

**МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ЗАОЧНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ**

Кафедра физики

## **ФИЗИКА**

**Раздел 1. Физические основы механики.**

Основные законы и формулы.  
Методические указания к решению задач.

Факультеты все

Специальности все

Санкт-Петербург

1997

Утверждено редакционно-издательским советом института.

УДК 53(07)

Физика. Раздел 1. "Физические основы механики". Основные законы и формулы. Методические указания к решению задач. - СПб.:СЗПИ, 1997, - 27 с., ил. 4.

Данное учебно-методическое пособие содержит основные законы и формулы физики, рекомендации к решению задач, примеры решения задач и рекомендуемую литературу по разделу "Физические основы механики", а также справочные таблицы. Пособие составлено в соответствии с программой по физике для инженерных специальностей высших учебных заведений.

Рассмотрено на заседании кафедры физики.

Одобрено методической комиссией факультета радиоэлектроники.

Рецензенты: кафедра физики СЗПИ (и.о.зав.каф. физики ;

В.А.Подхалюзин, канд. техн. наук, доц.);

А.Г.Дмитриев, докт. физ.-мат. наук, проф.каф.

экспериментальной физики СПбГТУ.

Составители: А.С.Иванов, канд. техн. наук, доц.

Ю.А.Карташов, канд. техн. наук, проф.

Е.А.Лиходаева, канд. техн. наук, доц.

И.Г.Орехова, канд. техн. наук, доц.

А.Я.Поляков, ст.преп.

К.А.Стабровский, канд. физ.-мат.наук, доц.

А.Б.Федорцов, докт. физ.-мат. наук, проф.

Научные редакторы: Ю.А.Карташов, канд. техн. наук, проф.

И.В.Попов, канд. физ.-мат. наук, доц.

## Предисловие

Цель настоящего учебно-методического пособия - оказание помощи студентам СЗПИ всех специальностей в изучении курса физики.

Основной учебный материал пособия содержит шесть разделов физики, изданных отдельными брошюрами:

1. Физические основы механики.
2. Электростатика. Постоянный электрический ток.
3. Магнитостатика. Электромагнетизм.
4. Колебания и волны. Волновая оптика.
5. Молекулярная физика. Термодинамика.
6. Квантовая оптика. Физика атома. Элементы квантовой механики. Физика твердого тела. Физика атомного ядра.

В каждом из разделов приведены основные формулы и примеры решения задач.

Кроме того, в пособии даны общие методические указания, список рекомендуемой учебной литературы и справочные таблицы.

### **Общие методические указания к решению задач, выполнению и оформлению контрольных работ**

1. В зависимости от объема изучаемого курса физики студенты выполняют разное число контрольных работ:

- односеместровый курс физики - две контрольные работы;
- двухсеместровый курс физики - три контрольные работы;
- трехсеместровый курс физики - пять контрольных работ.

2. Контрольные работы выполняются в школьной тетради, на обложке которой приводятся сведения о студенте (фамилия, имя, отчество, факультет, шифр, номер специальности), а также номер контрольной работы, номер варианта и номера всех задач контрольной работы.

3. Условие каждой задачи переписывается полностью, без сокращений.

4. Решения сопровождаются подробными пояснениями, с обязательным использованием рисунков, выполненных чертежными инструментами. При этом оставляются поля и промежутки не менее 10 мм между строками для замечаний преподавателя.

5. Последовательность решения задач:

а) вводятся буквенные обозначения всех используемых физических величин;

б) под рубрикой "Дано" кратко записывается условие задачи с переводом единиц в систему СИ;

в) приводится рисунок, поясняющий условие;

г) формулируются физические законы и обосновываются возможности их использования при решении данной задачи;

д)на основе сформулированных законов составляются уравнения для искомых величин в системе СИ;

е)находятся решения этих уравнений и выводятся рабочие формулы в общем виде;

ж)по рабочим формулам проверяется размерность искомых величин;

и)проводятся вычисления (с точностью не более 2 - 3 значащих цифр) в системе СИ. Числовые значения величин записываются в виде десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой, умноженной на соответствующую степень десяти.

6.В конце контрольной работы приводится список использованной литературы.

Выполненная контрольная работа сдается на рецензию преподавателю по крайней мере за одну - две недели до экзамена (зачета) по физике. После рецензирования вносятся исправления в решения задач в соответствии с замечаниями преподавателя. Исправленные решения помещаются в конце тетради с контрольной работой, которая сдается на повторную рецензию.

Зачет по контрольной работе принимается преподавателем в процессе собеседования по правильно решенной и отрецензированной контрольной работе.

## Литература

### Основная

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики М.: Высшая школа, 1989.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. М.: Наука, 1982 и др.издания.
3. Савельев И.В. Курс физики. Т.1. М.: Наука, 1989.

### Дополнительная

4. Комаровских К.Ф. и др. Физические основы механики. Текст лекций. Л.: СЗПИ. 1989.
5. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука. 1990.
6. Чертов А.Б., Воробьев А.А. Задачник по физике. М.: Высшая школа. 1988, 1991.

# КИНЕМАТИКА

## Основные законы и формулы

Уравнение прямолинейного движения точки (вдоль оси X)

$$x = f(t)$$

где  $f(t)$  - некоторая функция времени.

