alpha=1$ или $\alpha=2$ (при $\alpha=2$ получаем внешний штраф типа квадрата срезки);

б) либо $\Psi(x) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + |g_i(x)|)^2$.

Замечание. Для учета ограничений, записываемых в форме равенств $h_j(x) = 0, j = 1, \dots, l$, используется либо квадратичный штраф

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^l h_j^2(x), \text{ либо внешний штраф } \Psi(x) = \sum_{j=1}^l |h_j(x)|.$$

Оптимизационный поиск с помощью метода внешних штрафных функций осуществляется следующим образом. Рассматривается некоторая неограниченная, монотонно возрастающая последовательность положительных чисел $\{R_k\}, k = 1, 2, \dots$. Для первого числа R_1 этой последовательности находится точка x^1 , доставляющая минимум функции (6.91). Найденная точка x^1 используется как начальное приближение для решения задачи поиска минимума функции $F(x, R_2)$, где $R_2 \succ R_1$, и т.д. Таким образом, решается последовательность задач минимизации функции $F(x, R_k), k = 1, 2, \dots$, причем результат предыдущей оптимизации x^k используется в качестве начального приближения для поиска x^{k+1} . Поскольку для бесконечно возрастающей последовательности $\{R_k\}$ локальные минимумы приближаются к допустимому множеству X , то последовательность $\{x^k\}, k = 1, 2, \dots$, сходится к локальному минимуму функции $f(x)$, расположенному внутри или на границе допустимого множества.

Точки x^k расположены вне этого множества, поэтому метод штрафных функций называют методом внешних штрафных функций. В этом методе любая точка может быть выбрана в качестве начальной, что значительно упрощает машинное программирование алгоритма решения исходной задачи. Недостатком метода внешних штрафных функций является плохая обусловленность вспомогательных задач безусловной минимизации (6.86) при больших k . Некоторые координаты градиента $F'_k(x)$ могут

стать слишком большими, и функция $F_k(x)$ будет иметь «овражный» характер.

Пример 6.12. Найти минимальные затраты $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$ на выпуск автомобилей двух марок (в количествах, соответственно равных x_1 и x_2 ед.), не превышающий 5 штук в сутки.

Решение. Математическая модель данной задачи представляет задачу выпуклого программирования с ограничениями – неравенствами:

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min$$

при ограничениях $g(x) = x_1 + x_2 - 5 \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Используя штраф типа квадрата срезки, введем штрафную функцию: $F(x, R) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + R(x_1 + x_2 - 5)^2$, где R - некоторое положительное число. Необходимые и достаточные условия, определяющие точку локального минимума этой функции, имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, R)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 4) + 2R(x_1 + x_2 - 5) = 0 \\ \frac{\partial F(x, R)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) + 2R(x_1 + x_2 - 5) = 0, \end{cases}$$

и матрица вторых производных

$$F''(x, R) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(x, R)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F(x, R)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F(x, R)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(x, R)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2R & 2R \\ 2R & 2 + 2R \end{pmatrix}$$

- положительно определенная матрица для любых x_1 и x_2 . Решая систему уравнений, выводим, что $x_1 = x_2 = \frac{5R + 4}{2R + 1}$. Задаем бесконечно возрастающую последовательность с положительными членами $\{R_k\}$, где

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = +\infty, \text{ для которой локальные минимумы } x^k = \left(\frac{5R_k + 4}{2R_k + 1}, \frac{5R_k + 4}{2R_k + 1} \right)$$

функции $F(x, R_k)$ сходятся к локальному минимуму функции $f(x)$:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*), \text{ где } x_1^* = \lim_{R_k \rightarrow \infty} \frac{5R_k + 4}{2R_k + 1} = \frac{5}{2}; \quad x_2^* = \lim_{R_k \rightarrow \infty} \frac{5R_k + 4}{2R_k + 1} = \frac{5}{2};$$

$$f(x^*) = 4,5.$$

6.10. Методы барьерных функций

Ко второй группе методов построения последовательности вспомогательных задач безусловной минимизации (6.86) относятся методы внутренних штрафных функций, иначе именуемые как методы барьерных функций. При их применении штраф $\Psi_k(x)$ растет по мере приближения к границе допустимого множества X , достигая на ней «бесконечного» значения, кроме того, в любой внутренней точке множества X при $k \rightarrow \infty$ он стремится к 0.

