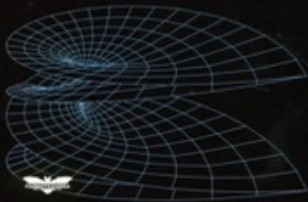


ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

В.А. Неганов
О.В. Осипов
С.Б. Раевский
Г.П. Яровой



**В. А. НЕГАНОВ, О. В. ОСИПОВ,
С. Б. РАЕВСКИЙ, Г. П. ЯРОВОЙ**

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Изд. 3-е, переработанное и дополненное

Под редакцией
Неганова В. А. и Раевского С. Б.

*Рекомендовано УМС по физике УМО по классическому
университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся по
специальностям 010701 – физика и
010801 – радиоп физика и электроника (2005 год)*

*Рекомендуется Государственным общеобразовательным учреждением
«Московский технический университет связи и информатики»
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлению 210300 «Радиотехника» и по специальностям
010701 – «Физика» и 010801 – «Радиоп физика и электроника».
Регистрационный номер рецензии 06
от 9 ноября 2007 года (2007 год)*

**Издательство «Радиотехника»
Москва, 2007**

УДК 537.87(075.3)

ББК 22.3

Н41

Рецензенты:

В. Ф. Кравченко — докт. физ.-мат. наук, проф. ИРЭ РАН;
В. Н. Митрохин — докт. техн. наук, проф. МГТУ им. Баумана;
кафедра радиопередающих и антенно-фидерных устройств
Московского авиационного института
(зав. кафедрой проф., докт. техн. наук *Д. И. Воскресенский*);
кафедра электроники физического факультета
Воронежского государственного университета
(зав. кафедрой проф., докт. физ.-мат. наук *А. М. Бобрешов*)

Неганов В. А., Осипов О. В., Раевский С. Б., Яровой Г. П.

Н41 Электродинамика и распространение радиоволн. Учебное пособие / Под ред.
В. А. Неганова и С. Б. Раевского. Изд. 3-е, доп. и перераб. — М.: Радиотехника,
2007. — 744 с., ил.

ISBN 978-5-88070-154-4

Книга написана активно работающими в области электродинамики учеными. Излагаются теория электромагнитного поля с акцентом на радиотехническую электродинамику и анализ волновых процессов; рассматриваются отражение и преломление волн, излучение и дифракция; описываются основные закономерности распространения электромагнитных волн в различных безграничных средах (изотропных, анизотропных, диспергирующих, неоднородных), в направляющих и резонансных структурах, в природных условиях. Обсуждаются методы математического моделирования в электродинамике, опирающегося на применение ЭВМ.

Отличительной особенностью книги является обсуждение современных проблем электродинамики: расчет электромагнитных волн в ближних зонах излучающих структур (самосогласованный метод расчета), комплексных волн в волноведущих структурах и др.

Предназначается для студентов радиотехнических и радиофизических специальностей вузов, а также инженеров-радиотехников и радиофизиков.

Табл. 5. Ил. 280. Библиогр. 378 назв.

УДК 537.87(075.3)

ББК 22.3

ISBN 978-5-88070-154-4



ISBN 978-5-88070-154-4

© Радиотехника, 2007

© Неганов В. А., Осипов О. В.,

Раевский С. Б., Яровой Г. П., 2007

Предисловие к третьему изданию

Книга предназначена служить учебником по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн», который написан на основе прочитанных авторами курсов лекций в Поволжской государственной академии телекоммуникаций, Самарском государственном университете и Нижегородском государственном техническом университете. Авторы учебника являются активно работающими учеными в области электродинамики, постоянно следящими за развитием этой области науки. Поэтому настоящее издание является существенно дополненным и исправленным по сравнению с учебными изданиями, выпущенными в 2003 и 2005 годах [1, 2].

Традиционное содержание курса электродинамики для радиофизических и радиотехнических специальностей подлежит постоянному обновлению по мере появления новых идей, новых методов и технических приложений в этой области. Одной из наиболее важных тенденций в электродинамике, как и науки в целом, является все более возрастающее значение вычислительных методов, опирающихся на использование ЭВМ. Поэтому в книгу включена глава «электродинамические методы расчета устройств СВЧ и антенн», содержащая как традиционные методы решения граничных задач (проекционные методы, интегральные уравнения и т.д.), так и метод сингулярных интегральных уравнений (СИУ) применительно к электродинамике, разработанный одним из авторов книги. Особое место отведено некорректным задачам электродинамики, связанным с решением интегральных уравнений Фредгольма первого рода и на которые в учебной литературе по электродинамике долгое время не обращали особого внимания. Оказалось, что причиной появления таких задач часто является некорректность математических моделей задач, которую зачастую можно устранить с помощью метода СИУ.

Практически во всей известной учебной литературе подробно описаны свойства плоских волн, но мало внимания обращается на цилиндрические и сферические волны. Поэтому в новое издание включены п. 12.12, п.12.13, в которых подробно описан математический аппарат, позволяющий исследовать свойства цилиндрических и сферических волн.

В книге обращено внимание на проблему вычисления электромагнитных полей (ЭМП) в ближних зонах излучающих и волноведущих структур, которая является основной в задачах электромагнитной совместимости. В учебной и даже научной литературе эта проблема практически не рассматривалась: считалось, что математический аппарат, использующий интегральные соотношения с традиционными регулярными функциями Грина, и мощные ЭВМ позволяют определить ЭМП в любой точке пространства, в том числе и в непосредственной близости от антенны. Один из авторов книги, Неганов В.А., ввел в электродинамику понятия самосогласованные физическая и математическая модели электродинамических задач. Оказалось, что только для самосогласованной физической модели, используя самосогласованный метод, включающий в себя сингулярное интегральное представление (СИП) ЭМП, содержащее обобщенные функции, и СИУ для определения ЭМП на поверхности излучающей структуры, можно корректно определять ЭМП в ближней зоне. В книге на примерах диполя Герца (раздел 7.8) и полуволнового электрического вибратора (раздел 14.13) показана суть проблемы.

Еще одним новым моментом учебника является описание свойств комплексных волн и их роль в дифракционных задачах (автор — С.Б. Раевский).

В связи с практической необходимостью решения сложных электродинамических задач в настоящее время невозможно обойтись без автоматизированного проектирования устройств СВЧ и антенн. В учебнике дано введение в системы автоматизированного проектирования, основу которых составляет принцип декомпозиции сложного устройства на базовые элементы, расчет которых и составляет основную задачу электродинамики. Объединение же базовых элементов производят на основе матричной алгебры (матрицы рассеяния, передачи и т.д.). Традиционно этот раздел рассматривается в курсе «устройства СВЧ и антенны», причем под устройством СВЧ понимаются и антенны. На наш взгляд, включение глав 12 и 13 позволит студенту четче понять роль электродинамики в проектировании устройств СВЧ и антенн. Таким образом, главы 12 и 13 образуют «мост» от электродинамики к техническим расчетам конкретных устройств СВЧ и антенн.

По мнению авторов, введение двух градаций материала должно способствовать лучшему изучению курса. Разделы, обозначенные звездочкой, — более сложный материал, относительно громоздкие выводы, а также дополнительные компоненты. В разделах без звездочек описан минимально необходимый материал курса.

Материал, включенный в учебник, может быть использован в различных дисциплинах, связанных с электродинамикой. Так, новые электродинамические и достаточно простые методы, устраняющие проблемы некорректных задач в электродинамике, могут быть использованы в дисциплине «Устройства СВЧ и антенны» (метод ортогонализирующей подстановки, метод сингулярных интегральных уравнений). В книге впервые показано, что при расчёте неоднородностей в линиях передачи СВЧ необходимо учитывать комплексные волны (раздел 14.15). В дисциплинах «Электромагнитная совместимость радиоэлектронных устройств» и «Электромагнитная экология» могут быть использованы физические трубчатые модели диполя Герца и электрического вибратора, а также самосогласованный метод расчёта электромагнитного поля в ближних зонах излучающих структур (раздел 7.8, 14.14). Такой подход к проблеме расчёта «ближних» электромагнитных полей антенн позволяет устранить некоторые старые парадоксы в электродинамике.

Для упрощения понимания содержания книги в ее начале приведены основные обозначения физических величин, несколько отличающиеся от общепринятых. В конце книги приведен достаточно обширный список литературы по теории волн, электродинамике и распространению радиоволн. Причем список литературы разбит на три части: основную литературу, литературу по главам книги и справочники и математическую литературу. Ссылки в тексте учебника на основную литературу обозначаются как [J.N], где N — порядковый номер источника в разделе «Основная литература»; ссылки на литературу по главам — как [J.M.N], где M — номер главы, а N — порядковый номер источника в разделе «Литература к главе M».

Новый материал, включенный во второе издание, распределяется между авторами следующим образом: В.А. Негановым написаны п. 7.8 и гл. 12-14 (кроме п. 14.15); О.В. Осиповым написаны п. 12.12, приложения; С.Б. Раевским написан п. 14.15.

Авторы выражают благодарность Панферовой Т.А. за помощь в верстке части материала книги.

Предисловие ко второму изданию

По государственному общеобразовательному стандарту курс «Электродинамика и распространение радиоволн» для радиотехников и радиофизиков является общеобразовательной дисциплиной. Предметом его изучения являются основные закономерности электромагнитных процессов и технических устройств на их основе. Цель преподавания дисциплины — изучение законов электродинамики, процессов излучения и приёма электромагнитных волн, их распространения в различных средах, в направляющих структурах и элементах фидерного тракта, а также вопросов распространения радиоволн вблизи поверхности Земли, в её атмосфере и в космическом пространстве.

В результате изучения курса «Электродинамика и распространение радиоволн» студент должен получить представление об основных законах и положениях электродинамики и особенностях их применения к исследованию электромагнитных явлений, играющих важную роль в радиоэлектронике; должен освоить на основе уравнений макроскопической электродинамики методы анализа полей в линиях передачи, объёмных резонаторах и других элементах фидерных трактов, полей излучения простейших антенн; понять механизмы распространения радиоволн различных диапазонов в свободном пространстве с учётом влияния поверхности Земли, тропосферы и ионосферы; разобраться в методах расчёта характеристик электромагнитных волн в различных средах, а также осознать суть проблемы электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств и пути её решения. Кроме того, студент должен получить практические навыки проведения простейших измерений характеристик электромагнитных волн в линиях передачи и элементах фидерного тракта.

Курс «Электродинамика и распространение радиоволн» опирается на общенаучные дисциплины: высшая математика и физика. Основой для изучения курса служат знания таких разделов математики, как векторный и тензорный анализ, специальные функции, дифференциальные уравнения, теория вероятности; физики — электричество и магнетизм, колебания и волны, квантовая физика, оптика.

Предлагаемая книга, на наш взгляд, существенно отличается от существующих в настоящее время учебных изданий по электродинамике и распространению радиоволн для радиотехнических и радиофизических специальностей. Во-первых, особое внимание уделяется понятию «электромагнитного поля», которое вводится на основе принципов релятивистской физики и континуального подхода к описанию объектов. Подробно анализируется физический смысл уравнений Максвелла. Во-вторых, книга делает акцент, прежде всего, на изложение фундаментальных принципов и законов современной электродинамики, часто оставляя в стороне подробности второстепенного плана. В-третьих, авторы старались создать свою логику изложения электродинамики, отличную от традиционной для учебной литературы. В частности, подробно излагаются разделы возбуждения и дифракции электромагнитных волн, в рамках которых рассматриваются основы теории антенн. Тем самым учебник можно рассматривать как введение в дисциплину «Устройства СВЧ и антенны».

Учебник составлен на основе прочитанных авторами курсов лекций в Самарском государственном университете, Поволжской государственной академии телекоммуникаций и информатики и Нижегородском государственном техническом университете.

Авторы благодарны проф. Бобрешову А.М. (Воронежский государственный университет), проф. Воскресенскому Д.И. (Московский авиационный институт), проф. Кравченко В.Ф. (Институт радиотехники и электроники РАН), проф. Митрохину В.Н. (МГТУ им. Н.Э. Баумана), проф. Нечаеву Ю.Б. (Воронежский государственный университет), проф. Пономарёву Л.И. (Московский авиационный институт). Их советы и ценные замечания способствовали улучшению качества книги.

Введение

В последние годы в радиоэлектронике происходят значительные изменения, связанные с освоением новых частотных диапазонов, с совершенствованием элементной базы радиоэлектронных устройств, с внедрением принципиально новых способов и систем передачи информации, с реализацией компьютерных методов расчёта и проектирования систем. Наряду с плезиохронным (PDH), широкое внедрение получают синхронный (SDH) и асинхронный (ATM) способы передачи информации. Строятся сети и системы телекоммуникаций на базе цифровых СВЧ (наземных и спутниковых), волноводных и коаксиальных, волоконно-оптических линий связи.

В основе прогресса данной технической области лежат исследования традиционных и новых разделов теории электромагнитного поля. Разработка новых принципов обработки и передачи информации опирается на уравнения Максвелла, которые составляют основу не только современной радиотехники, но и являются краеугольным камнем современного понимания мира. Электродинамика, изучающая электромагнитные процессы, является сейчас одной из самых разработанных областей человеческих знаний, а уравнения Максвелла, описывающие электромагнитное поле и получившие фундаментальные экспериментальные подтверждения, не могут не вызывать чувства восхищения своим изяществом и красотой.

В буквальном переводе «электродинамика» — это учение о движении и взаимодействии электрических зарядов. Но такая трактовка не совсем точно отражает суть дела, ибо главное содержание электродинамики есть учение об электромагнитном поле и его связи с зарядами и токами. Электромагнитные силы, как проявление электромагнитного поля, в отличие от короткодействующих ядерных сил являются дальнедействующими, то есть медленно убывающими с расстоянием между частицами. Именно это обстоятельство и позволяет рассматривать электромагнитные поля как макроскопические объекты и ограничиваться лишь классическим (а не квантовым) их описанием. Уравнения Максвелла представляют собой математически строгое и полное выражение законов движения электромагнитного поля как макроскопического объекта.

История развития электродинамики. Электромагнитные явления в природе наблюдались с момента её создания, однако научные понятия и законы в этой области начали оформляться лишь в конце XVIII века. В то время начали формироваться представления о заряженных телах в природе. Однако взаимодействие зарядов между собой не трактовалось с позиций электромагнитного поля. Первоначально в науке главенствовала классическая механика Ньютона и Галилея, и неслучайно, что первый эмпирический закон, который относился к электромагнетизму, названный в последствии законом Кулона, был внешне схож с законом тяготения. Во введении проследим основные этапы формирования и развития электромагнитной теории в мировой науке.

Как уже было отмечено, к началу XIX века сложилось некоторое понятие о макроскопических зарядах. В 1772 году Герике издаёт труд, посвящённый элект-

рическим явлениям, в котором описывается созданная им электрическая машина. Она состояла из шара, изготовленного из серы, насаженного на железную ось. Шар приводился во вращение и натирался рукой, в результате чего на нём образовывался электрический заряд. Эта публикация послужила толчком к изучению электрических явлений.

В 1729 году английский физик Грей открывает явление электропроводимости, связанное с движением зарядов в некоторых телах. Заметим, что в то время заряды разделялись на два класса, которые отождествлялись с положительной и отрицательной «жидкостью электричества».

Открытие законов электростатики связано с именем Шарля Огюстена Кулона (1736-1806). Главное в них — ответ на вопрос: от чего зависит взаимодействие наэлектризованных тел? До открытия закона, который впоследствии получил имя Кулона, Пристли и Д. Бернулли в своих работах высказывали предположения о том, что заряженные тела взаимодействуют с силой $\mathcal{F} \sim 1/r^2$, где r — расстояние между ними. Однако экспериментальных доказательств этого в то время не было. Первая попытка экспериментального подтверждения этой зависимости была сделана английским физиком Кавендишем (1731-1810), который опытным путём показал, что $\mathcal{F} \sim 1/r^2$. Однако эта работа им опубликована не была.

В 1784-1789 годах Кулоном был опубликован ряд работ об электрических и магнитных взаимодействиях между телами. В это время Французской Академией Наук была поставлена задача: сформулировать закон взаимодействия двух зарядов. Кулон экспериментально показал, что сила взаимодействия между двумя зарядами q_1 и q_2 определяется формулой:

$$\mathcal{F} \sim \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Открытие Кулоном этого закона способствовало укреплению «*принципа дальности*», согласно которому действие одного объекта на другой осуществляется мгновенно без всякого участия промежуточной среды. Во времена Кулона этот принцип главенствовал, так как «действие на расстоянии» являлось олицетворением механики Ньютона. Кроме того, теория дальности количественно объясняла электрические явления.

Во времена Кулона электрические и магнитные явления изучались отдельно друг от друга. Датский физик Эрстед изучал магнитное действие электрического тока и именно он первым высказал гипотезу о том, что между электрическими и магнитными явлениями существует связь. Открытие о действии электрического тока на магнитную стрелку им было сделано случайно. В то время Эрстед читал лекции о современных открытиях, связанных с электрическим током. Во время одной из лекций Эрстед демонстрировал протекание тока по проводнику, и рядом случайно находилась магнитная стрелка. Один из слушателей заметил небольшое отклонение стрелки в момент протекания тока по проводу. В дальнейшем этот опыт был повторён на заседании Французской Академии Наук. Среди присутствующих на нём был французский физик Андре Мари Ампер (1775-1836), который в дальнейшем внёс основной вклад в изучение магнитных свойств электрического тока. В своей работе

он рассмотрел взаимодействие двух параллельных проводников с током. Ампером было выяснено, что при протекании токов в проводниках в зависимости от их направлений проволоочные проводники либо притягиваются, либо отталкиваются. Ампер экспериментально показал, что два проводника с током взаимодействуют между собой с силой:

$$\mathcal{F}_A \sim \frac{I_1 I_2}{r^2},$$

где I_1, I_2 — силы тока в проводниках; r — расстояние между ними.

Этот закон, получивший впоследствии имя Ампера, также основывается на теории дальнего действия и поэтому правильные результаты получаются только для случая постоянных токов. Современники считали, что Ампер внёс вклад в теорию электрического тока, сравнимый с вкладом Ньютона в механику. При этом Ампер фактически свёл все магнитные явления к электрическим.

Наряду с законом взаимодействия Ампер ввёл в электродинамику понятие электрического напряжения. Связь между электрическим током и напряжением была найдена немецким учёным Омом.

Дальнейшее развитие теория электромагнитных явлений получила в работах английского физика Майкла Фарадея (1791-1867). С его именем связано начало главенствования в теории электромагнитного поля принципа «близкого действия», согласно которому мгновенных взаимодействий не бывает и передача электромагнитных взаимодействий осуществляется посредством промежуточной среды. Согласно Фарадею, именно среда является «вместилищем» электромагнитного процесса. Кроме того, именно Фарадей по сути выдвинул идею существования электромагнитного поля как некой материальной субстанции.

В 1823 году Фарадей формулирует задачу: «превратить» магнитное взаимодействие в электрическое, а спустя восемь лет, в 1831 году открывает явление электромагнитной индукции. Суть этого явления заключается в том, что переменное магнитное поле наводит в замкнутом витке электрический ток. При объяснении электромагнитных явлений Фарадей значительное внимание уделял силовым линиям электрических и магнитных полей, причём он считал их реально существующими. Фарадей, описывая то или иное электромагнитное явление, говорил о густоте силовых линий, пересекающих проводник, об их числе и т.д. Однако теория электромагнитного поля, по сути созданная Фарадеем, была чисто качественной. Она не основывалась на каких-либо математических законах.

Принципиальный вклад в развитие электродинамики внёс Джеймс Клерк Максвелл (1831-1867), который математически обобщил все экспериментальные факты взаимодействия электрических и магнитных полей в виде системы дифференциальных уравнений, которая впоследствии была названа его именем. Как уже упоминалось, Фарадей создал качественную теорию электромагнитного поля. Как позднее писал Максвелл, все положения теории Фарадея оказалось легко материализовать в виде математических соотношений. В основе системы уравнений Максвелла лежат экспериментально установленные законы: закон Кулона, закон электромагнитной индукции, закон Ампера, а также утверждение о том, что в природе

существуют электрические и отсутствуют магнитные свободные заряды. Уравнения Максвелла стали математической основой теории близкого действия.

В современной науке уравнения Максвелла являются фундаментальными законами электромагнитной теории. Максвелл сделал вывод о том, что переменное электрическое поле неизбежно порождает магнитное поле и наоборот. Исходя из общих сформулированных им положений теории электромагнитного поля, Максвелл пришёл к заключению о возможности существования электромагнитных волн и выдвинул идею об электромагнитной природе света. Эта гипотеза опережала экспериментальные возможности того времени и не могла быть подтверждена, поэтому она была с неодобрением встречена в научных кругах.

Возбуждение электромагнитных волн в лаборатории было осуществлено позднее немецким физиком Генрихом Герцем (1857-1894). Герц, по сути, является основоположником радиотехнической электродинамики. Именно он скомпоновал систему уравнений Максвелла в том виде, в котором она используется в настоящее время. Однако он никогда не задумывался о техническом применении электромагнитных волн для передачи информации на значительные расстояния.

Историческая заслуга создания беспроводной связи (или радио) посредством электромагнитных волн принадлежит русскому учёному А.С. Попову (1859-1906). Подтверждением электромагнитной природы света принято считать опыты другого русского физика П.Н. Лебедева (1866-1911), который измерил световое давление.

Предмет электродинамики и её место в общенаучном знании. *Электродинамика* — это наука об электромагнитном поле и о его связи с зарядами и токами. Прежде всего отметим, что поле является «особой формой материи», своего рода некоторой субстанцией — носителем информации. Основным его свойством является действие на заряды и токи. По сути говоря, о существовании электромагнитного поля в той или иной точке пространства можно утверждать, лишь внеся туда некоторый пробный элемент. Для электрического поля таким элементом является пробный электрический заряд, для магнитного — виток с током. Электромагнитное поле лишь в некоторых случаях заметно воздействует на органы чувств человека (например, видимый свет).

Электрический заряд — это количественная характеристика (свойство частиц вещества), определяющая степень их взаимодействия с внешним электромагнитным полем. Основным свойством заряда является биполярность, то есть существование зарядов двух типов — положительных и отрицательных. Любой заряд создаёт в окружающем пространстве электрическое поле, которое действует на помещённые в эту область другие заряды с силой Кулона. По величине этой силы и пробному заряду можно количественно определить величину заряда, создающего поле.

В общем случае электромагнитное поле действует на заряд q с силой Лоренца:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]),$$

где \vec{v} — скорость заряда; \vec{E} — вектор напряжённости электрического поля; \vec{B} — вектор магнитной индукции. Первое слагаемое в этой формуле определяет действие

на заряд электрического поля, второе — действие на движущийся электрический заряд магнитного поля. Заметим, что первое слагаемое определяет силу Кулона, то есть силу взаимодействия между двумя зарядами: зарядом q и зарядом, создающим поле \vec{E} .

В произвольной среде поля описываются векторами: \vec{E} — вектор напряжённости электрического поля; \vec{H} — вектор напряжённости магнитного поля; \vec{D} — вектор электрической индукции; \vec{B} — вектор индукции магнитного поля. Диэлектрическая среда реагирует на внешнее электрическое поле поляризацией (переориентацией молекул и атомов); магнитная среда — ориентацией нескомпенсированных магнитных диполей.

Электромагнитные явления можно разделить на несколько видов. Если электрические заряды не меняются во времени, они создают *электростатическое поле*. Если во времени неизменны электрические токи, поле, создаваемое ими, называется *магнитостатическим*. В случае, когда заряды и токи изменяются во времени, имеем дело с *переменным электромагнитным полем*.

Переменные электромагнитные поля образуют *электромагнитные волны*, которые представляют собой распространение колебаний векторов поля в пространстве. Важнейшим вариантом электромагнитного волнового процесса является *гармоническая волна*, поле которой изменяется по закону:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \beta x + \psi),$$

где ω — круговая частота; β — постоянная распространения волны, связанная с фазовой скоростью v_ϕ соотношением $\beta = \omega / v_\phi$; \vec{E}_0 — начальная амплитуда; ψ — начальная фаза колебания вектора напряжённости электрического поля. Аналогичное выражение можно записать и для вектора магнитной индукции \vec{B} .

Электромагнитные волны подразделяются на четыре основных вида — радиоволны, оптические волны (ультрафиолетовый, видимый и инфракрасный диапазоны), рентгеновское и гамма-излучение.

Электродинамика как наука подразделяется на *макроскопическую* и *квантовую*. Как известно, электромагнитная волна, с квантовой точки зрения, представляет собой поток квантов — фотонов. Таким образом, в квантовой электродинамике электромагнитное поле проявляет не только волновые, но и корпускулярные свойства. Для их описания необходимо рассматривать микроструктуру вещества на уровне атомов и молекул. При описании электромагнитных процессов в среде необходимо учитывать взаимодействие микрочастиц, поведение которых подчиняется статистическим законам.

В предлагаемой книге электромагнитные процессы в среде описываются с помощью интегральных характеристик, каковыми являются вышевведённые векторные величины. Таким образом, описание электромагнитного поля не проникает в микроструктуру вещества, то есть проводится с макроскопических позиций.

Список используемых сокращений

ВДР — волноводно-диэлектрический резонатор
ВОЛС — волоконно-оптическая линия связи
ВУ — входное устройство
ВЩЛ — волноводно-щелевая линия
ДВ — длинные волны
ДН — диаграмма направленности
ДР АК — диэлектрический резонатор на азимутальных типах колебания
ДР НК — диэлектрический резонатор на низших типах колебания
ЗДР — закрытый диэлектрический резонатор
ИКД — инфракрасный диапазон
ИОС — интегрально-оптическая схема
ИС — интегральная схема
ИСО — инерциальная система отсчёта
КВ — короткие волны
КВЧ — крайневые частоты
КНД — коэффициент направленного действия
КУ — коэффициент усиления
ЛКП — левая круговая поляризация
МДР — металлодиэлектрический резонатор
м.д.с — магнитодвижущая сила
МЧО — метод частичных областей
ОДР — открытый диэлектрический резонатор
ОИС — объёмная интегральная схема
ПКП — правая круговая поляризация
ПЭМВ — плоская электромагнитная волна
РЛС — радиолокационная станция
САПР — система автоматизированного проектирования
СВ — средние волны
СВЧ — сверхвысокие частоты
СДВ — сверхдлинные волны
СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений
СУ — согласующее устройство
УКВ — ультракороткие волны
э.д.с — электродвижущая сила
ЭМВ — элементарный магнитный вибратор
ЭМП — электромагнитное поле
ЭЩВ — элементарный щелевой вибратор
ЭЭВ — элементарный электрический вибратор

Список используемых обозначений

\vec{A}	— обозначение векторной величины
$\vec{\vec{A}}$	— обозначение тензорной величины
(\vec{a}, \vec{b})	— скалярное произведение векторов
$[\vec{a}, \vec{b}]$ или $[\vec{a} \times \vec{b}]$	— векторное произведение векторов
$\{x, y, z\}$	— декартовы координаты
$\{\rho, \varphi, z\}$	— цилиндрические координаты
$\{r, \theta, \varphi\}$	— сферические координаты
\vec{n}_0	— единичный вектор нормали
∇	— оператор Гамильтона (набла)
∇_{\perp}	— оператор Гамильтона по поперечным координатам
∇^2	— оператор Лапласа
∇_{\perp}^2	— оператор Лапласа по поперечным координатам
\square	— оператор д'Аламбера
$\vec{E}(\vec{E})$	— вектор напряжённости электрического поля (в скобках — комплексная амплитуда вектора)
$\vec{H}(\vec{H})$	— вектор напряжённости магнитного поля (в скобках — комплексная амплитуда вектора)
$\vec{D}(\vec{D})$	— вектор электрической индукции (в скобках — комплексная амплитуда вектора)
$\vec{B}(\vec{B})$	— вектор магнитной индукции (в скобках — комплексная амплитуда вектора)
$\vec{J}(\vec{j})$	— плотность тока проводимости (в скобках — комплексная амплитуда вектора)
$\vec{J}^m(\vec{j}^m)$	— плотность магнитного тока (в скобках — комплексная амплитуда вектора)
$\vec{J}^{\text{ст}}(\vec{j}^{\text{ст}})$	— плотность сторонних токов (в скобках — комплексная амплитуда вектора)
$\vec{\eta}$	— плотность поверхностного электрического тока
$\vec{\eta}^m$	— плотность поверхностного магнитного тока
$R(\rho)$	— объёмная плотность заряда (в скобках — комплексная амплитуда)
$R^m(\rho^m)$	— объёмная плотность магнитного заряда (в скобках — комплексная амплитуда)
σ	— поверхностная плотность электрического заряда
δ	— линейная плотность электрического заряда
$\vec{\mathcal{P}}(\vec{P})$	— вектор поляризации (в скобках — комплексная амплитуда вектора)
$\vec{M}(\vec{M})$	— вектор намагничённости (в скобках — комплексная амплитуда вектора)
$\vec{S}(\vec{S})$	— вектор Умова-Пойнтинга (в скобках — комплексный вектор Умова-Пойнтинга)
$\Phi(\varphi)$	— скалярный потенциал (в скобках — комплексная амплитуда)

$\vec{\mathcal{A}}(\vec{A})$ — векторный электродинамический потенциал (в скобках — комплексная амплитуда вектора)

$\vec{\mathcal{A}}^m(\vec{A}^m)$ — векторный магнитный потенциал (в скобках — комплексная амплитуда вектора)

$\vec{\pi}^e(\vec{\Pi})$ — электрический вектор Герца (в скобках — комплексная амплитуда вектора)

$\vec{\pi}^m(\vec{\Pi}^m)$ — магнитный вектор Герца (в скобках — комплексная амплитуда вектора)

I — полный ток проводимости

Q и q — электрический заряд

ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, равная $(1/36\pi) \cdot 10^{-9}$ Ф/м.

μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

ϵ_a — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды

μ_a — абсолютная магнитная проницаемость среды

σ — удельная проводимость среды

ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды

μ — относительная магнитная проницаемость среды

ϵ_k — комплексная диэлектрическая проницаемость среды

μ_k — комплексная магнитная проницаемость среды

χ — диэлектрическая восприимчивость среды

χ_m — магнитная восприимчивость среды

$\operatorname{tg} \delta$ — тангенс угла диэлектрических потерь

$\operatorname{tg} \delta^M$ — тангенс угла магнитных потерь

n — показатель преломления

c — скорость света в вакууме

k_0 — волновое число для вакуума

k — волновое число в среде

k_k — комплексное волновое число в среде

ω — циклическая частота

f — физическая частота

T — период электромагнитного колебания

λ — длина волны

$\lambda_{кр}$ — критическая длина волны в волноводе

Λ — длина волны в волноводе

$f_{кр}$ — критическая частота

Z — волновое сопротивление среды

Z_k — комплексное волновое сопротивление среды

$Z_0 = 120\pi$ — волновое сопротивление вакуума

$\gamma = \beta - i\alpha$ — постоянная распространения электромагнитной волны

β — фазовая постоянная

α — коэффициент затухания

v_ϕ — фазовая скорость

u — групповая скорость

ρ, τ	— коэффициенты Френеля
Δ^0	— глубина проникновения
$\vec{\epsilon}$	— тензор диэлектрической проницаемости
$\vec{\mu}$	— тензор магнитной проницаемости
$\vec{\sigma}$	— тензор удельной проводимости
$P_{\text{пот}}$	— мощность потерь
B	— реактивная проводимость
X	— реактивное сопротивление
$Z_{\text{вх}}$	— входное сопротивление
D	— коэффициент направленности действия антенны
G	— коэффициент усиления антенны
$S_{\text{эф}}$	— эффективная площадь приёмной антенны
$F(r)$	— комплексная функция ослабления
$F(\theta, \varphi)$	— диаграмма направленности
$F_{\theta}(\theta, \varphi)$	— азимутальная составляющая диаграммы направленности
$F_{\varphi}(\theta, \varphi)$	— меридиональная составляющая диаграммы направленности
Q_0	— собственная (ненагруженная) добротность резонатора
$\delta(x)$	— дельта-функция Дирака
$J_n(x)$	— функция Бесселя первого рода n -порядка
$Y_n(x)$	— функция Бесселя второго рода n -порядка (функция Неймана)
$H_n^{(1)}(x)$	— функция Ханкеля первого рода n -порядка
$H_n^{(2)}(x)$	— функция Ханкеля второго рода n -порядка
$Z'_n(x)$	— производная по всему аргументу от цилиндрической функции
$I(\varphi)$	— интенсивность электромагнитного поля
$[\bar{Z}]$	— матрица нормированных сопротивлений
$[\bar{Y}]$	— матрица нормированных проводимостей
$[S]$ (или \vec{S})	— матрица рассеяния
$[A]$ (или \vec{A})	— матрица передачи
$[I]$ (или \vec{I})	— единичная матрица

Глава

1

Понятие об электромагнитном поле. Уравнения Максвелла

1.1. Корпускулярный и континуальный подходы к описанию материальных объектов. Физические поля	16
1.2. Характеристики физических полей. Понятие о потоках и циркуляциях	18
1.3. Уравнения непрерывности в модели сплошной среды. Законы сохранения массы, числа частиц и электрического заряда	23
1.4. Переход от «дальнодействия» к «близкодействию» в системе неподвижных зарядов. Понятие об электрическом поле	26
1.5. Электрическое поле движущихся зарядов. Инвариантность закона Гаусса	29
1.6. Релятивистская природа магнитного поля	32
1.7. Уравнение непрерывности и ток смещения	40
1.8. Система уравнений Максвелла в вакууме	42
1.9. Векторы электромагнитного поля в сплошной среде	47
1.10. Система уравнений Максвелла для сплошной среды	54
1.11. Электродинамическая классификация материальных сред	55
1.12. Электромагнитные поля на границе раздела материальных сред	58
1.13. Уравнение баланса мощностей в электромагнитном поле. Энергия электромагнитного поля	62
1.14. Внутренние и внешние задачи электродинамики	65
1.15. Стационарное поле, электростатика и магнитостатика	66

Глава 1. Понятие об электромагнитном поле. Уравнения Максвелла

1.1. Корпускулярный и континуальный подходы к описанию материальных объектов. Физические поля

В современной физике при описании законов природы используются два подхода. В рамках первого подхода анализ явления проводится на основе простейшей модели вещества — *модели частицы (корпускулы)*. Такой подход называется корпускулярным. Корпускулярный подход позволил не только установить многие фундаментальные законы природы, но и описать движение систем взаимодействующих частиц при наличии внешнего воздействия. В основе такого анализа лежит возможность представления каждой из подобных систем в виде совокупности независимых «частицеподобных» объектов — «квазичастиц», с помощью которых описывается «коллективное движение в системах взаимодействующих» частиц. При этом «квазичастицы» делятся на две качественно различные группы — индивидуальные и существенно коллективные. Индивидуальные «квазичастицы» (или просто частицы) можно ввести, например, для описания взаимодействия элементарных частиц (фотонов, электронов и др.). Простейшим примером модели коллективных «квазичастиц» могут служить элементы идеальной кристаллической решётки твёрдого тела. Кристаллическая решётка называется идеальной, если при её рассмотрении можно пренебречь любыми отклонениями от периодической структуры в пространственном расположении образующих её частиц (атомов, молекул, ионов), неограниченной в трёх измерениях. Таким образом, в идеальной кристаллической решётке частицы образуют пространственную периодическую структуру. Если далее пренебречь конечностью размеров и внутренней структурой частиц, мы приходим к совокупности связанных неподвижных материальных точек, расположенных периодически в пространстве. Такая физическая модель описывает идеальную кристаллическую структуру, а её элементы есть существенно коллективные «квазичастицы». В зависимости от числа N различных частиц (сортов частиц), образующих один идеальный кристалл (период) кристаллической решётки, вводят совокупность N нормальных мод или «квазичастиц» существенно коллективного типа.

В реальных (неидеальных) объектах при громадном числе частиц ($N \gg 1$), подобные «квазичастицы», входящие в объект, не обладают внешними признаками реальных частиц и, в частности, «размазаны» по конечному объёму ΔV . Модель частицы (корпускулы) к таким объектам явно неприменима. Трудности ещё более возрастают, если учесть, что частицы в макроскопическом объекте движутся, как правило, хаотически. Поэтому точное задание состояния каждой из них в большинстве случаев невозможно. Всё это вынуждает отказаться от модели частицы (корпускулы) и обратиться к другой идеализированной модели вещества — *модели сплошной среды (континуума)*. Впервые такую модель вещества ввели, по-видимому, Рене Декарт и Майкл Фарадей.

В этой модели предполагается, что частицы расположены столь тесно ($N \rightarrow \infty$), что дискретная структура вещества не проявляется. Тем самым модели континуума и корпускулы качественно различны и взаимно противоположны.

Введение модели сплошной среды (континуума) при описании явлений природы обосновывается, по крайней мере, двумя обстоятельствами. Во-первых, эта модель довольно универсальна, ибо в определённых условиях любые материальные объекты с большим числом частиц $N \gg 1$, включая газы и газоподобные системы, могут трактоваться как сплошная среда ($N \rightarrow \infty$). Более того, эта модель позволяет описать и само фундаментальное взаимодействие, осуществляемое через электромагнитное поле. Во-вторых, она всё-таки довольно проста, ибо позволяет определить сплошную среду всего двумя независимыми локальными характеристиками — функциями координат и времени, через которые находятся остальные его (состояния) характеристики.

Таким образом, при описании явлений природы существует дуализм, связанный с двумя различными моделями вещества: корпускулярной моделью и моделью сплошной среды. Поле (в том числе и электромагнитное) вводится как некая континуальная (усреднённая) характеристика идеализированной модели вещества — модели сплошной среды.

Двум указанным моделям вещества соответствуют и две принципиально различные концепции взаимодействия тел: концепция «дальнодействия» и концепция «близкодействия». Согласно концепции «дальнодействия», «квазичастица» в корпускулярной модели вещества непосредственно взаимодействует с каждой другой «квазичастицей» системы. В соответствии с концепцией «близкодействия» взаимодействие тел происходит не непосредственно, а через поле, при использовании модели сплошной среды.

При континуальном подходе реальный материальный объект (например, диэлектрик) заменяется некоторой идеализированной (упрощённой) моделью сплошной среды, для описания которой вводят физические характеристики, определяющие её состояние и движение. В общем случае *физические величины, характеризующие свойства сплошной среды в среднем и зависящие только от положения \vec{r} элемента среды ΔV в пространстве и момента времени t , называются физическими полями.*

В зависимости от характера описываемого явления природы физические поля могут быть как *скалярными*, так и *векторными*. К скалярным полям, в частности относятся поля плотности массы M , мощности W и т.п. К векторным полям относятся поля скорости \vec{v} , силы \vec{F} , электрическое \vec{E} и магнитное \vec{H} поля, поле объёмной плотности электрического тока \vec{J} и т.п.

Предмет макроскопической электродинамики составляет изучение электромагнитных полей в пространстве и структурах, заполненных сплошной средой. Макроскопическая электродинамика оперирует физическими величинами, усреднёнными по элементарным объёмам, не интересуясь молекулярным строением (состоянием) среды. В связи с этим вместо истинных микроскопических значений полей во всех рассмотренных случаях берутся их усреднённые значения. При этом полагается, что движение зарядов в заданных точках определяется значениями полей в этих точках.

1.2. Характеристики физических полей.

Понятие о потоках и циркуляциях

Прежде всего рассмотрим наглядные характеристики скалярного поля на примере поля объёмной плотности электрического заряда R .

Скалярное поле R в фиксированный момент времени t в пространстве (на плоскости) можно в среднем характеризовать совокупностью поверхностей (линий), связывающих точки сплошной среды с одинаковыми значениями $R = R_i = \text{const}$. Их называют *эквипотенциальными поверхностями* или поверхностями одинакового уровня (рис. 1.1а). Густота эквипотенциальных поверхностей создаёт наглядное представление о пространственной конфигурации поля объёмной плотности заряда — где они расположены гуще, там плотность заряда выше.