Средняя скорость за промежуток времени  $\Delta t$

$$\langle V_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

где  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $x_1$  - положение точки в момент времени  $t_1$ ,  $x_2$  - положение точки в момент  $t_2$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Мгновенная скорость

$$V_x = \frac{dx}{dt}.$$

Средняя путевая скорость

$$\langle V_s \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где  $\Delta S$  - путь, пройденный точкой за время  $\Delta t$ .

Мгновенная путевая скорость

$$V_s = \frac{ds}{dt}.$$

Уравнение движения точки по окружности

$$\varphi = \varphi(t),$$

где  $\varphi$  - угловое положение точки в момент времени  $t$ .

Угловая скорость точки

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловая скорость при равномерном движении по окружности

$$\omega = 2\pi n,$$

где  $n$  - число оборотов в секунду.

Угловое ускорение

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Связь между линейными и угловыми величинами

$$V = \omega R,$$

$$a_\tau = \beta R,$$

$$a_n = \omega^2 R,$$

где  $V$  - линейная скорость точки (направлена по касательной к окружности),

$a_\tau$  - тангенциальное ускорение (направлено по касательной),  $a_n$  -

нормальное ускорение (направлено к центру окружности),  $R$  - радиус окружности.

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}.$$

### Примеры решения задач

Пример 1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси X имеет вид  $X = A + Bt + Ct^3$ , где  $A = 2$  м;  $B = 1$  м/с;  $C = -0,5$  м/с<sup>3</sup>.

Найти координату, скорость и ускорение точки в момент времени 2с.

Дано:

$$x = A + Bt + Ct^3$$

$$A = 2 \text{ м}$$

$$B = 1 \text{ м/с}$$

$$C = -0,5 \text{ м/с}^3$$

$$t = 2 \text{ с}$$

---

$$x - ? \quad V - ? \quad a - ?$$

Решение. Координату точки найдем, подставив в уравнение движения числовые значения коэффициентов A, B и C и времени,

$$x = (2 + 1 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2^3) \text{ м} = 0.$$

Т.к. требуется найти скорость и ускорение в определенный момент времени ( $t = 2$  с), то это значит нужно определить мгновенные величины  $V_x$  на  $x$ .

Мгновенная скорость есть первая производная от координаты по времени

$$V_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Ускорение точки найдем, взяв первую производную от скорости по времени,

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 6Ct.$$

Произведя вычисления для момента времени  $t = 2$  с, получим

$$V_x = (1 - 3 \cdot 0,5 \cdot 2^2) \text{ м/с} = -5 \text{ м/с},$$

$$a_x = 6(-0,5) \cdot 2 \text{ м/с}^2 = -6 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2. Диск радиусом 0,1 м, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением  $0,5$  рад/с<sup>2</sup>. Найти тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска через две секунды после начала вращения.

Дано:

Диск

$$R = 0,1 \text{ м}$$

$$\omega_{(0)} = 0$$

$$\beta = 0,5 \text{ рад/с}^2$$
$$t = 2 \text{ с}$$

---

$$a_\tau - ? \quad a_n - ? \quad a = ?$$

Решение. Тангенциальное и нормальное ускорение точки вращающегося тела выражаются формулами

$$a_\tau = \epsilon R, \quad (1)$$

$$a_n = \omega^2 R, \quad (2)$$

где  $\omega$  - угловая скорость тела,  $\epsilon$  - его угловое ускорение,  $R$  - радиус диска.

В условии задано угловое ускорение, которое определяется выражением

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}. \quad (3)$$

Следовательно, угловая скорость равна

$$\omega = \beta t + \omega(0), \quad (4)$$

причем по условию начальная угловая скорость  $\omega(0) = 0$ . Учитывая соотношения (2) и (4), получаем формулу для нормального ускорения

$$a_n = \omega^2 R = \beta^2 t^2 R.$$

В момент времени  $t = 2$  с нормальное ускорение

$$a_n = \beta^2 t^2 R = 0,5^2 \cdot 2^2 \cdot 0,1^2 = 0,1 \text{ м/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \beta R = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{10^{-2} + 0,25 \cdot 10^{-2}} = 1,1 \cdot 10^{-1} \text{ м/с}^2.$$

# ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

## Основные законы и формулы

Импульс тела

$$\vec{P} = m\vec{v},$$

где  $m$  - масса тела.

Второй закон Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где  $F$  - сила, действующая на тело.

Второй закон Ньютона для промежутка времени  $\Delta t$

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \langle \vec{F} \rangle,$$

где  $\langle \vec{F} \rangle$  - среднее значение силы за время  $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt,$$

$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$  - изменение импульса тела,  $\vec{p}_1$  - импульс тела в момент  $t_1$ ,  $\vec{p}_2$  - импульс тела в момент  $t_2$ .

Закон сохранения импульса для двух тел

$$\vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = \text{const},$$

где  $\vec{p}_1(t)$  и  $\vec{p}_2(t)$  - импульсы первого и второго тела в произвольный момент времени  $t$ .

Закон Гука

$$F = -kx,$$

где  $k$  - коэффициент жесткости пружины,  $x$  - деформация пружины,  $F$  - возвращающая сила.

Закон всемирного тяготения

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где  $G$  - гравитационная постоянная,  $m_1$  и  $m_2$  - массы взаимодействующих материальных точек,  $r$  - расстояние между материальными точками.