Рассмотрим эти методы для решения следующей задачи нелинейного программирования:

$$f(x) \rightarrow \min \text{ при ограничениях } g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m.$$

Будем предполагать, что граница допустимого множества X описывается уравнением: $g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_m(x) = 0$ и системой неравенств $g_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, причем существует, по крайней мере, одна точка x_0 , в которой $g_i(x_0) < 0$ для всех $i = 1, \dots, m$. Все рассматриваемые функции предполагаются непрерывными. Обобщенная функция $F(x, R)$ имеет вид:

$$F(x, R) = f(x) + R \cdot I(x), \quad (6.92)$$

где R – некоторое положительное число; $I(x)$ – так называемая барьерная функция, значение которой неограниченно возрастает при приближении к границе допустимого множества. Эта функция должна быть непрерывной во всех точках, лежащих внутри допустимого множества X , и, если $\{x^k\}$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность внутренних точек, сходящихся к граничной точке допустимого множества X , то последовательность $\{I(x^k)\}$ значений барьерной функции неограниченно возрастает. Поскольку все точки последовательности $\{x^k\}$ лежат в допустимом множестве, то метод барьерных функций называют также методом внутренних штрафных функций.

В качестве барьерной функции часто используют следующие функции:

а) логарифмическая функция $I_1(x) = -\sum_{i=1}^m \ln(-g_i(x))$, определенная только

для внутренних точек $x \in X$, где $g_i(x) < 0$ для всех $i = 1, \dots, m$;

б) обратная функция $I_2(x) = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}$, определенная всюду, за исключе-

нием границы допустимого множества X , и не имеющая отрицательных значений в допустимом множестве X .

В допустимых точках вблизи границы значения барьерной функции положительны и быстро убывают при удалении от границы внутрь допустимого множества. Штрафная добавка $R \cdot I(x)$ к целевой функции $f(x)$ в равенстве (6.92) как бы образует барьер, препятствующий выходу из допустимого множества.

В алгоритме оптимизационного поиска используется последовательность $\{R_k\}$ положительных чисел R_k , $i = 1, 2, \dots$, монотонно сходящаяся к нулю, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = 0$. В качестве начальной точки берут произ-

вольную внутреннюю точку x^0 допустимого множества X . Она является исходной для поиска точки минимума x^1 обобщенной функции $F(x, R_1)$.

Точка x^1 используется в качестве начального приближения для поиска точки x^2 минимума функции $F(x, R_2)$ и т.д. Последовательность полученных таким образом точек $\{x_k\}$ безусловных минимумов функций $F(x, R_k)$ сходится к точке минимума x^* функции $f(x)$ исходной задачи.

Приближение точек x^1, x^2, \dots к оптимальной точке x^* осуществляется внутри допустимого множества. При уменьшении R убывает влияние штрафной добавки $R \cdot I(x)$ в равенстве (6.92) и возрастает влияние целевой функции $f(x)$. Поэтому последовательность функций $F(x, R_k)$ дает сколь угодно точное (для достаточно большего номера k) приближение к локальному минимуму функции $f(x)$. Если искомый экстремум лежит внутри допустимой области, то решение может быть получено после нескольких первых значений параметра R .

Трудности в расчетах возрастают при определении начальной точки x^0 внутри допустимого множества. Поиск усложняется, если экстремум достигается на границе допустимого множества. Поскольку значения обобщенной функции $F(x, R)$ при приближении к границе допустимого множества определяются главным образом величиной барьерной функции, экстремум не всегда может быть вычислен с заданной точностью.

Пример 6.13. Применить для решения задачи, сформулированной в примере 6.12, метод барьерных функций.

Решение. В данном случае будем использовать в качестве барьерной функции $I(x)$ логарифмическую функцию $I_1(x) = -\ln(5 - x_1 - x_2)$, т.е. обобщенная функция здесь будет выглядеть следующим образом: $F(x, R) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 - R \cdot \ln(5 - x_1 - x_2)$. Необходимые условия существования локального минимума этой функции примут вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, R)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 4) + \frac{R}{5 - x_1 - x_2} = 0 \\ \frac{\partial F(x, R)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) + \frac{R}{5 - x_1 - x_2} = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, выводим, что $x_1 = x_2$, т.е. приходим к уравнению с одной неизвестной: $2(x_1 - 4) = \frac{R}{2x_1 - 5}$. Задаем последовательность $\{R_k\}$ положительных чисел $R_k, k = 1, 2, \dots$, монотонно сходящихся к нулю, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = 0$, для которой локальные минимумы x^k обобщенных функций $F(x, R_k)$ сходятся к точке минимума x^* функции $f(x)$ исходной задачи: $x_1^* = \lim_{R_k \rightarrow 0} x_1^k; x_2^* = \lim_{R_k \rightarrow 0} x_2^k$, где $x_1^k = x_2^k$ удовлетворяет уравнению $2(x_1^k - 4) \cdot (2x_1^k - 5) = R_k$. Осуществляя предельный переход при $k \rightarrow \infty$ и учитывая, что $R_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, получаем соотношение для отыскания точки минимума x^* функции $f(x)$:

$$\begin{cases} 2(x_1^* - 4) \cdot (2x_1^* - 5) = 0, \\ x_1^* = x_2^*. \end{cases}$$

Так как точка $(4; 4)$ является недопустимой для множества X , следовательно, $x^* = (5/2; 5/2)$.