Более точной характеристикой «быстроты» изменения скалярного поля в пространстве служит градиент скалярного поля или производная по направлению максимального возрастания поля R :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \text{grad } R(\vec{r}). \quad (1.2.1)$$

При этом градиент скалярного поля $R(\vec{r})$ сам является физическим векторным полем $\vec{A}(\vec{r})$. В данной точке пространства этот вектор, по определению, всегда направлен в сторону максимального возрастания скалярного поля и перпендикулярен к проходящей через эту точку эквипотенциальной поверхности (рис. 1.1б).

Перейдём к векторным полям. Их наглядные характеристики проще всего ввести, рассматривая движущуюся жидкость. Если течение жидкости установилось, то в ней нетрудно различать области ламинарного и вихревого движений, которые наглядно отражают свойства векторного поля скорости жидкости.

Для наглядного представления векторного поля в пространстве при фиксированном t вводятся *силовые линии поля* — кривые, направления касательных к которым в каждой точке совпадают с направлением векторного поля (рис. 1.2). Густота силовых линий характеризует интенсивность последнего в данной области пространства.

Понятие о силовых линиях векторного поля эффективно использовать совместно с характеристиками, описывающими эти поля в среднем по элементарным объёмам сплошной среды. К числу таких характеристик относится плотность *потока векторного поля*, с которой можно познакомиться на примере потока вектора скорости $\vec{v}(\vec{r}, t)$. За скорость элемента жидкости объёма ΔV массой ΔM в модели сплошной среды принимается скорость движения центра масс его молекул:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta M} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{\Delta N m} \sum m_i \vec{v}_i = \frac{\sum \vec{v}_i}{\Delta N} = (\vec{v})_{\text{ср}}, \quad (1.2.2)$$

где ΔN — число частиц в объёме ΔV , m_i — масса i -ой частицы. Здесь для простоты полагается, что все частицы имеют одинаковую массу: $m_i = m$. Нетрудно понять, что величина, определяемая формулой (1.2.2) — среднее арифметическое векторов скоростей молекул. При усреднении в случае $\Delta N \gg 1$ вклад скоростей

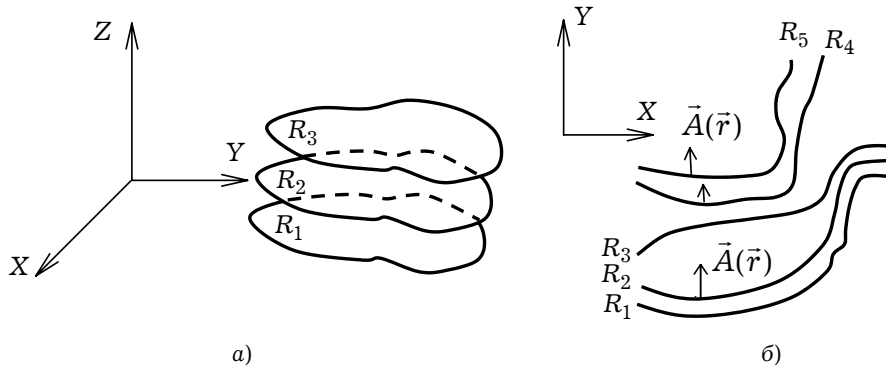


Рис. 1.1

хаотического движения при тепловом равновесии обращается в нуль, так что $\vec{v} = (\vec{v})_{\text{ср}}$.

Представление о потоке вектора скорости $\vec{v}(\vec{r}, t)$ можно получить, рассматривая движение жидкости через малую площадку ΔS при различных ориентациях последней относительно направления вектора \vec{v} (рис. 1.3). Скалярное произведение $(\vec{v} \Delta \vec{S})$, где $\Delta \vec{S} = \Delta S \vec{n}_0$ (\vec{n}_0 — единичный вектор, перпендикулярный площадке ΔS), \vec{v} — скорость жидкости на этой площадке, имеет размерность [объём/время] и характеризует величину объёма жидкости, пересекающей площадку ΔS в единицу времени. Эта величина максимальна, когда векторы \vec{v} и $\Delta \vec{S}$ параллельны (то есть вектор \vec{v} перпендикулярен площадке ΔS) (рис. 1.3б), и обращается в нуль, когда \vec{v} и $\Delta \vec{S}$ взаимно перпендикулярны (рис. 1.3в).

Назовём *элементом потока* вектора скорости $\vec{v}(\vec{r})$ через площадку $\Delta \vec{S}$ скалярную величину

$$\Delta \Phi_{\vec{v}} = (\vec{v} \Delta \vec{S}) = v \Delta S \cos \alpha = v_n \Delta S, \quad (1.2.3)$$

где $v = |\vec{v}|$, $\Delta S = |\Delta \vec{S}|$, v_n — проекция вектора \vec{v} на направление нормали к площадке ΔS , α — угол между векторами \vec{v} и $\Delta \vec{S}$. Элемент потока $\Delta \Phi_{\vec{v}}$ может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от того, как ориентирована площадка $\Delta \vec{S}$ по отношению к вектору скорости.

Если поверхность состоит из нескольких площадок ΔS_i , поток вектора скорости \vec{v} через неё равен алгебраической сумме потоков $(\Delta \Phi_{\vec{v}})_i$ через эти площадки. В случае замкнутой поверхности S_0 произвольной формы поток вычисляется как

$$\Phi_{\vec{v}} = \oint_{S_0} \vec{v} d\vec{S} = \oint_{S_0} v_n dS, \quad (1.2.4)$$

причём за направление элемента $d\vec{S}$ принято выбирать направление внешней нормали к поверхности S_0 .

Чтобы выяснить физический смысл потока вектора скорости, заменим значение v_n на поверхности S_0 на среднюю (по поверхности) величину $(v_n)_{\text{ср}}$. Тогда, вынося $(v_n)_{\text{ср}}$ из-под знака интеграла, приближённо получаем

$$\Phi_{\vec{v}} = (v_n)_{\text{ср}} \oint_{S_0} dS = (v_n)_{\text{ср}} S, \quad (1.2.5)$$

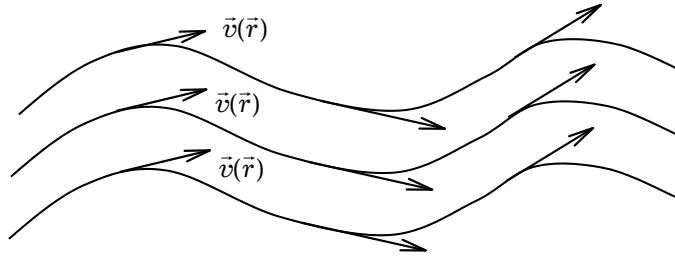


Рис. 1.2

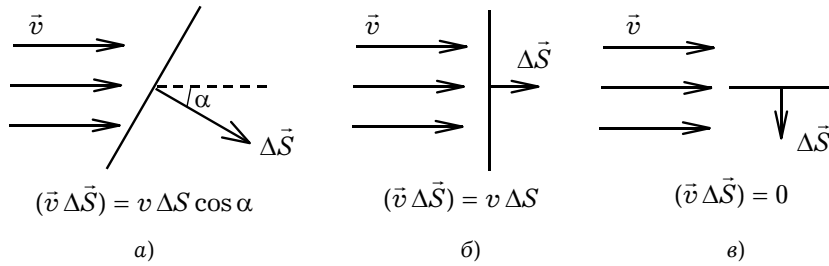


Рис. 1.3

где S — площадь поверхности S_0 .

Таким образом, приближённо можно полагать, что поток вектора скорости $\vec{v}(\vec{r})$, а значит и любого векторного поля — это произведение среднего по замкнутой поверхности значения перпендикулярной к поверхности компоненты векторного поля \vec{v} на величину площади этой поверхности.

При наглядном представлении поля \vec{v} с помощью силовых линий принято их число, пересекающее площадку ΔS , выбирать пропорциональным потоку $\Delta \Phi_{\vec{v}}$. Тогда поток через замкнутую поверхность оказывается пропорциональным алгебраической сумме числа пересечений этой поверхности линиями поля (рис. 1.4), причём каждая выходящая линия даёт вклад со знаком «+» (векторы \vec{v} и $\Delta \vec{S}$ направлены под острым углом друг к другу), а каждая входящая — со знаком «-» (векторы \vec{v} и $\Delta \vec{S}$ направлены под тупым углом друг к другу).

Принято говорить, что поток всякого векторного поля характеризует его тенденцию к «истеканию» из какого-либо замкнутого объёма. По этому признаку все векторные поля $\vec{A}(\vec{r})$ делятся на два класса. Если в любой замкнутой области пространства, где имеется векторное поле, через любую замкнутую поверхность поток $\Phi_{\vec{A}} = 0$, такие поля называются *полями без источников* (или *соленоидальными*). Силовые линии у них либо замкнуты, либо приходят из бесконечности и уходят в бесконечность.

Если же хотя бы в некоторой области пространства поток $\Phi_{\vec{A}} \neq 0$, то векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ называем *полем с источниками*. Смысл этого названия также можно пояснить на примере поля скорости $\vec{v}(\vec{r})$. Действительно, если из какой-либо области, окружённой поверхностью S_0 , исходит положительный поток $\Phi_{\vec{v}} > 0$, это означает, что из неё через поверхность S_0 вытекает определённый объём жидкости в единицу времени. Поскольку жидкость не может возникнуть из ничего, это

означает, что внутри поверхности S_0 имеется *положительный «источник»* поля $\vec{v}(\vec{r})$ (например, отверстие подводящей трубы), который и обеспечивает положительный поток жидкости. Одновременно в таком поле может быть область, где поток отрицателен, $\Phi_{\vec{v}} < 0$, область, в которую поле $\vec{v}(\vec{r})$ втекает. В этой области должно находиться отверстие отводящей трубы, играющее роль *отрицательного источника* поля $\vec{v}(\vec{r})$. Для любого векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ с источниками силовые линии поля всегда имеют начало и конец: начинаются в

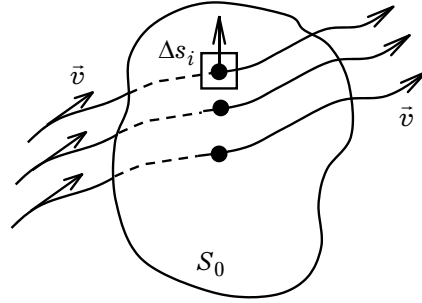


Рис. 1.4

источниках и кончаются на поверхностях, через которые вытекает поле. При этом густота линий поля с источниками пропорциональна мощности источников (стоков).

Другой важной характеристикой векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ является его *циркуляция*. Если поток поля характеризует густоту и ориентацию его силовых линий по отношению к замкнутой поверхности, то циркуляция характеризует их форму и ориентацию по отношению к замкнутому контуру. С понятием циркуляции также удобно ознакомиться на примере циркуляции поля скорости жидкости $\vec{v}(\vec{r})$.

С этой целью в области, занятой векторным полем $\vec{v}(\vec{r})$, выделим какой-либо элементарный участок контура L_0 (рис. 1.5). Скалярное произведение векторов \vec{v} и $\Delta \vec{l}$ назовём *элементом циркуляции* вектора скорости:

$$\Delta \Gamma_{\vec{v}} = (\vec{v} \Delta \vec{l}) = v \Delta l \cos \alpha = v_{\tau} \Delta l, \quad (1.2.6)$$

где $\Delta l = |\Delta \vec{l}|$, v_{τ} — проекция вектора \vec{v} на направление элемента $\Delta \vec{l}$ (рис. 1.5). Элемент циркуляции $\Delta \Gamma_{\vec{v}}$ может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от величины угла α .

Изменение поля вдоль контура конечных размеров можно оценить, образуя алгебраическую сумму элементов циркуляции $(\Delta \Gamma_{\vec{v}})_i$. В случае замкнутого контура L_0 (рис. 1.6) произвольной формы для вычисления циркуляции поля $\vec{v}(\vec{r})$ необходимо воспользоваться формулой:

$$\Gamma_{\vec{v}} = \oint_{L_0} \vec{v} d\vec{l} = \oint_{L_0} v_{\tau} dl. \quad (1.2.7)$$

Направление обхода замкнутого контура против часовой стрелки принято считать положительным.

Заменяя значение v_{τ} на контуре L_0 на среднюю величину $(v_{\tau})_{\text{ср}}$, приближённо получаем

$$\Gamma_{\vec{v}} \approx (v_{\tau})_{\text{ср}} L, \quad (1.2.8)$$

где L — длина контура L_0 .

Из (1.2.8) следует, что *циркуляцию любого векторного поля приближённо можно рассматривать как произведение среднего значения на контуре касательной к контуру компоненты этого вектора на длину контура*.

Само название «циркуляция» векторного поля изначально возникло из представления о том, что при определённых условиях жидкость может циркулировать

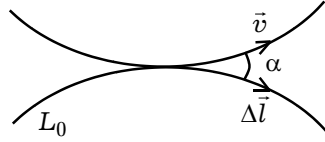


Рис. 1.5

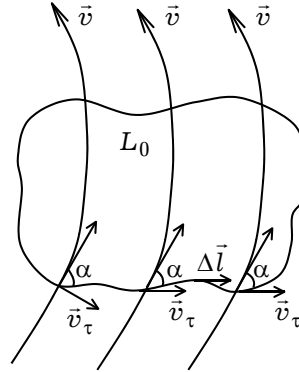


Рис. 1.6

вдоль замкнутого контура. Действительно, наблюдение за текущей жидкостью показывает, что на её поступательное движение накладывается вращательное движение, то есть на внешне спокойной её поверхности наблюдаются водовороты. Если есть возможность каким-то образом исключить поступательное движение жидкости, например, заморозить её всюду, кроме некоторой трубки, охватывающей водоворот, то движение жидкости прекратится всюду, кроме внутренности такой трубки.

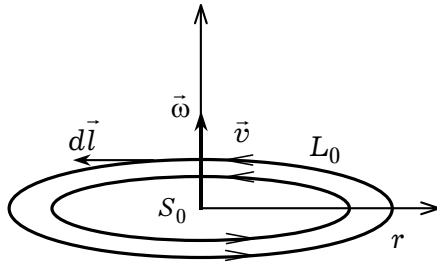


Рис. 1.7

Понятие циркуляции, как и понятие потока, применимо к любому векторному полю $\vec{A}(\vec{r})$. С точки зрения циркуляции, все векторные поля делятся на два класса. Если в любой области пространства и для любого замкнутого контура циркуляция поля $\Gamma_{\vec{A}} = 0$, такие векторные поля называют *безвихревыми* или *потенциальными*. Если же для какого-либо контура $\Gamma_{\vec{A}} \neq 0$, поле называется *вихревым*.

Можно показать, что если некоторое векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ обладает отличной от нуля циркуляцией, это означает, что существует другое векторное поле, направление которого задаёт оси «вихрей» первого поля, а его модуль определяет величину циркуляции $\Gamma_{\vec{A}}$. Наоборот, если известно, что векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ единственно, то для него, как правило, $\Gamma_{\vec{A}} = 0$.

В качестве доказательства вышеприведённых утверждений вычислим циркуляцию (1.2.7) поля скоростей $\vec{v}(\vec{r})$ равномерно вращающегося диска (рис. 1.7). В качестве контура L_0 выберем любую concentрическую с осью диска окружность радиуса r . Тогда

$$\Gamma_{\vec{v}} = \oint_{L_0} \vec{v} d\vec{l} = v_{\tau} \oint_{L_0} dl = v_{\tau} 2\pi r \neq 0 ,$$

так как на этой окружности $\vec{v} \uparrow\uparrow d\vec{l}$ и $v_{\tau} = \text{const}$. С учётом того, что $v = \omega r$, а

$\vec{\omega} \perp \vec{r}$ ($\omega = \text{const}$), эту циркуляцию можно представить в виде:

$$\Gamma_{\vec{v}} = \omega 2\pi r^2 = 2 \int_{S_0} \vec{\omega} d\vec{S} = 2 \Phi_{\vec{\omega}},$$

где $\Phi_{\vec{\omega}}$ — поток вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ через поверхность $S_0 = \pi r^2$ круга, охваченного контуром L_0 ($d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$, \vec{n}_0 — единичный вектор, направленный перпендикулярно к плоскости круга S_0). Таким образом, можно сказать, если в пространстве существуют замкнутые контуры, для которых циркуляция вектора \vec{v} отлична от нуля, то в нём (пространстве) существуют физически выделенные направления, задаваемые другим векторным полем $\vec{\omega}$.

1.3. Уравнения непрерывности в модели сплошной среды. Законы сохранения массы, числа частиц и электрического заряда

Рассмотрим выделенный объём V_0 произвольной сплошной среды, окружённый замкнутой поверхностью S_0 . Если положение элемента объёма V_0 и форма выделенной поверхности S_0 фиксированы во времени, то в процессе движения частицы среды могут пересекать её в любых направлениях. Это приводит к изменению во времени физических характеристик вещества в объёме V_0 . Однако для *аддитивных физических величин*^{*)} эти изменения не могут быть произвольными. Всякое изменение плотности ρ_B аддитивной скалярной физической величины B может происходить по двум причинам: либо имеется поток этой величины через поверхность S_0 , который характеризуется вектором плотности потока \vec{J}_B , либо внутри объёма V_0 имеется источник данной физической величины, характеризуемой объёмной плотностью σ_B . Примерами аддитивных величин служат масса, число частиц, электрический заряд и т.д.

Исходя из вышесказанного, можно записать для аддитивной физической величины B закон сохранения или уравнение баланса в интегральной форме:

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \Phi_B + \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{ист}} = \oint_{S_0} \vec{J}_B d\vec{S} + \int_{V_0} \sigma_B dV, \quad (1.3.1)$$

где величина B связана со своей объёмной плотностью $\rho_B(\vec{r}, t)$ формулой

$$B = \int_{V_0} \rho_B(\vec{r}, t) dV. \quad (1.3.2)$$

Применяя теорему Остроградского-Гаусса

$$\oint_{S_0} \vec{J}_B d\vec{S} = \int_{V_0} \text{div } \vec{J}_B dV, \quad (1.3.3)$$

*) Под аддитивной понимается скалярная величина, для которой справедлив закон сохранения

запишем *уравнение баланса* для физической величины B в дифференциальной форме:

$$-\frac{\partial \rho_B}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{J}_B + \sigma_B. \quad (1.3.4)$$

Рассмотрим *закон сохранения массы* M для сплошной среды. Если источники массы внутри объёма отсутствуют ($\sigma_M = 0$), для её плотности ρ_M справедлив частный вариант интегрального закона сохранения (1.3.1):

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho_M}{\partial t} dV = - \oint_{S_0} \vec{J}_M d\vec{S}, \quad (1.3.5)$$

где $\vec{J}_M = \rho_M \vec{v}$ — вектор плотности потока массы. Очевидно, что плотность потока $\vec{J}_M(\vec{r}, t)$ является векторным полем, направление линий которого при $t = \text{const}$ совпадает с направлением линий поля скорости \vec{v} .

Соотношение (1.3.5) называется *уравнением непрерывности*. Если характеристики среды, включая плотность массы, со временем не меняются, сплошная среда называется *стационарной*. В этом случае для любой замкнутой поверхности поток массы равен нулю, так как векторное поле \vec{J}_M не имеет источников.

Перейдём к *закону сохранения числа частиц*. Довольно часто приходится иметь дело с многокомпонентными веществами. Это различные смеси жидкостей или газов, примеси в твёрдых телах, наконец, любая среда, содержащая заряженные частицы разных знаков. При выполнении сформулированных ранее условий, к каждой из этих компонент применима модель сплошной среды, причём роль условия «непрерывности» отдельных компонентов играет закон сохранения числа частиц данного сорта.

Чтобы его сформулировать, допустим, что полное число частиц i -го сорта в объёме V_0 равно

$$N_i = \int_{V_0} n_i(\vec{r}, t) dV = \text{const}, \quad (1.3.6)$$

где n_i — концентрация частиц i -го сорта. Тогда, вместо (1.3.1) в данном случае имеем

$$\int_{V_0} \frac{\partial n_i}{\partial t} dV = - \oint_{S_0} \vec{J}_i d\vec{S} - \int_{V_0} \sigma_i dV. \quad (1.3.7)$$

При $\sigma_i = 0$ это соотношение примет форму уравнения непрерывности. В этом случае изменение числа частиц i -го сорта в объёме V_0 определяется потоком частиц Φ_i через поверхность S_0 , окружающую этот объём, $\vec{J}_i = n_i \vec{v}$ — вектор плотности потока частиц i -го сорта. Очевидно, что в стационарном случае (при $\sigma_i = 0$) для каждого сорта частиц существует своя система линий или трубок тока (линий поля \vec{J}_i).

Наконец, обратимся к *уравнению непрерывности для электрического заряда*. Как известно, во многих случаях в веществе имеются движущиеся заряженные частицы или «носители» заряда. Природа носителей заряда в разных веществах может быть весьма различной. Наиболее распространённый случай — металли-

ческие проводники, в которых носителями заряда служат свободные электроны. В других веществах могут присутствовать носители заряда обоих знаков. Кроме носителей заряда в веществе присутствуют другие частицы, которые оказывают тормозящее влияние на движение заряженных частиц. Их называют частицами «фона».

Поскольку концентрация носителей заряда в реальных проводниках огромна, к описанию распределения и движения зарядов в веществе также применимо приближение сплошной среды. Роль условия непрерывности «электрической жидкости» выполняет закон сохранения электрического заряда:

$$Q = \int_{V_0} R_q(\vec{r}, t) dV = \text{const}, \quad (1.3.8)$$

где $R_q = \sum q_i n_i$ — объёмная плотность заряда, а q_i и n_i — величина и концентрация носителей заряда i -го типа. По аналогии с соответствующими законами сохранения массы и числа частиц ему также можно придать (при $\sigma_q = 0$) вид уравнения непрерывности:

$$\int_{V_0} \frac{\partial R_q}{\partial t} dV = - \oint_{S_0} \vec{J}_q d\vec{S}. \quad (1.3.9)$$

В этом случае изменение заряда внутри объёма V_0 вызвано потоком заряженных частиц через окружающую его поверхность S_0 .

Входящая в (1.3.9) величина $\vec{J}_q = R_q \vec{v}$ — это вектор плотности потока заряда. Если вещество содержит несколько групп заряженных частиц, то $\vec{J}_q = \sum q_i n_i \vec{v}_i$, где \vec{v}_i — скорость упорядоченного движения заряженных частиц i -го сорта, имеющих заряд q_i .

Элемент потока электрического заряда через поверхность ΔS называется *электрическим током* I :

$$I \equiv \Delta \Phi_q = \int_{\Delta S} \vec{J}_q d\vec{S}. \quad (1.3.10)$$

Электрический ток — скалярная величина, равная количеству заряда, переносимого через поверхность ΔS в единицу времени. Ток может иметь различный знак. Особого обозначения для электрического тока через замкнутую поверхность, то есть для потока заряда Φ_q , вводить не принято. В системе СИ единицей измерения тока служит ампер [$A = \text{Кл/с}$], принимаемый за одну из основных единиц.

Для системы произвольно движущихся заряженных частиц вектор плотности электрического тока \vec{J}_q является столь же фундаментальной характеристикой электрических свойств системы, что и плотность заряда R_q . Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть систему частиц, которая в целом является электрически нейтральной. В этом случае плотность заряда $R_q = R_+ + R_- = 0$, в то время как $\vec{J}_q = R_+ \vec{v}_+ + R_- \vec{v}_- = R_+ (\vec{v}_+ - \vec{v}_-)$. Если $\vec{v}_+ \neq \vec{v}_-$, то в таких системах $\vec{J}_q \neq 0$. В частности, в металлических проводниках положительные ионы, образующие кристаллическую решётку, в среднем неподвижны ($\vec{v}_+ = 0$). Поэтому $\vec{J}_q = R_- \vec{v}_- \neq 0$, хотя $R_q = 0$. Тем самым, вектор \vec{J}_q оказывается единственной характеристикой электрических свойств нейтральной системы заряженных частиц.

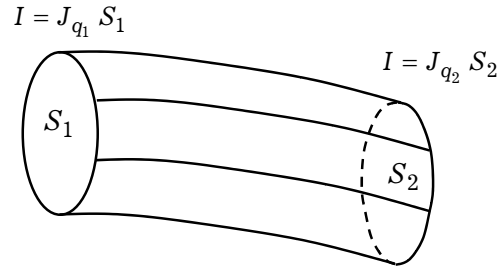


Рис. 1.8

Важным является понятие стационарного электрического тока, для которого $\partial R_q / \partial t = 0$. Для него закон сохранения заряда (1.3.9) принимает вид (рис. 1.8):

$$\Phi_q = \oint_{S_0} \vec{J}_q d\vec{S} = 0.$$

Поскольку векторное поле \vec{J}_q не имеет источников, линии тока для него либо замкнуты, либо уходят в бесконечность. Если в этом случае ввести трубку тока, то электрический ток через её боковую поверхность будет отсутствовать. В результате для любого сечения трубки тока

$$\begin{aligned} I &= \Delta\Phi_{q1} = J_{q1} S_1 = \\ &= J_{q2} S_2 = \Delta\Phi_{q2} = \text{const}, \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

где S_i — площади поперечных сечений трубки тока, а J_{q_i} — средние значения плотности тока в сечениях S_i .

В природе и технике стационарные токи реализуются следующим образом. Если заряды не покидают фиксированный объём V_0 , то их плотность R_q со временем не меняется. Примером стационарного тока может служить ток в круговом металлическом витке или замкнутом плазменном шнуре. Наконец, ещё одна система, в которой ток стационарен, — это замкнутая электрическая цепь, содержащая химический элемент и металлические проводники. Хотя носители заряда в металлических проводниках и электролите различны, через любое поперечное сечение замкнутой цепи проходит один и тот же по величине ток $I = \text{const}$.

1.4. Переход от «дальнодействия» к «близкодействию» в системе неподвижных зарядов. Понятие об электрическом поле

Классическая или максвелловская теория электромагнитного поля базируется на модели сплошной среды. Она учитывает только макроскопические свойства вещества, предполагая, что размеры рассматриваемой области пространства и расстояние от источников поля до рассматриваемой точки велики по сравнению с размерами молекул, а характерное для изменения электромагнитного поля время (например, период колебаний) велико по сравнению со временем, характерным

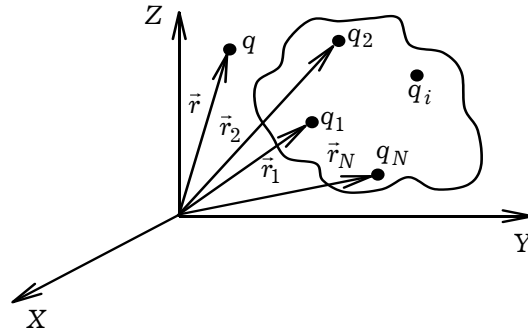


Рис. 1.9

для внутримолекулярных колебательных процессов. При этом воздействие со стороны источников электромагнитного поля может быть описано с помощью электрических и магнитных полей, играющих роль характеристик своеобразной «сплошной среды».

В связи с тем, что понятие электромагнитного поля у большинства читателей вызывает затруднения, естественно было бы начать изучение с простейших систем заряженных частиц, для которых корпускулярный и континуальный подходы по существу эквивалентны. Ниже начнём с изучения простейших характеристик электромагнитного взаимодействия в модели сплошной среды — постоянных электрического и магнитного полей.

Рассмотрим систему неподвижных зарядов q_1, q_2, \dots, q_N , положения которых в пространстве описываются радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ (рис. 1.9). Будем исследовать воздействие этой системы на неподвижный пробный заряд q , положение которого в пространстве описывается радиус-вектором \vec{r} . Для определённости будем считать заряд q положительным и малым, а приближение пробного заряда к системе зарядов q_1, q_2, \dots, q_N весьма медленным. При таких допущениях можно считать, что заряд q существенно не повлияет на первоначальную конфигурацию системы зарядов $\{q_i\}$. В результате мы имеем систему из $(N + 1)$ неподвижного заряда. Результирующая сила \vec{F} , действующая на пробный заряд q со стороны остальных зарядов, определяется законом Кулона:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{qq_i}{R_i^2} \vec{e}_i, \quad (1.4.1)$$

где $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$, $R_i = |\vec{R}_i|$ — модуль вектора \vec{R}_i , $\vec{e}_i = \vec{R}_i / R_i$ — единичный вектор.

Формула (1.4.1) записана на основе двух важнейших экспериментальных фактов:

- закона Кулона, определяющего взаимодействие неподвижных электрических зарядов;
- принципа суперпозиции, согласно которому взаимодействие каждой пары зарядов происходит независимо от присутствия остальных зарядов.

Поскольку каждый член суммы в (1.4.1) зависит от расстояний между двумя точечными зарядами в фиксированный момент времени, формула (1.4.1) олицетворяет концепцию «дальнодействия», согласно которой предполагается, что пробный заряд непосредственно взаимодействует с каждым из зарядов системы $\{q_i\}$.

С другой стороны, формула (1.4.1) позволяет рассматривать результирующую силу как векторное поле $\vec{F}(\vec{r})$, типичное для концепции «близкодействия», то есть изучение воздействия на заряд q может быть сведено к изучению свойств поля сил $\vec{F}(\vec{r})$. Однако такое рассмотрение не совсем удобно, так как поле сил $\vec{F}(\vec{r})$ — величина, которая одновременно характеризует оба объекта: пробный заряд q и систему зарядов $\{q_i\}$.

Объективная физическая характеристика воздействия на любой пробный заряд со стороны его окружения должна зависеть только от параметров этого окружения и месторасположения пробного заряда. Поэтому естественно ввести векторную величину

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}, \quad (1.4.2)$$

называемую *электрическим полем* (напряжённостью электрического поля).

Как следует из определения (1.4.2), электрическое поле — это векторная функция, равная силе, действующей на единичный положительный пробный заряд, помещённый в точке пространства с радиус-вектором \vec{r} . Направления полей $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{F}(\vec{r})$, очевидно, совпадают. Однако в отличие от $\vec{F}(\vec{r})$, поле $\vec{E}(\vec{r})$ характеризует способность системы зарядов $\{q_i\}$ к воздействию на любой пробный заряд, не входящий в эту систему.

Электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$, как и сила $\vec{F}(\vec{r})$, полностью определяется заданием положений \vec{r}_i и величин неподвижных зарядов q_i . Электрическое поле, определяемое как (1.4.2), можно использовать для сравнения двух альтернативных концепций взаимодействия — «дальнодействия» и «близкодействия». Действительно, пока мы имеем дело с неподвижными зарядами, можно считать, что сила, действующая на единичный пробный заряд, то есть постоянное поле $\vec{E}(\vec{r})$ не просто обнаруживается при наличии пробного заряда; оно возникает лишь при наличии как системы зарядов $\{q_i\}$, так и пробного заряда q . Такой подход соответствует концепции «дальнодействия». Возможна другая, пока совершенно эквивалентная, точка зрения, согласно которой непосредственно элементарным актом является локальное взаимодействие пробного заряда q с полем $\vec{E}(\vec{r})$ в точке \vec{r} , где расположен этот заряд. При этом допускается, что в точках пространства, окружающих систему зарядов $\{q_i\}$ всегда существует «электрическая сила» — поле $\vec{E}(\vec{r})$, порождаемое этими зарядами, независимо от того, проявляется ли она в воздействии на другой заряд (если он есть) или ни в чём пока не проявляется (если пробного заряда нет). Такой подход соответствует концепции «близкодействия».

Пока заряды неподвижны, между этими подходами нельзя сделать выбор. Другое дело, если имеется система произвольно движущихся зарядов. В этом случае, как будет показано в дальнейшем, формула (1.4.1) для силы неверна. Однако формула (1.4.2) сохраняет свой смысл, так как она всегда позволяет найти результирующую силу, если только научиться независимо находить поле $\vec{E}(\vec{r})$ произвольной

системы зарядов. Тем самым, в центре внимания оказывается новый объект исследования — *электрическое поле системы зарядов*. Задача состоит в том, чтобы на примере постоянного электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$ обнаружить такие его свойства, которые позволили бы дать общее определение произвольного электрического поля, то есть зависящего от времени t .

1.5. Электрическое поле движущихся зарядов. Инвариантность закона Гаусса

Эффективность описания взаимодействия системы неподвижных зарядов с помощью электрического поля связана с идеей равноправия всех зарядов системы, так что предположение о неподвижности пробного заряда здесь несущественно. При переходе к системе движущихся зарядов их равноправие нарушается, ибо каждый заряд уже характеризуется своим вектором скорости. Если оставаться в рамках концепции «дальнодействия», задача описания их взаимодействия становится практически нереальной. Для её решения необходимо обобщить фундаментальный закон взаимодействия пары зарядов — закон Кулона, а также убедиться в справедливости принципа суперпозиции для движущихся зарядов.

Принципиальное преимущество концепции «близкодействия» связано с тем, что в ней описание процесса взаимодействия разделено на два независимых этапа: сначала находится поле, создаваемое зарядами системы, а затем исследуется воздействие этого поля на пробный заряд. Пробный заряд вводится только на втором этапе, что позволяет для описания его движения использовать законы релятивистской физики и, тем самым, получить инвариантное описание воздействия со стороны системы зарядов, справедливое в любой системе координат.

Будем исходить из соотношения

$$\vec{F} = q \vec{E}, \quad (1.5.1)$$

которое определяет силу, с которой действует система неподвижных зарядов на неподвижный пробный заряд q . Очевидно, что левая часть (1.5.1) имеет смысл и для движущегося заряда, причём соответствующее выражение для силы можно записать в любой системе координат. Поэтому, опираясь на известные свойства вектора \vec{F} , можно исследовать свойства правой части (1.5.1), то есть изучить свойства электромагнитного воздействия на движущийся заряд, если только предварительно установить, что следует понимать под его величиной. Для движущегося заряда существует выделенное направление, определяемое вектором скорости. Чтобы избавиться от влияния этого фактора, условимся определять электрический заряд движущейся частицы, производя усреднение действующих на него сил по всем направлениям.

В качестве доказательства целесообразности такого определения электрического заряда представим себе большое количество малых зарядов Δq_i , равномерно распределённых по поверхности сферы S_0 (рис. 1.10). В момент времени t , когда движущийся заряд q пролетает через центр сферы, измерим силу, действующую

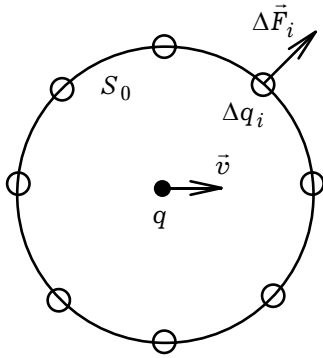


Рис. 1.10

на каждый элементарный заряд Δq_i , расположенный на поверхности S_0 . Так как заряды Δq_i в фиксированный момент неподвижны, то рассматривая их в качестве пробных зарядов, согласно (1.5.1) полагаем, что сила, действующая на единичный пробный заряд определяет электрическое поле в данной точке сферы в момент времени t пролёта заряда через её центр. С учётом радиального направления этих сил после усреднения по всей поверхности сферы получим среднее значение компоненты силы $(\vec{E}_r)_{\text{ср}}$, а значит и компоненты электрического поля. Иными словами, нахождение электрического заряда движущейся частицы практически сводится к измерению потока вектора \vec{E} через поверхность сферы S_0 в момент времени t .

В результате, определение на опыте величины движущегося заряда должно быть основано не на законе Кулона, а на законе Гаусса.

Закон Гаусса: Поток $\Phi_{\vec{E}}$ напряженности электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$ через произвольную замкнутую поверхность S_0 пропорционален величине электрического заряда Q , заключённого в объёме V_0 , ограниченном поверхностью S_0 . Поскольку для вывода этого закона не используется никаких предпосылок за исключением закона Кулона, его также иногда называют обобщением последнего.

Математическая формулировка закона выглядит следующим образом:

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_{S_0} \vec{E} d\vec{S} = a \int_{V_0} R_q dV = aQ, \quad (1.5.2)$$

где R_q — объёмная плотность заряда, a — некоторая постоянная, зависящая от системы единиц.

В случае поверхностного или линейного распределения зарядов соответственно следует полагать:

$$Q = \int_{S_1} \sigma_q dS \quad \text{или} \quad Q = \int_{L_1} \lambda_q dl,$$

где σ_q и λ_q — соответственно поверхностная и линейная плотности заряда, а S_1 и L_1 — поверхность и линия, на которых распределены заряды.

Величина электрического заряда, заключённого внутри неподвижной замкнутой поверхности S_0 произвольной формы, в момент времени t определяется как

$$Q = \frac{1}{a} \Phi_{\vec{E}} = \frac{1}{a} \oint_{S_0(t)} \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.5.3)$$

Измерение электрического поля в каждой её точке происходят одновременно. Заметим, что в системе СИ $a = 1/\epsilon_0$.

Инвариантность заряда. Далее необходимо ответить на вопрос: зависит ли данное определение величины движущегося заряда от выбора инерциальной системы отсчёта (ИСО).

Экспериментально было установлено два фундаментальных факта. Во-первых, все электрические заряды, встречающиеся в природе, являются по абсолютному значению кратными элементарному заряду электрона ($1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Здесь необходимо заметить, что в течение многих лет предпринимались тщательные попытки найти в природе заряды, которые были бы дробными относительно элементарного заряда. Исследования велись чрезвычайно тщательно, поскольку речь шла о проверке очень важной гипотезы о строении элементарных частиц (гипотезы кварков), однако обнаружить дробные заряды не удалось. Во-вторых, значение элементарного заряда является постоянным и не зависит от скорости частицы, которая несёт этот заряд. Одним из простейших доказательств этого утверждения является следующее. Если бы значение заряда зависело от скорости, атомы не могли быть нейтральными, поскольку заряд быстро движущихся электронов не был бы в общем случае по абсолютному значению равен заряду ядер атомов. Опыт же показывает, что атомы нейтральны. Это означает, что значение элементарных зарядов не зависит от скорости несущих заряды частиц, то есть заряд является *инвариантной величиной*.

Поскольку электрический заряд является инвариантом, то в любой ИСО

$$Q = Q' . \quad (1.5.4)$$

Из инвариантности электрического заряда (1.5.4) неизбежно следует зависимость объёмной плотности заряда от выбора ИСО.

Важно связать свойство инвариантности электрического заряда (1.5.4) с другим его фундаментальным свойством — подчинению *закону сохранения* в изолированной системе: $Q_{\text{нач}} = Q_{\text{кон}} = \text{const}$, где $Q_{\text{нач}}$ и $Q_{\text{кон}}$ — алгебраические суммы зарядов системы в начале и конце какого-либо процесса. Вследствие инвариантности заряда его величина в изолированной системе не просто постоянна, она одинакова во всех ИСО. Это связано с тем, что в теории относительности пространства Г. Минковского заряд рассматривается как четырёхмерный скаляр и вводится четырёхмерный тензор энергии и импульса электромагнитного поля, компоненты которого изменяются согласно преобразованиям Лоренца.

Объединим теперь свойство инвариантности заряда (1.5.4) с определением движущегося заряда (1.5.3). В результате мы получим новый фундаментальный результат: *закон Гаусса не зависит от движения составляющих систему частиц*, а значит, и от выбора ИСО, так что

$$\oint_{S_0(t)} \vec{\epsilon} d\vec{S} = \oint_{S'_0(t')} \vec{\epsilon}' d\vec{S}' , \quad (1.5.5)$$

где S'_0 — замкнутая поверхность, окружающая в момент времени t' в штрихованной ИСО те же самые заряженные частицы, что и поверхность S_0 в момент времени t в нештрихованной ИСО. При этом поле $\vec{\epsilon}'$ в штрихованной ИСО должно быть также измерено одновременно в момент времени t' , то есть определено по силе, действующей на неподвижные в этой ИСО пробные заряды в момент времени t' . Тем самым, закон Гаусса имеет смысл *инвариантного закона природы*, эквивалентного утверждению об инвариантности электрического заряда.