Сила трения скольжения

$$F = fN,$$

где  $f$  - коэффициент трения скольжения,  $N$  - сила нормального давления.

## Примеры решения задач

Пример1. Пуля массой 9 г, скорость которой 600 м/с попадает в деревянную стену и застревает в ней. Найти среднюю силу удара и импульс, полученные стеной, если время соударения 10 мс.

Дано:

$$m = 9 \text{ г} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$v = 600 \text{ м/с}$$

$$\Delta t = 10 \text{ мс} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ с}$$

---

$\langle F \rangle$  - ?

$P_c$  - ?

Решение. В соответствии с законом сохранения импульса для замкнутой системы тел пуля+стена изменение импульса этой системы равно нулю

$$\Delta p_n + \Delta p_c = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta p_n$  - изменение импульса пули,  $\Delta p_c$  - изменение импульса стены.

Изменение импульса стены равно

$$\Delta p_c = p_{2c} - p_{1c}.$$

Начальный импульс стены  $p_1$  равен нулю, поэтому импульс, полученный стеной, равен

$$p_c = p_{2c} - \Delta p_c. \quad (2)$$

Согласно уравнению (1) изменение импульса стены есть

$$\Delta p_c = - \Delta p_n. \quad (3)$$

Изменение импульса пули равно

$$\Delta p_n = p_{2n} - p_{1n}.$$

Так как по условию задачи пуля застревает в стене, то  $p_{2n} = 0$  и, следовательно,

$$\Delta p_n = - p_{1n} = - m_n V_n.$$

Подставим полученное значение  $\Delta p_n$  в выражение (3) и затем из (2) находим

$$p_c = m_n V_n.$$

По второму закону Ньютона для средних значений имеем

$$\langle F_c \rangle \Delta t = \Delta p_c = p_c = m_n V_n.$$

Откуда средняя сила удара пули  $\langle F_c \rangle$  равна

$$\langle F_c \rangle = \frac{m_n V_n}{\Delta t}.$$

Произведя вычисления для заданных значений  $m_n = 9 \text{ г} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ ,  $V_n = 600 \text{ м/с} = 0,6 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ ,  $\Delta t = 10 \text{ мс} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ , получим:

$$p_c = m_n V_n = 9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6 \cdot 10^3 = 5,4 \text{ кг} \cdot \text{м/с};$$

$$\langle F_c \rangle = \frac{P_{cT}}{\Delta t} = \frac{5,4}{10 \cdot 10^{-3}} = 5,4 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

При этом сила  $\langle F_c \rangle$  направлена вдоль вектора начальной скорости пули перед ударом.

Пример2. В кузов тележки с песком общей массой 40 кг и движущейся по горизонтальному пути со скоростью 5 м/с попадает камень массой 10 кг и застревает в песке. Найти скорость тележки после соударения с камнем, если камень перед попаданием в тележку летел со скоростью 5 м/с под углом  $60^\circ$  к горизонту навстречу тележке (рис.1).

Силы внешнего сопротивления движению тележки не учитывать.

Дано:

$$m_T = 40 \text{ кг}$$

$$v_X^{(T)} = 5 \text{ м/с}$$

$$m_K = 10 \text{ кг}$$

$$V^{(K)} = 5 \text{ м/с}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

---


$$v_X^{(TK)} - ?$$

Решение. Так как в задаче пренебрегаются силы сопротивления горизонтальному движению тележки, то для такого движения система тел тележка+камень является замкнутой и для этой системы тел выполняется закон сохранения импульса (точнее, закон сохранения горизонтальной составляющей импульса).

Введем декартову координатную систему, выбрав в качестве тела отсчета дорогу, по которой движется тележка и направив ось X вдоль первоначального движения тележки.

В таком случае закон сохранения для X-составляющей импульса имеет вид

$$\Delta P_{\text{сист.х}} = 0, \quad (4)$$

где  $\Delta P_{\text{сист.х}}$  - изменение X-составляющей импульса системы тел тележка+камень.

В уравнении (4)

$$\Delta P_{\text{сист.х}} = \Delta P_{ТХ} + \Delta P_{КХ}, \quad (5)$$

где  $\Delta P_{ТХ}$  - изменение X-составляющей импульса тележки,  $\Delta P_{КХ}$  - изменение X-составляющей импульса камня.

Обозначим начальные X-составляющие скоростей тележки и камня через  $v_X^{(T)}$  и  $v_X^{(K)}$ , конечную скорость тележки с застрявшим в ней камнем через  $v_X^{(TK)}$  массы тележки и камня соответственно через  $m_T$  и  $m_K$ .

Тогда изменения импульсов тележки и камня равны

$$\Delta p_{ТХ} = m_T v_X^{(TK)} - m_T v_X^{(T)},$$

$$\Delta p_{кх} = m_{к} v_{х}^{(тк)} - m_{к} v_{х}^{(к)},$$

и, в соответствии с выражениями (4) и (5), находим

$$m_{т} v_{х}^{(тк)} - m_{т} v_{х}^{(т)} + m_{к} v_{х}^{(тк)} - m_{к} v_{х}^{(к)} = 0. \quad (6)$$

Из этого уравнения получаем искомую скорость тележки с камнем

$$v_{х}^{(тк)} = \frac{m_{т} v_{х}^{(т)} + m_{к} v_{х}^{(к)}}{m_{т} + m_{к}}.$$

Подставим в это уравнение данные из условия задачи. При этом учтем, что камень движется навстречу тележке, так что X-составляющая его скорости отрицательна, причем

$$v_{х}^{(к)} = v^{(к)} \cos \alpha = -5 \cos 60^{\circ} = -5 \cdot 0,5 = -2,5 \text{ м/с}$$

Итак,

$$v_{х}^{(тк)} = \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 2,5}{40 + 10} = \frac{175}{50} = 3,5 \text{ м/с}.$$

**Пример3.** В лодке, стоящей на глади озера, сидит человек. Найти расстояние, на которое переместится лодка, если человек перейдет с кормы на нос лодки, расстояние между которыми 3 м. Масса человека в два раза меньше массы лодки. Силами сопротивления воды и воздуха движению человека и лодки пренебречь.