Задачи

6.1. Завод выпускает изделия двух моделей А и В. Для их изготовления используются два вида ресурсов: сырье и рабочая сила. Расход ресурсов на одно изделие каждой модели и их суточные запасы приведены в таблице:

Ресурс	Расход ресурса на 1 изделие		Суточные запасы
	модели А	модели В	
Сырье	0,4	0,5	120
Рабочая сила	1	0,8	240

Стоимости одного изделия модели А и В равны соответственно $2x_1 - 120$ и $3x_2 - 180$ д.е.; затраты же на производство одного изделия модели А и В составляют соответственно $300 - x_1$ и $250 - x_2$ д.е. Здесь x_1 и x_2 пред-

ставляют суточный выпуск изделий соответственно модели А и В. Определить, сколько изделий обеих моделей должен за сутки выпускать завод, чтобы суммарная стоимость продукции была максимальной, а суммарные затраты не превосходили величины, равной 19900 д.е.

6.2. Цех выпускает два вида продукции, используя два типа полуфабрикатов. Продукция используется при комплектовании изделий, при этом на каждую единицу продукции 1 вида требуется не менее двух единиц продукции 2 вида. Расход полуфабрикатов каждого вида на 1 единицу выпускаемой продукции, суточные объемы этих полуфабрикатов представлены в таблице:

Полуфабрикаты	Расход полуфабр. на 1 ед. продукции		Суточные объемы
	1 вида	2 вида	
1 тип	1	2	800
2 тип	6	2	2400

Прибыль от реализации 1 ед. продукции 1 и 2 вида равна соответственно $x_1 + 150$ и $x_2 + 200$ д.е. Здесь x_1 и x_2 представляют суточный выпуск продукции соответственно 1 и 2 вида. Определить, при каких значениях x_1 и x_2 цех может достичь максимальной прибыли.

6.3. Двум погрузчикам разной мощности за 24 часа нужно погрузить на первой площадке не менее 230 т, на второй – не менее 270 т. Первый погрузчик на первой площадке может погрузить 12 т в час, на второй – 10 т в час. Второй погрузчик может погрузить на каждой площадке по 13 т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т первым погрузчиком на первой площадке, равна $x_{11} + \frac{1}{2}$ д.е., на второй - $x_{12} + 1$ д.е.; вторым погрузчиком на первой площадке - $x_{21} + 2$ д.е.; на второй - $x_{22} + 2$ д.е. Здесь x_{ij} - время работы в часах i -го погрузчика на j -й площадке. Найти, какой объем работ должен выполнить каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

6.4. Издержки предприятия на изготовление единицы некоторого вида продукции определяются формулой: $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$, где x_1 - затраты капитала (тыс. руб.), x_2 - расходы на оплату рабочей силы (тыс. руб.). При каких x_1 и x_2 издержки производства будут минимальными, если предприятие затрачивает 5 тыс. руб. на выпуск 1 единицы продукции?

6.5. Производственный участок производит изделия вида А и В для сборочного конвейера предприятия-заказчика. Эти изделия изготавливаются на станках двух типов: производительность 1 станка первого типа равна 4 детали вида А или 6 деталей вида В в час; производительность 1 станка второго типа – 2 детали вида А или 4 детали вида В в час. Произ-

водственный участок располагает 10 станками первого типа, каждый из которых может работать 8 часов в сутки, и 15 станками второго типа, каждый из которых может работать 5 часов в сутки. Прибыль от реализации одного изделия вида А и В составляет $60 - \frac{1}{2}x_1$ и $40 - \frac{1}{2}x_2$ д.е. соответственно. Здесь x_1 и x_2 - время работы станков обоих типов по производству изделий соответственно вида А и В. Распределить имеющиеся станки обоих типов по производству изделий двух видов так, чтобы производственный участок смог получить за сутки максимальную прибыль.

6.6. Изготовление некоторой продукции в производственном объединении можно осуществить двумя технологическими способами. При первом способе изготовление x_1 изделий требует затрат, равных $4x_1^2 - 14x_1 + 10$ руб., а при втором способе затраты на изготовление x_2 изделий составляют $2x_2^2 - 10x_2 + 6$ руб. Составить план производства продукции, согласно которому должно быть произведено 50 изделий при наименьших общих затратах.