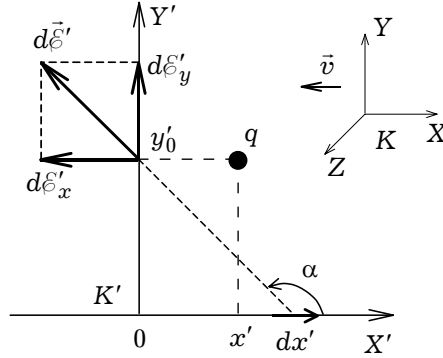


Рис. 1.11

1.6. Релятивистская природа магнитного поля

1.6.1. Сила взаимодействия между покоящейся заряженной нитью и покоящимся точечным зарядом. Для понимания релятивистской природы магнитного поля рассмотрим простую физическую задачу: определим силу взаимодействия между бесконечно длинной прямой равномерно заряженной нитью и точечным зарядом q . Направим ось X' системы координат K' , в которой нить покоится, вдоль нити (рис. 1.11). Будем нить считать очень тонкой по сравнению с расстоянием до точечного заряда. Обозначим через S' — площадь поперечного сечения нити; а через R' — объёмную плотность заряда нити. Пусть в этой системе координат точечный заряд q покоится на расстоянии y'_0 от нити в некоторой точке (x', y'_0) плоскости. Для определённости будем считать заряд нити и точечный заряд одноимёнными, например положительными. Очевидно, что со стороны нити на точечный заряд действует кулоновская сила отталкивания, направленная вдоль оси Y' . Вычислим её.

Поскольку на элементе длины dx' нити сосредоточен заряд $R'S'_0 dx'$, то, по закону Кулона

$$dF'_x = -\frac{q R' S'_0 dx'}{4\pi\epsilon_0 (y'^2_0 + x'^2)} \cos \alpha, \quad dF'_y = \frac{q R' S'_0 dx'}{4\pi\epsilon_0 (y'^2_0 + x'^2)} \sin \alpha,$$

где угол α показан на рис. 1.11.

Учитывая, что $\cos \alpha = x' (y'^2_0 + x'^2)^{-1/2}$, $\sin \alpha = y'_0 (y'^2_0 + x'^2)^{-1/2}$, для компонент полной силы, действующей со стороны заряженной нити на точечный заряд, получим:

$$\begin{aligned} F'_x &= -\frac{q R' S'_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' dx'}{(y'^2_0 + x'^2)^{3/2}}, \\ F'_y &= \frac{q R' S'_0 y'_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(y'^2_0 + x'^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Очевидно, что первый интеграл равен нулю, поскольку под интегралом стоит нечётная функция. Для вычисления второго интеграла в (1.6.1) удобно воспользо-

ваться следующей заменой переменных: $x' = -y'_0 \operatorname{ctg} \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} F'_x &= 0, \quad F'_z = 0, \\ F'_y &= \frac{q R' S'_0}{4\pi \varepsilon_0 y'_0} \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha = \frac{q R' S'_0}{2\pi \varepsilon_0 y'_0}. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Таким образом, заряд отталкивается от нити в системе координат K' с силой $\vec{F}' = F'_y \vec{y}_0$. Обозначая массу частицы, несущей точечный заряд q через m_0 и принимая во внимание, что в данный момент времени заряд покоится, найдём, что ускорение заряда равно:

$$a_x = 0, \quad a_y = \frac{F'_y}{m_0} = \frac{q R' S'_0}{2\pi \varepsilon_0 y'_0 m_0}, \quad a_z = 0. \quad (1.6.3)$$

Исследуем теперь это взаимодействие в системе координат K , движущейся в направлении отрицательных значений оси X' системы координат K' со скоростью $-v$ (рис. 1.11). Направим ось X этой системы координат вдоль нити так, чтобы её положительное направление совпадало с положительным направлением оси X' , и будем считать эту систему координат неподвижной. В ней система координат K' , нить и заряд движутся вдоль оси X со скоростью v . Прежде всего, вычислим кулоновскую силу, которая действует на движущийся заряд со стороны движущейся заряженной нити. Для этого надо принять во внимание релятивистский закон изменения плотности электрического заряда при его движении.

1.6.2. Преобразование плотности заряда. Если некоторый элемент объёма dV' движется со скоростью v , то в неподвижной системе координат он определяется [Л.21] как

$$dV = dV' \sqrt{1 - v^2 / c^2}, \quad (1.6.4)$$

поскольку линейные размеры объёма сокращены в направлении скорости в $(1 - v^2 / c^2)^{-1/2}$ раз, а в перпендикулярном направлении неизменны. Если плотность движущихся зарядов обозначить через R , а неподвижных через R' , то из инвариантности заряда (1.5.4) следует равенство

$$R dV = R' dV', \quad (1.6.5)$$

которое с учётом (1.6.4) даёт следующую формулу преобразования объёмной плотности заряда:

$$R = R' / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v / c. \quad (1.6.6)$$

Из (1.6.6) следует, что плотность зарядов с увеличением их скорости увеличивается.

По закону (1.6.6) меняются и поверхностная $\sigma = \sigma_q$, и линейная $\lambda = \lambda_q$ плотности зарядов, если только движение ИСО происходит вдоль поверхности или линии, на которых размещены заряды.

1.6.3. Необходимость существования магнитного поля в релятивистской физике. Перейдём теперь к вычислению кулоновской силы в системе координат K , относительно которой система координат K' и заряд движутся с одинаковой скоростью

v вдоль нити (вдоль оси OX). Уравнение движения заряда имеет вид:

$$d\vec{p} / dt = \vec{F}, \quad (1.6.7)$$

где $\vec{p} = m_0 \vec{u}$ — импульс заряда; \vec{u} — его скорость.

Найдём силу, действующую на движущийся заряд вдоль оси Y :

$$F_y = \frac{d p_y}{d t} = \frac{d p'_y}{d t'} \frac{d t'}{d t} = \sqrt{1 - \beta^2} F'_y. \quad (1.6.8)$$

В (1.6.8) учтено, что в соответствии с формулами преобразования теории относительности [Л.21]

$$p'_y = p_y, \quad (1.6.9)$$

$$\frac{d t'}{d t} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + v u'_x / c^2} \quad (1.6.10)$$

и принято во внимание условие $u'_x = 0$. Нетрудно убедиться, что две другие компоненты силы равны нулю: $F_x = 0$, $F_z = 0$.

Выясним происхождение силы (1.6.8). Очевидно, что заряженная нить действует на точечный заряд с кулоновской силой, которая находится аналогично тому, как в случае покоящейся нити. Единственное отличие состоит в том, что плотность заряда движущейся нити увеличивается в соответствии с формулой (1.6.6). Поскольку перпендикулярные направлению движения размеры нити остаются неизменными, поперечное сечение S'_0 движущейся нити равно поперечному сечению S_0 неподвижной; расстояние y_0 от движущейся нити до точечного заряда также остаётся неизменным. В результате вместо (1.6.2) получаем:

$$\begin{aligned} f_x &= 0, & f_z &= 0, \\ f_y &= \frac{q R S_0}{2\pi \varepsilon_0 y_0} = q R' S'_0 / (2\pi \varepsilon_0 y'_0 \sqrt{1 - \beta^2}). \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

Кулоновская сила в (1.6.11) обозначена другой буквой, так как заранее неизвестно, равна ли она силе (1.6.8). Из сравнения (1.6.11) с (1.6.2) и (1.6.8) имеем

$$f_y = \frac{F'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad F_y = (1 - \beta^2) f_y. \quad (1.6.12)$$

Из (1.6.12) следует, что кулоновская сила отталкивания f_y больше, чем сила F_y , действующая на движущийся заряд со стороны движущейся нити. То есть, кроме кулоновской силы на движущийся заряд со стороны движущейся нити действует ещё другая сила, отличная от кулоновской, являющаяся силой притяжения. Она возникает за счёт движения зарядов и называется *магнитной силой*. Появление её следует, как показывает формула (1.6.12), из самых общих релятивистских соображений. Поле, соответствующее этой силе, называется *магнитным*. Его появление является релятивистским эффектом, связанным с движением зарядов.

Рассмотренный выше пример показал, когда электрические заряды находятся в движении, должны возникать силы, зависящие от скорости движения зарядов. Рассмотрим более подробно эти силы. Как обычно, система координат K' считается движущейся относительно системы K в направлении оси X со скоростью v . Уравнения движения материальной точки (заряда) в этих системах координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= F_x, & \frac{dp_y}{dt} &= F_y, & \frac{dp_z}{dt} &= F_z, \\ \frac{dp'_x}{dt} &= F'_x, & \frac{dp'_y}{dt} &= F'_y, & \frac{dp'_z}{dt} &= F'_z. \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Найдём связь между силами, действующими в системах \vec{K} и \vec{K}' . Принимая во внимание формулы [Л.21] преобразования импульса

$$p_x = \frac{p'_x + (E'/c^2)v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad (1.6.14)$$

из (1.6.13) получаем:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{d}{dt'} \left[\frac{p'_x + (E'/c^2)v}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \frac{dt'}{dt} = \\ &= F'_x + \frac{v u'_y / c^2}{1 + v u'_x / c^2} F'_y + \frac{v u'_z / c^2}{1 + v u'_x / c^2} F'_z, \\ F_y &= \frac{dp'_y}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} F'_y, \quad F_z = \frac{dp'_z}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} F'_z, \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

где u'_x, u'_y, u'_z — скорости материальной точки в системе K' ; E' — её полная энергия. При выводе (1.6.15) приняты во внимание преобразования Лоренца, формулы (1.6.13), а также соотношение

$$\frac{dE'}{dt'} = \vec{F}' \vec{u}',$$

являющееся записью закона сохранения энергии. С помощью формул [Л.21] преобразования скоростей

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + v u'_x / c^2}, \\ u_z &= \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + v u'_x / c^2} \end{aligned} \quad (1.6.16)$$

выражение для F_x из (1.6.15) можно привести к виду:

$$F_x = F'_x + \frac{v u_y / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_y + \frac{v u_z / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_z. \quad (1.6.17a)$$

С учётом известной [Л.21] формулы, следующей из преобразований Лоренца:

$$\left(1 + v \frac{u'_x}{c^2}\right) \left(1 - v \frac{u_x}{c^2}\right) = 1 - \beta^2,$$

получаются выражения:

$$F_y = \frac{1 - v u_x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} F'_y, \quad (1.6.17б)$$

$$F_z = \frac{1 - v u_x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} F'_z. \quad (1.6.17в)$$

Формулы (1.6.17) целесообразно записать в векторном виде.

Вводя векторы

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} &= \left\{ F'_x, F'_y / \sqrt{1 - \beta^2}, F'_z / \sqrt{1 - \beta^2} \right\}, \\ \vec{G} &= \left\{ 0, -(v / c^2) F'_z / \sqrt{1 - \beta^2}, (v / c^2) F'_y / \sqrt{1 - \beta^2} \right\}, \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

вместо (1.6.17) можно записать векторное уравнение:

$$\vec{F} = \vec{\Phi} + \vec{u} \times \vec{G}. \quad (1.6.19)$$

Таким образом, если в некоторой системе отсчёта сила, действующая на частицу, определяется только координатами, в другой системе она неизбежно должна зависеть от скорости частицы. При этом зависящая от скорости часть силы, выражаемая вторым слагаемым в (1.6.19), перпендикулярна скорости и, следовательно, не производит работы.

Применим формулу (1.6.19) для описания взаимодействия заряженной нити и точечного заряда, рассмотренного в первой части этого раздела. С учётом того, что в этом случае

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} &= \left\{ 0, F'_y / \sqrt{1 - \beta^2}, 0 \right\}, \quad \vec{u} = \{v, 0, 0\}, \\ \vec{G} &= \left\{ 0, 0, (v / c^2) F'_y / \sqrt{1 - \beta^2} \right\}, \end{aligned} \quad (1.6.20)$$

из уравнения (1.6.19) получаем:

$$\begin{aligned} F_x &= 0, F_z = 0, \\ F_y &= F'_y / \sqrt{1 - \beta^2} - (v^2 / c^2) \frac{F'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (1.6.21)$$

Первый член в правой части последней формулы (1.6.21) представляет собой кулоновскую силу отталкивания, а второй — магнитную силу притяжения. Выражение (1.6.21) нетрудно преобразовать к виду

$$F_y = \sqrt{1 - \beta^2} F'_y, \quad (1.6.22)$$

совпадающему с формулой (1.6.8).

С использованием перехода от трактовки взаимодействия зарядов по закону Кулона к полевой трактовке вводится понятие *магнитного поля*. Можно сказать, что движущиеся заряды создают магнитное поле, которое в формуле (1.6.19) представлено вектором \vec{G} . Вектор магнитной индукции \vec{B} определяется как \vec{G} / q .

Электрическое поле в (1.6.19) представлено вектором \vec{E} и определяется как $\vec{E} = \vec{F} / q$. В результате формула (1.6.19) в случае электромагнитного поля принимает вид

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{u} \times \vec{B}], \quad (1.6.23)$$

где \vec{u} — скорость точечного заряда q . Соотношение (1.6.23) есть *формула Лоренца*.

Формула Лоренца (1.6.23) позволяет разделять действие электрического и магнитного полей зарядов в инерциальной системе отсчёта (ИСО). Принято называть *электрическим полем* \vec{E} ту часть силы, действующей на единичный пробный заряд со стороны произвольной системы зарядов, которая в данной ИСО не зависит от его скорости. Соответственно, магнитным полем \vec{B} , входящим в (1.6.23), называют ту часть силы, которая зависит от скорости \vec{u} пробного заряда в данной ИСО. Таким образом, формулу Лоренца (1.6.23) можно трактовать как определение полей \vec{E} и \vec{B} произвольной системы зарядов в любой ИСО. Достоинство этого определения в том, что такое введение векторов \vec{E} и \vec{B} в любой ИСО является универсальным для любых создающих их зарядов и он не зависит от свойств пробного заряда. При этом для обнаружения полей \vec{E} и \vec{B} достаточно использовать только один «универсальный датчик» — пробный электрический заряд (нет необходимости для фиксации магнитного поля использовать магнитную стрелку). Именно это обстоятельство позволяет говорить о *единой природе электромагнитного взаимодействия*.

1.6.4. Закон Био-Савара для прямого бесконечного тока. Найдём вектор магнитной индукции \vec{B} , создаваемой бесконечной заряженной нитью, движущейся со скоростью v вдоль своей оси. Движущаяся нить эквивалентна прямому бесконечному току, плотность которого Rv , а сила — $I = RvS_0$, где R — плотность заряда движущейся нити, v — скорость нити, S_0 — площадь её поперечного сечения. Из (1.6.20) видно, что вектор $\vec{B} = \vec{G} / q$ в точке, расположенной в плоскости $ХОУ$, направлен вдоль оси OZ , то есть перпендикулярно этой плоскости. Однако плоскость $ХОУ$ выбрана относительно прямого тока, текущего вдоль оси $ОХ$, совершенно произвольно, поскольку все направления, перпендикулярные прямому бесконечному току, равноправны. Поэтому вектор \vec{B} бесконечного прямого тока лежит в плоскостях, перпендикулярных линии тока. Он направлен по касательной к окружности, лежащей в соответствующей плоскости и концентрической прямому току. Это означает, что *магнитные силовые линии являются окружностями*, концентрическими бесконечному прямому току. Значение $\vec{B} = \vec{G} / q$ на некотором расстоянии от тока может быть вычислено на основании (1.6.20) с учётом (1.6.2). Принимая во внимание, что магнитное поле аксиально симметрично и зависит только от расстояния r от нити и полагая в (1.6.2) $y'_0 = y_0 = r$, получаем

$$B = \frac{G}{q} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (1.6.24)$$

Заметим, что при выводе (1.6.24) учтены формула (1.6.6) и соотношение $\epsilon_0 c^2 = 1 / \mu_0$ (c — скорость света в вакууме). Соотношение (1.6.24) есть *закон Био-Савара для прямолинейного бесконечного тока*.

Из изложенного выше следует, что сила, действующая на движущийся заряд, определяется вектором \vec{B} , и поэтому следовало бы назвать этот вектор напряжённостью магнитного поля, по аналогии с напряжённостью электрического поля \vec{E} . Однако исторически сложилось так, что этот вектор получил название *вектора индукции магнитного поля* или просто *магнитной индукции*.

1.6.5. Формулы преобразования полей. Из (1.6.23) можно получить формулы преобразования полей. Считаем, что выражение (1.6.23) должно быть ковариантным, то есть для систем K и K' (см. рис. 1.11) можно записать:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}), \quad \vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}'), \quad (1.6.25)$$

при этом элементарный заряд q является инвариантной величиной, а соотношения между компонентами сил задаются формулами (1.6.17).

Производя достаточно громоздкие преобразования (аналогичные тем, которые были проделаны в разделе 1.6.3), получаем формулы, связывающие поля \vec{E} и \vec{B} в различных ИСО:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & B_x &= B'_x, \\ E_y &= \frac{E'_y + v B'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B_y &= \frac{B'_y - v E'_z / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E_z &= \frac{E'_z - v B'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B_z &= \frac{B'_z + v E'_y / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (1.6.26)$$

Подчеркнём, что формулы (1.6.26) справедливы при переходе от неподвижной системы отсчёта $\{X', Y', Z'\}$ (поля \vec{E}' и \vec{B}') к движущейся против оси OX' со скоростью v системе отсчёта $\{X, Y, Z\}$ (поля \vec{E} и \vec{B}). Как следует из формул преобразования (1.6.26), при переходе от одной ИСО к другой изменяются только перпендикулярные по отношению к вектору \vec{v} составляющие полей \vec{E} и \vec{B} , а продольные — не изменяются.

1.6.6. Единое электромагнитное поле и его инвариантные характеристики. До настоящего момента при рассмотрении векторов \vec{E} и \vec{B} общность между ними проявлялась только в том, что они оба являлись характеристиками внешнего воздействия на пробный заряд в конкретной ИСО, не зависящими от его параметров. Покажем, что эти векторы совместно играют роль объектных характеристик электромагнитного воздействия в любой ИСО. С этой целью перепишем формулы преобразования полей \vec{E} и \vec{B} (1.6.26) в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & B_x &= B'_x, \\ E_y &= \frac{E'_y + v B'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & (-B_y) &= \frac{(-B'_y) + v E'_z / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E_z &= \frac{E'_z + v (-B'_y)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B_z &= \frac{B'_z + v E'_y / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (1.6.27)$$

Из (1.6.27) видно, что законы преобразований полей при смене ИСО обладают полной симметрией относительно взаимных перестановок:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x &\leftrightarrow c\mathcal{B}_x, \\ \mathcal{E}_y &\leftrightarrow -c\mathcal{B}_y, \\ \mathcal{E}_z &\leftrightarrow c\mathcal{B}_z,\end{aligned}\tag{1.6.28}$$

что характеризует взаимосвязь и внутреннее единство электрического и магнитного воздействий. Такой вывод ещё более интересен с учётом того, что он получен из выражения для силы Лоренца (1.6.23), в которое компоненты векторов $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{B}}$ входят явно несимметрично.

Таким образом, можно говорить о том, что электрическое и магнитное поля являются равноправными, а совокупность шести компонент электрического и магнитного полей совместно образуют *единый физический инвариантный объект* — электромагнитное поле $\vec{T} = \{\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z, \mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y, \mathcal{B}_z\}$, который может быть обнаружен по его действию на пробный электрический заряд в любой ИСО путём измерения силы Лоренца (1.6.23).

Электромагнитное поле \vec{T} как единый физический объект обладает *инвариантами*, то есть такими комбинациями составляющих T_i ($i = \overline{1,6}$), которые не изменяются при смене ИСО. Таких инвариантов можно образовать два:

$$\begin{aligned}I_1 &= \mathcal{E}^2 - c^2\mathcal{B}^2 = \text{const}, \\ I_2 &= (\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}) = \text{const}.\end{aligned}\tag{1.6.29}$$

Инвариантность величин I_1 и I_2 проверяется путём прямой подстановки в них формул преобразования полей (1.6.26).

Рассмотрим частные случаи (1.6.29).

1. Если $I_2 = 0$, то поля $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{B}}$ перпендикулярны в любой ИСО.
2. Если $I_1 = 0$, то модули векторов $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{B}}$ с точностью до постоянной c совпадают ($|\vec{\mathcal{E}}| = c|\vec{\mathcal{B}}|$) в любой ИСО.
3. Если $I_1 = I_2 = 0$, то одновременно

$$|\vec{\mathcal{E}}| = c|\vec{\mathcal{B}}|, \quad \vec{\mathcal{E}} \perp \vec{\mathcal{B}}.\tag{1.6.30}$$

Вследствие инвариантности I_1 и I_2 условия (1.6.30) выполняются в любой ИСО. В едином электромагнитном поле \vec{T} , во-первых, его «электрическая» и «магнитная» составляющие совершенно *равноправны* и нельзя утверждать, что какая-то составляющая проявляется за счёт релятивистского эффекта. Во-вторых, свойства такого поля не зависят от каких-либо характеристик заряженных частиц; это внутреннее свойства самого поля \vec{T} . В-третьих, свойства этого поля не зависят от скорости \vec{v} ИСО, то есть у поля нет ни одного параметра, который был бы привязан к персональной ИСО. Такая ситуация возможна только в том случае, когда физический объект (поле) сам распространяется со скоростью света, то есть когда условия (1.6.30) определяют *электромагнитное излучение*.

Из условия $I_2 = 0$ можно сделать и другие важные выводы. В частности, если в какой-то ИСО $\vec{\mathcal{E}} = 0$ или $\vec{\mathcal{B}} = 0$, то в любой другой ИСО существуют оба поля, причём $\vec{\mathcal{E}}' \perp \vec{\mathcal{B}}'$. Наоборот, если в какой-то ИСО $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{\mathcal{B}}$, то существует ИСО, в

которой либо $\vec{B} = 0$, либо $\vec{E} = 0$. В качестве таких примеров полей можно привести поля заряженной плоскости и проводящей ленты с током.

1.7. Уравнение непрерывности и ток смещения

1.7.1. Уравнение непрерывности. Установленный ранее закон сохранения заряда математически выражается уравнением непрерывности. Заряд, заключённый внутри объёма V , вычисляется как

$$Q = \int_V R dV. \quad (1.7.1)$$

Если заряд Q внутри данного объёма изменяется, то происходит его движение через поверхность S , ограничивающую рассматриваемый объём V . Величина заряда, проходящего через эту поверхность в течение малого интервала времени dt , будет определяться как

$$dQ = dt \int_S \vec{J} d\vec{S}, \quad (1.7.2)$$

где интеграл представляет собой силу тока через поверхность S . Он положителен, если ток вытекает из рассматриваемого объёма, и отрицателен, если втекает. По закону сохранения заряда втекание или вытекание его должны привести к соответствующим изменениям величины Q (заряда, заключённого в данном объёме). Это изменение за время dt равно

$$dt \frac{dQ}{dt} = dt \int_V \frac{\partial R}{\partial t} dV. \quad (1.7.3)$$

По закону сохранения заряда, величины (1.7.2) и (1.7.3) равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку:

$$\int_S \vec{J} d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial R}{\partial t} dV. \quad (1.7.4)$$

Применяя к левой части равенства (1.7.4) теорему Остроградского-Гаусса, получаем

$$\int_V \left(\frac{\partial R}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} \right) dV = 0. \quad (1.7.5)$$

Так как равенство (1.7.5) справедливо для произвольного объёма V , подынтегральное выражение равно нулю:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0. \quad (1.7.6)$$

Это есть *уравнение непрерывности*, являющееся математической интерпретацией закона сохранения заряда.

1.7.2. Линии токов проводимости. В случае стационарных токов объёмная плотность зарядов в каждой точке постоянна и, следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial t} = 0. \quad (1.7.7)$$

Поэтому для постоянных токов уравнение непрерывности имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0, \quad (1.7.8)$$

из которого следует, что линии постоянного тока не имеют ни начала, ни конца. Это либо замкнутые линии, либо линии, уходящие в бесконечность. В случае переменных токов линии вектора плотности тока не замкнуты, поскольку

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial R}{\partial t} \neq 0. \quad (1.7.9)$$

Из (1.7.9) следует, что линии вектора \vec{J} начинаются в тех точках, где изменяется плотность заряда. Плотность тока связана с движением свободных зарядов в проводнике, поэтому её называют *плотностью тока проводимости*.

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, содержащую конденсатор, обкладки которого разделены вакуумом. Как известно, по такой электрической цепи постоянный ток не протекает, поскольку в пространстве между обкладками конденсатора нет свободных зарядов, вследствие чего линии плотности тока проводимости \vec{J} между обкладками конденсатора терпят разрыв и, следовательно, уравнение (1.7.8) не удовлетворяется.

1.7.3. Закон Гаусса в дифференциальной форме. Для получения дифференциального соотношения между величинами, входящими в равенство (1.5.2), необходимо воспользоваться теоремой Остроградского-Гаусса. Применив её к левой части равенства (1.5.2), получаем

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} dV. \quad (1.7.10)$$

В результате из (1.5.2) с учётом (1.7.10) следует, что

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} - R / \varepsilon_0) dV = 0. \quad (1.7.11)$$

При записи (1.7.11) учтено, что для вакуума постоянная $a = 1 / \varepsilon_0$. Из равенства (1.7.11), в котором область интегрирования произвольна, получаем дифференциальное уравнение:

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} = \frac{R}{\varepsilon_0}, \quad (1.7.12)$$

которое называется *законом Гаусса в дифференциальной форме*.

1.7.4. Ток смещения. В случае переменных токов наличие в цепи конденсатора не препятствует их протеканию. Так как в пространстве между обкладками конденсатора свободных зарядов нет, можно предположить, что там должен происходить некоторый процесс, эквивалентный протеканию тока проводимости. Говорят, что между обкладками конденсатора существует *ток смещения*, замыкающий ток проводимости.

Для получения математического выражения тока смещения продифференцируем по времени обе части уравнения (1.7.12):

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \right). \quad (1.7.13)$$

В (1.7.13) учтено, что координаты и время являются независимыми переменными, поэтому порядок дифференцирования по ним может быть изменён. Подставляя (1.7.13) в (1.7.6), получаем дифференциальное соотношение

$$\operatorname{div} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \vec{J} \right) = 0 ,$$

из которого следует, что линии вектора

$$\vec{J}_{\text{полн}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \vec{J}$$

всегда замкнуты. Вектор

$$\vec{J}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (1.7.14)$$

называется *объёмной плотностью тока смещения*.

В электрической цепи с конденсатором, когда по цепи протекает переменный ток I , заряд Q на каждой обкладке изменяется, при этом $I = dQ/dt$. Если площадь обкладки плоского конденсатора S , то модуль вектора $\vec{\mathcal{E}}$ между обкладками конденсатора, как следует из теоремы Гаусса, связан с зарядом Q на обкладке равенством

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{I}{S},$$

то есть плотность тока смещения между обкладками конденсатора равна плотности тока проводимости, который протекал бы между обкладками конденсатора, если бы пространство между ними было заполнено проводящей средой. По своей физической природе ток смещения $\vec{J}_{\text{см}}$ ничего общего с током проводимости не имеет. Плотность тока смещения есть величина, пропорциональная скорости изменения электрического поля в данной точке. Однако эта величина не случайно называется током. Дело в том, что ток смещения сопровождается появлением точно такого же магнитного поля, какое возникает при наличии соответствующего ему по равенству (1.7.14) тока проводимости. Таким образом, изменение электрического поля приводит к возникновению магнитного поля. Это явление дополняет связь между электрическим и магнитным полями, определяемую законом электромагнитной индукции. Не только изменения магнитного поля всегда сопровождается возникновением электрического поля, но и наоборот, изменение электрического поля всегда сопровождается возникновением магнитного поля.

1.8. Система уравнений Максвелла в вакууме

1.8.1. Обобщение закона полного тока. В случае постоянных токов проводимости имеет место закон полного тока, утверждающий, что циркуляция вектора индукции магнитного поля вдоль замкнутого контура L равна алгебраической сумме

токов, охватываемых этим контуром, умноженной на μ_0 :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (1.8.1)$$

где I — алгебраическая сумма всех токов, охватываемых произвольным замкнутым контуром L , то есть полный ток проводимости; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума (магнитная постоянная). Направление обхода контура L при интегрировании составляет с направлением полного тока правовинтовую систему.

Закон полного тока может быть получен из закона Био-Савара для бесконечного прямолинейного тока. Индукция магнитного поля бесконечного прямолинейного тока на произвольном расстоянии r от него определяется формулой (1.6.24), причем вектор индукции \vec{B} направлен по касательной к окружности радиуса r с центром на оси тока, лежащей в плоскости, перпендикулярной направлению тока. Запишем циркуляцию вектора \vec{B} вдоль произвольного замкнутого контура L , охватывающего ток, проведенного в плоскости, перпендикулярной направлению тока, в виде:

$$\Gamma_{\vec{B}} = \oint_L \vec{B} d\vec{l}.$$

Поскольку проекция элемента $d\vec{l}$ на направление, перпендикулярное радиус-вектору \vec{r} : $dl = r d\alpha$, где $d\alpha$ — угол, под которым элемент dl виден из центра окружности, с учётом (1.6.24), интеграл по замкнутому контуру L , охватывающему ток, вычислится как

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 I. \quad (1.8.2)$$

Если же контур L не охватывает ток, то интеграл (1.8.2), очевидно, равен нулю. Если имеется несколько токов, то их магнитное поле является суммой полей, созданных каждым током в отдельности. Применяя формулу (1.8.2) к этой сумме полей, получим

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \sum_i \oint_L \vec{B}_i d\vec{l}_i = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I. \quad (1.8.3)$$

В (1.8.3) знак I_i зависит от направлений тока и обхода контура L при интегрировании. Если направление обхода контура L составляет с направлением тока I_i правовинтовую систему, то знак I_i положителен, в противном случае — отрицателен. Таким образом, в формуле (1.8.3) ток I есть алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром L , или, что то же самое, полный ток, охватываемый этим контуром. Таким образом, закон полного тока доказан для бесконечных прямолинейных токов и для произвольного контура, лежащего в перпендикулярной направлению тока плоскости. Чтобы освободиться от этого ограничения, запишем закон (1.8.3) в дифференциальной форме. Полный ток I , охватываемый контуром L , равен

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{S}, \quad (1.8.4)$$

где S — поверхность, опирающаяся на контур L . Запишем формулу (1.8.3) с учё-

том (1.8.4) в виде

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S}. \quad (1.8.5)$$

Преобразуя левую часть равенства (1.8.5) по теореме Стокса, получаем:

$$\int_S (\text{rot } \vec{B} - \mu_0 \vec{J}) d\vec{S} = 0. \quad (1.8.6)$$

Так как поверхность S произвольна, то из (1.8.6) следует, что

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (1.8.7)$$

Соотношение (1.8.7) является дифференциальным, его вид не зависит от того, как ведет себя ток \vec{J} в других точках. Поэтому, хотя это соотношение и выведено для прямолинейных токов, оно справедливо для произвольных токов. Пусть S — поверхность, опирающаяся на произвольный контур L , через которую протекает произвольный ток I . Проинтегрировав обе части уравнения (1.8.7) по S , получаем следующее равенство:

$$\int_S \text{rot } \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S}, \quad (1.8.8)$$

из которого нетрудно получить выражение (1.8.1) для произвольного тока и контура. Тем самым мы освободились от ограничений, при которых первоначально была получена формула (1.8.5) и введён закон полного тока (1.8.1).

В предыдущем разделе было отмечено, что в случае переменных полей магнитное поле создается не только током проводимости, но и током смещения, причем магнитная индукция, создаваемая током смещения, равна индукции, создаваемой соответствующим ему током проводимости. Поэтому естественным обобщением закона полного тока (1.8.1), записанного для тока проводимости, является применение этого закона и для тока смещения. Следовательно, под I можно понимать полный ток, равный сумме токов проводимости и токов смещения, а вместо \vec{J} в (1.8.8) надо написать сумму плотностей тока проводимости и смещения. Поэтому обобщение уравнения (1.8.5) имеет вид

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_S \left\{ \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} d\vec{S}, \quad (1.8.9)$$

откуда следует, что

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.8.10)$$

Соотношение (1.8.10) является одним из дифференциальных уравнений Максвелла, которое будем называть *обобщённым законом полного тока*.

1.8.2. Дифференциальная форма закона электромагнитной индукции. При изменении потока магнитной индукции Φ через поверхность, ограниченную замкнутым проводником, в нем возникает электрический ток под действием электродвижущей силы индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}}$. Закон электромагнитной индукции Фарадея имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.8.11)$$

Знак минус учитывает связь между направлениями электродвижущей силы индукции и скорости изменения потока.

Электрический ток в проводнике появляется в результате возникновения электрического поля. Электродвижущая сила в замкнутом контуре L численно равна работе сил электрического поля по перемещению единичного положительного заряда вдоль этого контура:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_L \vec{\mathcal{E}} d\vec{l}. \quad (1.8.12)$$

Поток магнитной индукции Φ определяется как

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (1.8.13)$$

и выражается в веберах [Вб]. С учетом (1.8.12) и (1.8.13) равенство (1.8.11) принимает более общий вид:

$$\oint_L \vec{\mathcal{E}} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (1.8.14)$$

Явление электромагнитной индукции не связано с наличием замкнутого проводника. Изменение магнитной индукции всегда сопровождается возникновением электрического поля независимо от того, имеется ли проводник или нет. Замкнутый проводник лишь обеспечивает появление тока под действием электрического поля. Поэтому соотношение (1.8.14) справедливо для любого замкнутого контура, мысленно проведенного в пространстве.

Применяя к левой части (1.8.14) теорему Стокса и учитывая, что в правой части равенства поверхность интегрирования S от времени не зависит, в результате чего производную по времени можно внести под знак интеграла, получаем

$$\int_S \text{rot } \vec{\mathcal{E}} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (1.8.15)$$

Так как поверхность S произвольна, то

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.8.16)$$

Знак « $-$ » в (1.8.16) указывает на то, что вектор скорости изменения магнитной индукции и возникающая при этом в замкнутом контуре Э.Д.С. индукции составляют левовинтовую систему (рис. 1.12). Уравнение Максвелла (1.8.16) является дифференциальной формой обобщенного закона электромагнитной индукции Фарадея.

1.8.3. Уравнение Максвелла $\text{div } \vec{B} = 0$. Применим к обеим частям уравнения (1.8.16) операцию дивергенции:

$$\text{div rot } \vec{\mathcal{E}} = - \text{div} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

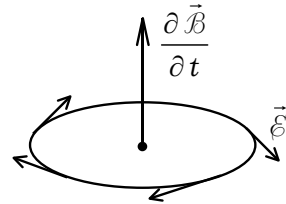


Рис. 1.12

Поскольку дивергенция ротора всегда равна нулю, то

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Таким образом, $\operatorname{div} \vec{B}$ не зависит от времени. Если $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ в какой-то момент времени, то она равна нулю всегда:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.8.17)$$

Из уравнения (1.8.17) следует, что линии магнитной индукции \vec{B} не имеют ни начала, ни конца. А это означает, что не существует свободных магнитных зарядов, которые создают магнитное поле подобно тому, как электрические заряды создают электрическое поле.

1.8.4. Система уравнений Максвелла в вакууме. Уравнения (1.7.12), (1.8.10), (1.8.16), (1.8.17) составляют систему уравнений Максвелла в вакууме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{R}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (1.8.18)$$

1.8.5. Полнота системы. Уравнения (1.8.18) представляют собой систему восьми скалярных уравнений относительно шести скалярных величин: $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$. Заданными считаются R, J_x, J_y, J_z . Таким образом, число уравнений превосходит число неизвестных и, на первый взгляд, система (1.8.18) является переопределенной. Однако это совместная система уравнений, так как первое и четвертое, а также второе и третье уравнения связаны между собой.

Связь второго и третьего уравнений обнаруживается сразу, если от обеих частей второго уравнения взять операцию div , а обе части третьего уравнения продифференцировать по времени. В этих случаях получается одно и то же уравнение $\partial(\operatorname{div} \vec{B}) / \partial t = 0$.

Аналогично, с учетом закона сохранения заряда (1.7.6) четвертое уравнение из (1.8.18) можно рассматривать как следствие первого уравнения. Чтобы в этом убедиться, применим операцию div к первому уравнению:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial(\operatorname{div} \vec{E}) / \partial t = 0.$$

В результате, получаем

$$\epsilon_0 \partial(\operatorname{div} \vec{E}) / \partial t + \operatorname{div} \vec{J} = 0. \quad (1.8.19)$$

Сравнивая (1.8.19) с (1.7.6), видим, что

$$\operatorname{div} \vec{E} = R / \epsilon_0,$$

то есть получаем четвертое уравнение из (1.8.18). Тем самым доказано, что оно с учетом закона сохранения заряда (1.7.6) является следствием первого уравнения из (1.8.18).

Ввиду существования двух указанных выше дифференциальных связей между уравнениями (1.8.18) эта переопределенная система оказывается совместной. Поэтому уравнения (1.8.18) совместно с начальными и граничными условиями полностью

определяют два вектора: $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{B}}$. Приведенные рассуждения, не являясь строгим доказательством, указывают на то, что система уравнений Максвелла для вакуума (1.8.18) является полной.

1.9. Векторы электромагнитного поля в сплошной среде

1.9.1. Микроскопические уравнения Максвелла-Лоренца. Макроскопические (усреднённые) электромагнитные поля. Рассмотрим электронную модель вещества Лоренца, которая состоит в том, что в вакууме каким-либо образом распределён заряд и связанный с ним ток. В силу своей дискретности заряд состоит из неделимых элементарных зарядов e , равных заряду электрона. Поэтому истинные объёмные плотности заряда и тока, образованного дискретной структурой зарядов и их движением, будем называть *микроплотностью заряда* (R_M) и *микроплотностью тока* (\vec{J}_M). В соответствии с электронной теорией вещества Лоренца R_M и \vec{J}_M представляются с помощью трёхмерной δ -функции Дирака:

$$\begin{aligned} R_M(\vec{r}, t) &= \sum_{n=1}^N e_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)), \\ \vec{J}_M(\vec{r}, t) &= \sum_{n=1}^N e_n \vec{v}_n(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)), \end{aligned} \quad (1.9.1)$$

где e_n и $\vec{v}_n(t)$ — соответственно заряд и скорость n -ой частицы. Суммирование в формулах (1.9.1) проводится по всем частицам: для электронов $e_n = -|e|$, для атомных ядер $e_n = M|e|$, где M — атомный номер.

Очевидно, что величина

$$\int_V R_M dV = \sum_{n=1}^N e_n$$

определяет суммарный заряд внутри объёма V .

Микроплотности заряда R_M и тока \vec{J}_M (1.9.1) порождают микроскопические поля $\vec{\mathcal{E}}_M$ и $\vec{\mathcal{B}}_M$, определяемые уравнениями Максвелла в вакууме (1.8.18):

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathcal{E}}_M &= -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_M}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{\mathcal{B}}_M = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_M}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}_M, \\ \text{div } \vec{\mathcal{E}}_M &= \frac{R_M}{\epsilon_0}, \quad \text{div } \vec{\mathcal{B}}_M = 0. \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

Уравнения (1.9.2) иногда называют *уравнениями Максвелла-Лоренца*; они являются точными для вакуума.

Уравнения Максвелла-Лоренца должны быть дополнены релятивистскими уравнениями движения для каждой заряженной частицы ($n = 1, N$):

$$\frac{d}{dt} \frac{m_n \vec{v}_n}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \vec{F}_n, \quad (1.9.3)$$

где $\beta = v/c$; \vec{F}_n — сила Лоренца:

$$\vec{F}_n = e_n (\vec{\mathcal{E}}_M + \vec{v}_n \times \vec{\mathcal{B}}_M). \quad (1.9.4)$$

Уравнения (1.9.1)-(1.9.2) совместно с (1.9.3) и с учётом (1.9.4) образуют замкнутую систему, из которой, в принципе, можно определить поля $\vec{\mathcal{E}}_M$ и $\vec{\mathcal{B}}_M$ и скорости всех частиц \vec{v}_n , то есть определить электромагнитную структуру вещества.