Дано:

$$m_{ч} = \frac{1}{2} m_{л}$$

$$L = 3 \text{ м}$$

---


$$l = ?$$

**Решение.** Как и в предыдущем примере, векторная сумма горизонтально направленных внешних сил равна нулю (т.к. не учитываются силы сопротивления воды и воздуха). Тогда систему человек+лодка можно считать замкнутой для горизонтального движения. Поэтому, согласно закону сохранения импульса, изменение горизонтальной составляющей импульса данной системы тел равно нулю. Следовательно сумма горизонтальных составляющих импульсов человека и лодки в любой момент времени должна быть равна сумме начальных горизонтальных составляющих импульсов этих тел. По условию задачи начальные импульсы человека и лодки равны нулю.

Направив ось X вдоль лодки (от кормы к носу), получим для X-составляющих импульсов

$$p_{\text{сист } х} = m_{л} v_{х}^{(л)} + m_{ч} v_{х}^{(ч)} = 0, \quad (7)$$

где  $m_{\text{л}}$  и  $m_{\text{ч}}$  - массы лодки и человека,  $v_x^{(л)}$  и  $v_x^{(ч)}$  - X-составляющие скорости лодки и человека относительно поверхности озера в любой момент времени (полагаем поверхность озера телом отсчета).

Необходимо помнить, что законы сохранения записываются относительно одного и того же тела отсчета. При смене тел отсчета и законы меняют свой вид.

Скорость человека относительно поверхности озера  $v_x^{(ч)}$  удобно представить через скорость человека  $v_x^{(ч/л)}$  относительно лодки

$$v_x^{(ч)} = v_x^{(ч/л)} + v_x^{(л)}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (7), получаем

$$m_{\text{л}} v_x^{(л)} + m_{\text{ч}} (v_x^{(ч/л)} + v_x^{(л)}) = 0,$$

и, объединяя члены при  $v_x^{(л)}$ , находим

$$v_x^{(л)} = - v_x^{(ч/л)} m_{\text{ч}} / (m_{\text{л}} + m_{\text{ч}}). \quad (8)$$

Таким образом, скорости лодки и человека в каждый момент времени пропорциональны друг другу. Знак минус в полученной формуле показывает, что лодка движется против направления движения человека.

Умножим уравнение (8) на бесконечно малое время  $dt$

$$v_x^{(л)} dt = - dt v_x^{(ч/л)} m_{\text{ч}} / (m_{\text{л}} + m_{\text{ч}}). \quad (9)$$

Произведение  $v_x^{(л)} dt$  в формуле (9) - это расстояние  $dl$ , пройденное лодкой относительно поверхности озера за время  $dt$ ,  $v_x^{(ч/л)} dt$  - расстояние  $dL$ , пройденное за это же время человеком относительно лодки.

Поэтому уравнение (9) можно переписать в виде

$$dl = - dL m_{\text{ч}} / (m_{\text{л}} + m_{\text{ч}}).$$

Интегрируя это уравнение по всему промежутку времени перемещения человека от кормы к носу лодки, окончательно получим

$$l = - L m_{\text{ч}} / (m_{\text{л}} + m_{\text{ч}}).$$

Произведя вычисления для заданных значений  $L = 3$  м,  $m_{\text{ч}} = m_{\text{л}}/2$ , получим

$$l = - \frac{m_{\text{л}}/2}{m_{\text{л}} + m_{\text{л}}/2} \cdot 3 = -1 \text{ м}.$$

## ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

### Основные законы и формулы

Момент силы

$$M = Fl,$$

где  $M$  - момент силы,  $l$  - плечо, равное расстоянию от оси вращения до линии действия силы.

Момент инерции материальной точки

$$I = mr^2,$$

где  $I$  - момент инерции,  $r$  - расстояние точки до оси вращения.

Момент инерции тела относительно данной оси вращения

$$I = \sum_i m_i r_i^2,$$

где  $i$  - номера материальных точек, на которые разбито тело,  $m_i$  и  $r_i$  - массы и расстояния точек до оси вращения.

Моменты инерции  $I_0$  относительно оси симметрии некоторых тел:

а) обруча радиуса  $R$  и массы  $m$

$$I_0 = mR^2,$$

б) диска радиуса  $R$  и массы  $m$

$$I_0 = mR^2 / 2,$$

в) стержня относительно оси перпендикулярной стержню

$$I_0 = ml^2 / 12,$$

где  $l$  - длина,  $m$  - масса стержня;

г) шара радиуса  $r$  и массы  $m$

$$I_0 = 2mR^2 / 5.$$

Момент инерции тела относительно оси, параллельной оси симметрии тела (теорема Штейнера),

$$I = I_0 + md^2,$$

где  $d$  - расстояние оси вращения до оси симметрии.