6.7. Определить оптимальную программу выпуска двух видов продукции с учетом ограниченных ресурсов сырья (120 кг), оборудования (300 станко-ч) и электроэнергии (280 квт.ч) при следующих нормах расхода на единицу продукции : сырья 3 и 2 кг, электроэнергии 4 и 7 квт.ч и оборудования $5x_1 - 50$ и $4x_2 - 20$, где x_1 и x_2 - объемы выпуска продукции первого и второго вида соответственно.

6.8. Пусть суммарная производственная мощность трех предприятий равна 900. Наибольшая и наименьшая мощности, которые могут иметь 1, 2 и 3 предприятия, равны соответственно $D_1 = 300$; $d_1 = 200$; $D_2 = 350$; $d_2 = 150$; $D_3 = 400$; $d_3 = 300$. Известно, что суммарные годовые затраты на j -м предприятии равны сумме себестоимости производства и произведения капиталовложений на нормативную эффективность, причем как себестоимость $c_j(x_j)$ объема продукции, производимой за год на j -м предприятии, так и капиталовложения $K_j(x_j)$ на строительство, расширение и реконструкцию предприятия зависят от предполагаемой производственной мощности x_j этого предприятия и определяются соответственно:

$$c_1(x_1) = 2x_1^2 - 300x_1 - 2000; c_2(x_2) = x_2^2 - 200x_2 - 3000; c_3(x_3) = 300x_3 - 4000;$$

$$K_1(x_1) = 200x_1 + 2000; K_2(x_2) = 200x_2 + 4000; K_3(x_3) = 600x_3 + 6000.$$

Нормативная эффективность $E = \frac{1}{2}$. Найти план размещения и развития $x = (x_1, x_2, x_3)$, обеспечивающий минимум общих годовых затрат.

6.9. Фирма производит из нефти и продает моторные масла двух марок А и В. Цена, по которой фирма может продавать продукцию, зави-

сит от ее произведенного количества: цена за 1 т масла марки А равна $80 - 3x_1$, а за 1 т масла марки В - $60 - 2x_2$. Суточные издержки составляют $14x_1 + 8x_2 + 40$. Здесь x_1 - суточный объем производства масла марки А; x_2 - суточный объем производства масла марки В. Поставщик нефти может ежесуточно поставлять не более 24 т. Определить суточный объем выпуска моторных масел марки А и В, максимизирующий прибыль, если на производство 1 т моторного масла любой марки расходуется 2 т нефти. Как изменится оптимальный выпуск, если в связи с насыщением рынка моторным маслом марки А фирма может реализовать в сутки не более 6 т этого масла?

6.10. На развитие трех шахт дополнительно выделено 20 млрд руб. Эффективность использования капиталовложений по этим шахтам составляет соответственно: $q_1 = 0,2x_1^2$; $q_2 = 0,4x_2^2$; $q_3 = 0,8x_3$, где x_1 , x_2 и x_3 - объем капиталовложений, выделяемый 1-й, 2-й и 3-й шахтам. Увеличение темпа роста эффективности по мере возрастания объемов капиталовложений есть результат вовлечения в эксплуатацию участков с наилучшими горно-геологическими условиями. Необходимо распределить капиталовложения между шахтами таким образом, чтобы суммарная эффективность их использования была максимальной.

6.11. Завод выпускает станки двух типов, используя для этого металлы двух видов. Расходы этих металлов на выпуск одного станка каждого типа, их суточные запасы приведены в таблице:

Металл	Расход металла на выпуск 1 станка		Суточные запасы
	1 типа	2 типа	
1 вида	1	4	14
2 вида	7	3	42

Цена 1 станка первого типа равна 1 д.е., а 1 станка второго типа - 2 д.е. Затраты на производство одного станка первого и второго типа составляют соответственно $0,2x_1^2$ и $0,2x_2^2$ д.е. Здесь x_1 и x_2 - суточный выпуск станков первого и второго типа соответственно. Найти оптимальный выпуск станков обоих типов, обеспечивающий заводу за сутки максимальную прибыль.

6.12. Собственник располагает тремя видами ресурсов: денежными средствами, производственными помещениями, оборудованием и сырьем. Эти ресурсы необходимо распределить между предприятиями двух типов. Предприятия различаются по экономическим условиям деятельности: месту расположения, системе налогообложения, стоимости энергии, оплате труда и т.д., в связи с чем имеют разные издержки производства и, следовательно, различные прибыли: прибыль для предприятий первого типа равна $2x_1^2 - 4x_1$ д.е., для предприятий второго типа - $9x_2^2 - 9$ д.е.