Однако определить движение частицы в макросистеме ($N \sim 10^{25}$ в 1 см^3) практически невозможно, и мы естественным образом в описании электромагнитных явлений в веществе приходим к модели сплошной среды (континуума). В соответствии с разделом 1.1 необходимо ввести физические величины (физические поля), характеризующие свойства сплошной среды в среднем и зависящие от положения \vec{r} элемента среды ΔV в пространстве и момента времени t . Усреднение величин по координатам производится по физически малому объёму $\Delta V \ll L^3$ (L — характерный масштаб длины измеряющего прибора, например, размер стенки волновода или резонатора в технике СВЧ), в котором находится достаточно большое количество микрочастиц. Таким образом, при усреднении мы отбрасываем быстрые пространственные изменения полей на расстояниях $(\Delta V)^{1/3}$. Усреднение физических величин во времени производится по интервалу $\Delta t \ll T$, T — период регистрируемых электромагнитных волн. В этом случае мы исключаем из рассмотрения быстро осциллирующие изменения физических величин на интервале Δt , малом по сравнению с T .

Полное усреднение по координатам и времени любой физической величины $\vec{A}_M \equiv \{\vec{\mathcal{E}}_M, \vec{\mathcal{B}}_M, R_M, \vec{J}_M\}$ в электронной модели вещества Лоренца определяется следующим образом:

$$\langle \vec{A}_M(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{\Delta V} \int_{\Delta t} \vec{A}_M(\vec{r} + \vec{r}', t + t') dV' dt', \quad (1.9.5)$$

$$(dV' = dx'dy'dz'),$$

при этом предполагается, что

$$\left\langle \frac{\partial \vec{A}_M}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{A}_M \rangle, \quad \left\langle \frac{\partial \vec{A}_M}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \vec{A}_M \rangle.$$

Производя усреднения (1.9.5) в уравнениях (1.9.1)-(1.9.2) и отождествляя средние микроскопические поля с макроскопическими (физическими):

$$\langle \vec{\mathcal{E}}_M \rangle = \vec{\mathcal{E}}, \quad \langle \vec{\mathcal{B}}_M \rangle = \vec{\mathcal{B}}, \quad (1.9.6)$$

получаем систему макроскопических уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{\mathcal{B}} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \mu_0 \langle \vec{J}_M \rangle, \quad (1.9.7)$$

$$\text{div } \vec{\mathcal{E}} = \epsilon_0^{-1} \langle R_M \rangle, \quad \text{div } \vec{\mathcal{B}} = 0.$$

Система уравнений (1.9.7) является наиболее общей формой записи системы макроскопических уравнений Максвелла, получающихся путём усреднения микроскопических уравнений Максвелла-Лоренца (1.9.2). Очевидно, что уравнения (1.9.7) не образуют замкнутую систему. Для её полноты необходимо знать зависимости $\langle R_M \rangle$ и $\langle \vec{J}_M \rangle$ от макроскопических полей $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{B}}$. Фактически достаточно знать лишь среднюю плотность микроскопического тока $\langle \vec{J}_M \rangle$, так как

средняя плотность заряда $\langle R_M \rangle$ определяется с помощью уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial \langle R_M \rangle}{\partial t} = -\operatorname{div} \langle \vec{J}_M \rangle. \quad (1.9.8)$$

Явные зависимости $\langle R_M \rangle$ и $\langle \vec{J}_M \rangle$ от макроскопических полей \vec{E} и \vec{B} в электродинамике называются *материальными уравнениями*. Они дополняют уравнения Максвелла (1.9.7) до полной самосогласованной системы. Установление явного вида материальных уравнений для конкретных микроскопических моделей вещества выходит за рамки электродинамики; такая задача решается, в общем случае, методами статистической физики.

1.9.2. Приближённые представления средней плотности связанных зарядов. Поляризованность вещества. Пусть макроскопическая среда состоит из совокупности связанных между собой положительных и отрицательных зарядов^{*)}. В обычном состоянии, как правило, такая макроскопическая среда является электрически нейтральной. Математически условие электронейтральности тела объёмом V в терминах усреднённых микроскопических полей можно записать следующим образом:

$$\int_V \langle R_M \rangle dV = 0. \quad (1.9.9)$$

Интегральное соотношение (1.9.9) означает, что функция координат $\langle R_M \rangle$ может быть представлена в виде дивергенции от некоторого макроскопического вектора $\vec{\mathcal{P}}$:

$$\langle R_M \rangle = -\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}, \quad (1.9.10)$$

что просто доказывается с помощью теоремы Остроградского-Гаусса.

С помощью теоремы Остроградского-Гаусса можно доказать [Л3], что

$$\int_V \vec{\mathcal{P}} dV = \int_V \vec{r} \langle R_M \rangle dV. \quad (1.9.11)$$

Поэтому вектор $\vec{\mathcal{P}} = \vec{r} \langle R_M \rangle$ из физических соображений получил название *вектора электрической поляризации* (поляризованности вещества), а интеграл $\int_V \vec{\mathcal{P}} dV$ — полного электрического дипольного момента вещества объёмом V .

При описании электромагнитного поля в веществе под $\langle R_M \rangle$ обычно понимают плотность связанных зарядов:

$$R^{CB} = \langle R_M \rangle = -\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}. \quad (1.9.12)$$

Физически это объясняется следующим упрощённым образом. Под действием электрического поля вещество *поляризуется*. Так как при этом в каждой молекуле происходит смещение положительных зарядов относительно отрицательных, то молекулы поляризованного диэлектрика можно рассматривать как электрические диполи с дипольными моментами $\vec{p}_n = e_n \Delta \vec{r}_n$, где $\Delta \vec{r}_n$ — расстояние между разноимёнными зарядами в молекуле (рис. 1.13). Сам же поляризованный диэлектрик макроскопически

^{*)} Ниже рассматриваются только связанные заряды

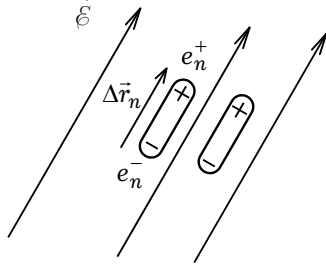


Рис. 1.13

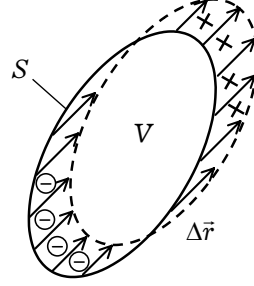


Рис. 1.14

(в среднем) удобно представить как совокупность двух взаимопроникающих сред, состоящих соответственно из положительных и отрицательных зарядов и смещённых одна относительно другой в каждой точке на некоторый вектор $\Delta \vec{r}$ (рис. 1.14). Это так называемая простейшая модель диэлектрика: *модель двух сред*. При $\Delta \vec{r} = 0$ заряды компенсируют друг друга и $R^{\text{св}} = 0$; при $\Delta \vec{r} \neq 0$ в неоднородном диэлектрике появляется плотность связанного заряда $R^{\text{св}} \neq 0$.

Поляризованность $\vec{\mathcal{P}}$ можно интерпретировать и как среднюю (макроскопическую) плотность дипольного момента объёма ΔV вещества:

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{n \in \Delta V} \vec{p}_n. \quad (1.9.13)$$

Такую интерпретацию можно дать на основании условия нейтральности (1.9.9) и модели двух сред (рис. 1.14).

Поляризация состоит из *электронной*, *ионной* и *ориентационной* составляющих. Первая обусловлена смещением электронов относительно ядер в пределах атома, вторая — взаимным смещением отрицательных и положительных ионов кристаллической решётки. Ориентационная поляризация имеет место в диэлектрике, молекулы которого обладают собственным электрическим моментом с хаотической ориентацией их в отсутствии внешнего электрического поля. Такие молекулы называются *полярными*. Под действием внешнего электрического поля \vec{E} молекулы ориентируются в направлении действия этого поля.

В общем случае поле \vec{E} в диэлектрике создаётся как свободными R , так и связанными $R^{\text{св}}$ зарядами:

$$\langle R_{\text{м}} \rangle = R + R^{\text{св}},$$

причём для $R^{\text{св}}$ справедливо представление (1.9.12). Поэтому третье уравнение в системе (1.9.7) можно переписать в виде

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}}) = R.$$

Вводя новый вектор \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}}, \quad (1.9.13)$$

записываем третье уравнение Максвелла в виде

$$\operatorname{div} \vec{D} = R. \quad (1.9.14)$$

При не очень сильном внешнем поле вектор электрической поляризации можно считать пропорциональным вектору напряженности электрического поля:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (1.9.15)$$

Входящий в формулу (1.9.15) безразмерный параметр χ характеризует среду и называется её *диэлектрической восприимчивостью*. Постоянный коэффициент ε_0 называется *электрической постоянной*.

С учётом (1.9.15) формулу (1.9.13) можно представить в виде

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}. \quad (1.9.16)$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon_0(1 + \chi)$.

Вектор \vec{D} принято называть *вектором электрического смещения* (вектором *электрической индукции*), а параметр ε_a — *абсолютной диэлектрической проницаемостью среды*. Так как диэлектрическая восприимчивость вакуума считается равной нулю ($\chi = 0$), то электрическую постоянную ε_0 можно рассматривать как абсолютную диэлектрическую проницаемость вакуума. Наряду с ε_a часто вводят относительную диэлектрическую проницаемость среды ε , связанную с ε_a соотношением

$$\varepsilon = \varepsilon_a / \varepsilon_0. \quad (1.9.17)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость может быть выражена через диэлектрическую восприимчивость: $\varepsilon = 1 + \chi$.

Подчёркнём, что соотношения (1.9.15) и (1.9.16) являются приближёнными. В большинстве сред линейная пропорциональность векторов \vec{E} и \vec{P} , а следовательно, и векторов \vec{E} и \vec{D} нарушается в сильных электрических полях; когда в разложении функции $\vec{D}(\vec{E})$ в ряд Тейлора нельзя ограничиться линейным приближением. В некоторых веществах это происходит даже при сравнительно слабых полях. Кроме того, параметры ε и χ зависят от скорости изменения вектора \vec{E} : молекулы имеют инерцию и требуется некоторое время, чтобы их дипольные моменты изменили ориентацию под действием поля.

1.9.3. Приближённые представления для средней плотности тока. Намагниченность вещества. Из уравнения непрерывности (1.9.8) и соотношения (1.9.10) следует, что

$$\operatorname{div} \langle \vec{J}_M \rangle = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Это означает, что плотность тока $\langle \vec{J}_M \rangle$ может быть представлена (только для связанных токов) в виде:

$$\langle \vec{J}_M \rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M}, \quad (1.9.18)$$

причём вектор \vec{M} должен быть приравнен нулю вне тела, где $\langle \vec{J}_M \rangle = 0$.

Из закона сохранения связанного заряда

$$\frac{\partial R^{\text{CB}}}{\partial t} + \text{div } \vec{J}^{\text{CB}} = 0$$

для вещества объёмом V полный магнитный дипольный момент тела определяется следующим образом:

$$\int_V \vec{M} dV = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V [\vec{r} \times \langle \vec{J}_M \rangle] dV \quad (1.9.19)$$

и вектор \vec{M} имеет физический смысл *намагниченности*. Строго говоря, соотношение (1.9.19) имеет место, когда $\partial \vec{\mathcal{P}} / \partial t = 0$, что является также условием однозначного, не зависящего от выбора системы координат магнитного дипольного момента вещества. В общем случае, когда $\partial \vec{\mathcal{P}} / \partial t \neq 0$, намагниченность \vec{M} не может быть определена однозначно. Более того, выделение слагаемого $\text{rot } \vec{M}$ в среднем токе (1.9.18) не имеет смысла. В этом случае в формуле (1.9.19) появляется дополнительный член вида

$$\frac{1}{2} \int_V [\vec{r} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t}] dV$$

и нет возможности однозначно разделить средний микроскопический ток $\langle \vec{J}_M \rangle$ на «электрическую» составляющую поляризованности $\vec{\mathcal{P}}$ и «магнитную» составляющую, соответствующую намагниченности \vec{M} . Поэтому нельзя ввести два независимых материальных уравнения

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{\mathcal{E}}), \quad \vec{M} = \vec{M}(\vec{B})$$

и электромагнитные свойства среды в общем случае должны описываться единым материальным уравнением: $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{B})$.

Вектор намагниченности \vec{M} характеризует намагничивающие среды (магнетики), которые обычно описываются с помощью совокупности элементарных замкнутых внутримолекулярных токов (гипотеза Ампера). Эти токи называются *токами намагничивания*, они обусловлены как движением электронов внутри ядер, так и собственным вращением электронов (спиновый магнетизм). Каждый молекулярный ток можно представить в виде линейного тока I_n , охватывающего некоторую площадку S_n (рис. 1.15) с *магнитным моментом*

$$\vec{m}_n = \mu_0 I_n S_n \vec{n}_0,$$

где \vec{n}_0 — орт нормали к поверхности S_n .

Если рассматривать магнетик как наложение противоположно направленных распределённых токов \vec{J}^+ и \vec{J}^- , компенсирующих друг друга при отсутствии намагничивания (модель двух сред). Эти токи можно представить в виде стационарных потоков двух сред, заряженных соответственно положительно и отрицательно (рис. 1.16). При намагничивании среды внешним магнитным полем токи \vec{J}^+ и \vec{J}^- сместятся в каждой точке друг относительно друга на некоторый вектор $\Delta \vec{r}$; в результате появится ток через поверхность S , натянутую на некоторый контур L .

Макроскопически каждую точку магнетика в случае модели двух сред можно

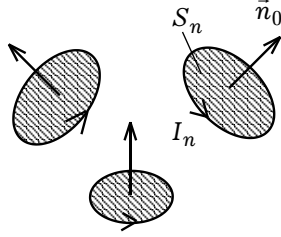


Рис. 1.15

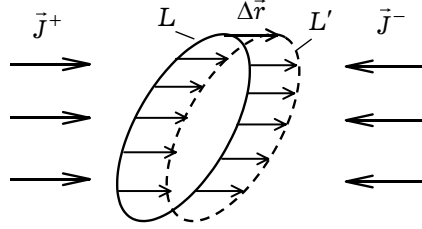


Рис. 1.16

характеризовать средней плотностью магнитного момента в среде:

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{n \in \Delta V} \vec{m}_n = \frac{\mu_0}{\Delta V} \sum_{n \in \Delta V} I_n S_n \vec{n}_0. \quad (1.9.20)$$

Среды, в которых внешнее поле ослабляется, называют *диамагнитными*; среды, в которых поле незначительно усиливается — *парамагнитными*; а среды, в которых происходит существенное усиление магнитного поля — *ферромагнитными*.

С учётом вышесказанного во втором уравнении системы уравнений Максвелла (1.9.7) плотность полного среднего микротока $\langle \vec{J}_M \rangle$ можно представить в виде плотности тока проводимости \vec{J} и плотности связанных токов \vec{J}^{cb} (1.9.18):

$$\langle \vec{J}_M \rangle = \vec{J} + \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} + \text{rot } \vec{M}. \quad (1.9.21)$$

С учётом (1.9.18) это уравнение принимает вид:

$$\text{rot}(\mu_0^{-1} \vec{B} - \vec{M}) = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}}) + \vec{J}. \quad (1.9.22)$$

Вводя обозначение

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \quad (1.9.23)$$

с учётом соотношения (1.9.13) приводим уравнение (1.9.22) к виду

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{J}. \quad (1.9.24)$$

Вектор \vec{H} принято называть *вектором напряженности магнитного поля*. Он, как и вектор \vec{M} , измеряется в амперах на метр [А/м].

При не очень сильном внешнем магнитном поле можно считать, что вектор \vec{M} пропорционален вектору \vec{B} . В силу линейности уравнения (1.9.23) можно также полагать пропорциональными векторы \vec{M} и \vec{H} :

$$\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}, \quad (1.9.24)$$

где безразмерный коэффициент χ_m называют *магнитной восприимчивостью* среды. У диамагнитных сред параметр χ_m отрицательный, у парамагнитных и ферромагнитных — положительный. У диамагнитных и парамагнитных сред $|\chi_m| \ll 1$, у ферромагнитных χ_m значительно больше единицы.

Подставляя формулу (1.9.24) в (1.9.23), получаем

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (1.9.25)$$

где $\mu_a = \mu_0(1 + \chi_m)$.

Коэффициент пропорциональности μ_a между \vec{B} и \vec{H} называют *абсолютной магнитной проницаемостью* среды. Магнитная восприимчивость вакуума считается равной нулю, поэтому магнитную постоянную μ_0 можно рассматривать как абсолютную магнитную проницаемость вакуума.

Наряду с абсолютной магнитной проницаемостью среды, вводят также *относительную магнитную проницаемость* μ , связанную с μ_a соотношением

$$\mu_a = \mu_0 \mu. \quad (1.9.26)$$

Очевидно, что $\mu = 1 + \chi_m$.

1.10. Система уравнений Максвелла для сплошной среды

Ранее было показано, что электромагнитное поле в сплошной среде (не в вакууме) характеризуется векторами электрической напряжённости \vec{E} и индукции \vec{D} , магнитной напряжённости \vec{H} и индукции \vec{B} . В случае нестационарного и неоднородного поля эти векторы являются функциями координат и времени: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{D} = \vec{D}(\vec{r}, t)$, $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$, которые связываются между собой уравнениями Максвелла.

Одна из наиболее часто встречающихся форм записи этих уравнений следующая:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= R, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.10.1)$$

Записанные выше уравнения соответственно обобщают закон электромагнитной индукции (Фарадей); закон полного тока, включающий ток смещения (Максвелл); закон Гаусса и закон, следующий из опытного факта отсутствия в природе магнитных зарядов.

Обычно токи проводимости \vec{J} и заряды R разделяют на две составляющие: макроскопические физические поля \vec{J} , R , характеризующие свойства сплошной среды в среднем и подлежащие определению и сторонние (заданные) токи $\vec{J}^{\text{ст}}$ и заряды $R^{\text{ст}}$: $\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \vec{J}^{\text{ст}}$, $R \rightarrow R + R^{\text{ст}}$. Причём под сторонними токами и зарядами понимаются либо источники неэлектромагнитного происхождения (химического, диффузионного и др.), либо источники, создаваемые частью электродинамической системы и не рассматриваемой детально. При анализе реальных электродинамических систем выделение некоторой их области в качестве области источников оказывается, как правило, необходимым во избежание чрезмерного усложнения задачи. В процессе решения величины $\vec{J}^{\text{ст}}$ и $R^{\text{ст}}$ считаются заданными и не зависящими от порождаемых ими полей.

Таким образом, рассматривая электромагнитное поле как набор физических величин \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} и \vec{B} , описывающих свойства упрощённой физической (на основе континуума) модели возбуждения неподвижной реальной материальной среды (например, диэлектрика) заданными сторонними токами и зарядами, мы приходим к

её математической модели описания на основе уравнений Максвелла (1.10.1). При этом физические величины \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} и \vec{B} характеризуют свойства сплошной среды в среднем и зависят только от положения \vec{r} элемента среды в пространстве и момента времени t . В этом смысл выражения «поле — форма материи». Здесь под формой понимается физическая континуальная модель материи конкретного физического явления.

Электромагнитное поле так же, как и вещество, характеризуется энергией, массой и импульсом. Правда, масса и импульс характерны только для распространяющегося электромагнитного поля (электромагнитных волн). В отличие от вещества электромагнитное поле не обладает массой покоя. Электромагнитные волны испытывают воздействие гравитационных сил. Известно, например, что путь распространения световых волн заметно искривляется под влиянием гравитационной силы Солнца. Импульс электромагнитных волн проявляется в давлении, которое они оказывают на материальные тела. Такие характерные для электромагнитных волн свойства, как дифракция и интерференция, присущи также материальным частицам.

Энергия электромагнитного поля может переходить в другие виды энергии. Фактически, само существование жизни на Земле обусловлено преобразованием электромагнитной энергии (энергии солнечных лучей) в тепловую, химическую и другие виды энергии.

Классическая (максвелловская) теория электромагнитного поля учитывает только макроскопические свойства вещества, предполагая, что размеры рассматриваемой области пространства и расстояние от источников поля до рассматриваемой точки велики по сравнению с размерами молекул, а характерное для изменения электромагнитного поля время (например, период колебаний) велико по сравнению со временем, характерным для внутримолекулярных колебательных процессов. На основе классической теории электромагнитного поля может быть изучен широкий круг вопросов, встречающихся в радиотехнике. Классическая теории поля не охватывает, однако, всех его свойств. За её пределами остаются такие явления, как излучение и поглощение веществом электромагнитных волн очень высокой частоты (например, световых), фотоэффект и др. Строгий анализ подобных явлений должен учитывать микроструктуру вещества и, следовательно, должен использоваться корпускулярный подход к описанию этих явлений. В пределах данного курса изучается классическая теория электромагнитного поля, то есть исследуются только его макроскопические свойства.

1.11. Электродинамическая классификация материальных сред

Система уравнений Максвелла (1.10.1) включает восемь скалярных уравнений, в которых содержатся 12 неизвестных скалярных функций — составляющих векторов \vec{E} , \vec{D} и \vec{B} , \vec{H} . Поэтому без дополнительных соотношений, связывающих векторы \vec{E} и \vec{D} , \vec{B} и \vec{H} , \vec{J} и \vec{e} уравнения (1.10.1) недостаточны для определения электромагнитного поля в среде. В этом смысле система уравнений Максвелла

(1.10.1) для среды является неполной. Это естественно, поскольку произвольная материальная среда в этих уравнениях учитывается в обобщённом виде и не раскрывается механизм её взаимодействия с электромагнитным полем.

Для того, чтобы можно было определить электромагнитное поле, систему уравнений (1.10.1) дополняют *материальными уравнениями (уравнениями состояния среды)*, связывающими между собой \vec{D} , \vec{J} и \vec{E} , а также \vec{B} и \vec{H} .

В общем случае *материальные уравнения* можно записывать в виде следующих функциональных связей*):

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{J} = \vec{J}(\vec{E}). \quad (1.11.1)$$

В зависимости от конкретного вида материальных уравнений (1.11.1) проводится классификация материальных сред. Здесь необходимо отметить, что любой вариант соотношений (1.11.1), записанных в явном виде, соответствует некоторой упрощённой (идеализированной) физической модели непрерывной среды, определяющей в той или иной степени её математическую модель. Материальные уравнения (1.11.1), записанные в явном виде на основе принятой физической модели среды, составляют её математическую модель. Поэтому под *материальной средой* мы будем понимать совокупность соответствующих ей физической и математической моделей.

Для *локальных, безынерционных процессов* в каждой точке пространства состояние среды не зависит от окружающей среды, а в каждый момент времени — от предыдущих состояний в этой точке (от предыстории). Для таких процессов справедливы следующие материальные уравнения:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (1.11.2)$$

Среды, для которых справедливы материальные уравнения (1.11.2), называются *изотропными*. В этом случае величины ϵ , μ и σ являются скалярами. Это значит, что векторы \vec{E} и \vec{D} , \vec{H} и \vec{B} , \vec{E} и \vec{J} коллинеарны, а свойства среды не зависят от направления распространения волны. Для изотропной среды:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad \vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}, \quad (1.11.3)$$

где χ и χ_m — соответственно, скалярные *диэлектрическая* и *магнитная восприимчивости*.

Среды, характеризующиеся тензорными параметрами $\vec{\epsilon}$, $\vec{\mu}$, $\vec{\sigma}$, называются *анизотропными*. Для анизотропных сред материальные уравнения записываются следующим образом:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon} \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{\mu} \vec{H}, \quad \vec{J} = \vec{\sigma} \vec{E}. \quad (1.11.4)$$

где $\vec{\epsilon}$ — тензор относительной диэлектрической проницаемости, $\vec{\mu}$ — тензор относительной магнитной проницаемости, $\vec{\sigma}$ — тензор удельной проводимости. В этом случае векторы \vec{E} и \vec{D} , \vec{H} и \vec{B} , \vec{E} и \vec{J} уже не образуют (в общем случае) коллинеарные пары.

Материальная среда является *однородной* в некоторой области V , если параметры ϵ , μ , σ ($\vec{\epsilon}$, $\vec{\mu}$, $\vec{\sigma}$) в этой области постоянны. Если параметры ϵ , μ , σ ($\vec{\epsilon}$, $\vec{\mu}$, $\vec{\sigma}$) являются функциями пространственных координат, то такую среду называют *неоднородной*.

*) В последнее время появились киральные и биизотропные среды, для которых (1.11.1) не справедливы

Простейшим вариантом неоднородной среды являются *кусочно-однородные* среды, параметры которых принимают различные *постоянные* значения в разных областях.

Среды, для которых материальные уравнения (1.11.1) представляют собой линейные соотношения, называются *линейными*. Поэтому материальные уравнения (1.11.2) и (1.11.4) соответствуют линейным средам. В случае линейных сред параметры ϵ, μ, σ ($\vec{\epsilon}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}$) не зависят от векторов поля. Для линейных сред выполняется *принцип суперпозиции*, в соответствии с которым результирующий эффект сложного воздействия представляет собой геометрическую сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности. Среды, для которых принцип суперпозиции не справедлив, называют *нелинейными*. Для них материальные уравнения (1.11.1) являются нелинейными соотношениями. В настоящей книге ограничимся рассмотрением только линейных сред.

Временная и пространственная дисперсии. Рассмотрим общие функциональные связи (1.11.1) для линейной среды. При быстрых изменениях поля, вследствие инерции внутренних движений и характерной пространственной структуры, наблюдается зависимость поляризации в какой-либо точке от поля в других точках и в другие моменты времени. При этом нужно иметь в виду, что в силу условия причинности, поляризация (а следовательно, индукция) зависит от полей, действующих только в предыдущие моменты времени. С учётом вышесказанного материальные уравнения (1.11.1) для линейной среды в общем виде можно записать следующим образом:

$$\vec{D}(t, \vec{r}) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' \int_V \vec{\epsilon}(t, t'; \vec{r}, \vec{r}') \vec{E}(t', \vec{r}') d\vec{r}', \quad (1.11.5)$$

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \mu_0 \int_{-\infty}^t dt' \int_V \vec{\mu}(t, t'; \vec{r}, \vec{r}') \vec{H}(t', \vec{r}') d\vec{r}', \quad (1.11.6)$$

$$\vec{J}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int_V \vec{\sigma}(t, t'; \vec{r}, \vec{r}') \vec{E}(t', \vec{r}') d\vec{r}'. \quad (1.11.7)$$

Такая запись материальных уравнений говорит о том, что в общем случае электромагнитное поле в точке \vec{r} в момент времени t определяется значениями поля в некоторой пространственной области V около точки \vec{r} , существовавшего в течение некоторого, вообще говоря, бесконечного интервала времени, предшествующего моменту t . Среды, для которых необходимо использовать нелокальные материальные уравнения (1.11.5)-(1.11.7), называют *диспергирующими*. Соответственно для недиспергирующих сред справедливы материальные уравнения (1.11.2), (1.11.4). Говорят, что среда обладает *пространственной дисперсией*, если электромагнитное поле в точке \vec{r} в момент времени t определяется полем в некоторой пространственной области около точки \vec{r} . Если электромагнитное поле в момент времени t зависит от электромагнитного поля в предшествующие моменты времени, то среда обладает *временной дисперсией*. Пространственная дисперсия связана с наличием в среде характерных пространственных размеров, например, для неоднородной среды — масштаб неоднородности. Появление временной дисперсии объясняется суще-

ствованием в среде характерных внутренних временных процессов, например, переходов электронов с одного квантового уровня на другой. Проявление нелокальности временного взаимодействия среды с электромагнитной волной будет существенно сказываться, когда время протекания внутреннего процесса соизмеримо с периодом изменения внешнего волнового процесса.

В заключение отметим, что для большинства сред с высокой точностью $\mu = 1$. Причём для *диамагнетиков* $\mu < 1$, для *парамагнетиков* $\mu > 1$. В частности, медь — диамагнетик ($\mu = 0.99999044$), алюминий — парамагнетик ($\mu = 1.0000222$). *Ферромагнетики*, к которым прежде всего относится железо, могут обладать весьма высокой магнитной проницаемостью, но на частотах выше 10^8 Гц параметр μ уменьшается до единицы.

1.12. Электромагнитные поля на границе раздела материальных сред

Как уже отмечалось, решение системы уравнений Максвелла в граничной области не является определённым, пока не заданы некоторые дополнительные условия. Часто границы этой области совпадают с границами различных материальных сред, которые отличаются друг от друга физическими свойствами (в частности, материальными параметрами $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$). Поэтому встаёт вопрос: как изменяются векторы электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}$ и \vec{B} при переходе через границу раздела между различными материальными средами?

Граница раздела — это поверхность, на которой хотя бы один из материальных параметров ϵ_a, μ_a или σ терпит разрыв как функция нормали, то есть является кусочно-непрерывной функцией координат. В связи с этим решение уравнений Максвелла можно получить лишь в отдельных областях, где параметры ϵ_a, μ_a и σ — непрерывны. При этом решение системы дифференциальных уравнений будет содержать некоторое число произвольных (неизвестных) постоянных. Для определения этих неизвестных необходимо наложить *граничные условия*, или, как говорят, «сшить» решения на границах раздела материальных сред.

Граничные условия — это векторные функциональные зависимости, связывающие между собой составляющие векторов электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}$ и \vec{B} в двух соседних областях на границе их раздела. Так как в точках разрыва функций уравнения Максвелла в дифференциальной форме применять нельзя, то для получения граничных условий необходимо использовать интегральную форму записи уравнений Максвелла.

Введём *плотность свободного поверхностного электрического заряда* ξ как

$$\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS},$$

где Δq — величина заряда, находящегося на элементарной площадке ΔS .

Аналогично введём *плотность поверхностного тока* $\vec{\eta}$:

$$\vec{\eta} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \vec{\eta}_0 \frac{\Delta l}{\Delta l},$$

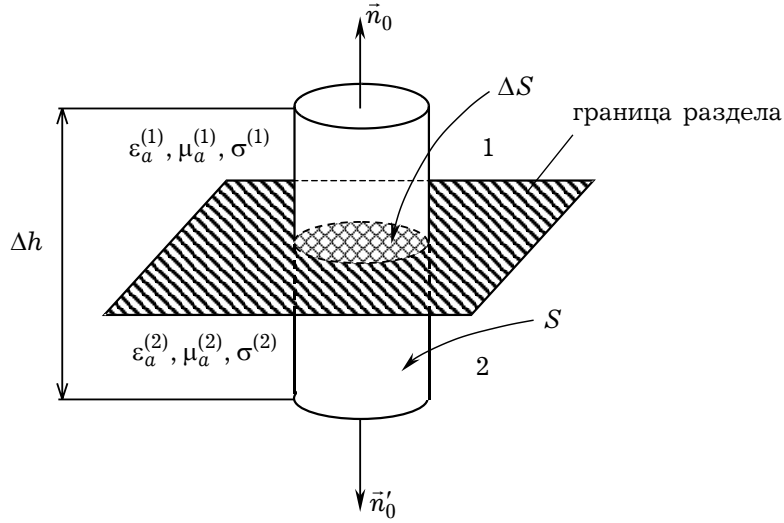


Рис. 1.17

где \vec{n}_0 — единичный вектор, показывающий направление протекания тока по поверхности раздела; ΔI — величина тока проводимости, протекающего по бесконечно малому участку поверхности Δl (Δl — размер участка вдоль границы раздела). Следует обратить внимание, что единица измерения плотности поверхностного тока [А/м], это связано с тем, что при вычислении \vec{j} выбирается контур, по которому протекает ток по поверхности, а не сама поверхность.

1.12.1. Граничные условия для нормальных компонент векторов поля. Рассмотрим вывод граничных условий для нормальных компонент векторов поля. Пусть поверхность S включает в себя границу раздела двух материальных сред с различными параметрами $\epsilon_a^{(j)}, \mu_a^{(j)}, \sigma^{(j)}$ ($j = 1, 2$). Будем считать, что поверхность S ограничивает малый цилиндр объёмом V с основанием ΔS и высотой Δh таким образом, чтобы верхний торец цилиндра лежал в области 1, а нижний — в области 2 (рис. 1.17). Вектор внешней нормали \vec{n}_0 направлен из области 2 в область 1. В общем случае поверхность раздела двух сред может нести поверхностный электрический заряд с плотностью ξ .

Для получения граничных условий для нормальных компонент $\mathcal{D}_n^{(1)}$ и $\mathcal{D}_n^{(2)}$ будем использовать третье уравнение Максвелла в интегральной форме, записанное применительно к объёму V (рис. 1.17). Применив к нему теорему Остроградского-Гаусса, получим:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \Delta q, \quad (1.12.1)$$

где Δq — полный заряд на поверхности ΔS .

Ввиду малости цилиндра поле на его основаниях можно считать однородным: $\vec{D} = \text{const}$. Внешняя нормаль к верхнему основанию цилиндра направлена по \vec{n}_0 , а

к нижнему — противоположно. Обозначив через $\vec{D}^{(1)}$ значение вектора электрической индукции в области 1, а через $\vec{D}^{(2)}$ — в области 2, уравнение (1.12.1) можно переписать следующим образом:

$$\vec{D}^{(1)}\vec{n}_0 \Delta S - \vec{D}^{(2)}\vec{n}_0 \Delta S + \Phi_{\text{бок}} = \Delta q, \quad (1.12.2)$$

где $\Phi_{\text{бок}}$ — поток вектора \vec{D} через боковую поверхность цилиндра.

Устремим высоту цилиндра Δh к нулю так, чтобы основания цилиндра оставались в разных средах и в пределе при $\Delta h \rightarrow 0$ совпадали с элементом граничной поверхности ΔS . Очевидно, при этом исчезает боковая поверхность цилиндра, поэтому $\Phi_{\text{бок}} = 0$, и из (1.12.2) следует граничное условие для вектора электрической индукции \vec{D} :

$$(\vec{n}_0, \vec{D}^{(1)}) - (\vec{n}_0, \vec{D}^{(2)}) = \xi. \quad (1.12.3)$$

Появление в правой части поверхностной плотности заряда ξ связано с тем, что даже при $\Delta h \rightarrow 0$ на границе раздела двух сред могут существовать большие скопления заряда.

Таким образом, нормальная составляющая вектора \vec{D} при переходе через границу раздела материальных сред испытывает скачок на величину, численно равную поверхностной плотности свободного заряда ξ на этой границе.

Вычислим теперь поток вектора магнитной индукции \vec{B} через цилиндр, показанный на рис. 1.17. В этом случае воспользуемся четвёртым уравнением Максвелла в интегральной форме, которое после применения к нему теоремы Остроградского-Гаусса, записывается следующим образом:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (1.12.4)$$

Из соотношения (1.12.4) по аналогии с предыдущим случаем несложно получить граничное условие для вектора \vec{B} :

$$(\vec{n}_0, \vec{B}^{(1)}) - (\vec{n}_0, \vec{B}^{(2)}) = 0. \quad (1.12.5)$$

Таким образом, нормальная составляющая вектора \vec{B} на границе раздела сред всегда является непрерывной функцией, вследствие отсутствия в природе магнитных зарядов.

1.12.2. Граничные условия для тангенциальных компонент векторов поля. Получим теперь граничные условия для тангенциальных компонент векторов поля. С этой целью проведём к границе двух сред плоскость P так, чтобы она была перпендикулярна некоторой малой площадке ΔS , принадлежащей поверхности S (рис. 1.18). В плоскости P выберем малый прямоугольный замкнутый контур $L = ABCD$, у которого часть контура AB лежит в области 1, а CD — в области 2. Обозначив через \vec{n}_0 единичную нормаль к поверхности ΔS , а через \vec{v}_0 единичную нормаль в точке M к плоскости P , тогда единичный вектор $\vec{\tau}_0 = [\vec{v}_0, \vec{n}_0]$ будет направлен по касательной к поверхности ΔS в точке M .

Рассмотрим уравнение Максвелла для циркуляции вектора \vec{E} в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{\Delta S} \vec{B} d\vec{S}. \quad (1.12.6)$$

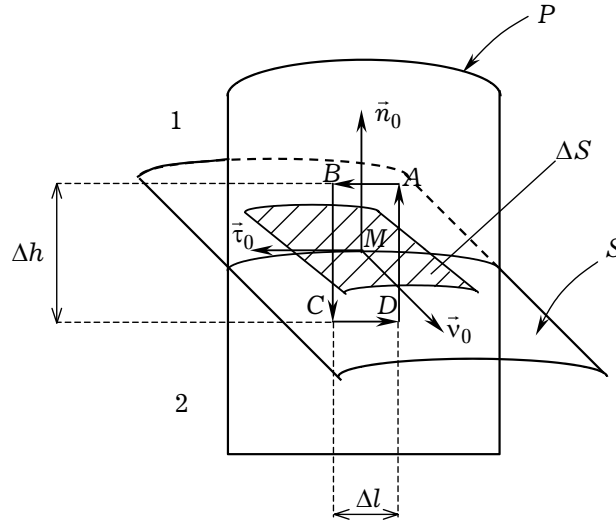


Рис. 1.18

Применяя уравнение (1.12.6) к контуру L (рис. 1.18), можно записать:

$$\vec{\epsilon}^{(1)} \vec{\tau}_0 \Delta l - \vec{\epsilon}^{(2)} \vec{\tau}_0 \Delta l + C_{\text{бок}}^E = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{v}_0 \Delta l \Delta h, \quad (1.12.7)$$

где $\vec{\epsilon}^{(1)}$ и $\vec{\epsilon}^{(2)}$ — значения вектора напряжённости электрического поля в областях 1 и 2, соответственно; $C_{\text{бок}}^E$ — циркуляция вектора $\vec{\epsilon}$ вдоль прямых BC и DA ; Δl — длина контура L .

Производя предельный переход при $\Delta h \rightarrow 0$ в соотношении (1.12.7) и учитывая, что в этом случае $C_{\text{бок}}^E \rightarrow 0$, получаем следующее граничное условие:

$$(\vec{\epsilon}^{(1)}, \vec{\tau}_0) - (\vec{\epsilon}^{(2)}, \vec{\tau}_0) = 0. \quad (1.12.8)$$

Так как $\vec{\tau}_0 = [\vec{v}_0, \vec{n}_0]$, то граничное условие (1.12.8) можно записать в другом виде:

$$[\vec{n}_0, (\vec{\epsilon}^{(2)} - \vec{\epsilon}^{(1)})] = 0. \quad (1.12.9)$$

Векторное произведение $[\vec{n}_0, \vec{\epsilon}]$ представляет собой тангенциальную (касательную) к границе раздела областей компоненту $\vec{\epsilon}_\tau$ вектора $\vec{\epsilon}$. Поэтому

$$\vec{\epsilon}_\tau^{(1)} = \vec{\epsilon}_\tau^{(2)}. \quad (1.12.10)$$

Таким образом, тангенциальная составляющая вектора $\vec{\epsilon}$ на границе раздела всегда является непрерывной функцией.

Из уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_{\Delta S} \vec{D} d\vec{S} + \int_{\Delta S} \vec{J} d\vec{S} \quad (1.12.11)$$

аналогичным образом несложно получить граничное условие для тангенциальных

составляющих вектора \vec{H} :

$$[\vec{n}_0, (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)})] = \vec{\eta}, \quad (1.12.12)$$

где $\vec{\eta}$ — плотность поверхностного тока на границе раздела сред.

Граничное условие (1.12.12) может быть записано и в другом виде:

$$\vec{H}_\tau^{(1)} - \vec{H}_\tau^{(2)} = \vec{\eta}. \quad (1.12.13)$$

Таким образом, *тангенциальная составляющая вектора \vec{H} на границе раздела сред претерпевает скачок при наличии на ней поверхностного тока проводимости.*

Из граничного условия (1.12.13) следует, что тангенциальные составляющие вектора напряженности магнитного поля могут быть непрерывны только тогда, когда по границе раздела не протекает ток проводимости.