Основное уравнение динамики вращательного движения

$$M = I \beta.$$

Момент импульса тела относительно оси вращения

$$L = I \omega.$$

Момент импульса материальной точки

$$L = mvl,$$

где  $v$  - скорость точки,  $l$  - плечо импульса, равное расстоянию от оси вращения до линии вектора скорости.

Закон сохранения момента импульса системы двух тел относительно общей оси вращения

$$L_1(t) + L_2(t) = \text{const},$$

где  $L_1(t)$  и  $L_2(t)$  - моменты импульса первого и второго тела относительно некоторой общей оси вращения в произвольный момент времени  $t$ .

Формулы динамики вращательного движения получаются из формул динамики прямолинейного (поступательного) движения заменой параметров по нижеприведенной таблице соответствия поступательного и вращательного движений.

Таблица соответствия

Поступательное движение	Вращательное движение
Перемещение $\Delta x$	Угловое перемещение $\Delta \varphi$
Скорость $V_x = \frac{dx}{dt}$	Угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Угловое ускорение $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$
Масса $m$	Момент инерции $I$
Импульс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Например, основное уравнение динамики поступательного движения (второй закон Ньютона)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Заменяя в этом выражении силу  $\vec{F}$  на момент силы  $\vec{M}$ , а импульс  $\vec{p}$  на момент импульса  $\vec{L}$ , получаем одно из выражений основного уравнения динамики вращательного движения

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

### Примеры решения задач

Пример1. Диск диаметром 20 см и массой 2 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Угол поворота диска меняется со временем по закону  $\varphi = A + Bt + Ct^2$ , где  $C = -2 \text{ рад/с}^2$ . Определить величину тормозящей силы, приложенной к ободу диска.

Дано:

Диск

$$D = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$$m = 2 \text{ кг}$$

$$\varphi = A + Bt + Ct^2$$

$$C = -2 \text{ рад/с}^2$$

F - ?

Решение. Плечо тормозящей силы известно. В данном случае оно равно радиусу диска  $R$ . Поэтому тормозящую силу, приложенную к ободу, можно найти из соотношения

$$F = M / R .$$

Тормозящий момент  $M$  может быть вычислен из основного уравнения динамики вращательного движения  $M = I\beta$ , если будут определены угловое ускорение  $\beta$  (в данном случае замедление) и момент инерции диска  $I$ .

Для расчета этих двух величин есть все необходимые данные:

$$\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2 \text{ С}$$

$$I = mR^2 / 2 \text{ - момент инерции диска.}$$

Таким образом, результирующая формула имеет вид

$$F = M / R = \frac{2CmR^2 / 2}{R} = CmR = CmD / 2 .$$

Проводя вычисления, получим

$$F = -2(1/2) \text{ рад/с}^2 \cdot 2 \text{ кг} \cdot 0,2 \text{ м} = 0,4 \text{ Н.}$$

Пример2. Вал в виде сплошного цилиндра массой 10 кг насажен на горизонтальную ось. На вал намотан шнур, к свободному концу которого подвешена гиря массой 2 кг (рис.2). С каким ускорением будет опускаться гиря, если её предоставить самой себе?

Дано:

Цилиндр

$$m_1 = 10 \text{ кг}$$

$$m_2 = 2 \text{ кг}$$

---

а - ?

Решение. Линейное ускорение  $a$  гири равно тангенциальному ускорению точек вала, лежащих на его цилиндрической поверхности, и связано с угловым ускорением вала соотношением

$$a = \beta r , \tag{1}$$

где  $r$ - радиус вала.

Угловое ускорение вала выражается основным уравнением динамики вращающегося тела

$$\beta = M / I, \tag{2}$$

где  $M$  - вращающий момент, действующий на вал;  $I$  - момент инерции вала. Рассматриваем вал как однородный цилиндр (диск). Тогда его момент инерции относительно геометрической оси равен

$$I = m_1 r^2 / 2$$

Вращающий момент  $M$ , действующий на вал, равен произведению силы  $T$  натяжения шнура на радиус вала

$$M = T r.$$

Силу натяжения шнура найдем из следующих соображений. На гирию действуют две силы: сила тяжести  $m_2 g$ , направленная вниз, и сила  $T$  натяжения шнура, направленная вверх. Равнодействующая этих сил вызывает равноускоренное движение гири. По второму закону Ньютона,  $m_2 g - T = m_2 a$ , откуда  $T = m_2 (g - a)$ .

Таким образом, вращающий момент

$$M = m_2 (g - a) r.$$

Подставив в формулу (2) полученные выражения  $M$  и  $I$ , найдем угловое ускорение вала

$$\beta = \frac{m_2 (g - a) r}{m_1 r^2 / 2} = \frac{2m_2 (g - a)}{m_1 r}.$$

Для определения линейного ускорения гири подставим это выражение

в формулу (1). Получим  $a = \frac{2m_2 (g - a)}{m_1}$ , откуда

$$a = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g = 2,80 \text{ м / с}^2.$$

## РАБОТА И ЭНЕРГИЯ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

### Основные законы и формулы

Работа при прямолинейном движении

$$\Delta A = F_x \Delta x,$$

где  $F_x$  - проекция силы на направление движения.