Здесь x_1 и x_2 - число предприятий первого и второго типа соответственно. Количества единиц каждого ресурса, требуемые для одного предприятия определенного типа, а также их общее количество, сосредоточенное у собственника, приведены в таблице:

Ресурсы	Количество единиц ресурса для одного предприятия		Общее количество ресурса
	1 типа	2 типа	
Денежные средства	2	3	24
Производ. помещения	1	2	15
Оборудование	0	1	4
Сырье	4	2	24

Необходимо определить, какое количество предприятий каждого типа следует иметь собственнику, чтобы общая прибыль была максимальной.

6.13. Исходя из специализации и своих технологических возможностей, предприятие может выпускать 2 вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, сырье и станочное оборудование. Запасы ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на 1 единицу выпускаемой продукции приведены в таблице:

Ресурсы	Расход ресурса на 1 единицу продукции		Недельные запасы ресурсов
	1 вида	2 вида	
Трудовые ресурсы	4	8	4800
Сырье	3	3	2400
Станки	1	1	1500

Затраты на выпуск x_1 ед. продукции 1 вида составляют $x_1^2 - 1200x_1 + 480000$; на выпуск x_2 ед. продукции второго вида - $x_2^2 - 1200x_2 + 420000$. Определить, при каком выпуске продукции обоих видов затраты будут минимальными.

6.14. Для производства двух видов изделий предприятие использует три типа взаимозаменяемого оборудования, причем изделий 1 вида требуется не менее 30 ед., а изделий 2 вида – не менее 40 ед. Оборудование первого типа может быть занято изготовлением этих изделий не более 15 ч, оборудование второго типа – не более 20 ч, оборудование третьего типа – не менее 10 ч. Время изготовления 1 изделия каждого вида на оборудовании всех типов, а также затраты, связанные с производством 1 изделия на данном типе оборудовании, приведены в таблице:

Оборудование	Затраты времени (ч) на обработку 1 изделия	
	1 вида	2 вида
1 типа	1/3	1/2
2 типа	1	1/4
3 типа	1/2	1/3
Затраты на производст- во 1 изделия (\$)	2	1

Определить, сколько изделий каждого вида следует произвести на имеющемся оборудовании так, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

6.15. Обувное предприятие использует для изготовления трех различных моделей обуви три вида кожтоваров. Расходы этих кожтоваров на изготовление одной пары обуви каждой модели, их суточные запасы на предприятии, а также величины производственных фондов, используемых при производстве одной пары обуви каждой модели, приведены в таблице:

Кожтовары	Расход кожтоваров на пр-во 1 пары обуви (м ²)			Суточные запасы кожтоваров (м ²)
	1 модели	2 модели	3 модели	
1 вида	0,2	0,1	0,3	18
2 вида	0,1	0,3	0,2	17
3 вида	0,2	0,1	0,2	15
Производ. фонды на 1 пару обуви	12	10	15	

Предполагая, что объединение должно выпускать обувь 1 и 3 модели в соотношении 2:1, а обуви 2 и 3 модели требуется не менее 30 и 20 пар в сутки соответственно, найти минимальную фондоемкость (т.е. объем производственных фондов, приходящихся на единицу продукции).

6.16. Для выполнения двух различных работ могут быть использованы рабочие трех квалификационных групп. Выработка каждой группы рабочих в час при выполнении определенной работы, общий фонд времени, в течение которого соответствующая группа рабочих может быть занята выполнением работ, а также объемы этих работ приведены в таблице:

Виды работ	Выработка рабочих группы			Объемы работ
	первой	второй	третьей	
1 вида	10	15	20	360
2 вида	12	16	20	400
Общий фонд времени (ч)	40	30	25	

Составить такой план выполнения работ, при котором производительность труда группы рабочих являлась бы максимальной.

6.17. Два партнера по бизнесу решают вложить капиталы в общее предприятие. На основе предшествующего опыта можно судить о вероятности успеха обоих партнеров: $P_1 = 0,8$ и $P_2 = 0,6$, а также о величине их возможных финансовых потерь: первый партнер может потерять с каждой вложенной 1 д.е. $0,5x_1 - 2$ д.е., второй партнер - $0,4x_2 - 1,6$ д.е. Известны также пределы капиталовложений партнеров: минимальное капиталовложение первого партнера равно 5 д.е., второго партнера – 1 д.е.; максимальное капиталовложение первого партнера равно 7 д.е., второго партнера – 3 д.е. Необходимо найти оптимальные капиталовложения x_1 и x_2 д.е. обоих партнеров, обеспечивающих средний доход, не менее 6,6 д.е., и обращающие в минимум общие потери партнеров.