Итак, граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными физическими параметрами имеют вид:

$$\begin{aligned} (\vec{D}^{(1)} - \vec{D}^{(2)})\vec{n}_0 &= \xi, & (\vec{B}^{(1)} - \vec{B}^{(2)})\vec{n}_0 &= 0, \\ [\vec{n}_0, (\vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)})] &= 0, & [\vec{n}_0, (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)})] &= \vec{\eta}, \end{aligned} \quad (1.12.14)$$

где \vec{n}_0 — вектор единичной внешней нормали, направленный из первой среды во вторую.

Благодаря граничным условиям мы располагаем некоторой информацией о структуре электромагнитного поля на той или иной границе раздела сред, ещё до определения поля в самих областях.

В качестве иллюстрации применения граничных условий рассмотрим случай *экранирующей границы*, то есть такой поверхности раздела, при которой электрическое поле во второй среде отсутствует. В этом случае $\vec{E}_\tau^{(2)} = 0$, а следовательно из (1.12.10) $\vec{E}_\tau^{(1)} = 0$, то есть $\vec{E}^{(1)} = -\vec{E}_n^{(1)}\vec{n}_0$. Электрическое поле на металле не имеет касательных составляющих и всегда ориентировано нормально к ней. Примером экранирующей границы служит идеально проводящая плоскость. Из граничного условия (1.12.13) по аналогии следует, что линии магнитного поля касаются проводящей границы: $\vec{H}^{(1)} = \vec{H}_\tau^{(1)}$.

1.13. Уравнение баланса мощностей в электромагнитном поле. Энергия электромагнитного поля

Запишем уравнения Максвелла с учётом сторонних электрических токов и зарядов (см. п. 1.10)

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{rot } \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} + \vec{J}^{\text{ср}}, \\ \text{div } \vec{D} &= R + R^{\text{ср}}, & \text{div } \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.13.1)$$

Умножим первое уравнение системы (1.13.1) на вектор \vec{H} , второе — на вектор \vec{E} , затем вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{aligned} \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} &= \operatorname{div} [\vec{E} \times \vec{H}] = \\ &= -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} (\vec{J} + \vec{J}^{\text{CT}}). \end{aligned} \quad (1.13.2)$$

Выражение (1.13.2) проинтегрируем по некоторому объёму V , ограниченному поверхностью S , а затем его левую часть преобразуем на основании теоремы Остроградского-Гаусса. В результате имеем

$$\begin{aligned} - \int_V \vec{E} \vec{J}^{\text{CT}} dV &= \int_V \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV + \\ &+ \int_V \vec{E} \vec{J} dV + \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] \vec{n}_0 dS. \end{aligned} \quad (1.13.3)$$

Равенство (1.13.3) есть *уравнение баланса энергии поля в объёме V* . Левая часть этого уравнения представляет собой мощность, отдаваемую сторонними электрическими токами, расположенными в объёме V . Первое слагаемое в правой части уравнения (1.13.3) есть мощность, накапливаемая в объёме V , второе слагаемое — мощность, расходуемая на нагрев среды в области V (с учётом материального уравнения $\vec{J} = \vec{\sigma} \vec{E}$), третье слагаемое — мгновенная мощность, излучаемая из объёма V через поверхность S (в частности, поглощаемая в оболочке).

Выражение

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] \quad (1.13.4)$$

представляет собой вектор плотности потока мощности, переносимой через единичную площадку поверхности. Вектор \vec{S} называется *вектором Умова-Пойнтинга*; он образует с векторами поля \vec{E} и \vec{H} правовинтовую систему. Подчеркнём, что интеграл

$$P^\Sigma = \oint_S \mathcal{S}_{\vec{n}_0} dS, \quad (1.13.5)$$

по замкнутой поверхности S , где $\mathcal{S}_{\vec{n}_0}$ — проекция вектора (1.13.4) на единичную нормаль \vec{n}_0 к поверхности S , имеет физический смысл мощности, излучаемой из объёма V .

Рассмотрим частные случаи уравнения баланса энергии поля (1.13.3). Пусть граница S области V является энергетически изолированной (например, идеально проводящей поверхностью). Тогда при наличии поля внутри объёма V при $\vec{J}^{\text{CT}} = 0$ из (1.13.3) получаем

$$P = - \int_V \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV, \quad (1.13.6)$$

где

$$P = \int_V \vec{J} \vec{E} dV \quad \text{— мощность тепловых потерь в объёме } V.$$

Так как для энергетически изолированной системы уравнение баланса энергии имеет вид:

$$P = -\frac{dW}{dt}, \quad (1.13.7)$$

где W — запасённая в объёме V энергия, то из сравнения выражений (1.13.6) и (1.13.7) получаем формулу для скорости изменения мгновенной электромагнитной энергии:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left(\vec{\mathcal{E}} \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \right) dV. \quad (1.13.8)$$

Заметим, что из закона (1.13.7) следует, что при наличии потерь энергии ($P > 0$) $dW/dt < 0$ (энергия в объёме V уменьшается).

Рассмотрим теперь уравнение баланса энергии поля (1.13.3) при условии отсутствия сторонних электрических токов ($\vec{J}_{\text{ст}} = 0$) для энергетически неизолированного объёма. В этом случае имеем

$$P^\Sigma + P + \frac{dW}{dt} = 0, \quad (1.13.9)$$

где величина P^Σ определяется поверхностным интегралом (1.13.5).

Поток P^Σ вектора Умова-Пойнтинга $\vec{\mathcal{S}}$ показывает, насколько внутренние процессы в объёме V не уравновешены. Если, например, $P^\Sigma > 0$, это означает, что имеют место потери энергии в области V из-за её перехода во внешнее пространство. Если же $P^\Sigma < 0$, энергия поступает в объём V извне. В обоих случаях абсолютная величина P^Σ есть не что иное, как энергия, проходящая через граничную поверхность S за единицу времени. Поэтому P^Σ называют *потокм мощности через S* . При $P^\Sigma > 0$ величина P^Σ равна *мощности излучения во внешнее пространство*; при $P^\Sigma < 0$ величина P^Σ равна *мощности поглощаемого внешнего излучения*.

Исходя из равенства (1.13.8), можно определить энергию электромагнитного поля, запасённую внутри объёма V . Для случая изотропной и недиспергирующей среды справедливы следующие операции:

$$\vec{\mathcal{E}} \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\mathcal{E}}^2}{2} \right), \quad \vec{\mathcal{H}} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = \mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\mathcal{H}}^2}{2} \right).$$

В результате запасённая энергия электромагнитного поля в области V определяется как

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 \epsilon \vec{\mathcal{E}}^2 + \mu_0 \mu \vec{\mathcal{H}}^2) dV, \quad (1.13.10)$$

то есть складывается из двух частей, одна из которых энергия электрического поля, а другая — магнитного. Следовательно,

$$W = W^e + W^m, \quad (1.13.11)$$

где

$$W^e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \vec{\mathcal{E}}^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{\mathcal{E}} \vec{\mathcal{D}} dV \quad (1.13.12)$$

— энергия электромагнитного поля, связанная с электрической поляризацией среды;

$$W^m = \frac{\mu_0}{2} \int_V \vec{H}^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV \quad (1.13.13)$$

— энергия электромагнитного поля, связанная с намагниченностью среды.

Подынтегральное выражение в выражении (1.13.10) определяет объёмную плотность энергии электромагнитного поля в среде:

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2 + \mu \mu_0 \vec{H}^2) = \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}). \quad (1.13.14)$$

Для объёмной плотности энергии поля w справедливо уравнение баланса энергии в дифференциальной форме ($\vec{J}^{\text{ст}} = 0$):

$$\text{div } \vec{S} + \vec{J} \vec{E} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (1.13.15)$$

которое получается из (1.13.9).

1.14. Внутренние и внешние задачи электродинамики

Электромагнитные поля находятся из уравнений Максвелла (1.10.1), однако не всякое решение этой системы даёт электромагнитное поле рассматриваемой задачи. Поэтому, при постановке задач электродинамики вводятся ещё некоторые дополнительные условия, сообщающие им физическую определённую. Таковы *начальные* и *граничные условия*, а также задание *сторонних сил*. Под начальными условиями понимают задание поля в некоторый момент времени. Для периодических (монохроматических) процессов вопрос о постановке начальных условий отпадает. Под граничными условиями подразумевают не только изученные в разделе 1.12 соотношения между нормальными и тангенциальными компонентами векторов электромагнитного поля на границах раздела сред, но и задание полей на внешних границах рассматриваемых областей, а также поведение поля вблизи металлических и диэлектрических рёбер, если таковые имеются, в рассматриваемой области. В такой постановке задачи электродинамики называют *граничными (краевыми) задачами электродинамики*.

Любая краевая задача линейной макроскопической электродинамики в принципе сводится к определению векторных функций \vec{E}, \vec{H} , удовлетворяющих уравнениям Максвелла, материальным уравнениям, граничным и начальным условиям.

Различают два вида краевых задач: *внутреннюю* и *внешнюю*. Во *внутренней задаче электродинамики* требуется определить электромагнитное поле \vec{E}, \vec{H} , возбуждаемое сторонними источниками $\vec{J}^{\text{ст}}$ внутри области V , ограниченной поверхностью S (рис. 1.19а). При наличии внутри объёма V бесконечно тонких идеально проводящих полосок или диэлектрических клиньев формулировка краевой задачи на основе уравнений Максвелла, материальных уравнений, граничных и начальных условий является неоднозначной. В этом случае необходимо вводить дополнительное физическое условие, называемое *условием на ребре*. Обычно оно форму-

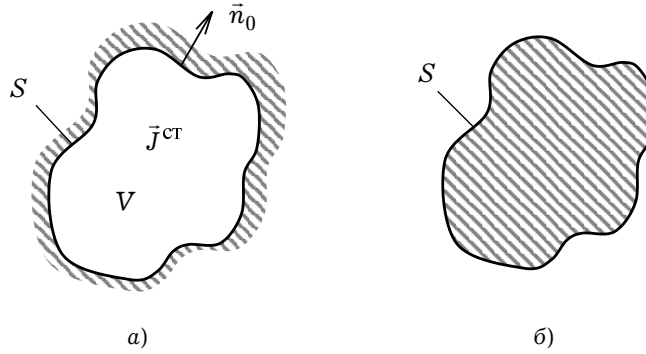


Рис. 1.19

лируется следующим образом:

$$\int_{V' \rightarrow 0} (\vec{\mathcal{E}} \vec{\mathcal{D}} + \vec{H} \vec{B}) dV \rightarrow 0 \quad (1.14.1)$$

при стремлении к нулю объема V' в окрестности ребра. Из этого условия следует, что в окрестности ребра ни одна составляющая электромагнитного поля не может возрасти быстрее, чем $\rho^{-1+\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$), где ρ — расстояние до ребра. Более точно, компоненты электрического поля $\vec{\mathcal{E}}$, параллельные ребру, всегда ограничены или равны нулю. Перпендикулярные компоненты имеют особенность. Предельное соотношение (1.14.1) является следствием условия ограниченности энергии, запасённой вблизи ребра. Более подробно вопросы, связанные с условием на ребре, будут рассмотрены в п.3.2.

При решении *внешней задачи электродинамики* требуется найти электромагнитное поле вне области V , ограниченной поверхностью S , в бесконечном пространстве (рис. 1.19б). В этом случае, для однозначности решения задачи вводится дополнительное условие на бесконечности (*условие излучения Зоммерфельда*):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ r \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial r} + i k \Psi_i \right) \right\} = 0, \quad (1.14.2)$$

где Ψ_i — любая составляющая электромагнитного поля, k — волновое число в среде. Условие (1.14.2) обеспечивает существование на бесконечности лишь уходящих, рассеянных волн; отраженные от бесконечности волны не допускаются. Подробно этот вопрос излагается в п.3.1.

1.15. Стационарное поле, электростатика и магнитостатика

Стационарными называются поля, не изменяющиеся во времени ($\partial/\partial t \equiv 0$). Система уравнений Максвелла для однородной изотропной среды в этом случае распадается на две системы уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{\mathcal{D}} = R, \\ \vec{\mathcal{D}} &= \varepsilon_a \vec{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (1.15.1)$$

и

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \vec{B} &= \mu_a \vec{H},\end{aligned}\tag{1.15.2}$$

связанные между собой материальным уравнением для тока:

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}}).\tag{1.15.3}$$

Системы уравнений (1.15.1) и (1.15.2), материальное уравнение (1.15.3) совместно с заданными граничными условиями полностью определяют краевую задачу для стационарного электромагнитного поля.

1.15.1. Электростатика. Электрические поля, удовлетворяющие системе уравнений (1.15.1) при отсутствии токов ($\vec{J} = 0$) называются *электростатическими*, а соотношения (1.15.1) — *системой уравнений электростатики*. Электростатическое поле — это поле, создаваемое неподвижными электрическими зарядами.

В интегральной форме система уравнений (1.15.1) может быть записана в следующем виде:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q,\tag{1.15.4}$$

где Q — полный заряд в объёме, ограниченном поверхностью S .

Из уравнения $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ следует, что электростатическое поле является *потенциальным*. Из уравнения $\operatorname{div} \vec{D} = R$ вытекает утверждение о том, что у электростатического поля всегда существуют области стока и истока. В качестве таких областей выступают положительные и отрицательные электрические заряды ($R \neq 0$). Если в некоторой точке пространства $\operatorname{div} \vec{D} < 0$, это означает наличие стока поля в данную точку; если $\operatorname{div} \vec{D} > 0$ — из точки вытекает поле.

Так как поле \vec{E} является потенциальным, его всегда можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции Φ , называемой *электростатическим потенциалом*:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi.\tag{1.15.5}$$

Введение электростатического потенциала значительно упрощает задачу нахождения вектора \vec{E} , так как при этом необходимо определять только одну скалярную функцию.

Подставляя (1.15.5) во второе уравнения системы (1.15.1) и учитывая материальное уравнение, получаем:

$$-\operatorname{div}(\varepsilon_a \operatorname{grad} \Phi) = R.$$

Для однородных сред диэлектрическая проницаемость не зависит от координат, в результате для электростатического потенциала Φ получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{R}{\varepsilon_a},\tag{1.15.6}$$

называемое *уравнением Пуассона*. Его решение описывает распределение электростатического потенциала Φ в области нахождения объёмного заряда. Там, где за-

ряд отсутствует ($R = 0$), уравнение (1.15.6) переходит в однородное дифференциальное уравнение:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (1.15.7)$$

называемое *уравнением Лапласа*.

Для вектора напряжённости электростатического поля $\vec{\mathcal{E}}$ из (1.15.1) можно также записать *векторные уравнения Пуассона и Лапласа*:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} &= \varepsilon_a^{-1} \text{grad } R, \\ \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} &= 0 \quad (R = 0). \end{aligned} \quad (1.15.8)$$

Решение уравнения Пуассона (1.15.6) имеет вид [Л.1, Л.3, Л.24]:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_V \frac{R(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (1.15.9)$$

где \vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения; \vec{r}' — радиус-вектор точки источника поля, то есть точки, в которой задана объёмная плотность заряда $R(\vec{r}')$; интегрирование в (1.15.9) проводится по точкам источника. В декартовой системе координат формула (1.15.9) принимает вид:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_V \frac{R(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}, \quad (1.15.10)$$

где $\{x, y, z\}$ — координаты точки наблюдения, а $\{x', y', z'\}$ — координаты точки, в которой расположен источник поля.

Решение уравнения Пуассона относительно вектора $\vec{\mathcal{E}}$ для однородной среды легко находится из (1.15.9) с учётом (1.15.5):

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_V \frac{\text{grad } R(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (1.15.11)$$

1.15.2. Стационарное магнитное поле — это поле постоянных токов.

Магнитное поле постоянного тока определяется системой уравнений (1.15.2), которая в интегральной форме записывается следующим образом:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I, \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (1.15.12)$$

где I — ток проводимости, создающий магнитное поле в объёме, ограниченном замкнутой поверхностью S .

Магнитное поле не является потенциальным, так как $\text{rot } \vec{H} \neq 0$. Из второго уравнения системы (1.15.12) вытекает факт отсутствия в природе реально существующих магнитных зарядов. Поэтому для магнитного поля не может существовать областей стока и истока его силовых линий. Силовые линии вектора \vec{B} всегда являются замкнутыми, внутри которых существуют электрические токи проводимости.

В силу уравнения $\text{div } \vec{B} = 0$ и материального уравнения для вектора \vec{B} , последний можно представить в виде:

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad (1.15.13)$$

где векторная функция \vec{A} называется *векторным потенциалом*, который выбирается неоднозначно, поскольку любая другая векторная функция вида

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \Psi \quad (1.15.14)$$

будет определять вектор \vec{B} в виде (1.15.13). В выражении (1.15.14) Ψ — произвольная скалярная функция, имеющая непрерывные первые производные по пространственным координатам.

Из второго уравнения системы (1.15.12) с использованием теоремы Стокса следует

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint_L \vec{A} d\vec{l},$$

то есть поток вектора магнитной индукции через поверхность S равен циркуляции векторного потенциала \vec{A} по замкнутому контуру L , ограничивающему эту поверхность.

Из первого уравнения системы (1.15.2) с учётом (1.15.13) в случае однородной среды получаем дифференциальное уравнение относительно векторного потенциала \vec{A} :

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{J}. \quad (1.15.15)$$

Ввиду неоднозначности выбора векторного потенциала в уравнении (1.15.15) можно потребовать, чтобы:

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (1.15.16)$$

Равенство (1.15.16) получило название *калибровки Кулона*. С учётом его для векторного потенциала из (1.15.15) получаем уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{J}. \quad (1.15.17)$$

Решение уравнения (1.5.17) имеет стандартный вид (сравните с (1.15.9)):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (1.15.18)$$

где \vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения; \vec{r}' — радиус-вектор точки, в которой расположен элемент тока. Из выражения (1.15.18) следует, что по заданному распределению плотности тока $\vec{J}(\vec{r}')$ в объёме V всегда можно вычислить векторный потенциал.

Из (1.15.2) для однородной среды с учётом $\text{div } \vec{B} = 0$ несложно получить уравнение Пуассона для вектора напряжённости магнитного поля:

$$\nabla^2 \vec{H} = -\text{rot } \vec{J}, \quad (1.15.19)$$

решение которого для безграничного пространства имеет вид:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (1.15.20)$$

С учётом известной формулы векторного анализа:

$$\frac{\text{rot } \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \text{rot}' \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} - \left[\text{grad}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') \right],$$

где штрихи у операторов rot и grad указывают на то, что дифференцирование проводится по точкам \vec{r}' , решение (1.15.20) можно записать следующим образом:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \text{rot}' \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV' - \int_V \left[\text{grad}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') \right] dV' \right\}. \quad (1.15.21)$$

Используя формулу (аналог теоремы Остроградского-Гаусса)

$$\int_V \text{rot } \vec{F} dV = \oint_S [d\vec{S}', \vec{F}],$$

преобразуем первый интеграл в (1.15.21):

$$\int_V \text{rot}' \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV' = - \oint_S \frac{[\vec{J}(\vec{r}'), d\vec{S}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Так как V — область, содержащая все токи, то на поверхности S , ограничивающей V , токов нет, следовательно первый интеграл в (1.15.21) равен нулю.

Используя известное соотношение

$$\text{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

приводим выражение (1.15.21) к виду:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (1.15.22)$$

Соотношение (1.15.22) фактически представляет собой обобщённый закон *Био-Савара*, который получается из уравнений Максвелла для магнитного поля постоянного тока.

Для малого участка проводника $d\vec{l}'$, по которому протекает ток I , закон Био-Савара записывается в форме дифференциала:

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

1.15.3. Магнитостатика. При $\vec{J} = 0$ система уравнений (1.15.2) принимает вид:

$$\text{rot } \vec{H} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (1.15.23)$$

которая называется *системой уравнений магнитостатики*.

Так как в природе отсутствуют магнитные заряды, то линии вектора \vec{B} не могут обрываться. Как и в электростатике, можно ввести *магнитостатический потенциал* Ψ :

$$\vec{H} = -\text{grad } \Psi.$$

Магнитостатический потенциал Ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\text{div}(\mu_a \text{grad } \Psi) = 0, \quad (1.15.24)$$

которое для однородной среды ($\mu_a = \text{const}$) переходит в *уравнение Лапласа*

$$\nabla^2 \Psi = 0.$$

Уравнение (1.15.24) описывает распространение медленных волн очень малой (по сравнению с обычными электромагнитными волнами) длины. Малость длины волны (или размеров тела) по сравнению с длиной обычной электромагнитной волны дает возможность при исследовании медленных волн или низкочастотных колебаний пренебречь запаздывающими членами (членами, содержащими производные) в уравнениях Максвелла, то есть использовать уравнения магнитостатики (1.15.23). Это дает основание называть подобные волны и колебания *магнитостатическими* (см. п.10.6). Такие волны и колебания имеют место в ферромагнетиках. Для постоянной распространения γ магнитостатической волны должно выполняться следующее условие:

$$\gamma \gg k_0 \sqrt{\epsilon \mu},$$

где k_0 — волновое число плоской волны в вакууме, ϵ и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

К классу магнитостатических задач необходимо отнести и задачу определения магнитного поля постоянных магнитов. В этом случае материальное уравнение $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ нужно переписать в следующей форме:

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} + \vec{M}_0,$$

где \vec{M}_0 — намагниченность магнитов, не зависящая от вектора \vec{H} . Тогда вместо (1.15.24) получим уравнение

$$\operatorname{div}(\mu_a \operatorname{grad} \Psi) = \operatorname{div} \vec{M}_0,$$

которое при $\mu = \text{const}$ переходит в уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{div} \vec{M}_0. \quad (1.15.25)$$

Решение уравнения (1.15.25) записывается в виде:

$$\Psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\mu_a} \int_V \frac{\operatorname{div} \vec{M}_0(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (1.15.26)$$

Глава

2

Общие сведения о волновых процессах

2.1. Волновые процессы	73
2.2. Волновые уравнения для однородной изотропной среды	77
2.3. Электродинамические потенциалы и вектор Герца	78
2.4. Метод комплексных амплитуд	86
2.5. Плоские однородные электромагнитные волны в однородной изотропной среде	90
2.6. Плоские однородные электромагнитные волны в однородной изотропной среде с потерями	96
2.7. Поляризация электромагнитных волн	100
2.8. Стоячая электромагнитная волна	104
2.9. Электромагнитные процессы на границе раздела сред	106
2.10. Падение электромагнитной волны на плоскую проводящую среду	115
2.11(*). Распространение сигналов (волновых пакетов) в диспергирующей среде	116
2.12(*). Цилиндрические волны	122
2.13(*). Сферические волны	133

^{*)} Символом «*» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 2. Общие сведения о волновых процессах

2.1. Волновые процессы

2.1.1. Общие определения. С понятием волнового процесса тесно связано понятие колебания. Под *колебаниями* понимаются движения или в более общем случае процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. При колебаниях обычно происходит периодическое чередование во времени максимумов и минимумов какой-либо физической величины (температуры, плотности вещества, плотности тока, напряженностей электрического или магнитного полей и т.д.). *Волна* представляет собой пространственно-временной процесс, описывающий распространение колебаний в пространстве. При волновом процессе происходит изменение состояния среды, возникает возмущение, распространяющееся в этой среде и несущее с собой энергию.

Волны различаются между собой ориентацией колебаний величины, определяющей возмущение по отношению к направлению распространения волны. Если колебание этой величины происходит вдоль направления распространения волны, такая волна называется *продольной*. Так, например, акустическая волна распространяется в том же направлении, в каком происходит смещение плотности частиц. У *поперечной* волны колебание величины, характеризующей возмущение, происходит перпендикулярно к направлению ее распространения. Примером поперечной волны служит электромагнитная волна, распространяющаяся в неограниченной изотропной среде. В этом случае векторы напряженностей электрического и магнитного полей совершают колебания в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны.

Математическое описание волновых процессов основывается на следующих соображениях. Пусть, наблюдая некоторый, например, электромагнитный процесс, мы можем характеризовать его в точке $M_1(\vec{r}_1)$ векторными функциями $\vec{E}(\vec{r}_1, t) = \vec{\varphi}_1(t)$, $\vec{H}(\vec{r}_1, t) = \vec{\psi}_1(t)$. В другой достаточно отдаленной точке $M_2(\vec{r}_2)$ процесс не будет наблюдаться ($\vec{E} = \vec{H} = 0$) до тех пор, пока он не будет передан средой. Через некоторое время τ в точке $M_2(\vec{r}_2)$ будут наблюдаться значения векторных функций $\vec{E}(\vec{r}_2, t) = \vec{\varphi}_2(t)$ и $\vec{H}(\vec{r}_2, t) = \vec{\psi}_2(t)$. В этом случае говорят, что в основе процесса распространения волн лежит *принцип близкодействия*, согласно которому взаимодействие осуществляется посредством среды (в частности, вакуума), являющейся «вместилищем» электромагнитного процесса.

В соответствии с этим принципом распространение электромагнитной волны в любой среде происходит с конечной скоростью. Распространение электромагнитных волн происходит вследствие того, что появляющееся в какой-либо точке про-

странства переменное электрическое поле возбуждает в соседних точках магнитное поле и наоборот. Данное утверждение следует из уравнений Максвелла: слагаемые, находящиеся в правых частях первых двух уравнений системы, являются источниками величин, находящихся в левых частях соответствующих уравнений. В частности, при изменении во времени электрического поля ($\partial \vec{D} / \partial t \neq 0$) возникнет величина, равная $\text{rot } \vec{H}$, что эквивалентно появлению магнитного поля.

Критерием перехода от колебательного процесса к волновому служит, так называемое, *условие квазистационарности*: если линейные размеры системы $L < vT$ (v — скорость распространения возмущения, T — время его заметного изменения), о процессе в системе с *сосредоточенными параметрами* можно говорить как о колебательном. В случае $L > vT$ процесс нужно считать *волновым*, а систему — *распределённой*.

Волновой процесс — это одна из важнейших форм движения материи. В той или иной мере волновые процессы присущи всем без исключения объектам материального мира. Как показали экспериментальные исследования дифракции и рассеяния микрочастиц, корпускулярно-волновой дуализм есть фундаментальное свойство материи, вследствие чего для описания состояния квантовых систем необходимо пользоваться волновыми функциями.

Волновые процессы бывают линейными и нелинейными. Механизмы распространения различных волн, естественно, сильно отличаются друг от друга, но несмотря на их большое разнообразие, в протекании волновых процессов различной физической природы можно выделить много общего.

2.1.2. Волновые уравнения. В теории электромагнитных волн фундаментальное значение имеют линейные уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1.1)$$

записанные относительно напряжённостей электрического или магнитного полей. Уравнения (2.1.1) называются *однородными волновыми уравнениями*. Посредством ∇^2 обозначен оператор Лапласа; постоянная v характеризует свойства среды. Волновые уравнения (2.1.1) справедливы для линейной однородной изотропной среды.

Подобно тому, как усложняя модель гармонического осциллятора, описываемого в теории колебаний уравнением:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (2.1.2)$$

где x — смещение какой-либо величины, совершающей колебательные движения, от некоторого положения равновесия, можно вводить в (2.1.2) дополнительные слагаемые, ответственные за нелинейность, затухание, влияние внешних сил (вынужденные колебания) и т.д., соответствующие обобщения для волновых процессов можно сделать и на основе уравнений (2.1.1).

В присутствии источников процесс возбуждения и распространения электромагнитных волн описывается *неоднородными волновыми уравнениями*:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \vec{f}_1(\vec{r}, t), \quad \nabla^2 \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} = \vec{f}_2(\vec{r}, t), \quad (2.1.3)$$

где \vec{f}_1 и \vec{f}_2 — некоторые функции, характеризующие распределённые внешние воздействия.

В линейной диспергирующей и диссипативной средах могут происходить необратимые процессы передачи энергии волн частицам среды. При этом скорость распространения волны становится функцией частоты. Эти процессы должны учитываться введением в волновые уравнения (2.1.1) дополнительных линейных членов:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - L_1(\vec{\mathcal{E}}) = 0, \quad \nabla^2 \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} - L_2(\vec{\mathcal{H}}) = 0, \quad (2.1.4)$$

где $L_1(\vec{\mathcal{E}})$, $L_2(\vec{\mathcal{H}})$ — линейные операторы (в общем случае интегро-дифференциальные), описывающие дисперсию и диссипацию среды. Диссипативность среды может быть также учтена введением в v комплексных значений ϵ и μ .

Решения волновых уравнений (2.1.1), (2.1.3), (2.1.4) должны находиться с учётом начальных и граничных условий, отвечающих физической постановке задачи.

Если среда является *анизотропной*, процесс распространения электромагнитных волн описывается волновыми уравнениями не второго, а более высокого порядка. Такого типа задачи встречаются при исследовании распространения электромагнитных волн в плазме или феррите, находящихся во внешних постоянных магнитных полях.

Если среда — *неоднородная*, то есть её параметры зависят от координат, уравнение, описывающее волновой процесс, имеет, сравнительно с (2.1.1), (2.1.3), (2.1.4), более сложный вид. При этом параметр v^2 не является постоянной величиной, а становится функцией координат: $v = v(\vec{r})$.

2.1.3. Гармонические волны. Большое место в теории волновых процессов занимают *гармонические волны*. Электромагнитное поле, соответствующее гармонической волне, может быть представлено в виде:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} [\vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r}) e^{-i\omega t}], \quad (2.1.5)$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} [\vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t} + \vec{H}^*(\vec{r}) e^{-i\omega t}],$$

где \vec{E} и \vec{H} — комплексные амплитуды полей. Подставляя (2.1.5) в (2.1.1), для функций \vec{E} и \vec{H} получаем уравнения

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \epsilon \mu \vec{E} = 0, \quad \nabla^2 \vec{H} + k_0^2 \epsilon \mu \vec{H} = 0, \quad (2.1.6)$$

где $k_0^2 = \omega^2 / c^2$. Если подставить (2.1.5) в уравнения (2.1.4), то также получим для векторов \vec{E} и \vec{H} уравнения вида (2.1.6), но k^2 в этом случае более сложным образом зависит от частоты и, вообще говоря, является комплексной величиной:

$$k^2(\omega) = [k'(\omega) - ik''(\omega)]^2. \quad (2.1.7)$$

Уравнения (2.1.6) называются *однородными уравнениями Гельмгольца*. В диспергирующих линейных средах, для которых справедлив принцип суперпозиции, возмущения, зависящие от времени сложным образом, представляют в виде совокупности гармонических волн, что обеспечивает переход от волнового уравнения к уравнению Гельмгольца, относящегося к уравнениям эллиптического типа.

Если волновой процесс описывается одной скалярной величиной, этот процесс называется *скалярной волной*. Если волновой процесс описывается векторной функцией, говорят о векторной волне. С этой точки зрения процесс распространения электромагнитного поля представляет собой *векторную волну*.

2.1.4. Плоские, цилиндрические и сферические волны. Волновые процессы в однородной изотропной среде в зависимости от характера изменения векторов \vec{E} и \vec{H} разделяют на *плоские, цилиндрические и сферические волны*. Дадим им определения. Рассмотрим гармоническую электромагнитную волну. Пусть ψ — любая из компонент векторов \vec{E} и \vec{H} . Тогда для гармонического процесса (с учётом соотношений (2.1.5)) можно записать

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_m(x, y, z) \cos[\omega t - \varphi(x, y, z)], \quad (2.1.8)$$

где $\varphi(x, y, z)$ — фаза соответствующей компоненты поля, которая определяет фронт волны. Под *фронтом волны* будем понимать *поверхность с фиксированной (постоянной) фазой*, то есть фаза на этой поверхности в данный момент времени в любой её точке одинакова.

Для плоских волн характерно перемещение фронта вдоль одного выбранного направления. Таким образом, у плоской волны, распространяющейся вдоль оси OZ , фаза будет зависеть только от координаты z : $\varphi = kz$, то есть уравнение поверхности фронта определяется как $z = \text{const}$. Следовательно, фронтом плоской волны является плоскость, перпендикулярная направлению распространения.

Поверхности постоянной фазы гармонического процесса, описываемого соотношением (2.1.8), определяются уравнением

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}, \quad (2.1.9)$$

то есть в общем случае поверхности постоянной фазы не обязательно являются параллельными плоскостями, как для плоской волны. Если на этих поверхностях амплитуда $\psi_m(x, y, z)$ не принимает постоянного значения, волна называется *неоднородной*. То есть *неоднородной* называют волну, для которой поверхности равных фаз и амплитуд не совпадают.

Форма поверхности постоянной фазы зависит от условий возникновения и распространения волн. Если, например,

$$\varphi(x, y, z) = kr, \quad (2.1.10)$$

где r — координата цилиндрической или сферической системы координат, мы, соответственно, имеем *цилиндрическую и сферическую волны*. На рис. 2.1а показаны последовательные положения фронта цилиндрической (сферической) волны, распространяющейся от источника Q (расходящаяся от источника волна). У сходящейся волны последовательные положения поверхностей постоянной фазы стремятся к точке $r = 0$ (рис. 2.1б). Заметим также, что цилиндрические и сферические волны в случае диссипативной среды являются неоднородными.

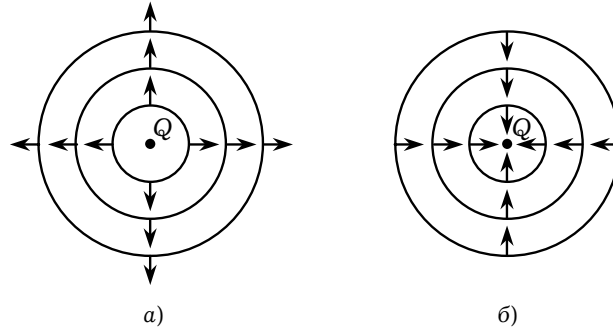


Рис. 2.1

2.2. Волновые уравнения для однородной изотропной среды

Процесс распространения электромагнитных волн в однородной изотропной среде описывается системой уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2.1)$$

и материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}^{\text{ср}}.$$

Из системы векторных уравнений (2.2.1) можно получить векторные дифференциальные уравнения второго порядка относительно напряжённости электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей.

Применим к первому уравнению системы (2.2.1) операцию rot :

$$\text{rot } \epsilon_a^{-1} \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} + \text{rot } (\epsilon_a^{-1} \vec{J}). \quad (2.2.2)$$

Подставим в соотношение (2.2.2) выражение для $\text{rot } \vec{E}$ из второго уравнения системы (2.2.1) и воспользуемся материальным уравнением $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$:

$$\text{rot } \epsilon_a^{-1} \text{rot } \vec{H} = -\mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \text{rot } (\epsilon_a^{-1} \vec{J}). \quad (2.2.3)$$

Для однородной среды материальные параметры ϵ_a и μ_a не зависят от пространственных координат, поэтому величину ϵ_a^{-1} можно вынести из-под знака операции rot . Тогда, с учётом тождества (П.3.6), получаем векторное дифференциальное уравнение второго порядка относительно напряжённости магнитного поля:

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \vec{J}. \quad (2.2.4)$$

Аналогично, рассматривая второе уравнение системы (2.2.1) и применяя к нему операцию rot , несложно получить уравнение относительно напряжённости электрического поля:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_a} \text{grad } R + \mu_a \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \quad (2.2.5)$$

При выводе уравнения (2.2.5) было учтено, что для однородной изотропной среды: $\operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} = \varepsilon_a^{-1} R$.

Уравнения (2.2.4) и (2.2.5) получили названия *векторных неоднородных волновых уравнений (уравнений д'Аламбера)*. В них перед второй производной по времени присутствует параметр $\varepsilon_a \mu_a$, имеющий размерность [сек²/м²]. Этот множитель определяет скорость распространения фазового фронта волны. Поэтому можно ввести следующее определение *фазовой скорости*:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}. \quad (2.2.6)$$

Очевидно, что фазовая скорость определяется свойствами среды, в которой происходит распространение волны и равна скорости света в этой среде.

Сравнивая уравнения д'Аламбера (2.2.4) и (2.2.5) с уравнениями (2.1.3), можно заметить, что векторные функции

$$\vec{f}_1(\vec{r}, t) = \varepsilon_a^{-1} \operatorname{grad} R(\vec{r}, t) + \mu_a \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{f}_2(\vec{r}, t) = -\operatorname{rot} \vec{J}(\vec{r}, t)$$

описывают источники электромагнитного поля волны.

При рассмотрении процесса распространения электромагнитных волн в области вне источников ($R \equiv 0$, $\vec{J} \equiv 0$) неоднородные уравнения (2.2.4) и (2.2.5) переходят в однородные волновые уравнения (2.1.1).

2.3. Электродинамические потенциалы и вектор Герца

2.3.1. Электродинамические потенциалы. Из уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{\mathcal{B}} = 0$ с учётом формулы (П.3.4) следует, что вектор магнитной индукции $\vec{\mathcal{B}}$ можно представить в виде:

$$\vec{\mathcal{B}} = \operatorname{rot} \vec{\mathcal{A}}. \quad (2.3.1)$$

Подставляя (2.3.1) во второе уравнение системы (2.2.1), получаем:

$$\operatorname{rot} \left\{ \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \right\} = 0. \quad (2.3.2)$$

Известно, что если для произвольного вектора \vec{a} справедливо равенство $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$, то этот вектор может быть представлен в виде градиента некоторой скалярной функции. Вследствие этого из соотношения (2.3.2) получаем выражение для вектора напряжённости электрического поля:

$$\vec{\mathcal{E}} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t}, \quad (2.3.3)$$

где Φ — некоторая произвольная скалярная функция координат и времени.

Функции $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t)$ и $\Phi(\vec{r}, t)$ в электродинамике получили названия *векторного и скалярного электродинамических потенциалов*, соответственно. Напомним, что ранее для электростатического поля был введён электростатический потенциал с помощью соотношения (1.15.5): $\vec{\mathcal{E}} = -\operatorname{grad} \Phi$. Из (2.3.3) следует, что для описания нестационарного электромагнитного поля уже недостаточно использовать только скалярный потенциал, а необходимо знать также закон из-

менения векторного электродинамического потенциала во времени, то есть вектора $\vec{\mathcal{A}}$. Отмеченный факт ещё раз поясняет процесс возникновения и распространения электромагнитных волн: переменное электрическое поле порождает магнитное и наоборот.