Работа при вращении абсолютно твердого тела

$$\Delta A = M \Delta \varphi.$$

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad \text{или} \quad E_k = \frac{p^2}{2m}.$$

Кинетическая энергия абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси,

$$E_k = I \omega^2 / 2 \quad \text{или} \quad E_k = L^2 / 2 I$$

Потенциальная энергия:

а) упругодеформированной пружины

$$E_n = \frac{kx^2}{2};$$

б) двух тяготеющих материальных точек

$$E_n = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Полная механическая энергия системы

$$E = E_k + E_n.$$

Закон сохранения механической энергии в замкнутой системе тел, в которой действуют только консервативные силы

$$E(t) = E_k(t) + E_n(t) = \text{const},$$

где  $t$  - произвольный момент времени.

Работа, совершаемая внешними силами,

$$\Delta A = E_2 - E_1,$$

где  $E_2 - E_1 = \Delta E$  - увеличение полной энергии системы.

### Примеры решения задач

Пример 1. Шар массой 1 кг, движущийся горизонтально, столкнулся с неподвижным шаром массой 12 кг. Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Дано:

$$m_1 = 1 \text{ кг}$$

$$m_2 = 12 \text{ кг}$$

$$v_2 = 0$$

Упр. удар

$$\varepsilon = E_k^{(2)} / E_k^{(1)} - ?$$

Решение. При абсолютно упругом центральном соударении выполняются законы сохранения импульса и энергии. Поэтому с учетом того, что второй шар до соударения был неподвижен, получаем два уравнения

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $v_1$  - скорость первого шара до удара,  $u_1$  и  $u_2$  - скорости первого и второго шаров после удара.

При этом, из закона сохранения импульса следует, что после удара первый и второй шар движутся вдоль прямой, по которой двигался первый шар до удара.

Доля энергии, переданная первым шаром второму, определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{E_k^{(2)}}{E_k^{(1)}} = \frac{m_2 u_2^2 / 2}{m_1 v_1^2 / 2} = \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{u_2}{v_1} \right)^2, \quad (2)$$

где  $E_k^{(1)}$  - кинетическая энергия первого шара до удара,  $E_k^{(2)}$  - кинетическая энергия второго шара после удара.

Решая систему (1), получаем

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставив  $u_2$  в формулу (2) и сократив на  $v_1$  и  $m_1$ , находим

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1} \left[ \frac{2m_1 v_1}{v_1 (m_1 + m_2)} \right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (3)$$

Соотношение (3) симметрично относительно масс шаров  $m_1$  и  $m_2$ , поэтому доля переданной энергии не изменится, если массы шаров поменять местами.

Подставляя в выражение (3) численные значения  $m_1$  и  $m_2$ , получим

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot 1 \cdot 12}{(1 + 12)^2} = 0,284.$$

Отметим, что эта задача приближенно описывает процесс уменьшения энергии нейтронов при их столкновениях с ядрами углерода в замедлителе уранового реактора.

**Пример2.** С наклонной плоскости высотой 1 м и длиной 10 м скользит тело массой 1 кг (рис.3). Найти: 1) кинетическую энергию тела у основания плоскости, 2) скорость тела у основания плоскости. Коэффициент трения на всем пути считать постоянным и равным 0,05.

Дано:

$$h = 1 \text{ м}$$

$$l = 10 \text{ м}$$

$$m = 1 \text{ кг}$$

$$f = 0,05$$

---


$$E_k - ? \quad v - ?$$

**Решение.** Потенциальная энергия тела при скольжении с наклонной плоскости переходит в кинетическую энергию и в работу против силы трения

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + F_{\text{тр}} l. \quad (1)$$

Но  $h = l \sin \alpha$ , где  $\alpha$  - угол наклона плоскости.

$$F_{TP} = f m g \cos \alpha .$$

1) Кинетическую энергию тела найдем из (1)

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = mgh - F_{TP}l = mgl (\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

где  $\sin \alpha = h / l = 0,1$  и  $\cos \alpha = 0,995$ .

Подставляя численные значения, получаем  $E_k = 4,9$  Дж.

2) Скорость тела получим по найденной кинетической энергии

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = 3,1 \text{ м / с} .$$

Пример 3. При вертикальном подъеме груза массой 4 кг на высоту 9 м постоянной силой была совершена работа 80 Дж. С каким ускорением поднимали груз?

Дано:

$$m = 4 \text{ кг}$$

$$h = 2 \text{ м}$$

$$\Delta A = 80 \text{ Дж}$$

---


$$a - ?$$

Решение. Работа затрачивается на увеличение потенциальной энергии груза и на сообщение ему ускорения

$$A = mgh + mah .$$

Отсюда 
$$a = \frac{A - mgh}{mh} .$$

Подставляя численные значения, имеем

$$a = \frac{80 - 4 \cdot 9,81 \cdot 2}{4 \cdot 2} = 0,19 \text{ м / с}^2 .$$

Пример 4. Стальная пружина под действием силы 300 Н удлинилась на 2 см. Какой потенциальной энергией будет обладать эта пружина при растяжении на 10 см?