6.18. Самолет грузоподъемностью 84 условных единицы (у.е.) предполагается загрузить тремя типами груза. Имеющаяся масса груза каждого типа и стоимость 1 у.е. этого груза заданы в таблице:

Показатели	Тип груза		
	первый	второй	третий
Масса груза	20	26	40
Стоимость 1 у.е. груза	$2x_1 - 4$	$x_2 + 2$	$3x_3 - 6$

где x_1, x_2, x_3 - число у.е. груза соответственно первого, второго и третьего типа, загружаемое в самолет. Необходимо загрузить самолет таким образом, чтобы общая ценность груза была максимальной.

6.19. Имеются два вида ресурсов, предназначенных для двух объектов. Известны материальные эффекты от 1 условной единицы (у.е.) каждого ресурса, распределенного на соответствующий объект, и суточные запасы этих ресурсов. Они заданы в таблице:

Объекты	Материальный эффект от 1 у.е. ресурса	
	1 вида	2 вида
первый	$10 - x_{11}$	$16 - x_{12}$
второй	$20 - x_{21}$	$14 - x_{22}$
Суточные запасы ресурсов	25	20

Здесь x_{ij} - количество у.е. j -го ресурса, распределенного на i -й объект. Общая стоимость ресурсов не должна превосходить 450 д.е., при этом цена 1 у.е. ресурса 1 вида равна 10 д.е., а 1 у.е. ресурса 2 вида – 12 д.е. Необходимо распределить имеющиеся ресурсы между объектами так, чтобы можно было достичь максимального суммарного эффекта.

6.20. Фирма выпускает два вида товаров, используя для этого сырье. На выпуск 1 единицы товара первого и второго вида затрачивается соответственно 1 и 2 у.е. этого сырья. Суточные запасы данного сырья составляют 10 у.е. На рынке фирма может реализовать в течение дня не более 6 единиц товара обоих видов, получая от данной реализации суммарную прибыль, равную $f(x) = 5x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$, где x_1 и x_2 - суточный выпуск товара соответственно первого и второго вида. При каких x_1 и x_2 фирма может достичь максимальной прибыли?

6.21. Необходимо подобрать из имеющихся трех видов шихтовых материалов такой состав шихты, который обеспечивал следующий химический состав выплавленного чугуна: процентное содержание в нем марганца должно быть не более 50%, процентное содержание серы – не более 15% и процентное содержание фосфора – не более 10%, и давал бы наименьшие издержки на 1 т чугуна с учетом стоимости применяемых шихтовых материалов. Стоимости этих шихтовых материалов и процентное содержание в них марганца, серы и фосфора приведены в таблице:

Компоненты	Содержание компонентов в шихтовых материалах (%)		
	1 вида	2 вида	3 вида
марганец	70	30	40
сера	10	20	15
фосфор	5	10	8
Стоимость 1 т ших. мат.	0,5 x_1 д.е.	0,3 x_2 д.е.	0,2 x_3 д.е.

Здесь x_1, x_2, x_3 - доли шихтовых материалов соответственно 1, 2 и 3 вида в 1 т чугуна.

6.22. Необходимо минимизировать стоимость пряжи так, чтобы средняя длина волокна в пряже была не менее 20 м и не более 30 м. Данную пряжу получают в результате смешивания хлопка-волокон трех видов. Средняя длина хлопка-волокна каждого вида, а также стоимость его 1 весовой единицы (в.е.) заданы в таблице:

Характеристики	Волокно 1 вида	Волокно 2 вида	Волокно 3 вида
Средняя длина	18 м	25 м	35 м
Стоимость 1 в.е. хлопка-волокна	0,3 x_1 д.е.	0,4 x_2 д.е.	0,5 x_3 д.е.

6.23. Пусть потребитель располагает доходом, равным 1 млн. руб., который полностью расходуется им на приобретение товаров трех видов. Цена 1 ед. товара 1 вида равна 50 тыс. руб.; 1 ед. товара 2 вида – 30 тыс. руб.; 1 ед. товара 3 вида – 20 тыс. руб. Учитывая, что функция полезности равна $f(x) = x_1x_2x_3$, где x_1, x_2, x_3 - количество единиц товара соот-

ветственно 1, 2, 3 вида, потребителю необходимо решить, какое количество единиц товара каждого вида он должен приобрести, чтобы достичь максимальной полезности.