Из соотношений (2.3.1) и (2.3.3) можно сделать вывод о равноправии описания электромагнитного поля парой электродинамических потенциалов Φ , $\vec{\mathcal{A}}$ и парой векторов \vec{E} , \vec{B} . Поэтому имеет смысл записать дифференциальные уравнения второго порядка для электродинамических потенциалов. С этой целью в первое уравнение системы (2.2.1) подставим выражения (2.3.1) и (2.3.3). В результате имеем:

$$\text{rot}(\mu_a^{-1}) \text{rot} \vec{\mathcal{A}} = -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_a \left(\text{grad} \Phi + \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \right) + \vec{J}. \quad (2.3.4)$$

Воспользовавшись формулой (П.3.6), для однородной среды ($\mu_a = \text{const}$) получим следующее уравнение:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = \text{grad} \left(\text{div} \vec{\mathcal{A}} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \mu_a \vec{J}. \quad (2.3.5)$$

Наложим на электродинамические потенциалы дополнительное условие:

$$\text{div} \vec{\mathcal{A}} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (2.3.6)$$

называемое *калибровкой Лоренца*. Возможность введения дополнительной связи между электродинамическими потенциалами $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t)$ и $\Phi(\vec{r}, t)$ обосновывается неоднозначностью их определения формулами (2.3.1) и (2.3.3). Действительно, из (2.3.1) и (2.3.3) видно, что значения векторов \vec{E} и \vec{B} не изменятся при заменах

$$\vec{\mathcal{A}} \Rightarrow \vec{\mathcal{A}} + \text{grad} \alpha, \quad \Phi \Rightarrow \Phi + \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad (2.3.7)$$

где α — произвольная скалярная величина. Дополнительная связь между электродинамическими потенциалами в виде (2.3.6) выбрана из соображений математического упрощения уравнения (2.3.5), которое в этом случае переходит в неоднородное векторное уравнение д'Аламбера:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{J}. \quad (2.3.8)$$

Для скалярного электродинамического потенциала из второго уравнения системы (2.2.1) получается скалярное уравнение д'Аламбера:

$$\nabla^2 \Phi - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{R}{\epsilon_a}. \quad (2.3.9)$$

В электродинамике вводят оператор д'Аламбера (волновой оператор):

$$\square = \nabla^2 - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (2.3.10)$$

с помощью которого уравнения (2.3.8), (2.3.9) для электродинамических потенциалов записываются в более компактной форме:

$$\square \vec{\mathcal{A}} = -\mu_a \vec{J}, \quad \square \Phi = -\frac{R}{\varepsilon_a}. \quad (2.3.11)$$

В области, свободной от источников ($R \equiv 0, \vec{J} \equiv 0$), электродинамические потенциалы описываются однородными уравнениями д'Аламбера:

$$\square \vec{\mathcal{A}} = 0, \quad \square \Phi = 0. \quad (2.3.12)$$

Заметим, что вместо калибровки Лоренца (2.3.6) на электродинамические потенциалы можно наложить и другие условия. Например, часто встречается условие *кулоновской* или *поперечной калибровки*:

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{A}} = 0. \quad (2.3.13)$$

В этом случае вместо (2.3.8) и (2.3.9) для потенциалов получаются другие уравнения:

$$\square \vec{\mathcal{A}} = -\mu_a \vec{J} + \frac{1}{v^2} \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \Delta \Phi = -\frac{R}{\varepsilon_a}. \quad (2.3.14)$$

Как видно из (2.3.14), уравнение для скалярного электродинамического потенциала Φ совпадает с уравнением Пуассона (1.15.6) для электростатического потенциала, откуда и вытекает первое название калибровки — *кулоновская*. Второе название показывает, что для плоских волн, когда $\vec{\mathcal{A}} \sim \exp\{i(\vec{k}\vec{r})\}$, калибровка (2.3.13) эквивалентна условию поперечности векторного потенциала по отношению к волновому вектору \vec{k} : $(\vec{k} \vec{\mathcal{A}}) = 0$.

Запишем наиболее часто используемую в электродинамике систему уравнений для электродинамических потенциалов, получающуюся при наложении на них калибровки Лоренца:

$$\square \vec{\mathcal{A}} = -\mu_a \vec{J}, \quad \square \Phi = -\frac{R}{\varepsilon_a}, \quad \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\mathcal{A}} = 0. \quad (2.3.15)$$

Решение второго уравнения (2.3.15) в соответствии с методом Коши представим в виде:

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_k \Phi_k(t) \varphi_k(x, y, z). \quad (2.3.16)$$

Правую часть второго уравнения (2.3.15) запишем в виде разложения:

$$R(x, y, z, t) = \sum_k R_k(t) \varphi_k(x, y, z). \quad (2.3.17)$$

В (2.3.16), (2.3.17) $\varphi_k(x, y, z)$ — система ортонормированных функций, удовлетворяющих условию:

$$\int_V \varphi_k \varphi_{k'}^* dV = \delta_{kk'} = \begin{cases} 0, & k \neq k', \\ 1, & k = k', \end{cases} \quad (2.3.18)$$

где k является номером.

Представления (2.3.16), (2.3.17) справедливы в том случае, когда функции φ_k образуют полный набор собственных функций краевой задачи для рас-

сматриваемого объёма V . Они (представления) являются разложениями по пространственным гармоникам, период и ориентация которых в пространстве (x, y, z) определяются вектором \vec{k} :

$$\vec{k} = (\vec{i} n_x + \vec{j} n_y + \vec{k}_0 n_z) a, \quad (2.3.19)$$

где n_x, n_y, n_z — целые числа; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0$ — единичные орты вдоль соответствующих осей декартовой системы координат; a — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность $[м]^{-1}$.

Таким образом, разложения (2.3.16), (2.3.17) — представления функций $\Phi(x, y, z, t)$, $R(x, y, z, t)$ в пространстве собственных функций φ_k .

В качестве функций φ_k выберем:

$$\varphi_k = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (2.3.20)$$

где $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$;

$$k_x = 2\pi n_x / L, \quad k_y = 2\pi n_y / L, \quad k_z = 2\pi n_z / L; \quad (2.3.21)$$

L — параметр, определяющий линейные размеры рассматриваемого объёма V . В результате коэффициент a , входящий в (2.3.19), определяется как $a = 2\pi / L$.

Нетрудно видеть, что функции (2.3.20) являются собственными функциями краевой задачи на уравнении Гельмгольца:

$$\Delta \varphi_k + k^2 \varphi_k = 0, \quad (2.3.22)$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, с граничными условиями:

$$\varphi_k(x, y, z) = \varphi_k(x + L, y + L, z + L). \quad (2.3.23)$$

В виде (2.3.21) k_x , k_y и k_z определяют спектр собственных значений краевой задачи: (2.3.22), (2.3.23). Решения этой краевой задачи образуют полную систему собственных функций, по которой можно производить разложение произвольной функции Φ , удовлетворяющей условию:

$$\int_{L^3} \Phi \Phi^* dV < \infty.$$

Подставляя $\Phi(x, y, z, t)$ и $R(x, y, z, t)$ в виде (2.3.16), (2.3.17) в уравнение (2.3.15), получаем:

$$\sum_k (\ddot{\Phi}_k + k^2 c^2 \Phi_k) \varphi_k = \frac{1}{\varepsilon_a} \sum_k c^2 R_k \varphi_k,$$

где $c = 1 / \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ — скорость света в среде с параметрами ε_a, μ_a .

Умножив полученное уравнение на φ_k^* и проинтегрировав по объёму $V = L^3$, с использованием условия ортогональности (2.3.18), получаем:

$$\ddot{\Phi}_k + k^2 c^2 \Phi_k = \frac{c^2}{\varepsilon_a} R_k. \quad (2.3.24)$$

Уравнения (2.3.24) образуют бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных амплитудных коэффициентов $\Phi_k(t)$ разложения (2.3.16).

В результате определение потенциала $\Phi(x, y, z, t)$, создаваемого переменным во времени зарядом, распределённым с плотностью $R(x, y, z, t)$ в конечной области, свелось к решению краевой задачи: (2.3.22), (2.3.23) и определению функций $\Phi_k(t)$, являющихся решениями уравнений (2.3.24), каждое из которых представляет собой уравнение осциллятора с внешним воздействием. Собственные частоты осцилляторов определяются как

$$\omega_k = \frac{2\pi}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} c.$$

Таким образом, результирующий потенциал в произвольной точке в произвольный момент времени $\Phi(x, y, z, t)$ представляет собой, в соответствии с законом (2.3.16), бесконечную сумму потенциалов с амплитудами Φ_k , создаваемых бесконечным набором источников. Функции $R_k(t)$ в (2.3.24) играют роль внешней силы. Уравнения (2.3.24) могут иметь различные решения в зависимости от начальных условий. Последние определяются начальными условиями, при которых решается уравнение (2.3.15).

Решение уравнения (2.3.24) при каждом фиксированном k записывается как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения (2.3.24). Указанное частное решение находится методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) и имеет вид:

$$\Phi_k(t) = \frac{c^2}{\varepsilon_a \omega_k} \int_{t_0}^t R_k(\tau) \sin[\omega_k(t - \tau)] d\tau. \quad (2.3.25)$$

Решение в виде (2.3.25) соответствует начальным условиям:

$$\Phi_k(t_0) = 0, \quad \Phi'_k(t_0) = 0.$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.3.24) записывается в виде:

$$\bar{\Phi}_k(t) = A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) + \frac{c^2}{\varepsilon_a} \int_{t_0}^t R_k(\tau) \frac{\sin[\omega_k(t - \tau)]}{\omega_k} d\tau. \quad (2.3.26)$$

Рассмотрим частный случай — общее решение удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$\bar{\Phi}_k(t_0) = 0, \quad \bar{\Phi}'_k(t_0) = 0.$$

Как следует из (2.3.25), в этом случае

$$A_k = B_k = 0.$$

Подставив $\Phi_k(t)$ в виде (2.3.25) в (2.3.16), имеем:

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_k \Phi_k \int_{t_0}^t \frac{c^2}{\varepsilon_a} R_k(\tau) \frac{\sin[\omega_k(t - \tau)]}{\omega_k} d\tau. \quad (2.3.27)$$

Обозначая координаты точек размещения объёмного заряда как (x', y', z') , в соответствии с (2.3.17), записываем:

$$R(x', y', z', t) = \sum_k R_k(t) \phi_k(x', y', z').$$

Умножим записанное равенство на $\phi_k^*(x', y', z')$ и проинтегрируем по всему рассматриваемому объёму V . С учётом условия ортонормированности функций ϕ_k (2.3.18) получаем:

$$R_k(t) = \int_V R(x', y', z') \phi_k^*(x', y', z') dx' dy' dz'.$$

Поскольку приращение вектора \vec{k} :

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$$

при минимальных $\Delta n_x = \Delta n_y = \Delta n_z = 1$ и $L \rightarrow \infty$ (то есть, фактически, при переходе к свободному пространству) переходит в элементарное приращение:

$$dk_x dk_y dk_z = dk,$$

от суммирования в (2.3.27) можно перейти к интегрированию.

Подставляя в (2.3.27) $R_k(t)$ и учитывая (2.3.20), получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) = & \frac{c^2}{(2\pi)^3 \epsilon_a} \int_0^\infty e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \int_{t_0}^t \frac{\sin[\omega_k(t - \tau)]}{\omega_k} d\tau \times \\ & \times \int_V e^{-i\vec{k}\vec{r}'} R(x', y', z', \tau) dx' dy' dz', \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

где $\vec{r}' = \vec{r}(x', y', z')$ — координата точки источника.

Производя в (2.3.28) интегрирование, получаем:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{R\left(x', y', z', t \pm \frac{\Delta r}{c}\right)}{\Delta r} dx' dy' dz', \quad (2.3.29)$$

где $\Delta r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$; знак «+» соответствует полю, распространяющемуся к области источников, по которой в (2.3.29) производится интегрирование; знак «-» соответствует полю, распространяющемуся от указанной области.

Аналогичным образом находится решение первого уравнения (2.3.15), которое записывается в виде:

$$\vec{\mathcal{A}}(x, y, z, t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}\left(x', y', z', t \pm \frac{\Delta r}{c}\right)}{\Delta r} dx' dy' dz', \quad (2.3.30)$$

Выражения (2.3.29), (2.3.30), взятые со знаком «-», носят названия *запаздывающих потенциалов*, со знаком «+» — *опережающих*.

Отметим, что наличие двух типов равноправных решений (запаздывающих и опережающих) у системы уравнений (2.3.15) связано с инвариантностью оператора д'Аламбера относительно времени. Выбор запаздывающего решения выделяет направление течения времени, что неизбежно при описании макроскопических электромагнитных процессов. Однако в ряде случаев не исключена возможность существования опережающих решений. Действительно, при наличии в среде различного рода неоднородностей, появляются отражённые волны, которые математически и описываются опережающими решениями. Таким образом, наличие двух типов равноправных решений у системы уравнений (2.3.15) физически связано с возможностью существования прямых и отражённых волн в среде с неоднородностями.

2.3.2. Векторы Герца. Наряду с векторным и скалярным потенциалами в электродинамике вводят также *электрический и магнитный векторы Герца*.

Представим скалярный потенциал Φ в виде

$$\Phi = -\operatorname{div} \vec{\Pi}^e, \quad (2.3.31)$$

где вектор $\vec{\Pi}^e$ называют *электрическим вектором Герца (поляризационным потенциалом)*. Для установления связи между векторным потенциалом $\vec{\mathcal{A}}$ и электрическим вектором Герца $\vec{\Pi}^e$ воспользуемся калибровкой Лоренца (2.3.6), которая с учётом (2.3.31) принимает вид:

$$\operatorname{div} \left(\vec{\mathcal{A}} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t} \right) = 0.$$

Откуда следует, что

$$\vec{\mathcal{A}} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t}. \quad (2.3.32)$$

Следовательно, векторы $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ могут быть выражены через вектор Герца $\vec{\Pi}^e$ (см. соотношения (2.3.1) и (2.3.3)) следующим образом:

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \left\{ \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t} \right\}, \quad \vec{\mathcal{E}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}^e - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2}. \quad (2.3.33)$$

Для областей пространства, свободных от электрических источников ($\vec{J} = 0$, $R = 0$), вектор Герца $\vec{\Pi}^e$ удовлетворяет однородному волновому уравнению:

$$\nabla^2 \vec{\Pi}^e - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} = 0, \quad (2.3.34)$$

которое следует из соотношений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}^e - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi}^e - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}^e + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

получающихся подстановкой (2.3.33) в уравнения Максвелла (2.2.1) при $\vec{J} = 0$. При выводе (2.3.34) полагалось, что диэлектрическая и магнитная проницаемости ε_a и μ_a не зависят от координат ($\varepsilon_a = \text{const}$, $\mu_a = \text{const}$).

Строго говоря, из последних равенств следует, что

$$\nabla^2 \vec{\pi}^e - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\pi}^e}{\partial t^2} = \text{const}. \quad (2.3.35)$$

Поскольку значение константы в правой части (2.3.35) не влияет на определение поля, её можно положить равной нулю, что и приведёт к уравнению (2.3.34).

В том случае, когда электромагнитное поле создаётся источником электрического типа (электрическим моментом), скалярный и векторный потенциал удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla^2 \Phi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_a} \text{div } \vec{\mathcal{P}}, \quad (2.3.36)$$

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu_a \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t}, \quad (2.3.37)$$

где $\vec{\mathcal{P}}$ — вектор поляризации.

С использованием (2.3.31) и (2.3.32) уравнения (2.3.36) и (2.3.37) сводятся к одному уравнению относительно электрического вектора Герца:

$$\nabla^2 \vec{\pi}^e - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\pi}^e}{\partial t^2} = -\frac{\vec{\mathcal{P}}}{\varepsilon_a}. \quad (2.3.38)$$

Когда электромагнитное поле создаётся источником магнитного типа (магнитным моментом, характеризуемым плотностью магнитного тока $\vec{J}_M = \mu_0^{-1} \text{rot } \vec{M}$, где \vec{M} — вектор намагничивания), из двух уравнений (2.3.36), (2.3.37), поскольку в этом случае $\Phi \equiv 0$, остаётся только одно:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\text{rot } \vec{M}. \quad (2.3.39)$$

Вводя магнитный вектор Герца $\vec{\pi}^m$ соотношением:

$$\vec{\mathcal{A}} = \mu_a \text{rot } \vec{\pi}^m,$$

получаем относительно него из (2.3.39) уравнение:

$$\nabla^2 \vec{\pi}^m - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\pi}^m}{\partial t^2} = -\frac{\vec{M}}{\mu_a}. \quad (2.3.40)$$

Соответственно векторы $\vec{\mathcal{E}}$ и \vec{H} выражаются через $\vec{\pi}^m$ следующим образом (в (2.2.1) $\vec{J} = 0$):

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{\varepsilon_a} \text{rot} \left[\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{\pi}^m}{\partial t} \right], \quad \vec{H} = \text{grad div } \vec{\pi}^m - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{\pi}^m}{\partial t}. \quad (2.3.41)$$

Для областей пространства, свободных от источников, магнитный вектор Герца $\vec{\Pi}^m$ также удовлетворяет однородному волновому уравнению:

$$\nabla^2 \vec{\Pi}^m - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^m}{\partial t^2} = 0. \quad (2.3.42)$$

В силу линейности уравнений Максвелла с электрическими и магнитными токами (2.2.1) общее их решение через электрический и магнитный вектор Герца будет определяться суперпозицией решений (2.3.33) и (2.3.41):

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= \text{grad div } \vec{\Pi} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_a} \text{rot} \left[\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{\Pi}^m}{\partial t} \right], \\ \vec{\mathcal{H}} &= \text{grad div } \vec{\Pi}^m - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{\Pi}^m}{\partial t} + \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \left[\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

Таким образом, уравнения для электрического (2.3.38) и магнитного (2.3.40) векторов Герца имеют один и тот же вид (одинаковые по форме), отличаются лишь функциями, стоящими в правой части, поскольку поля, описываемые этими уравнениями, создаются различными источниками. Благодаря тому, что уравнения для электрического и магнитного векторов Герца имеют одинаковый вид, при их решении используют принцип двойственности.

Допустим, нашли решение уравнения (2.3.38). По нему с использованием формул (2.3.33) находим поля $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$. Поля, создаваемые источником магнитного типа и описываемые уравнением (2.3.40), получаются простой заменой:

$$\vec{\mathcal{P}} \rightarrow \vec{\mathcal{M}}, \quad \varepsilon_a \Leftrightarrow -\mu_a, \quad \vec{\mathcal{E}} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{H}}.$$

Решения уравнений (2.3.38), (2.3.40), получаемые по методике, описанной в п. 2.3.1, записываются в виде:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^e(x, y, z; t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_V \frac{\vec{\mathcal{P}}(x', y', z', t \pm \frac{\Delta r}{c})}{\Delta r} dx' dy' dz', \\ \vec{\Pi}^m(x, y, z; t) &= \frac{1}{4\pi\mu_a} \int_V \frac{\vec{\mathcal{M}}(x', y', z', t \pm \frac{\Delta r}{c})}{\Delta r} dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

2.4. Метод комплексных амплитуд

При исследовании электромагнитных колебаний и волн чаще всего имеют дело с полями, изменяющимися во времени по гармоническому закону, то есть колеблющимися с определённой частотой. Такие поля называют *монохроматическими* или *гармоническими*. Математически гармонические колебания составляющих электромагнитного поля определяются законами ($j = x, y, z$):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j(\vec{r}, t) &= \mathcal{E}_{mj}(\vec{r}) \cos(\omega t + \alpha_j), \\ \mathcal{H}_j(\vec{r}, t) &= \mathcal{H}_{mj}(\vec{r}) \cos(\omega t + \beta_j), \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

где \mathcal{E}_{mj}, H_{mj} — действительные амплитуды; ω — круговая частота; $\omega t + \alpha_j, \omega t + \beta_j$ — полные фазы колебаний составляющих; α_j, β_j — начальные фазы колебаний составляющих.

Периодом колебания T называется наименьший отрезок времени, для которого

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t + T) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t), \quad \vec{H}(\vec{r}, t + T) = \vec{H}(\vec{r}, t).$$

Период и частота колебаний связаны соотношением

$$T = 2\pi / \omega = 1 / f, \quad (2.4.2)$$

где f — частота колебаний, определяемая как число колебаний в секунду.

Аналогичным образом (с другими в общем случае значениями начальных фаз) записываются составляющие векторов $\vec{D}, \vec{B}, \vec{J}$.

Интерес к гармоническим процессам определён тремя факторами. Во-первых, большинство излучающих устройств создаёт поля, зависимость от времени которых близка к гармонической, что обусловлено свойствами резонансных систем, применяемых в радиотехнике. Во-вторых, любой процесс с произвольной зависимостью от времени в линейной среде может быть представлен в виде интеграла или ряда Фурье, то есть в виде суперпозиции гармонических колебаний. В-третьих, существует удобный и простой математический метод (*метод комплексных амплитуд*), позволяющий при анализе гармонических колебаний исключать из уравнений Максвелла время и тем самым существенно их упрощать. Метод комплексных амплитуд является общим для всех линейных гармонических процессов. В данном разделе он рассматривается применительно к описанию электромагнитных процессов.

Запишем выражения (2.4.1) в виде:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}], \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t}], \quad (2.4.3)$$

где

$$E_j(\vec{r}) = \mathcal{E}_{mj}(\vec{r}) e^{i\alpha_j}, \quad H_j(\vec{r}) = H_{mj}(\vec{r}) e^{i\beta_j}; \quad j = x, y, z.$$

Векторы $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{H}(\vec{r})$ с составляющими $E_j(\vec{r}), H_j(\vec{r})$ называются *комплексными амплитудами* векторов напряженности электрического и магнитного полей, соответственно. Определив комплексные амплитуды $\vec{E}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r})$ в результате решения какой-либо электродинамической задачи, для получения мгновенных значений полей $\vec{\mathcal{E}}, \vec{H}$, умножаем соответствующие комплексные амплитуды на временной множитель $e^{i\omega t}$ и берём вещественные части от произведений.

Аналогично (2.4.3) можно записать выражения и для других векторов электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{D}(\vec{r}) e^{i\omega t}], \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{B}(\vec{r}) e^{i\omega t}], \\ \vec{J}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{j}(\vec{r}) e^{i\omega t}], \quad \vec{R}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{\rho}(\vec{r}) e^{i\omega t}], \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

где $\vec{D}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r}), \vec{j}(\vec{r}), \vec{\rho}(\vec{r})$ — комплексные амплитуды соответствующих величин.

Очевидно, что операция дифференцирования по времени от функций (2.4.3), (2.4.4) в методе комплексных амплитуд сводится к простому умножению этих функций на величину $i\omega$, то есть

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow i\omega. \quad (2.4.5)$$

Используя переход (2.4.5), получаем систему уравнений Максвелла (1.13.1) для комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -i\omega \vec{B}, & \operatorname{rot} \vec{H} &= i\omega \vec{D} + \vec{j} + \vec{j}^{\text{CT}}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho + \rho^{\text{CT}}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

При этом уравнение непрерывности имеет вид:

$$\rho = i \operatorname{div} \vec{j} / \omega. \quad (2.4.7)$$

Запишем систему уравнений Максвелла (2.4.6) для комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля в однородной изотропной среде, описываемой материальными уравнениями (1.11.2). Подставляя (1.11.2) в систему (2.4.6), получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -i\omega \mu_a \vec{H}, & \operatorname{rot} \vec{H} &= i\omega \varepsilon_0 \left(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \vec{E} + \vec{j}^{\text{CT}}, \\ \varepsilon_a \operatorname{div} \vec{E} &= \rho + \rho^{\text{CT}}, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

При рассмотрении монохроматических полей в материальных проводящих средах вводят комплексную диэлектрическую проницаемость среды:

$$\varepsilon_k = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}. \quad (2.4.9)$$

Диэлектрическая проницаемость среды может быть комплексной величиной и при условии $\sigma = 0$, то есть в непроводящей среде. Это имеет место в том случае, когда векторы \vec{D} и \vec{E} сдвинуты друг относительно друга по фазе на угол γ , когда $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. Действительно, если

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} e^{-i\gamma},$$

можно записать:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon (\cos \gamma - i \sin \gamma) \vec{E}.$$

Тогда под диэлектрической проницаемостью следует понимать величину:

$$\varepsilon_k = \varepsilon' - i \varepsilon'' = \varepsilon \cos \gamma - i \varepsilon \sin \gamma.$$

Запаздывание по фазе вектора $\vec{D}(t)$ относительно вектора $\vec{E}(t)$ наблюдается на достаточно высоких частотах, когда проявляются инерционные свойства среды. Это явление называется *диэлектрическим гистерезисом*.

Если в среде одновременно протекают токи проводимости и наблюдается диэлектрический гистерезис, составляющие комплексной диэлектрической проницаемости вычисляются как

$$\varepsilon' = \varepsilon \cos \gamma, \quad \varepsilon'' = \varepsilon \sin \gamma + \sigma / (\varepsilon_0 \omega).$$

Таким образом, комплексная диэлектрическая проницаемость, входящая в уравнения Максвелла для комплексных амплитуд, характеризует электрические свойства вещества при данной частоте. Её мнимая часть может быть обусловлена как проводимостью среды, так и высокочастотным диэлектрическим гистерезисом. Оба фактора приводят к потерям энергии высокочастотного электромагнитного поля, распространяющегося в среде. С чисто макроскопической точки зрения они (оба фактора) не различимы; в частности, и тот, и другой приводят к выделению тепла.

По аналогии с комплексной диэлектрической проницаемостью вводится *комплексная магнитная проницаемость* $\mu(\omega)$, зависящая от частоты:

$$\vec{B}(\omega) = \mu_0 \mu(\omega) \vec{H}(\omega).$$

В записи $\mu = |\mu| \exp(-i\gamma)$ величина γ характеризует отставание по фазе вектора \vec{B} от вектора \vec{H} .

Таким образом, в общем случае, в рамках метода комплексных амплитуд вводят комплексные диэлектрическую и магнитную проницаемости следующим формальным образом:

$$\varepsilon_k = \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad \mu_k = \mu' - i\mu''. \quad (2.4.10)$$

С физической точки зрения, наличие мнимых частей у диэлектрической и магнитной проницаемостей свидетельствует о наличии потерь в среде.

Для количественной оценки потерь в среде в электродинамике вводят параметры:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}, \quad \operatorname{tg} \delta^M = \frac{\mu''}{\mu'}, \quad (2.4.11)$$

где величина δ называется *углом диэлектрических потерь*, а величина δ^M — *углом магнитных потерь*. Обычно под параметром *тангенс угла диэлектрических потерь* ($\operatorname{tg} \delta$) понимают величину: $|\varepsilon''|/\varepsilon'$.

С учетом (2.4.11) соотношения (2.4.10) можно переписать в более компактной форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \varepsilon'(1 - i \operatorname{tg} \delta) = |\varepsilon_k| e^{-i\delta}, \\ \mu_k &= \mu'(1 - i \operatorname{tg} \delta^M) = |\mu_k| e^{-i\delta^M}. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Величину параметра $\operatorname{tg} \delta$ можно рассматривать в качестве одного из критериев классификации материальных сред. Если $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ при $\sigma \gg \omega \varepsilon_a$, среда является *проводником*, если $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ при $\sigma \ll \omega \varepsilon_a$, то среда относится к классу диэлектриков.

Запишем волновые уравнения (2.2.4) и (2.2.5) относительно комплексных амплитуд векторов \vec{H} и \vec{E} для среды с электрическими потерями ($\mu'' = 0$). С учётом (2.4.7) и (2.4.9) волновые уравнения (2.2.4), (2.2.5) переходят в *неоднородные уравнения Гельмгольца*:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{H} + k_k^2 \vec{H} &= -\operatorname{rot} \vec{j}^{\text{CT}}, \\ \nabla^2 \vec{E} + k_k^2 \vec{E} &= \varepsilon_a^{-1} \operatorname{grad} \rho^{\text{CT}} + i\omega \mu_a \vec{j}^{\text{CT}}, \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

где $k_k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_k \mu_a}$ — волновое число для среды с потерями, относительно комплексных амплитуд поля.

Волновое число для проводящей среды ($\sigma \neq 0$) является комплексным:

$$k_k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\mu \left(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)}. \quad (2.4.14)$$

Вещественная часть волнового числа называется *фазовой постоянной* и определяет изменение фазы волны на единице длины; мнимая часть k_k , называемая *коэффициентом затухания*, показывает уменьшение амплитуды волны на единице длины.

Если в среде отсутствуют токи проводимости ($\vec{j} = 0$), что соответствует случаю $\sigma = 0$, и можно пренебречь диэлектрическим гистерезисом, то волновое число является действительным:

$$k_k = k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}. \quad (2.4.15)$$

При отсутствии внешних сторонних источников $\vec{j}^{\text{ст}}$, $\rho^{\text{ст}}$ неоднородные уравнения Гельмгольца (2.4.13) переходят в однородные:

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0, \quad \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0. \quad (2.4.16)$$

Уравнения (2.4.16) описывают процессы распространения электромагнитных волн в области вне источников.

По аналогии с комплексными амплитудами векторов электромагнитного поля можно ввести комплексные амплитуды для электродинамических потенциалов $\vec{\mathcal{A}}$, Φ :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{A}(\vec{r}) e^{i\omega t}], \\ \Phi(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\varphi(\vec{r}) e^{i\omega t}], \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

где функции $\vec{A}(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r})$ называются комплексными амплитудами векторного и скалярного электродинамических потенциалов соответственно.

Комплексные амплитуды \vec{H} и \vec{E} выражаются с учётом (2.3.1) и (2.3.3) через \vec{A} и φ следующим образом:

$$\vec{H} = \mu_a^{-1} \text{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\text{grad} \varphi - i\omega \vec{A}. \quad (2.4.18)$$

При этом комплексные амплитуды \vec{A} и φ связаны уравнением:

$$\text{div} \vec{A} + i\omega \varepsilon_k \mu_k \varphi = 0. \quad (2.4.19)$$

Комплексные амплитуды электродинамических потенциалов обычно определяются из неоднородных уравнений Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} + k_k^2 \vec{A} &= -\mu_k \vec{j}^{\text{ст}}, \\ \nabla^2 \varphi + k_k^2 \varphi &= -\varepsilon_k^{-1} \rho^{\text{ст}}. \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

2.5. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде

Перейдём к рассмотрению электромагнитных волн в однородном изотропном пространстве с постоянными ε и μ , в котором отсутствуют сторонние токи и заряды. Система уравнений Максвелла в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div} \vec{D} &= 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

где $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$.

Дифференцируя первое уравнение системы (2.5.1) по времени, с учётом второго уравнения имеем:

$$-\frac{1}{\mu_0 \mu} \text{rot rot} \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.5.2)$$

Так как в данном случае $\operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} = 0$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} = \nabla \operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = -\nabla^2 \vec{\mathcal{E}}$, то

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.5.3)$$

где $v = c / \sqrt{\epsilon \mu}$.

Нетрудно убедиться, что вектор $\vec{\mathcal{H}}$ подчиняется такому же дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\Delta \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.5.4)$$

Отсюда следует, что все компоненты векторов $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ подчиняются скалярному волновому уравнению:

$$\Delta \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.5.5)$$

где под Ψ понимается любая из компонент векторов $\vec{\mathcal{E}}$ или $\vec{\mathcal{H}}$.

Простейшими решениями волнового уравнения (2.5.5) являются решения, описывающие *плоские волны*. Плоской электромагнитной волной называется волна со следующими характеристиками:

1. Чисто поперечная волна (ТЕМ) — векторы поля лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения.
2. Фронт волны — плоскость.
3. Волна распространяется со скоростью света в данной среде.
4. Векторы поля связаны через волновое сопротивление среды $|\vec{\mathcal{E}}| / |\vec{\mathcal{H}}| = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a} = Z$.

Таким образом, если выбрать ось OZ перпендикулярной фронту волны, в монохроматической плоской волне комплексные амплитуды полей $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ будут зависеть только от координаты z . Для плоских волн оператор Лапласа преобразуется к виду $\nabla^2 = \partial^2 / \partial z^2$, а волновое уравнение (2.5.5) становится пространственно одномерным:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.5.6)$$

Запись (2.5.6) является одной из двух канонических форм волнового уравнения. Если от переменных z и t перейти к характеристическим переменным ξ и η :

$$\xi = t - \frac{z}{v}, \quad \eta = t + \frac{z}{v},$$

уравнение (2.5.6) преобразуется ко второй канонической форме уравнений гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.5.7)$$

Общее решение уравнения (2.5.7), получаемое методом характеристик [Л2.11], имеет вид:

$$\Psi = \Psi_1(\xi) + \Psi_2(\eta) = \Psi_1(t - z/v) + \Psi_2(t + z/v), \quad (2.5.8)$$

где $\Psi_1(\xi)$ и $\Psi_2(\eta)$ — произвольные функции.

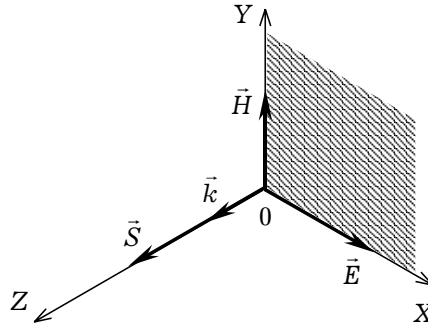


Рис. 2.2

Функция $\Psi_1(t - z/v)$ описывает плоскую волну, бегущую в направлении оси OZ . Плоскость, на которой фаза волны постоянна, передвигается в пространстве со скоростью v . Функция $\Psi_2(t + z/v)$ описывает волну, бегущую в противоположном направлении.

Возмущения, бегущие только в одну сторону (например, в положительном направлении оси OZ), могут быть описаны дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \quad (2.5.9)$$

Если вместо t ввести «локальное время» $\tau = t - z/v$, то есть наблюдать за волной, двигаясь вместе с ней со скоростью её распространения, то в новых переменных τ и z уравнение (2.5.9) примет вид

$$\frac{\partial \Psi(z, \tau)}{\partial z} = 0. \quad (2.5.10)$$

Решением этого уравнения является волна, не изменяющая формы своего профиля при изменении z , то есть стационарная волна: $\Psi = \Psi(\tau)$.

Рассмотрим плоскую гармоническую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси OZ в однородной изотропной среде с параметрами ϵ, μ . Будем считать, что в области распространения волны отсутствуют источники электромагнитного поля. Тогда комплексная амплитуда вектора напряжённости электрического поля удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (2.4.16):

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0. \quad (2.5.11)$$

Поскольку у плоской волны, распространяющейся вдоль оси OZ , напряжённость поля \vec{E} не зависит от координат x и y : $\nabla^2 = d^2/dz^2$.

Рассмотрим структуру поля плоской электромагнитной волны. Направление распространения волны определяется волновым вектором \vec{k} . Так как плоская волна является чисто поперечной, векторы напряжённостей \vec{E} и \vec{H} будут колебаться в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, определяемому вектором \vec{k} . На рис. 2.2 изображено расположение векторов плоской волны, при котором вектор \vec{E} совершает колебания вдоль оси OX , а вектор \vec{H} — вдоль оси OY .

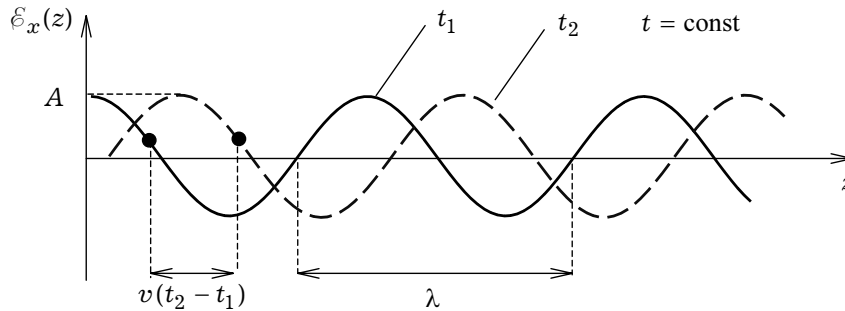


Рис. 2.3

Так как направление переноса волной энергии электромагнитного поля определяется вектором Умова–Пойнтинга $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$, то очевидно, что для однородной изотропной среды направление вектора \vec{S} будет совпадать с направлением вектора \vec{k} (рис. 2.2).

С учётом вышесказанного решение однородного уравнения Гельмгольца (2.5.11) можно записать в виде:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 [A_m e^{-ikz} + B_m e^{ikz}], \quad (2.5.12)$$

где A_m, B_m — постоянные, определяемые из краевых условий.

В решении (2.5.12) присутствуют два слагаемых: первое описывает плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси OZ ; второе — в противоположном направлении. Величины $A_m = A e^{i\varphi}$ и $B_m = B e^{i\psi}$ представляют собой амплитуды этих волн, а φ, ψ — начальные фазы.

Мгновенное значение вектора напряжённости электрического поля \vec{E} с учётом (2.4.3) определяется следующим образом:

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re}[\vec{E}(z) e^{i\omega t}] = \vec{x}_0 \{A \cos(\omega t - kz + \varphi) + B \cos(\omega t + kz + \psi)\}.$$

На рис. 2.3 представлены распределения составляющей E_x вектора напряжённости электрического поля плоской волны, распространяющейся вдоль оси OZ , для двух различных моментов времени t_1 и t_2 . На рисунке показан период пространственного изменения поля вдоль координаты z , называемый *длиной волны*: $\lambda = 2\pi/k$.

Рассмотрим **характеристики плоской электромагнитной волны**.

1. *Длина волны* — это расстояние между двумя точками, колеблющимися в одинаковой фазе. Из этого определения следует, что если расстояние между двумя точками волны $z_1 - z_2 = \lambda$, в фиксированный момент времени t фазы в этих точках должны отличаться на 2π :

$$[\omega t - kz_1] - [\omega t - kz_2] = 2\pi.$$

В результате получаем связь между длиной волны и волновым числом:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (2.5.13)$$

2. *Фазовая скорость волны v* — скорость распространения фазы вдоль оси OZ ,

то есть скорость распространения фазового фронта ($\omega t - k z = \text{const}$) может быть определена из уравнения:

$$\frac{d}{dt}\{\omega t - k z\} = 0.$$

Проводя дифференцирование, приходим к выражению для фазовой скорости:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (2.5.14)$$

Фазовая скорость электромагнитной волны определяется свойствами среды, в которой она распространяется. Так как $k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$, то для фазовой скорости справедлива и другая формула:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a\mu_a}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (2.5.15)$$

где $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 2.998 \cdot 10^8$ [м/с] — скорость распространения электромагнитной волны в вакууме (скорость света).

Из соотношения (2.5.15) следует, что скорость электромагнитной волны в среде в $\sqrt{\epsilon\mu}$ раз меньше, чем скорость света в вакууме. Величина $\sqrt{\epsilon\mu} = n$ получила название *относительного показателя преломления*.

Рассмотрим теперь структуру электромагнитного поля плоской гармонической электромагнитной волны в однородной изотропной среде. Для этого запишем систему уравнений Максвелла относительно комплексных амплитуд векторов для области, в которой отсутствуют сторонние токи и заряды:

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega\epsilon_a \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{H}. \quad (2.5.16)$$

При записи системы уравнений (2.5.16) были использованы материальные уравнения (1.11.2) для однородной изотропной среды.

В предположении, что плоская волна распространяется вдоль (против) оси OZ , запишем систему (2.5.16) в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} \frac{dH_y}{dz} &= -i\omega\epsilon_a E_x, \quad \frac{dH_x}{dz} = i\omega\epsilon_a E_y, \quad H_z = 0, \\ \frac{dE_y}{dz} &= i\omega\mu_a H_x, \quad \frac{dE_x}{dz} = -i\omega\mu_a H_y, \quad E_z = 0. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Из (2.5.17) сразу следует вывод о поперечности электромагнитного поля плоской волны, так как продольные составляющие $E_z = H_z = 0$. Кроме того, видим, что система (2.5.17) допускает два возможных варианта ориентации векторов \vec{E} и \vec{H} : $\vec{E} = \vec{x}_0 E_x$, $\vec{H} = \vec{y}_0 H_y$ и $\vec{E} = \vec{y}_0 E_y$, $\vec{H} = -\vec{x}_0 H_x$. Рис. 2.2 соответствует направлению распространения волны вдоль оси OZ .

Из системы (2.5.17) для составляющей E_x нетрудно получить уравнение Гельмгольца:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0. \quad (2.5.18)$$

Как уже отмечалось, решение данного уравнения представляет собой суперпози-

цию (2.5.12) двух плоских волн, бегущих в противоположных направлениях по отношению к оси OZ .

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси OZ . В этом случае в решении (2.5.12) необходимо положить $B_m = 0$. Определим составляющую H_y из пятого уравнения системы (2.5.17):

$$H_y = \frac{k}{\omega \mu_a} A_m e^{-ikz} = \frac{k}{\omega \mu_a} E_x. \quad (2.5.19)$$

Из (2.5.19) следует, что отношение E_x / H_y не зависит от продольной координаты z и определяется только параметрами среды. Поэтому естественно ввести параметр

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega \mu_a}{k} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}, \quad (2.5.20)$$

который устанавливает связь между амплитудами векторов \vec{E} и \vec{H} плоской электромагнитной волны. Параметр Z называется *импедансом*, или *характеристическим сопротивлением среды*. Волновое сопротивление для среды без потерь (ϵ_a, μ_a — вещественны) является вещественной величиной, из чего следует, что электрическое и магнитное поля в такой среде колеблются в фазе.