Дано:

$$F_1 = 300 \text{ Н}$$

$$x_1 = 2 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$x_2 = 10 \text{ см} = 10^{-1} \text{ м}$$

---


$$E_n - ?$$

Решение. Потенциальная энергия растянутой пружины равна

$$E_n = \frac{kx_2^2}{2} . \quad (1)$$

При этом коэффициент жесткости пружины можно определить из закона Гука

$$F = kx,$$

где  $F$  - величина внешней силы. Отсюда получаем

$$k = F/x = F_1 / x_1. \quad (2)$$

Учитывая выражения (1) и (2), получаем

$$E_n = \frac{F_1 x_2^2}{2x_1}.$$

Подставляя численные значения силы и удлинений, находим

$$E_n = \frac{300 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 75 \text{ Дж.}$$

Пример 5. Стержень длиной 1,5 м и массой 10 кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня (рис.4). В нижний конец стержня ударяет пуля массой 10 г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью 500 м/с, и застревает в стержне. На какой угол отклонится стержень после удара?

Дано:

Стержень

$$l = 1,5 \text{ м}$$

$$M = 10 \text{ кг}$$

$$m = 10 \text{ г} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$v_0 = 500 \text{ м/с}$$

---

$\varphi = ?$

Решение. Удар пули следует рассматривать как неупругий: после удара и застрявшая пуля, и точки стержня вблизи неё будут двигаться с одинаковыми скоростями.

Рассмотрим подробнее явления, происходящие при ударе. Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью  $\omega$  и сообщает ему кинетическую энергию

$$T = I \omega^2 / 2, \quad (1)$$

где  $I$  - момент инерции стержня относительно оси вращения.

Затем стержень поворачивается на искомый угол  $\varphi$ , причем центр масс его поднимается на высоту  $h = (l/2)(1 - \cos \varphi)$ .

В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией

$$E_{\text{п}} = Mg (l/2)(1 - \cos \varphi). \quad (2)$$

Потенциальная энергия получена за счет кинетической энергии и равна ей по закону сохранения энергии. Приравняв правые части равенства (1) и (2), получим

$$Mg(1/2)(1-\cos\varphi) = I\omega^2/2.$$

Отсюда

$$\cos\varphi = 1 - (I\omega^2 / Mgl). \quad (3)$$

Момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через конец стержня, можно найти по теореме Штейнера

$$I = I_0 + M \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} Ml^2 + \frac{1}{4} Ml^2 = \frac{1}{3} Ml^2.$$

Подставив в формулу выражение для момента инерции стержня, получим

$$\cos\varphi = 1 - (l\omega^2 / 3g). \quad (4)$$

Чтобы из выражения (4) найти  $\varphi$ , необходимо предварительно определить значение  $\omega$ . В момент удара на пулю и на стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому при ударе пули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса.

В начальный момент удара угловая скорость стержня  $\omega_0 = 0$ , поэтому его момент импульса  $L_{01} = I\omega_0 = 0$ . Пуля коснулась стержня и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня около оси. Начальный момент импульса пули  $L_{02} = mv_0l$ , где  $r = l/2$  - расстояние точки попадания от оси вращения. В конечный момент удара стержень имел угловую скорость  $\omega$ , а пуля - линейную скорость  $v$ , равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии  $r$  от оси вращения. Так как  $v = \omega r$ , то конечный момент импульса пули

$$L_2 = mvr = mr^2\omega.$$

Применив закон сохранения импульса, можем написать

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2 \quad \text{или} \quad mv_0r = I\omega + mr^2\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{mv_0r}{I + mr^2} = \frac{\frac{mv_0l}{2}}{\frac{Ml^2}{3} + \frac{ml^2}{4}} = \frac{m}{\frac{M}{3} + \frac{m}{4}} \frac{v_0}{2l}. \quad (5)$$

Выполнив вычисления по формуле (5), а затем по формуле (4), найдем  $\omega = 0,5$  рад/с;  $\cos\varphi = 0,987$ ;  $\varphi = 9^\circ 20'$ .

# ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

## Основные законы и формулы

Релятивистская масса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где  $m_0$  - масса покоя частицы,  $\beta$  - скорость частицы, выраженная в долях скорости света в вакууме,  $\beta = v/c$ ,

Кинетическая энергия свободной частицы

$$E_k = E - E_0,$$

где  $E_0 = m_0 c^2$  - энергия покоя частицы,  $E$  - полная энергия свободной частицы

$$E = mc^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Импульс релятивистской частицы

$$p = mv = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где  $m_0 c$  называется комptonовским импульсом частицы.

Связь между энергией и импульсом свободной частицы

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2,$$

или

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}.$$

Закон изменения длины отрезка  $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ , где  $l$  и  $l_0$  - длины отрезков, покоящегося и движущегося со скоростью  $v = \beta c$  относительно наблюдателя, соответственно.

Изменение промежутка времени между двумя событиями

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2},$$

где  $\Delta t_0$  и  $\Delta t$  - промежутки времени между двумя событиями в системе координат, покоящейся и движущейся относительно наблюдателя, соответственно.

Релятивистский закон сложения скоростей

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}},$$

где  $v$  - скорость системы координат, движущейся относительно наблюдателя,  $u$  - скорость частицы относительно движущейся системы координат.

### Примеры решения задач

Пример 1. Определить импульс и кинетическую энергию электрона, движущегося со скоростью равной 0,9 скорости света. Оценить относительную погрешность (в процентах) при использовании формул классической механики.