6.24. Инвестору необходимо сформировать портфель из ценных бумаг трех видов с заданным уровнем риска, равным 0,03, и с возможно большей ожидаемой доходностью. При этом доходность одной ценной бумаги 1 вида равна 0,01; доходность одной ценной бумаги 2 вида равна 0,008, и доходность одной ценной бумаги 3 вида равна 0,011. Матрица ковариации имеет вид:

$$V = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,03 & 0,02 \\ 0,03 & 0,04 & 0,015 \\ 0,02 & 0,015 & 0,04 \end{pmatrix}.$$

Решить эту задачу, как задачу выпуклого программирования с нелинейным ограничением.

6.25. Известен рыночный спрос на определенное изделие в количестве 180 штук. Это изделие может быть изготовлено двумя предприятиями одного концерна по различным технологиям. При производстве x_1 изделий первым предприятием его затраты составят $4x_1 + x_1^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий вторым предприятием они составят $8x_2 + x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий, изготовленных по каждой технологии, может предложить концерн, чтобы общие издержки его производства были минимальными.

Ответы к задачам

6.1. Завод должен выпускать только изделия модели В в количестве $x_2^* = 240$ штук за сутки; следовательно, $x_1^* = 0$; ; при этом максимальная стоимость продукции составит $f^* = 129600$ д.е.

6.2. Цех может достичь максимальной прибыли $f^* = 256000$ д.е., если станет выпускать за сутки 320 ед. продукции 1 вида и 240 ед. продукции 2 вида.

6.3. Первый погрузчик должен погрузить на первой площадке 132 т, а на второй площадке – 130 т; второй погрузчик должен погрузить на первой площадке 156 т и на второй площадке – 156 т. При этом минимальная стоимость всех работ будет равна 7706 д.е.

6.4. Издержки производства будут минимальными, если из 5 тыс. руб., затрачиваемых на выпуск 1 единицы продукции, затраты капитала составят 2 тыс. руб., остальные 3 тыс. руб. пойдут на оплату рабочей силы.

6.5. Из 10 станков первого типа ≈ 5 станков должны производить изделия вида А, и ≈ 5 станков – изделия вида В; из 15 станков второго типа 12 станков должны производить изделия вида А, и 3 станка – изделия вида В; при этом производственный участок может получить за сутки максимальную прибыль, равную 6550 д.е.

6.6. Производственное объединение может изготовить с наименьшими затратами, равными $f^* \approx 2170$ руб., $x_1^* \approx 29$ изделий по первому технологическому способу и $x_2^* \approx 21$ изделий – по второму технологическому способу.

6.7. Максимальное количество выпускаемой продукции, равное $f^* = \frac{3}{2}(5 + \sqrt{85})$, достигается при производстве $x_1^* = \frac{2}{3}(5 + \sqrt{85})$ ед. продукции первого вида и $x_2^* = \frac{5}{6}(5 + \sqrt{85})$ ед. продукции второго вида.

6.8. Минимальные годовые затраты $f^* = 334500$ будут достигаться, если производственная мощность первого предприятия составляет $x_1^* = 200$ ед., второго предприятия - $x_2^* = 350$ ед. и третьего предприятия - $x_3^* = 350$ ед.

6.9. Фирма получит максимальную прибыль $f^* = 488,2$, если произведет за сутки $x_1^* = 6,2$ т моторного масла марки А и $x_2^* = 5,8$ т моторного масла марки В. При введении дополнительного ограничения: $x_1 \leq 6$ максимальная прибыль уменьшится до $f^* = 488$; при этом фирма долж-

на производить $x_1^* = 6$ т и $x_2^* = 6$ т моторного масла соответственно марки А и В.

6.10. Суммарная эффективность использования трех шахт $f^* = 160$ будет максимальной, если все 20 млрд руб. выделить на развитие только второй шахты.

6.11. Чтобы получить максимальную прибыль, равную 5,4 д.е., завод должен выпускать за сутки 2 станка первого типа и 3 станка второго типа.

6.12. Для того, чтобы достичь максимальной прибыли $f^* = 151$ д.е., собственнику следует иметь 4 предприятия первого типа и 4 предприятия второго типа.

6.13. Затраты $f^* = 260000$ д.е. будут минимальными при выпуске 400 ед. продукции первого вида и 400 ед. продукции второго вида.

6.14. Себестоимость одного изделия $f^* = 13\frac{1}{10}$ \$ будет минимальной, если предприятие будет производить 10 изделий первого вида и 70/3 изделий второго вида.

6.15. Обувное предприятие может достигнуть минимальной фондоемкости, равной 12, если станет выпускать в сутки 40 пар обуви первой модели, 30 пар обуви второй модели и 20 пар обуви третьей модели.