Для вакуума волновое сопротивление определяется следующим образом:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \quad [\text{Ом}]. \quad (2.5.21)$$

Таким образом, комплексные амплитуды полей \vec{E} и \vec{H} плоской гармонической электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси OZ , определяются следующим образом:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 A_m e^{-ikz}, \quad \vec{H} = \vec{y}_0 \frac{A_m}{Z} e^{-ikz}. \quad (2.5.22)$$

Соответственно, мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей плоской гармонической волны запишутся как

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \text{Re} \{ \vec{E}(z) e^{i\omega t} \} = \vec{x}_0 A \cos(\omega t - kz + \varphi), \\ \vec{H}(z, t) &= \text{Re} \{ \vec{H}(z) e^{i\omega t} \} = \vec{y}_0 \frac{A}{Z} \cos(\omega t - kz + \varphi). \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

На рис. 2.4 приведены распределения мгновенных значений напряженностей электрического и магнитного полей плоской гармонической электромагнитной волны вдоль координаты z в некоторый фиксированный момент времени. Как видно из рис. 2.4, распределения электрического и магнитного полей совпадают по фазе.

Рассмотренная в этом разделе плоская гармоническая электромагнитная волна называется *однородной*, так как электромагнитное поле такой волны не зависит от поперечных координат x и y , и поэтому для неё в любой момент времени поверхности равных фаз и поверхности равных амплитуд совпадают между собой. Они представляют собой плоскости, перпендикулярные направлению распространения волны. Другим типом плоских волн являются *неоднородные волны*, у которых плоскости

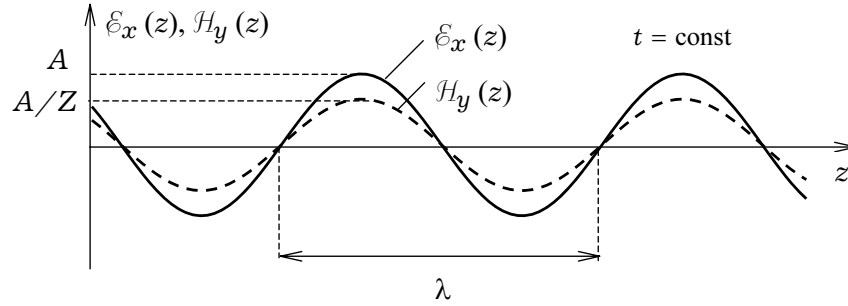


Рис. 2.4

равных фаз и плоскости равных амплитуд расположены под углом друг к другу. Такие волны, в частности, возникают при распространении плоских волн вблизи границы раздела двух сред. Они будут рассмотрены в дальнейшем.

2.6. Плоские однородные электромагнитные волны в однородной изотропной среде с потерями

Рассмотрим распространение плоской гармонической электромагнитной волны в среде с потерями (диссипацией энергии). Как уже отмечалось, потери в материальной среде можно учесть путем введения в относительные диэлектрическую и магнитную проницаемости мнимых частей:

$$\epsilon_k = \epsilon' - i\epsilon'', \quad \mu_k = \mu' - i\mu'' . \quad (2.6.1)$$

Волновое число для такой среды также становится комплексным:

$$k_k = k' - ik'' . \quad (2.6.2)$$

С учётом (2.4.12) комплексное волновое число можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} k_k &= \pm k_0 \sqrt{|\epsilon_k| |\mu_k| e^{-i\delta} e^{-i\delta^m}} = \\ &= \pm k_0 \sqrt{|\epsilon_k| |\mu_k|} \left\{ \cos \left[(\delta + \delta^m) / 2 \right] - i \sin \left[(\delta + \delta^m) / 2 \right] \right\} . \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Однородное уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды \vec{E} электромагнитной волны, распространяющейся вдоль (против) оси OZ в среде с потерями, имеет вид:

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + (k' - ik'')^2 \vec{E} = 0 . \quad (2.6.4)$$

Решение уравнения (2.6.4) представляет собой суперпозицию двух плоских электромагнитных волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\vec{E}(z) = \vec{x}_0 \left\{ A_m e^{-k''z} e^{-ik'z} + B_m e^{k''z} e^{ik'z} \right\} . \quad (2.6.5)$$

Вектор напряженности электрического поля противоположно бегущих волн опре-

деляется следующим выражением:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \operatorname{Re}[\vec{E}(z) e^{i\omega t}] = \\ &= \vec{x}_0 \left\{ A e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi) + B e^{k''z} \cos(\omega t + k'z + \psi) \right\}.\end{aligned}\quad (2.6.6)$$

Рассмотрим подробнее решение (2.6.6). Первое слагаемое описывает плоскую затухающую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси OZ . Множитель $A \exp(-k''z)$ называется амплитудным, а $\cos(\omega t - k'z + \varphi)$ — фазовым. Амплитуда этой волны уменьшается по закону $\exp(-k''z)$. Так как амплитуда уменьшается при распространении волны вдоль оси OZ , волна является затухающей. Второе слагаемое в решении (2.6.6) определяет плоскую затухающую волну, распространяющуюся против оси OZ .

Таким образом, в материальной среде с диссипацией энергии плоские электромагнитные волны всегда являются *затухающими*.

Рассмотрим характеристики плоской электромагнитной волны в среде с потерями.

1. *Длина волны* λ представляет собой расстояние, на котором происходит изменение фазы волны на 2π , однако пространственным периодом поля она уже не является, как это имело место для волн в однородных средах без потерь.

2. *Фазовая постоянная* плоской волны — вещественная часть комплексного волнового числа, показывает изменение фазы волны при прохождении её фронтом расстояния $z = 1\text{ м}$ (в системе СИ). Фазовая постоянная является аналогом волнового числа для среды без потерь и определяется следующим образом:

$$k' = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.6.7)$$

В литературе часто фазовая постоянная называется *постоянной распространения* и обозначается буквами β или γ .

3. *Фазовая скорость* плоской волны в среде с потерями определяется как

$$v = \frac{c}{\operatorname{Re}\{\sqrt{\epsilon_k \mu_k}\}}. \quad (2.6.8)$$

4. *Коэффициент затухания* α — мнимая часть комплексного волнового числа ($\alpha \equiv k''$). Он показывает уменьшение амплитуды волны при прохождении её фронтом расстояния $z = 1\text{ м}$ в среде с потерями. Физический смысл коэффициента затухания: величина, обратная α , определяет расстояние, на котором амплитуда плоской волны уменьшается в e раз.

В электродинамике очень часто используют параметр $L = k''l$ (l — расстояние, пройденное фазовым фронтом волны), называемый *затуханием*. Причём существуют два способа определения указанного параметра:

1. $L = k''l$ [непер];
2. $L = 20 \lg e^{k''l} \approx 8.69 k''l$ [дБ].

Рассмотрим структуру электромагнитного поля плоской затухающей волны. Из решения (2.6.5) выделим плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси OZ :

$$\vec{E}(z) = \vec{x}_0 A_m e^{-k''z} e^{-ik'z}. \quad (2.6.9)$$

Составляющая напряжённости магнитного поля H_y может быть определена из выражения (2.5.19), в котором необходимо заменить k на k_k и μ_a на $\mu_0\mu_k$:

$$H_y = \frac{k_k}{\omega \mu_0 \mu_k} A_m e^{-i k_k z} = \frac{k_k}{\omega \mu_0 \mu_k} E_x. \quad (2.6.10)$$

По аналогии со случаем среды без потерь введем *комплексное волновое сопротивление среды*:

$$Z_k = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega \mu_0 \mu_k}{k_k} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_k}{\varepsilon_k}}. \quad (2.6.11)$$

С учётом (2.4.12) формулу (2.6.11) для комплексного волнового сопротивления можно переписать в другом виде:

$$Z_k = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_k}{\varepsilon_k}} = Z_0 \sqrt{\frac{|\mu_k|}{|\varepsilon_k|}} \exp\left(i \frac{\delta - \delta^m}{2}\right) = Z_0 \sqrt{\frac{|\mu_k|}{|\varepsilon_k|}} e^{i \varphi_Z}, \quad (2.6.12)$$

где $\varphi_Z = (\delta - \delta^m)/2$.

Выражения для комплексных амплитуд составляющих электромагнитного поля плоской затухающей волны в однородной среде записываются как

$$\vec{E}(z) = \vec{x}_0 A_m e^{-k''z} e^{-ik'z}, \quad \vec{H}(z) = \vec{y}_0 \frac{A_m}{Z_k} e^{-k''z} e^{-ik'z}. \quad (2.6.13)$$

Мгновенные значения напряжённостей электрического и магнитного полей плоской гармонической волны в среде с потерями определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \text{Re}\{\vec{E}(z) e^{i\omega t}\} = \vec{x}_0 A e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi), \\ \vec{H}(z, t) &= \text{Re}\{\vec{H}(z) e^{i\omega t}\} = \vec{y}_0 \frac{A}{Z_k} e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_Z). \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

В отличие от незатухающей плоской волны в среде с потерями векторы \vec{E} и \vec{H} сдвинуты между собой по фазе на угол φ_Z .

На рис. 2.5 приведены распределения мгновенных значений напряжённостей электрического и магнитного полей плоской затухающей электромагнитной волны вдоль координаты z в некоторый фиксированный момент времени.

В заключение раздела получим явные выражения для вещественной и мнимой частей комплексного волнового числа k_k и выявим некоторые особенности распространения плоских волн в диэлектриках и проводниках.

Предположим, что в среде отсутствуют магнитные потери:

$$\mu_k = \mu, \quad \varepsilon_k = \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad \varepsilon'' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}.$$

В такой среде:

$$k_k = k' - i k'' = k_0 \sqrt{\varepsilon' \mu} \sqrt{1 - i \text{tg} \delta}.$$

После разделения вещественной и мнимой частей имеем:

$$\begin{aligned} k' &= k_0 \sqrt{\varepsilon' \mu} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta}\right)}, \\ k'' &= k_0 \sqrt{\varepsilon' \mu} \sqrt{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta}\right)}. \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

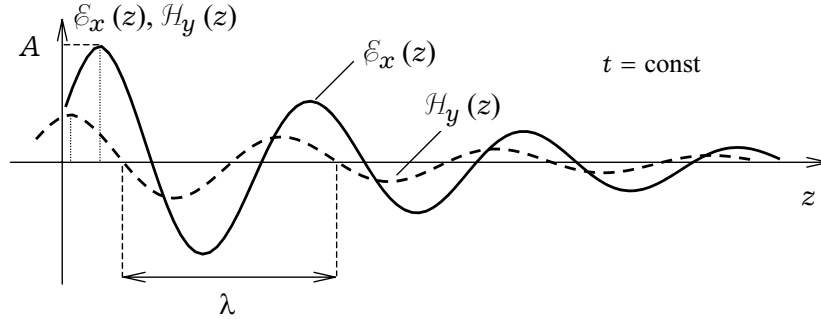


Рис. 2.5

Выражения (2.6.15) удобно рассмотреть в двух предельных случаях.

1. **Диэлектрик** ($|\operatorname{tg} \delta| \ll 1$). В этом случае комплексное волновое число можно разложить в степенной ряд по малому параметру $\operatorname{tg} \delta$:

$$k_k \approx k_0 \sqrt{\varepsilon' \mu} \left\{ 1 - i \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta + \dots \right\}. \quad (2.6.16)$$

Из разложения (2.6.16) с учётом того, что $\operatorname{tg} \delta = \sigma / (\omega \varepsilon_0 \varepsilon')$, следует:

$$k' \approx k_0 \sqrt{\varepsilon' \mu} = k, \quad k'' \approx \frac{k}{2} \operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma Z_0}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}. \quad (2.6.17)$$

Очевидно, что фазовые постоянные плоских волн в диэлектрике практически совпадают с волновым числом для среды без потерь. Затухание волны, определяемое параметром k'' , также является незначительным в силу малости $\operatorname{tg} \delta$.

Другой отличительной особенностью электромагнитных волн в диэлектрике является отсутствие зависимости скорости распространения от частоты (нет дисперсии).

2. **Проводники** ($|\operatorname{tg} \delta| \gg 1$). В этом случае:

$$k_k \approx k \sqrt{-i \operatorname{tg} \delta} = k \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \delta}{2}} (1 - i), \quad k = k_0 \sqrt{\varepsilon' \mu}. \quad (2.6.18)$$

Из выражения (2.6.18) находим вещественную и мнимую части комплексного волнового числа:

$$k' \approx k'' \approx k \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \delta}{2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{2}}. \quad (2.6.19)$$

В проводниках, как видно из формулы (2.6.19), затухание является значительным вследствие большой величины удельной проводимости σ . Поскольку k' возрастает с увеличением σ , то значительно уменьшается длина волны. Из соотношения (2.6.19) следует, что фазовая постоянная зависит от частоты по закону $k' \sim \sqrt{\omega}$; это является проявлением дисперсионных свойств проводящей среды. Вектор \vec{H} отстает от вектора \vec{E} по фазе на $\pi/4$.

При падении плоской волны на поверхность проводника, которой соответствует координата $z = 0$ (волна распространяется вдоль оси OZ), как следует из

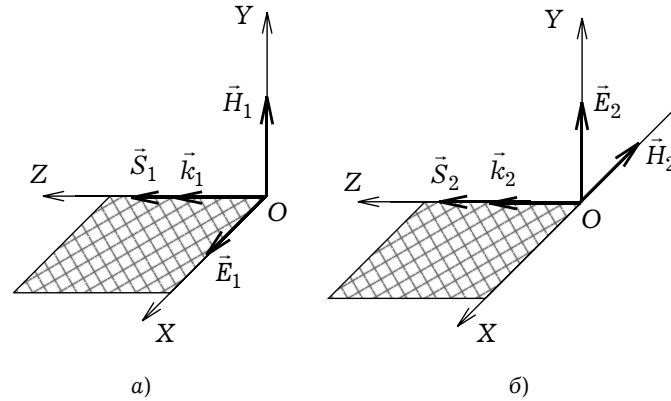


Рис. 2.6

(2.6.9) и (2.6.19), поле убывает в e раз на расстоянии от поверхности:

$$z = \Delta^0 = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \sigma}}.$$

Величина Δ^0 — глубина проникновения поля в проводник, называемая *толщиной скин-слоя*; μ_a — абсолютная магнитная проницаемость проводника.

Таким образом, проводящая среда всегда является диспергирующей, в результате чего при распространении электромагнитной волны произвольной формы происходит искажение ее профиля, поскольку фазовая скорость и коэффициент затухания для различных спектральных составляющих волны разные.

2.7. Поляризация электромагнитных волн

Поляризация — это направление колебаний вектора \vec{E} электромагнитного поля волны в пространстве. Электромагнитное поле, у которого в точке наблюдения P пространства в любой момент времени можно установить направление вектора \vec{E} , называется *поляризованным*. Электромагнитное поле, у которого направление вектора \vec{E} в точке P меняется случайным образом, называется *неполяризованным*. Плоскость, проходящая через направление распространения поля и вектор \vec{E} , называют *плоскостью поляризации*. Если положение плоскости поляризации в точке P не меняется во времени, поле имеет *линейную поляризацию*. Если же плоскость поляризации в точке P с течением времени вращается, то поляризация называется *вращающейся*.

2.7.1. Линейная поляризация. Для описания распространения плоской гармонической электромагнитной волны выберем декартову систему координат $\{X, Y, Z\}$ таким образом, чтобы ось OZ совпадала с направлением распространения волны. В этом случае выражения для напряжённостей электрического и магнитного полей плоской электромагнитной волны имеют вид (рис. 2.6а):

$$\vec{E}_1 = \vec{x}_0 A_m e^{-ik_k z}, \quad \vec{H}_1 = \vec{y}_0 \frac{A_m}{Z} e^{-ik_k z}, \quad (2.7.1)$$

то есть векторы \vec{E}_1 и \vec{H}_1 колеблются в плоскости $\{XOY\}$. Вектор \vec{E}_1 лежит в плоскости $\{XOZ\}$, и поэтому говорят, что электромагнитная волна поляризована в плоскости $\{XOZ\}$. Вектор \vec{k}_1 на рис. 2.6а характеризует направление распространения волны. Так как плоскость поляризации в любой точке пространства во времени не изменяется, такой тип поляризации электромагнитной волны называется *линейным*.

У другой плоской волны, поляризованной в плоскости $\{YOZ\}$ и распространяющейся также вдоль оси OZ (рис. 2.6б), векторы напряженности электрического и магнитного поля имеют вид:

$$\vec{E}_2 = \vec{y}_0 B_m e^{-ik_k z}, \quad \vec{H}_2 = -\vec{x}_0 \frac{B_m}{Z} e^{-ik_k z}. \quad (2.7.2)$$

Наличие знака «-» в выражении для \vec{H}_2 следует из того, что векторы \vec{E}_2 , \vec{H}_2 , \vec{S}_2 должны образовывать правую тройку.

Рассмотрим суперпозицию двух плоских электромагнитных волн с линейными поляризациями, поля которых определяются соотношениями (2.7.1) и (2.7.2):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (\vec{x}_0 A_m + \vec{y}_0 B_m) e^{-ik_k z}. \quad (2.7.3)$$

Пусть начальные фазы обеих волн совпадают, то есть $A_m = A e^{i\varphi}$, $B_m = B e^{i\varphi}$. Тогда мгновенные значения напряженности электрического поля суммарной волны могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= (\vec{x}_0 A + \vec{y}_0 B) e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi) = \\ &= \vec{x}'_0 C e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi), \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

где $\vec{x}'_0 = \vec{x}_0 \cos\theta + \vec{y}_0 \sin\theta$, $\tan\theta = B/A$, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

В результате суммарная волна будет поляризована в плоскости $\{X'OZ\}$, расположенной под углом θ к плоскости $\{XOZ\}$ — плоскости поляризации первой волны (рис. 2.7). Задавая различные амплитуды волн A и B , можно получать различные наклоны плоскости поляризации $\{X'OZ\}$.

Таким образом, в результате сложения двух плоских волн, линейно-поляризованных в перпендикулярных плоскостях, обладающих одинаковыми фазами и различными амплитудами, получается также линейно-поляризованная волна с плоскостью поляризации, повернутой на некоторый угол относительно плоскостей поляризации исходных плоских волн.

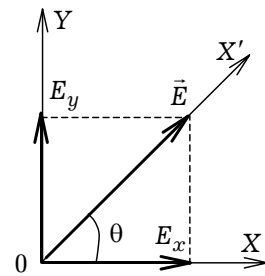


Рис. 2.7

2.7.2. Круговая и эллиптическая поляризация волн. Рассмотрим теперь суперпозицию двух плоских волн, линейно-поляризованных в перпендикулярных плоскостях, обладающих одинаковыми амплитудами и разностью начальных фаз,

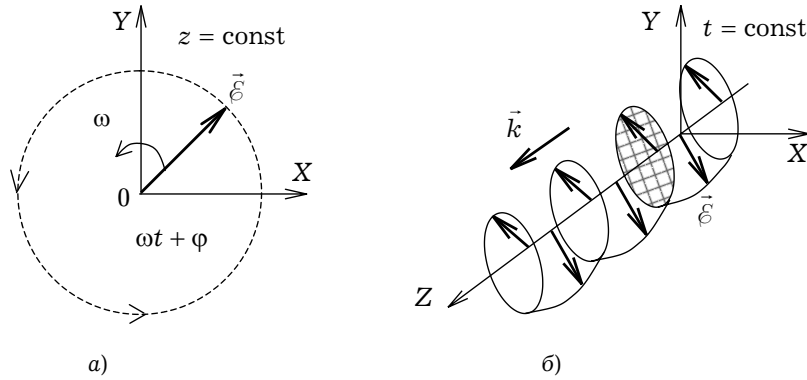


Рис. 2.8

равной $\pi/2$. Пусть вектор \vec{E} второй волны отстаёт по начальной фазе от вектора \vec{E} первой волны на $\pi/2$:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{x}_0 A_m e^{-ik_k z}, & A_m &= A e^{i\varphi}, \\ \vec{E}_2 &= \vec{y}_0 B_m e^{-ik_k z}, & B_m &= A e^{i(\varphi - \pi/2)}.\end{aligned}\quad (2.7.5)$$

Найдём их суперпозицию:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (\vec{x}_0 A_m + \vec{y}_0 B_m) e^{-ik_k z}. \quad (2.7.6)$$

Мгновенные значения напряжённости электрического поля определяются следующим образом:

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = A e^{-k'' z} \{ \vec{x}_0 \cos(\omega t - k' z + \varphi) + \vec{y}_0 \sin(\omega t - k' z + \varphi) \}. \quad (2.7.7)$$

Компоненты \mathcal{E}_x и \mathcal{E}_y не остаются постоянными в пространстве и во времени. Угол $\theta = \omega t - k' z + \varphi$ определяет ориентацию вектора $\vec{\mathcal{E}}$ по отношению к оси OX. Наличие в выражении для θ слагаемого ωt говорит о том, что вектор $\vec{\mathcal{E}}$ вращается с частотой ω вокруг направления распространения волны, а его конец движется по поверхности кругового цилиндра, ось которого совпадает с осью OZ. Вращение вектора $\vec{\mathcal{E}}$ осуществляется по часовой стрелке относительно наблюдателя, смотрящего в направлении распространения волны (против часовой стрелки, если смотреть навстречу волне). В момент времени $t = \text{const}$ конец вектора $\vec{\mathcal{E}}$ движется по левовинтовой круговой спирали. На рис. 2.8a показана траектория движения вектора $\vec{\mathcal{E}}$ в плоскости $z = \text{const}$; на рис. 2.8б представлено пространственное распределение вектора напряжённости электрического поля при $t = \text{const}$. Волна, у которой вектор $\vec{\mathcal{E}}$ вращается по окружности по часовой стрелке относительно наблюдателя, смотрящего в направлении распространения волны, называется *волной круговой поляризации с левым направлением вращения*.

Если вектор \vec{E} второй линейно-поляризованной волны опережает по начальной фазе вектор \vec{E} первой волны на $\pi/2$:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{x}_0 A_m e^{-ik_k z}, & A_m &= A e^{i\varphi}, \\ \vec{E}_2 &= \vec{y}_0 B_m e^{-ik_k z}, & B_m &= A e^{i(\varphi + \pi/2)},\end{aligned}\quad (2.7.8)$$

то мгновенные значения вектора $\vec{\mathcal{E}}$ суммарной волны будут определяться выраже-

нием:

$$\vec{\epsilon}(z, t) = A e^{-k'' z} \{ \vec{x}_0 \cos(\omega t - k' z + \varphi) - \vec{y}_0 \sin(\omega t - k' z + \varphi) \}. \quad (2.7.9)$$

У такой волны конец вектора $\vec{\epsilon}$ вращается по поверхности кругового цилиндра против часовой стрелки относительно наблюдателя, смотрящего в направлении распространения волны. Такая волна называется *волной круговой поляризации с правым направлением вращения*.

В электродинамике существует теорема, согласно которой любая линейно-поляризованная волна может быть разложена на сумму двух волн круговых поляризаций с противоположными направлениями вращения. Данное утверждение может быть легко доказано:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{x}_0 A_m e^{-ik_{\kappa} z} = \frac{A_m}{2} (\vec{x}_0 + i \vec{y}_0) e^{-ik_{\kappa} z} + \frac{A_m}{2} (\vec{x}_0 - i \vec{y}_0) e^{-ik_{\kappa} z} = \\ &= \frac{A_m}{2} (\vec{x}_0 + e^{i\pi/2} \vec{y}_0) e^{-ik_{\kappa} z} + \frac{A_m}{2} (\vec{x}_0 + e^{-i\pi/2} \vec{y}_0) e^{-ik_{\kappa} z}. \end{aligned}$$

При сложении двух линейно-поляризованных в перпендикулярных плоскостях плоских волн с различными амплитудами и начальными фазами:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{x}_0 A_m e^{-ik_{\kappa} z}, & A_m &= A e^{i\varphi}, \\ \vec{E}_2 &= \vec{y}_0 B_m e^{-ik_{\kappa} z}, & B_m &= B e^{i\psi}, \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

получается волна *эллиптической поляризации*, конец вектора напряженности электрического поля которой движется по эллипсу. При этом изменяется не только направление вектора $\vec{\epsilon}$ в пространстве, но и его величина (рис. 2.9). Направление вращения вектора $\vec{\epsilon}$ может быть как по часовой стрелке (левое направление вращения), так и против часовой стрелки (правое направление вращения) относительно наблюдателя, смотрящего в направлении распространения волны. Волну эллиптической поляризации можно получить при помощи двух элементарных излучателей, которые расположены перпендикулярно друг к другу и запитаны синфазно.

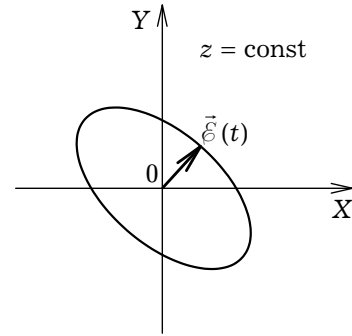


Рис. 2.9

2.7.3. Вертикальная и горизонтальная поляризация. В заключение раздела приведём ещё два общепринятых определения типа линейной поляризации электромагнитных волн. Если вектор $\vec{\epsilon}$ изменяется в плоскости, параллельной земной поверхности, такая поляризация носит название *горизонтальной*. Если же вектор напряженности электрического поля изменяется в плоскости, перпендикулярной земной поверхности, то считается, что волна обладает *вертикальной поляризацией*.

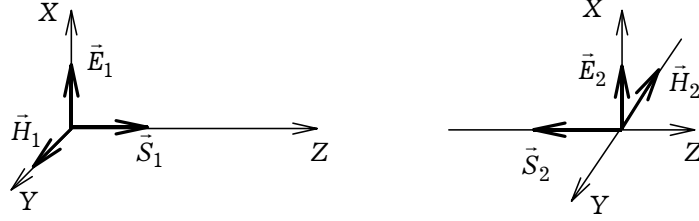


Рис. 2.10

2.8. Стоячая электромагнитная волна

Рассмотрим две плоские электромагнитные волны одной и той же линейной поляризации, распространяющиеся в противоположных направлениях (рис. 2.10). Комплексные амплитуды \vec{E}_i, \vec{H}_i ($i = 1, 2$) этих волн с учётом (2.6.13) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{x}_0 A_m e^{-ik_\kappa z}, \quad \vec{H}_1 = \vec{y}_0 \frac{A_m}{Z_\kappa} e^{-ik_\kappa z}, \\ \vec{E}_2 &= \vec{x}_0 B_m e^{ik_\kappa z}, \quad \vec{H}_2 = -\vec{y}_0 \frac{B_m}{Z_\kappa} e^{ik_\kappa z}.\end{aligned}\tag{2.8.1}$$

где A_m, B_m — амплитуды первой и второй волн соответственно.

Полагаем, что плоские волны обладают одинаковыми амплитудами ($A = B$) и различными начальными фазами ($\varphi \neq \psi$):

$$A_m = A e^{i\varphi}, \quad B_m = A e^{i\psi}.\tag{2.8.2}$$

Найдем суперпозицию этих волн:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{x}_0 (A_m e^{-ik_\kappa z} + B_m e^{ik_\kappa z}) = \\ &= \vec{x}_0 A (e^{i\varphi} e^{-ik_\kappa z} + e^{i\psi} e^{ik_\kappa z}) = \\ &= \vec{x}_0 2A e^{i(\varphi+\psi)/2} \cos\left(k_\kappa z - \frac{\varphi - \psi}{2}\right),\end{aligned}\tag{2.8.3}$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \frac{\vec{y}_0}{Z_\kappa} (A_m e^{-ik_\kappa z} - B_m e^{ik_\kappa z}) = \\ &= \frac{\vec{y}_0}{Z_\kappa} A (e^{i\varphi} e^{-ik_\kappa z} - e^{i\psi} e^{ik_\kappa z}) = \\ &= -\frac{\vec{y}_0}{Z_\kappa} 2A e^{i(\varphi+\psi)/2} \sin\left(k_\kappa z - \frac{\varphi - \psi}{2}\right).\end{aligned}\tag{2.8.4}$$

Для упрощения выражений (2.8.3) и (2.8.4) сделаем некоторые допущения. Во-первых, предположим, что волны распространяются в среде без потерь ($k_\kappa = k$). Во-вторых, будем считать, что начальные фазы волн равны нулю ($\varphi = \psi = 0$). В

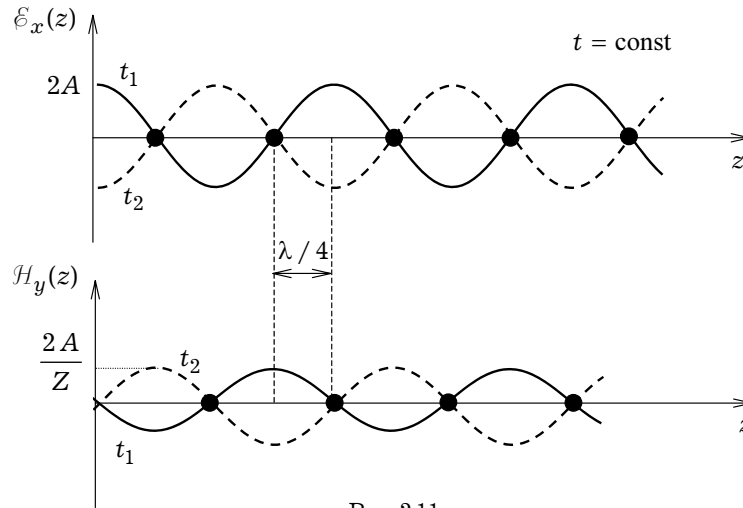


Рис. 2.11

этом случае выражения для мгновенных значений векторов \vec{E} и \vec{H} принимают вид:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \vec{x}_0 2A \cos(kz) \cos(\omega t), \\ \vec{H}(z, t) &= \vec{y}_0 \frac{2A}{Z} \sin(kz) \sin(\omega t),\end{aligned}\quad (2.8.5)$$

где $Z = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$.

Заметим, что в выражениях (2.8.5) отсутствует фазовый множитель вида $\cos(\omega t \mp kz)$, отвечающий за процесс распространения плоских монохроматических волн вдоль (против) координаты z . Следовательно, волна, поле которой описывается выражениями (2.8.5), не является бегущей. Очевидно, что множитель $A \cos(kz)$ описывает распределение амплитуды поля \vec{E} волны вдоль координаты z . Из (2.8.5) также следует, что в любой момент времени распределение $\vec{E}(z)$ представляет собой гармоническую функцию, координаты нулей и максимумов которой с течением времени не изменяются (рис. 2.11).

Такой электромагнитный процесс в теории волновых процессов получил название *стоячей электромагнитной волны*. Нули в распределении поля называются *узлами стоячей волны*, а максимумы — *пучностями*. В каждой точке пространства, в которой существует стоячая волна, во времени происходит гармонический процесс.

Пространственные распределения электрических и магнитных полей стоячей волны сдвинуты друг относительно друга на $\lambda/4$, а разность фаз полей — $\pi/2$. Поэтому электромагнитное поле стоячей волны представляет собой чисто реактивный процесс без переноса в среднем за период колебаний энергии. На рис. 2.11 приведены пространственные распределения напряженностей электрического и магнитного полей стоячей волны в среде без потерь в различные моменты времени.

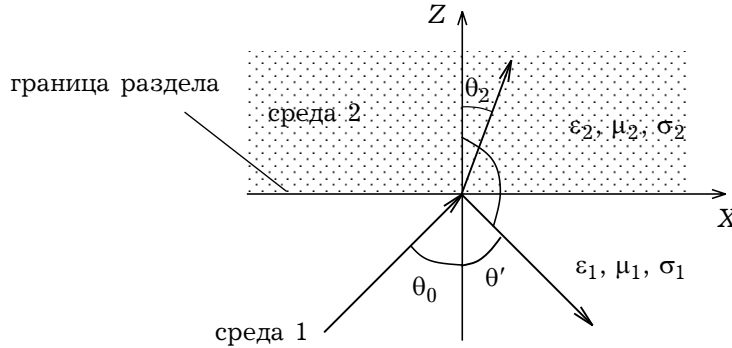


Рис. 2.12

2.9. Электромагнитные процессы на границе раздела сред

Рассмотрим задачу о падении плоской электромагнитной волны линейной поляризации на границу раздела двух однородных сред, обладающих различными материальными параметрами $\varepsilon_i, \mu_i, \sigma_i$ ($i = 1, 2$). Следует отметить, что электромагнитное поле в виде одной плоской однородной волны не будет представлять собой решение данной задачи, так как напряженности электрического и магнитного полей, удовлетворяющие уравнениям Максвелла в каждом из двух полупространств, должны также удовлетворять граничным условиям на границе раздела сред.

2.9.1. Законы отражения и преломления. Если на границу двух однородных сред с разными физическими свойствами падает плоская гармоническая волна, она разделяется на две волны: проходящую во вторую среду (преломленную) и отраженную. Существование двух волн вытекает из граничных условий, так как легко видеть, что их невозможно удовлетворить, если не постулировать наличия как проходящей, так и отраженной волн.

Пусть граница раздела между двумя полубесконечными однородными средами совпадает с плоскостью $z = 0$ декартовой системы координат. Среда, расположенная снизу ($z < 0$) и сверху ($z > 0$) от границы $z = 0$, характеризуются соответственно материальными параметрами $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ и $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. Пусть на эту границу из первой среды падает под углом θ_0 к оси OZ плоская монохроматическая волна (рис. 2.12) с круговой частотой ω и волновым вектором $\vec{k}_{\text{пад}} = k_1 \vec{m}_0$ ($k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}}$, \vec{m}_0 — единичный вектор нормали к фронту падающей волны). Плоскость падения, содержащую вектор $\vec{k}_{\text{пад}}$ и ось OZ , совместим с плоскостью XOZ .

Обозначим волновой вектор отраженной волны через $\vec{k}_{\text{отр}} = k_1 \vec{m}_1$, преломленной через $\vec{k}_{\text{пр}} = k_2 \vec{m}_2$, где \vec{m}_1, \vec{m}_2 — единичные векторы, определяющие направления распространения отраженной и преломленной волн; $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_{a2}\mu_{a2}}$. Через $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ обозначим углы, которые векторы $\vec{m}_0, \vec{m}_1, \vec{m}_2$ образуют с осью OZ (рис. 2.12).

Запишем выражения для комплексных амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей падающей, отражённой и прошедшей волн.

Для падающей волны:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{\text{пад}} &= \vec{E}_0 \exp[-ik_1(\vec{m}_0, \vec{r})], \\ \vec{H}^{\text{пад}} &= \frac{[\vec{m}_0 \times \vec{E}_0]}{Z_1} \exp[-ik_1(\vec{m}_0, \vec{r})];\end{aligned}\quad (2.9.1)$$

для отраженной волны:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{\text{отр}} &= \vec{E}_1 \exp[-ik_1(\vec{m}_1, \vec{r})], \\ \vec{H}^{\text{отр}} &= \frac{[\vec{m}_1 \times \vec{E}_1]}{Z_1} \exp[-ik_1(\vec{m}_1, \vec{r})];\end{aligned}\quad (2.9.2)$$

для преломленной волны:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{\text{пр}} &= \vec{E}_2 \exp[-ik_2(\vec{m}_2, \vec{r})], \\ \vec{H}^{\text{пр}} &= \frac{[\vec{m}_2 \times \vec{E}_2]}{Z_2} \exp[-ik_2(\vec{m}_2, \vec{r})].\end{aligned}\quad (2.9.3)$$

Здесь $\vec{r} = \{x, 0, z\}$ — радиус-вектор, описывающий пространственные координаты волн в плоскости XOZ ; $Z_i = Z_0 \sqrt{\mu_i / \epsilon_i}$ — характеристическое сопротивление i -среды ($i = 1, 2$); \vec{E}_0 — амплитуда падающей волны; \vec{E}_1 и \vec{E}_2 — неизвестные амплитуды отражённой и преломленной волн соответственно.

При $z = 0$ должны выполняться граничные условия, сводящиеся к требованию непрерывности тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} суммарного поля:

$$(\vec{E}^{\text{пад}})_\tau + (\vec{E}^{\text{отр}})_\tau = (\vec{E}^{\text{пр}})_\tau, \quad (\vec{H}^{\text{пад}})_\tau + (\vec{H}^{\text{отр}})_\tau = (\vec{H}^{\text{пр}})_\tau.$$

Следовательно, при $z = 0$ неизвестные амплитуды \vec{E}_1 и \vec{E}_2 должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}[\vec{z}_0, \vec{E}_0] e^{-ik_1(\vec{m}_0, \vec{r})} + [\vec{z}_0, \vec{E}_1] e^{-ik_1(\vec{m}_1, \vec{r})} &= [\vec{z}_0, \vec{E}_2] e^{-ik_2(\vec{m}_2, \vec{r})}, \\ [\vec{z}_0, [\vec{m}_0, \vec{E}_0]] e^{-ik_1(\vec{m}_0, \vec{r})} + [\vec{z}_0, [\vec{m}_1, \vec{E}_1]] e^{-ik_1(\vec{m}_1, \vec{r})} &= \frac{Z_1}{Z_2} [\vec{z}_0, [\vec{m}_2, \vec{E}_2]] e^{-ik_2(\vec{m}_2, \vec{r})}.\end{aligned}\quad (2.9.4)$$

Поскольку равенства (2.9.4) должны выполняться для любых значений x и y на границе $z = 0$, то можно приравнять фазовые множители:

$$k_1(\vec{m}_0, \vec{r}) = k_1(\vec{m}_1, \vec{r}) = k_2(\vec{m}_2, \vec{r}).$$

С учетом того, что (см. рис. 2.12)

$$\vec{m}_0 = \{\sin\theta_0, 0, \cos\theta_0\}, \quad \vec{m}_1 = \{\sin\theta_1, 0, -\cos\theta_1\}, \quad \vec{m}_2 = \{\sin\theta_2, 0, \cos\theta_2\},$$

имеем

$$k_1 \sin\theta_0 = k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2. \quad (2.9.5)$$

Если волна распространяется из первой среды во вторую:

$$m_{0z} = \cos\theta_0 \geq 0, \quad m_{1z} = -\cos\theta_1 \leq 0, \quad m_{2z} = \cos\theta_2 \geq 0.$$

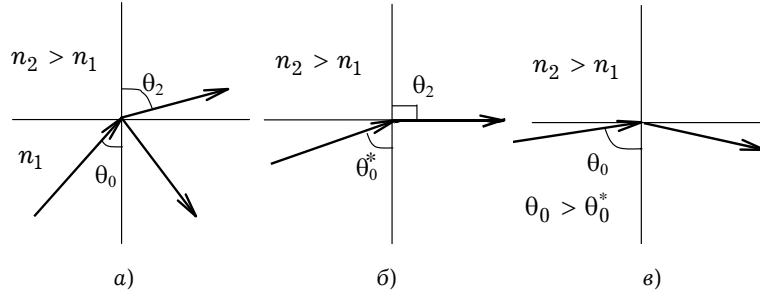


Рис. 2.13

Из соотношений (2.9.5) следуют закон отражения для электромагнитной волны от границы раздела сред

$$\theta' = \pi - \theta_1 = \theta_0 \quad (2.9.6)$$

и закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{v_2}{v_1}, \quad (2.9.7)$$

где $v_{1,2}$ — фазовые скорости волн в первой и второй средах.

Формулировка закона Снеллиуса: при падении плоской электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух однородных изотропных сред синусы углов падения и преломления относятся как фазовые скорости плоских волн в соответствующих (непоглощающих) средах.

Рассмотрим выражение (2.9.7) подробнее. Так как $k_{1,2} = \omega \sqrt{\epsilon_{a1,2} \mu_{a1,2}}$, можно записать:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

где $n_{1,2} = \sqrt{\epsilon_{1,2} \mu_{1,2}}$ — относительные показатели преломления первой и второй сред соответственно.