Дано:

электрон

$$\beta = 0,9$$

---


$$p - ? \quad E_k - ?$$

$$\Delta p^{(0)} / p - ?$$

$$\Delta E_k^{(0)} / E_k - ?$$

Решение. Релятивистский импульс частицы имеет вид:

$$p = mv = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1)$$

При этом комптоновский импульс  $m_0 c$  для электрона равен  $m_0 c = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8 = 2,73 \cdot 10^{-22}$  кг·м.

Подставляя в формулу (1) значение  $m_0 c$  и из условия задачи значение  $\beta = 0,9$ , находим

$$p = 2,73 \cdot 10^{-22} \cdot \frac{0,9}{\sqrt{1 - 0,81}} = 5,6 \cdot 10^{-22} \quad \text{кг·м/с.}$$

Значение импульса по формуле классической механики

$$p^{(0)} = m_0 v = m_0 c \beta = 2,46 \cdot 10^{-22} \quad \text{кг·м/с.}$$

Относительная ошибка в значении импульса при использовании формулы классической механики

$$\frac{\Delta p^{(0)}}{p} = \frac{|p - p^{(0)}|}{p} = \frac{5,6 \cdot 10^{-22} - 2,46 \cdot 10^{-22}}{5,6 \cdot 10^{-22}} = 0,56 = 56\% .$$

Кинетическая энергия в релятивистской механике имеет вид

$$E_k = E - E_0 = E_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (2)$$

Подставляя в формулу (2) числовые значения, получим

$$E_k = 9,1 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 0,81}} - 1 \right) = 8,19 \cdot 10^{-14} (2,29 - 1) = 1,06 \cdot 10^{-13} \quad \text{Дж.}$$

Классическая механика дает для кинетической энергии выражение

$$E_k^{(0)} = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 c^2 \beta^2}{2} = \frac{8,19 \cdot 10^{-14}}{2} \cdot 0,81 = 3,32 \cdot 10^{-14} \text{ Дж.}$$

Относительная погрешность в величине кинетической энергии при использовании формулы классической механики

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{|E_k - E_k^{(0)}|}{E_k} = \frac{1,06 \cdot 10^{-13} - 3,32 \cdot 10^{-14}}{1,06 \cdot 10^{-13}} = 0,69 = 69\%$$

Отметим, что энергия покоя электрона во внесистемных единицах равна 0,51 мэВ ( см. справочную таблицу ). Поэтому, согласно формуле (2), получаем значение кинетической энергии в МэВ

$$E_k = 0,51(2,29-1) = 0,66 \text{ МэВ .}$$

Пример 2. Определить релятивистский импульс электрона, обладающего кинетической энергией 15 МэВ.

Дано:

электрон

$$E_k = 1,5 \text{ МэВ}$$

---

р - ?

Решение. Релятивистский импульс частицы можно найти по формуле

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2E_0)} \quad (3)$$

Для электрона энергия покоя равна 0,51 МэВ. Подставляя в выражение (3) значение  $E_k$  тоже в МэВ, находим  $p = 1,9 \text{ МэВ/с}$ .

Внесистемная единица измерения импульса 1 МэВ/с ( см. справочную таблицу ) равна

$$\frac{1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = 5,33 \cdot 10^{-22} \text{ кг·м/с .}$$

Таким образом, получаем значение релятивистского импульса электрона в системе СИ

$$p = 1,9 \cdot 5,33 \cdot 10^{-22} = 10,13 \cdot 10^{-22} \text{ кг·м/с .}$$

## СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

### Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка			Приставка		
Наименование	Обозначение	Множитель	Наименование	Обозначение	Множитель
экса	Э	$10^{18}$	деци	д	$10^{-1}$
пэта	П	$10^{15}$	санتي	с	$10^{-2}$
тера	Т	$10^{12}$	милли	м	$10^{-3}$
гига	Г	$10^9$	микро	мк	$10^{-6}$
мега	М	$10^6$	нано	н	$10^{-9}$
кило	к	$10^3$	пико	п	$10^{-12}$
гекто	г	$10^2$	фемто	ф	$10^{-15}$
дека	да	$10^1$	атто	а	$10^{-18}$

### Греческий алфавит

Обозначения букв	Названия букв	Обозначения букв	Названия букв
Α, α	альфа	Ν, ν	ню
Β, β	бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	гамма	Ο, ο	омикрон
Δ, δ	дэльта	Π, π	пи
Ε, ε	эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	эта	Τ, τ	тау
Θ, θ	тэта	Υ, υ	ипсилон
Ι, ι	йота	Φ, φ	фи
Κ, κ	каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	ми	Ω, ω	омега

### Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Ускорение свободного падения	g	9,81 м/с <sup>2</sup>
Гравитационная постоянная	γ	6,67·10 <sup>-11</sup> м <sup>3</sup> /(кг·с <sup>2</sup> )
Скорость света в вакууме	c	3,00·10 <sup>8</sup> м/с

### Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	6,37·10 <sup>6</sup> м
Масса Земли	5,98·10 <sup>24</sup> кг
Радиус Солнца	6,95·10 <sup>8</sup> м
Масса Солнца	1,98·10 <sup>30</sup> кг
Радиус Луны	1,74·10 <sup>6</sup> м
Масса Луны	7,33·10 <sup>22</sup> кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	1,49·10 <sup>11</sup> м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	3,84·10 <sup>8</sup> м