6.16. Группа рабочих может достичь максимальной производительности труда, равной 608/33, если всю работу 1 вида будут выполнять рабочие третьей группы на протяжении 18 часов; работу 2 вида – рабочие второй группы на протяжении 65/4 часов и рабочие третьей группы на протяжении 7 часов.

6.17. Общие потери партнеров будут минимальными и равными 4,8 д.е., если первый партнер вложит в предприятие 6 д.е., а второй партнер – 3 д.е.

6.18. Общая ценность груза достигнет максимального значения, равного 16,9, если на самолете перевозить только груз второго типа в количестве 42/13 у.е.

6.19. Максимального суммарного эффекта, равного 185, можно достичь, если 10 у.е. ресурса 1 вида распределить на первый объект и 15 у.е. этого же ресурса – на второй объект; 10,5 у.е. ресурса 2 вида распределить на первый объект и 9,5 у.е. этого же ресурса – на второй объект.

6.20. Фирма может достичь максимальной прибыли, равной 16,9 д.е., если станет выпускать в сутки 4,6 единиц товара первого вида и 1,4 единиц товара второго вида.

6.21. Для выплавки 1 т чугуна с наименьшими издержками, равными 0,1, необходимо смешивать шихтовые материалы первого, второго и третьего вида соответственно в соотношении 1:1:2.

6.22. Для получения одной весовой единицы пряжи наименьшей стоимости, равной 0,128 д.е., необходимо смешивать хлопок-волокна первого, второго и третьего вида в соотношении 20:15:12.

6.23. Для того, чтобы достичь максимальной полезности, равной $100000/81$, потребитель должен приобрести 20/3 ед. товара 1 вида, 100/9 ед. товара 2 вида, 50/3 ед. товара 3 вида.

6.24. Данный портфель должен содержать 24,8% ценных бумаг 1 вида, 11,8% ценных бумаг 2 вида и 63,4% ценных бумаг 3 вида. Максимальная доходность такого портфеля будет равна 0,0104.

6.25. Чтобы общие издержки концерна были минимальными и равными 17278 руб., первому предприятию необходимо изготовить 91 изделий, а второму предприятию – 89 изделий.

Рекомендуемая литература

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1993.
2. Бехмурзаев В.А. Методы оптимизации: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1990.
3. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. – СПб.: Изд-во «Лань», 2000.
4. Козлова С.И., Мастяева И.Н., Скворцова Г.В. Нелинейное программирование: Учеб. пособие. – М.: Моск. экон.-стат. ин-т, 1983.
5. Красовская М.А. Методы и алгоритмы нелинейного программирования в АСУ: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1994.
6. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование: Учеб. пособие/ под общ. ред. А.В. Кузнецова. – Мн.: Выш. шк., 1994.
7. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1995.
8. Нестеров Ю.Е. Эффективные методы в нелинейном программировании. – М.: Радио и связь, 1989.
9. Петухов Л.В., Серегин Г.А. Методы решения задач выпуклого программирования: Учеб. пособие. – Л.: Ленингр. ун-т, 1991.
10. Шананин Н.А. Нелинейное программирование: Учеб. пособие. – М.: МГУ, 1989.

Оглавление

Введение	3
Глава 6. Задачи нелинейного программирования	7
6.1. Общая задача нелинейного программирования и ее экономическая интерпретация.....	7
6.2. Метод множителей Лагранжа для решения задачи нелинейного программирования с ограничениями-равенствами.....	10
6.3. Задача выпуклого программирования.....	15
6.4. Задача квадратичного программирования и ее решение.....	23
6.5. Решение задач нелинейного программирования с сепарабельными функциями.....	30
6.6. Задачи дробно-линейного программирования и их решение	36
6.7. Решение задач нелинейного программирования с помощью градиентных методов.....	41
6.8. Решение задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями	45
6.9. Методы внешних штрафных функций	51
6.10. Методы барьерных функций	55
Задачи	57
Ответы к задачам	66
Рекомендуемая литература	69

Учебное издание
Кустова Валентина Ильинична

**Исследование операций.
Нелинейное программирование в экономике**

Учебное пособие

Часть IV

Издается в авторской редакции

ИД №06318 от 26.11.01

Подписано в печать 11.06.02. Формат 60х90 1/16. Бумага офсетная.

Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,5. Уч.-изд. л. 4. Тираж 300 экз.

Заказ 2133.

Издательство Байкальского государственного университета экономики и
права.

664015, Иркутск, ул. Ленина, 11.

Отпечатано в ИПО БГУЭП