Если $k_1 > k_2$ (то есть $n_1 > n_2$), считается, что первая среда является «оптически более плотной средой», чем вторая. Из соотношения (2.9.7) следует, что в этом случае угол преломления больше угла падения ($\theta_2 > \theta_0$) (рис. 2.13а). Поэтому при некотором остром угле $\theta_0 = \theta_0^*$ окажется, что угол преломления θ_2 — прямой и луч во второй среде направлен вдоль границы раздела (рис. 2.13б). Согласно (2.9.7), условием возникновения такой ситуации является равенство ($\theta_2 = \pi/2$):

$$\sin \theta_0^* = \frac{n_2}{n_1}.$$

Если теперь увеличить угол падения $\theta_0 > \theta_0^*$, то придём к неравенству $(n_1/n_2) \sin \theta_0 > 1$, при котором вещественные углы преломления θ_2 отсутствуют, в результате чего преломленной волны не будет. В этом случае падающая волна будет порождать только отражённую (рис. 2.13в) и поле, экспоненциально убывающее во второй среде в направлении OZ и распространяющееся в этой

среде вдоль границы раздела. Данное явление получило название *полного внутреннего отражения* от непоглощающей среды. При этом, например, компонента E_x прошедшего поля будет иметь координатную зависимость:

$$E_x^{\text{пр}} = E_2 \cos \theta_2 e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_0 x} e^{-\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta_0 - 1} z},$$

где $c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, $n_{12} = n_1 / n_2$, из которой видно, что коэффициент затухания поля во второй среде в направлении оси OZ вычисляется как

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta_0 - 1},$$

а постоянная распространения поля во второй среде вдоль границы раздела:

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_0.$$

Соответственно, скорость распространения поля во второй среде вдоль оси OX будет:

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_0}.$$

При условии $n_{12} \sin \theta_0 < 1$ волна во второй среде оказывается замедленной.

Рассмотрим теперь другой случай. Пусть вторая среда значительно оптически более плотная по сравнению с первой, то есть $n_2 \gg n_1$ (или $k_2 \gg k_1$). В этом случае из соотношения (2.9.7) следует, что независимо от величины угла падения θ_0 угол преломления $\theta_2 \rightarrow 0$, то есть при любом угле падения на среду с большим показателем преломления n , плоская электромагнитная волна входит в неё почти по нормали.

2.9.2. Преломление волн при наличии поглощения в среде. Рассмотрим случай, когда вторая среда является поглощающей ($k_2 = k_2' - ik_2''$). В этом случае закон Снеллиуса (2.9.7) необходимо переписать в комплексном виде:

$$\sin \theta_2 = \frac{k_1}{k_2' - ik_2''} \sin \theta_0.$$

Реально угол падения может быть только вещественным и принимать значения в пределах $0 \div \pi/2$ ($0 \leq \sin \theta_0 \leq 1$). Однако, так как правая часть выражения, интерпретирующего закон Снеллиуса является комплексной, то величина, обозначенная как $\sin \theta_2$ также будет комплексной.

Комплексная амплитуда поля \vec{E} преломленной волны, исходя из (2.9.3), описывается выражением:

$$\vec{E}^{\text{пр}} = \vec{E}_2 e^{-i k_2 (x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)}. \quad (2.9.8)$$

Так как величина $k_1 \sin \theta_0$ является всегда вещественной, то произведение $k_x = k_2 \sin \theta_2$ также должно быть вещественным. Это утверждение следует из закона Снеллиуса (2.9.7). Вместе с тем величина

$$k_2 \cos \theta_2 = k_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}$$

является комплексной и представима в виде $k_2 \cos \theta_2 = k_z - i \alpha$, где k_z , α — веще-

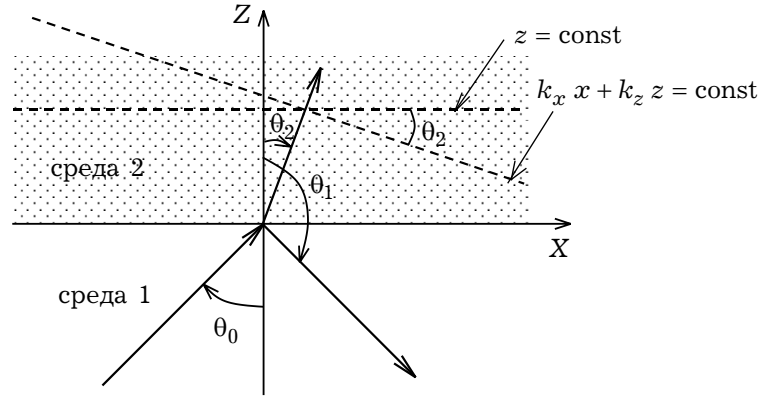


Рис. 2.14

ственные функции. Поэтому выражение (2.9.8) можно переписать в следующем виде:

$$\vec{E}^{\text{пр}} = E_2 e^{-\alpha z} e^{-i(k_x x + k_z z)}. \quad (2.9.9)$$

Так как параметр $\alpha > 0$, выражение (2.9.9) описывает поле, затухающее вдоль координаты z . Поэтому поверхности равных амплитуд плоской электромагнитной волны во второй (поглощающей) среде будут описываться уравнением $z = \text{const}$.

Величина $k_x x + k_z z$ в фазовом множителе $\exp\{-i(k_x x + k_z z)\}$ выражения (2.9.9) представляет собой фазу прошедшей электромагнитной волны, поэтому равенство

$$k_x x + k_z z = \text{const}$$

представляет собой уравнение плоскостей равных фаз. Очевидно, что в данном случае плоскости равных амплитуд и фаз не совпадают между собой, а ориентированы друг относительно друга под углом θ_2 (рис. 2.14). Поверхность равных фаз представляет собой фронт волны. Следовательно, в различных точках волнового фронта волна будет иметь различные амплитуды. Плоские электромагнитные волны, для которых поверхности равных фаз и амплитуд не совпадают, называют *неоднородными*.

Угол θ_2 между плоскостями равных фаз и амплитуд в данном случае определяется равенством:

$$\text{tg } \theta_2 = \frac{k_x}{k_z} = \frac{k_1 \sin \theta_0}{\text{Re} \{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_0}\}}.$$

Очевидно, что θ_2 является также *истинным углом преломления*.

2.9.3. Формулы Френеля и структура электромагнитного поля. Для определения амплитуд отраженной и преломленной волн необходимо обратиться к системе уравнений (2.9.4), полученной из записи граничных условий. При этом необходимо рассмотреть два случая падения плоских линейно-поляризованных волн, поскольку на конечный результат большое влияние оказывает ориентация вектора \vec{E} падающей

волны — лежит ли он в плоскости падения волны или же перпендикулярен данной плоскости, то есть лежит в плоскости границы раздела двух сред. Поэтому при рассмотрении процессов на границе раздела двух сред выделяют два типа линейной поляризации волн:

1. *H-поляризация (перпендикулярная поляризация)*. Электрическое поле перпендикулярно плоскости падения и, соответственно, параллельно плоскости раздела сред, имеет только составляющую E_y (рис. 2.12). Магнитное поле параллельно плоскости падения и имеет составляющие H_x и H_z . В оптике такую поляризацию называют S-поляризацией.

2. *E-поляризация (параллельная поляризация)*. Магнитное поле падающей волны перпендикулярно плоскости падения и, следовательно, параллельно границе раздела сред, имеет только составляющую H_y (рис. 2.12). Электрическое поле лежит в плоскости падения и имеет составляющие E_x и E_z . В оптике такую поляризацию называют P-поляризацией.

Электромагнитные процессы на границе раздела двух сред для волны с произвольной эллиптической поляризацией можно рассмотреть как результат суперпозиции двух волн указанных поляризаций.

Падение волны H-поляризации.

Рассмотрим сначала падение плоской волны H-поляризации. В этом случае, как отмечено выше, электрическое поле имеет только составляющую E_y , а магнитное — H_x и H_z . Запишем выражения для полей всех волн.

Электромагнитное поле падающей волны:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{\text{пад}} &= \vec{y}_0 E_0 e^{-ik_1(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)}, \\ \vec{H}^{\text{пад}} &= \frac{E_0}{Z_1} (\vec{x}_0 \cos \theta_0 - \vec{z}_0 \sin \theta_0) e^{-ik_1(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)}.\end{aligned}$$

Электромагнитное поле преломленной волны:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{\text{пр}} &= \vec{y}_0 E_2 e^{-ik_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)}, \\ \vec{H}^{\text{пр}} &= \frac{E_2}{Z_2} (\vec{x}_0 \cos \theta_2 - \vec{z}_0 \sin \theta_2) e^{-ik_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)}.\end{aligned}$$

Электромагнитное поле отражённой волны:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{\text{от}} &= \vec{y}_0 E_1 e^{-ik_1(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)}, \\ \vec{H}^{\text{от}} &= -\frac{E_1}{Z_1} (\vec{x}_0 \cos \theta_0 + \vec{z}_0 \sin \theta_0) e^{-ik_1(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)}.\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы на границе раздела сред выполнялись условия непрерывности касательных к границе раздела сред (тангенциальных) компонент векторов \vec{E} и \vec{H} . В данном случае такими компонентами являются E_y и H_x . Граничные условия при $z = 0$ имеют вид:

$$E_y^{\text{пад}} + E_y^{\text{от}} = E_y^{\text{пр}},$$

$$H_x^{\text{пад}} + H_x^{\text{от}} = H_x^{\text{пр}}.$$

Подставляя в эти условия составляющие полей, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд E_1 и E_2 (амплитуда падающей волны E_0 считается заданной):

$$E_0 + E_1 = E_2,$$

$$\frac{1}{Z_1} (E_0 \cos \theta_0 - E_1 \cos \theta_0) = \frac{1}{Z_2} E_2 \cos \theta_2. \quad (2.9.10)$$

Решая систему (2.9.10), находим коэффициенты Френеля ρ_{\perp} и τ_{\perp} , связывающие амплитуды отраженной и прошедшей волн с амплитудой падающей волны:

$$\rho_{\perp} = \frac{E_1}{E_0} = \frac{Z_2 \cos \theta_0 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_0 + Z_1 \cos \theta_2} = |\rho_{\perp}| e^{i\varphi_{\perp}},$$

$$\tau_{\perp} = \frac{E_2}{E_0} = \frac{2Z_2 \cos \theta_0}{Z_2 \cos \theta_0 + Z_1 \cos \theta_2} = |\tau_{\perp}| e^{i\varphi_{\perp}}. \quad (2.9.11)$$

Нижний индекс « \perp » у коэффициентов отражения ρ_{\perp} и прохождения τ_{\perp} указывает на то, что падающее поле \vec{E} перпендикулярно плоскости падения (плоскости XOZ).

Падение волны E-поляризации.

В случае E-поляризации, как отмечено выше, поле имеет составляющие H_y , E_x и E_z . Запишем выражения для поля в данном случае.

Электромагнитное поле падающей волны:

$$\vec{E}^{\text{пад}} = E_0 (\vec{x}_0 \cos \theta_0 - \vec{z}_0 \sin \theta_0) e^{-ik_1(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)},$$

$$\vec{H}^{\text{пад}} = -\vec{y}_0 \frac{E_0}{Z_1} e^{-ik_1(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)}.$$

Электромагнитное поле преломленной волны:

$$\vec{E}^{\text{пр}} = E_2 (\vec{x}_0 \cos \theta_2 - \vec{z}_0 \sin \theta_2) e^{-ik_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)},$$

$$\vec{H}^{\text{пр}} = -\vec{y}_0 \frac{E_2}{Z_2} e^{-ik_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)}.$$

Электромагнитное поле отражённой волны:

$$\vec{E}^{\text{от}} = -E_1 (\vec{x}_0 \cos \theta_0 + \vec{z}_0 \sin \theta_0) e^{-ik_1(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)},$$

$$\vec{H}^{\text{от}} = -\vec{y}_0 \frac{E_1}{Z_1} e^{-ik_1(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)}.$$

Воспользовавшись граничными условиями при $z = 0$:

$$E_x^{\text{пад}} + E_x^{\text{от}} = E_x^{\text{пр}},$$

$$H_y^{\text{пад}} + H_y^{\text{от}} = H_y^{\text{пр}},$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд E_1 и E_2 :

$$\begin{aligned}(E_0 - E_1) \cos \theta_0 &= E_2 \cos \theta_2, \\ Z_2(E_0 - E_1) &= Z_1 E_2.\end{aligned}$$

В случае Е-поляризации расчёт коэффициентов отражения $\rho_{||}$ и прохождения $\tau_{||}$ целесообразно проводить через вектор \vec{H} , определяя их следующим образом:

$$\rho_{||} = \frac{H_y^{\text{от}}(z=0)}{H_y^{\text{пад}}(z=0)} = -\frac{E_1}{E_0}, \quad \tau_{||} = \frac{H_y^{\text{пр}}(z=0)}{H_y^{\text{пад}}(z=0)} = \frac{E_2 Z_1}{E_0 Z_2},$$

где нижний индекс «||» указывает на то, что поле \vec{E} падающей волны параллельно плоскости падения (плоскости XOZ).

Коэффициенты Френеля, связывающие амплитуды отраженной и прошедшей волн с амплитудой падающей волны, найденные из приведённой выше системы уравнений, записываются как:

$$\begin{aligned}\rho_{||} &= -\frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_0}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_0} = |\rho_{||}| e^{i\varphi_{||}}, \\ \tau_{||} &= \frac{2Z_2 \cos \theta_0}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_0} = |\tau_{||}| e^{i\varphi_{||}}.\end{aligned}\tag{2.9.12}$$

Соотношения (2.9.11) и (2.9.12) называются *формулами Френеля*. Запишем их для случая немагнитных сред ($\mu_1 = \mu_2 = 1$). Так как в этом случае

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{Z_2}{Z_1},$$

то

$$\rho_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)}, \quad \tau_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2)}, \tag{2.9.13}$$

$$\rho_{||} = \frac{\text{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\text{tg}(\theta_0 + \theta_2)}, \quad \tau_{||} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)}. \tag{2.9.14}$$

Будем считать, что в средах 1 и 2 (см. рис. 2.12) отсутствуют потери, то есть проницаемости сред ε_1 и ε_2 — чисто действительные величины. В этом случае углы θ_0 и θ_2 — вещественны (случай полного внутреннего отражения пока исключаем) и тригонометрические функции, стоящие в правых частях формул (2.9.13) и (2.9.14), также вещественны. Следовательно, фаза каждой из компонент поля отраженной и прошедшей волн либо равна фазе соответствующей компоненты падающей волны, либо отличается от неё на π . Так как знаки коэффициентов τ_{\perp} и $\tau_{||}$ соответственно совпадают со знаками E_0 и H_0 , то фазы преломленных волн равны фазам падающих волн. Для отраженной волны фаза будет зависеть от отношения θ_0 и θ_2 . Если оптическая плотность второй среды больше, чем первой ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), то $\theta_2 < \theta_0$. Поэтому, согласно формулам (2.9.13), $\rho_{\perp} < 0$ и фазы отраженной и прошедшей волн отличаются друг от друга на π . При тех же обстоятельствах значение $\text{tg}(\theta_0 - \theta_2)$ в $\rho_{||}$ положительно, но знаменатель $\text{tg}(\theta_0 + \theta_2)$ при $\theta_0 + \theta_2 > \pi/2$ становится отрицательным. В этом случае фазы H_1 и H_0 отличаются

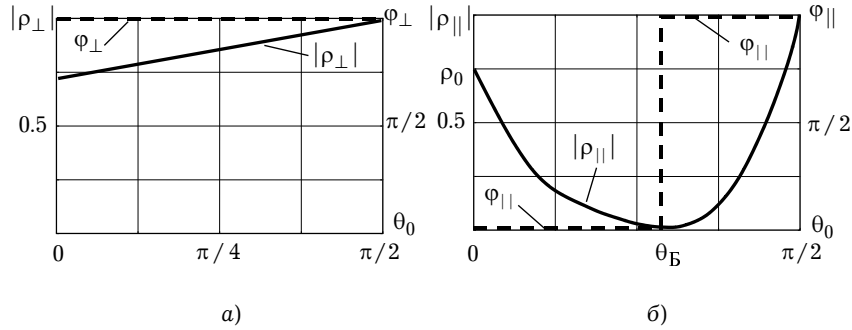


Рис. 2.15

ся друг от друга на π . Аналогичное рассуждение можно провести для случая, когда вторая среда оптически менее плотная по сравнению с первой.

Для нормального падения $\theta_0 = 0$ и из закона Снеллиуса следует, что $\theta_2 = 0$. Тогда соотношения (2.9.11) и (2.9.12) принимают более простой вид:

$$\rho_{\perp} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad \tau_{\perp} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}, \quad (2.9.15)$$

$$\rho_{||} = -\rho_{\perp}, \quad \tau_{||} = \tau_{\perp}. \quad (2.9.16)$$

2.9.4. Поляризация волн при отражении и преломлении. Угол Брюстера. Рассмотрим зависимости коэффициентов Френеля (2.9.13) и (2.9.14) от параметров сред. Поведение коэффициента ρ_{\perp} для волны H -поляризации не имеет каких-либо особенностей. В частности, обращение ρ_{\perp} в нуль возможно лишь при одинаковых ε_1 и ε_2 , когда отражение исчезает естественным образом вместе с исчезновением границы раздела. Коэффициент $\rho_{||}$ для E -поляризованной волны обращается в нуль при $\theta_0 + \theta_2 = \pi/2$. Угол θ_0 , как легко видеть, в этом случае ($\mu_1 = \mu_2$) определяется из равенства

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (2.9.17)$$

Угол $\theta_0 = \theta_B$, определяемый равенством (2.9.17), называется *углом Брюстера*, или *углом полной поляризации*. Второе название связано с тем, что при падении произвольно поляризованной волны на границу под углом θ_B отраженная волна оказывается H -поляризованной.

При изменении угла падения в интервале $0 \leq \theta_0 \leq \theta_B$ модуль $\rho_{||}$ убывает от величины

$$\rho_{||} = \rho_{\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} = \rho_0 \quad (2.9.18)$$

при $\theta_0 = 0$ до нуля при $\theta_0 = \theta_B$; при изменении θ_0 от θ_B до $\pi/2$ коэффициент $\rho_{||}$ вырастает от 0 до 1. Фаза коэффициента $\rho_{||}$ при $0 \leq \theta_0 \leq \theta_B$ равна нулю; при $\theta_B \leq \theta_0 \leq \pi/2$ она равна π , то есть изменяется скачком при переходе θ_0 через угол

θ_B . Сдвиг фазы коэффициента ρ_{\perp} для волны с перпендикулярной поляризацией равен π . На рис. 2.15 приведены графики зависимостей модулей и фаз коэффициентов Френеля от угла падения для двух поляризаций волны при изменении угла падения θ_0 от 0 до $\pi/2$.

2.10. Падение электромагнитной волны на плоскую проводящую среду

Рассмотрим отражение и преломление плоской электромагнитной волны на границе раздела «диэлектрик-проводник», изображенной на рис. 2.14. Пусть на границу раздела из первой среды падает плоская волна под углом θ_0 к оси OZ . Для определенности будем считать что первая среда — воздух, то есть $\mu_1 = \varepsilon_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$. Свойства второй среды (проводника) будем характеризовать некоторой диэлектрической проницаемостью ε_2 и удельной проводимостью σ_2 . Положим $\mu_2 = 1$, что справедливо для большинства металлов.

Как известно, для проводника вследствие потерь, вызываемых проводимостью σ , при рассмотрении гармонических процессов вводят относительную комплексную диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon'_2 - \frac{i\sigma_2}{\omega\varepsilon_0}. \quad (2.10.1)$$

В этом случае волновое число в проводнике будет комплексным:

$$k_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_2} = k_0 \sqrt{\varepsilon'_2 - \frac{i\sigma_2}{\omega\varepsilon_0}} = k'_2 - ik''_2. \quad (2.10.2)$$

С учётом п. 2.9.2, волна в проводнике (преломленная) является *плоской неоднородной волной*.

2.10.1. Приближенные граничные условия Щукина-Леонтовича. Как было отмечено выше для проводящей среды выполняется условие $|\sigma_2/(\omega\varepsilon_0)| \gg 1$. Поэтому при падении плоской гармонической волны из воздуха на проводник, оптическая плотность которого во много раз больше оптической плотности воздуха, вне зависимости от угла падения θ_0 волны преломленная волна будет распространяться фактически по нормали к поверхности проводника ($\theta_2 \rightarrow 0$). Поэтому в качестве поверхностей равных фаз в проводнике можно брать плоскости $z = \text{const}$, которые будут совпадать с поверхностями равных амплитуд. Это значит, что любые поля в первой среде (воздухе) создают во второй волну, близкую к плоской однородной волне, фронт которой параллелен границе. Когда вторая среда — проводник, волновой процесс относительно быстро затухает. Расстояние Δ^0 , на котором поле в проводнике уменьшается в e раз, определяется как

$$\Delta^0 = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_2}},$$

и называется *глубиной проникновения*. Из формулы (2.6.19) следует, что глубина проникновения $\Delta^0 = 1/k''_2$. Например, для меди на частоте $f = 100$ КГц глубина проникновения $\Delta^0 \sim 0.2$ мм, а на $f = 10^4$ МГц — уже порядка $6.6 \cdot 10^{-4}$ мм.

Если размеры проводящего тела значительно превосходят глубину проникновения Δ^0 , можно считать, что поле в нём сосредоточено вблизи поверхности. Это явление получило название *поверхностного эффекта*. В зарубежной литературе чаще упоминается другое название — *скин-эффект* (от англ. skin — «кожа»).

Наличие скин-эффекта приводит к тому, что глубокие слои проводника не оказывают никакого влияния на электромагнитные процессы у его границы. Векторы \vec{E} и \vec{H} внутри проводника всегда являются параллельными к границе раздела слоев, так как волна плоская и распространяется нормально к поверхности раздела. Поэтому, вообще говоря, у электромагнитного поля волны в проводнике вблизи границы раздела сред ($z = 0$) будут присутствовать только тангенциальные составляющие, то есть

$$\vec{E} = \vec{E}_\tau, \quad \vec{H} = \vec{H}_\tau. \quad (2.10.3)$$

Во второй (проводящей) среде векторы \vec{E} и \vec{H} связаны соотношением:

$$\vec{E}^{(2)} = -Z_2 [\vec{z}_0, \vec{H}^{(2)}]. \quad (2.10.4)$$

где \vec{z}_0 — единичный вектор, направленный вдоль оси OZ (внутрь проводящей среды);

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{k2}}}, \quad \varepsilon_{k2} = \varepsilon'_2 - \frac{i\sigma_2}{\omega \varepsilon_0}.$$

Точные граничные условия в плоскости $z = 0$ (граница «воздух-проводник») записываются как

$$\vec{E}_\tau^{(1)} = \vec{E}_\tau^{(2)}, \quad \vec{H}_\tau^{(1)} = \vec{H}_\tau^{(2)}, \quad (2.10.5)$$

где $\vec{E}^{(1)} = \vec{E}^{\text{пад}} + \vec{E}^{\text{отр}}$, $\vec{E}^{(2)} = \vec{E}^{\text{пр}}$, $\vec{H}^{(2)} = \vec{H}^{\text{пр}}$.

С учетом (2.10.3) и граничных условий (2.10.5) соотношением (2.10.4) можно связать поля в первой области:

$$\vec{E}^{(1)} = -Z_2 [\vec{z}_0, \vec{H}^{(1)}]. \quad (2.10.6)$$

Равенство (2.10.6) устанавливает связь между полями $\vec{E}^{(1)}$ и $\vec{H}^{(1)}$ в первой (непроводящей) среде на границе с проводником через волновое сопротивление второй среды. Оно (равенство) называется *приближенным граничным условием Щукина-Леонтовича*. Заметим, что соотношение (2.10.6) для случая нормального падения является точным.

В заключение запишем граничное условие Щукина-Леонтовича (2.10.6) в проекциях на оси декартовой системы координат для геометрии, показанной на рис. 2.12:

$$E_x^{(1)} = Z_2 H_y^{(1)}, \quad E_y^{(1)} = -Z_2 H_x^{(1)}. \quad (2.10.6)$$

2.11(*). Распространение сигналов (волновых пакетов) в диспергирующей среде

В предыдущих разделах рассматривалось распространение монохроматических волн. Однако строго монохроматических волн в природе не существует. Более того, чтобы передать посредством волны какую-либо информацию, необходимо её промодулиро-

вать. В линейном приближении модулированную волну можно представить в виде суперпозиции гармонических плоских волн.

Математически проблема распространения сигнала вдоль оси OZ в диспергирующей изотропной среде сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - L(\psi) = 0, \quad (2.11.1)$$

где L — действующий на ψ линейный оператор, описывающий дисперсию среды; ψ — какая-либо составляющая векторов \vec{E} или \vec{H} .

Для изотропной однородной среды [Л.8]

$$L(\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty \chi(\tau) \psi(t - \tau) d\tau,$$

где χ — электрическая восприимчивость среды.

Перейдем к изучению закономерностей распространения в диспергирующей среде плоских немонахроматических волн, бегущих в направлении оси OZ . Такие волны могут возбуждаться либо на границе среды (например, источником, расположенным при $z = 0$), либо путём создания в начальный момент времени, скажем при $t = 0$, некоторого пространственно-распределенного возмущения. Ниже рассмотрим только первый случай.

2.11.1. Краевая задача для распространения волнового пакета. Пусть диспергирующая среда занимает полупространство $z \geq 0$ и на ее границе задан входной сигнал

$$\psi(t, z = 0) = \psi_0(t), \quad (2.11.2)$$

где под ψ понимается какая-либо составляющая векторов \vec{E} и \vec{H} . Представим $\psi_0(t)$ в виде интеграла Фурье:

$$\psi_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.11.3)$$

где её частотный спектр определяется функцией

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.11.4)$$

Для линейной среды спектральные составляющие $F(\omega)$ распространяются независимо друг от друга, поэтому решение уравнения (2.11.1) можно представить в виде набора гармонических волн⁹⁾

$$\psi(t, z) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp\{i[\omega t - k(\omega)z]\} d\omega \right\}. \quad (2.11.5)$$

Подставив выражение (2.11.5) в уравнение (2.11.1), можно установить закон дис-

⁹⁾ В дальнейшем символ реальной части от комплексной функции при записи мгновенных значений полей в этом разделе будем опускать

персии, определяемый видом оператора $L(\psi)$. Искомое решение можно представить через падающую на границу волну. Подставляя в решение (2.11.5) выражение (2.11.4), получаем

$$\psi(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(t') \exp\{i[\omega(t - t') - k(\omega)z]\} d\omega dt'. \quad (2.11.6)$$

Наибольший практический интерес представляют сигналы с узким спектром частот, называемые *квазимонохроматическими сигналами* или *волновыми пакетами*. Для такого пакета высокочастотный импульс можно описать функцией

$$\psi_0(t) = A_0(t) e^{i\omega_0 t}, \quad (2.11.7)$$

где $A_0(t)$ — комплексная, медленно изменяющаяся во времени амплитуда, ω_0 — некоторая средняя частота.

Выражение (2.11.6) с учетом (2.11.7) принимает вид

$$\psi(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') \exp\{i[(\omega - \omega_0)(t - t') - k(\omega)z + \omega_0 t]\} d\omega dt'. \quad (2.11.8)$$

Положив в выражении (2.11.8) $z = 0$ и сравнив его с соотношением (2.11.7), получим

$$A_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') \exp\{i[(\omega - \omega_0)(t - t')]\} d\omega dt'. \quad (2.11.9)$$

Пользуясь тем, что частотный спектр волнового пакета является узким ($\Delta\omega \ll \omega_0$), разложим функцию $k(\omega)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\omega = \omega_0$:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (2.11.10)$$

Выражение для поля волнового пакета получим, подставив разложение (2.11.10) в (2.11.8):

$$\psi(t, z) = A(t, z) \exp[i(\omega_0 t - k_0 z)], \quad (2.11.11)$$

где

$$A(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') \exp \left\{ i \left[(t - t') - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} z \right] (\omega - \omega_0) - \frac{1}{2} i \left(\frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} z (\omega - \omega_0)^2 + \dots \right\} d\omega dt', \quad k_0 = k(\omega_0). \quad (2.11.11a)$$

При решении конкретных задач точность результата зависит от того, сколько учитывается членов в разложении (2.11.10). Число учтенных членов в (2.11.10) определяет номер приближения теории дисперсии. Так, в первом приближении, когда

$$k(\omega) = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0), \quad (2.11.12)$$

получаем выражение

$$\begin{aligned} \psi(t, z) &= e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') \exp \left\{ i \left[t - t' - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} z \right] (\omega - \omega_0) \right\} d\omega dt', \end{aligned}$$

которое, с использованием соотношения (2.11.9), можно записать в виде

$$\psi(t, z) = A_0 \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} z \right] e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}. \quad (2.11.13)$$

Таким образом, в первом дисперсионном приближении волновой пакет (2.11.7) распространяется без изменений формы с групповой скоростью $u = (d\omega/dk)_{\omega_0}$. Волновой пакет только в первом приближении распространяется без изменения формы.

Для определения изменения его формы достаточно учесть в разложении (2.11.10) квадратичный член. Поскольку плоские волны зависят от t и z и в каждой точке z в принципе своя временная форма импульса, рассмотрим зависимость поля только от времени. В выражении для поля $\psi(t, z)$ заменим величины $k_0 z$, $(dk/d\omega)_{\omega_0} z$ и $(d^2k/d\omega^2)_{\omega_0} z$ соответственно на $\varphi(\omega_0)$, $\varphi'(\omega_0)$, $\varphi''(\omega_0)$, где $\varphi(\omega_0)$ — набег фазы для монохроматической волны с частотой ω_0 . Тогда с учетом квадратичного члена в разложении (2.11.10) имеем

$$\psi(t) = e^{i[\omega_0 t - \varphi(\omega_0)]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') e^{i\Omega[t - t' - \varphi'(\omega_0)] - i\Omega^2 \varphi''(\omega_0)/2} dt' d\Omega,$$

где $\Omega = \omega - \omega_0$. Делая замену переменных

$$\varphi'' \left(\Omega + \frac{t' - t + \varphi'}{\varphi''} \right)^2 = -\pi \alpha^2$$

и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\pi \alpha^2 / 2) d\alpha = 1 + i,$$

получаем

$$\psi(t) = \frac{1+i}{2\pi} e^{i[\omega_0 t - \varphi(\omega_0)]} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') \sqrt{\frac{\pi}{\varphi''}} \exp \left[-i \frac{(t' - t + \varphi')^2}{2\varphi''} \right] dt'.$$

Вводя обозначение

$$\frac{(t' - t + \varphi')^2}{2\varphi''} = \frac{\pi \xi^2}{2}, \quad (2.11.14)$$

окончательно имеем

$$\psi(t) = \frac{1+i}{2} e^{i[\omega_0 t - \varphi(\omega_0)]} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t - \varphi' + \xi \sqrt{\pi \varphi''(\omega_0)}) e^{-i \frac{\pi \xi^2}{2}} d\xi. \quad (2.11.15)$$

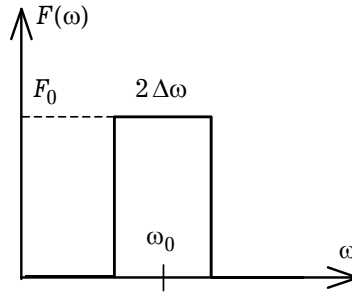


Рис. 2.16

Если величина $\varphi''(\omega_0)$ мала, то выражение (2.11.15) переходит в (2.11.13), поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\pi\xi^2/2) d\xi = 1 - i.$$

Таким образом, искажение сигнала определяется выражением (2.11.15), которое может быть конкретизировано при задании формы начального сигнала, то есть функции $A_0(t)$.

2.11.2. Распространение волнового пакета. В представлении (2.11.5) дисперсионные свойства среды определяются зависимостью $k = k(\omega)$. На практике спектр электромагнитного сигнала (волнового пакета) является ограниченным в некоторых пределах частот $[\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$, где ω_0 — центральная частота спектра; $\Delta\omega$ — полоса частот, в которой лежат значения всех спектральных составляющих сигнала. Обычно спектр электромагнитного сигнала является узким $\Delta\omega \ll \omega_0$. Обозначим $k_0 = k(\omega_0)$ и в выражении (2.11.5) перейдем от интегрирования по частоте к интегрированию по волновому числу:

$$\psi(t, z) = \text{Re} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} F_k e^{i[\omega(k)t - kz]} dk, \quad (2.11.16)$$

где через F_k обозначено значение амплитуды поля спектральной составляющей $F(\omega(k))$.

В случае узкой полосы частот ($\Delta\omega \ll \omega_0$, $\Delta k \ll k_0$) функцию $\omega = \omega(k)$ можно разложить в ряд Тейлора по степеням $(k - k_0)$ в окрестности точки k_0 :

$$\omega = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)^2 + \dots \quad (2.11.17)$$

Подставляя (2.11.17) в выражение (2.11.16) и удерживая только два первых члена разложения, получаем:

$$\psi(t, z) \approx \text{Re} \left\{ e^{i[\omega_0 t - k_0 z]} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} F_k e^{i \left[\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} t - z \right] (k - k_0)} dk \right\}. \quad (2.11.18)$$

В качестве примера рассмотрим электромагнитный сигнал с прямоугольной спектральной функцией (рис. 2.16). В данном случае амплитуда $F_k = F_0$ при $k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k$ является постоянной в выражении (2.11.18) и её можно вынести за знак интеграла. Кроме того, в этом выражении перейдём от интегрирования по переменной k к новой переменной $k - k_0$. Тогда получим:

$$\psi(t, z) \approx \operatorname{Re} \left\{ F_0 e^{i[\omega_0 t - k_0 z]} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i \left[\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} t - z \right] (k - k_0)} d(k - k_0) \right\}. \quad (2.11.19)$$

После интегрирования можно записать выражение для эволюции импульса:

$$\psi(t, z) \approx 2 F_0 \frac{\sin \left[\left(\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} t - z \right) \Delta k \right]}{\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} t - z} \cos(\omega_0 t - k_0 z + \varphi). \quad (2.11.20)$$

Распределение поля сигнала, описываемого выражением (2.11.20), представлено на рис. 2.17. Заметим, что соотношение (2.11.20) описывает модулированную гармоническую волну. Сомножитель вида

$$\frac{\sin \left[\left(\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} t - z \right) \Delta k \right]}{\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} t - z}$$

описывает распространение *огibaющей волнового пакета*, а выражение $\cos(\omega_0 t - k_0 z + \varphi_0)$ соответствует гармонической волне частоты ω_0 и описывает распространение высокочастотной составляющей сигнала (заполнения). Величина $v = \omega_0 / k_0$ — скорость, с которой высокочастотная составляющая сигнала распространяется внутри огибающей. Эта скорость не является скоростью распространения электромагнитного сигнала, так как не описывает движение огибающей волнового пакета.

2.11.3. Групповая скорость. Скорость распространения сигнала — скорость движения огибающей, которая вычисляется как

$$u = \frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{dk}, \quad (2.11.21)$$

и называется *групповой скоростью*.

Таким образом, *групповая скорость* — это скорость распространения огибающей волнового пакета.

Определим связь между фазовой и групповой скоростями:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} [vk] = v + k \frac{dv}{dk}. \quad (2.11.22)$$

В зависимости от знака производной dv/dk групповая скорость может быть либо больше, либо меньше фазовой. Если $dv/dk < 0$, то $u < v$ и такая дисперсия называется *нормальной*, если $dv/dk > 0$, то $u > v$ и дисперсия называется *аномальной*. Условие $dv/dk = 0$ свидетельствует об отсутствии дисперсии ($u = v$).

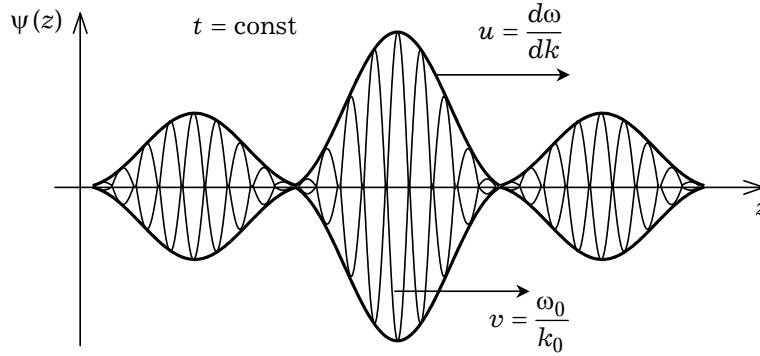


Рис. 2.17

2.12(*). Цилиндрические волны

2.12.1. Решение волнового уравнения в цилиндрических координатах. Большое практическое применение находит система цилиндрических координат. Она применима к случаю осевой симметрии поля или среды, в которой распространяются волны. При решении задач в цилиндрической системе координат обычно используют электрический и магнитный векторы Герца (см. п.2.3.2). Ниже рассмотрим простейшую цилиндрическую систему координат, в которой переменные разделяются, как систему, образованную семейством круговых цилиндров, т.е. систему координат с независимыми, непрерывными и однозначными координатами ρ, ϕ, z .

В электродинамике часто для удобства расчетов вводят магнитные заряды ρ^m и токи \vec{j}^m , через которые определяется магнитный вектор Герца. Запишем решения уравнений Максвелла с магнитными токами (7.2.1) через векторы $\vec{\mathcal{H}}$ и $\vec{\mathcal{H}}^m$ для комплексных амплитуд:

$$\vec{\mathcal{H}}^e(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\vec{\Pi}^e(\vec{r}) e^{i\omega t} \right], \quad \vec{\mathcal{H}}^m(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\vec{\Pi}^m(\vec{r}) e^{i\omega t} \right]. \quad (2.12.1)$$

Они имеют следующий вид ($\mu = \text{const}, \varepsilon = \text{const}$):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{grad div } \vec{\Pi}^e + k_0^2 \varepsilon \mu \vec{\Pi}^e - i\omega \mu \text{rot } \vec{\Pi}^m, \\ \vec{H} &= \text{grad div } \vec{\Pi}^m + k_0^2 \varepsilon \mu \vec{\Pi}^m - i\omega \mu \text{rot } \vec{\Pi}^e, \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

С учетом того, что для комплексных амплитуд электродинамических потенциалов \vec{A}^e и \vec{A}^m справедливы соотношения

$$\vec{A}^e = \frac{i\omega \varepsilon \mu}{c^2} \vec{\Pi}^e, \quad \vec{A}^m = \frac{i\omega \varepsilon \mu}{c^2} \vec{\Pi}^m, \quad (2.12.3)$$

нетрудно, исходя из (7.2.23), получить для векторов $\vec{\Pi}^e, \vec{\Pi}^m$ неоднородные уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2 \vec{\Pi}^e + k_0^2 \varepsilon \mu \vec{\Pi}^e = \frac{i}{\omega \varepsilon \mu} \vec{j}, \quad \nabla^2 \vec{\Pi}^m + k_0^2 \varepsilon \mu \vec{\Pi}^m = \frac{i}{\omega \varepsilon \mu} \vec{j}^m. \quad (2.12.4)$$

Выбор уравнений (7.2.23) или (2.12.4) (выбор тех или иных потенциалов) для решения конкретных задач электродинамики является делом привычки.

Для выяснения физического смысла электрического вектора Герца \vec{H}^e , описывающего волны в диэлектрической среде, рассмотрим его связь с вектором поляризации \vec{P} . Так как $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, то

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = (R + R'), \quad (2.12.5)$$

где $R' = -\operatorname{div} \vec{P}$ — объёмная плотность связанных зарядов, R — объёмная плотность зарядов проводимости. Рассмотрим чисто поляризационные явления, то есть положим $R = 0$.

Для скалярного электрического потенциала в случае статического поля имеем (см. соотношения (2.3.14)):

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{R'}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (2.12.6)$$

Так как $\Phi = -\operatorname{div} \vec{H}^e$, то из (2.12.6) следует, что

$$\operatorname{div} \left(\nabla^2 \vec{H}^e + \frac{\vec{P}}{\epsilon \epsilon_0} \right) = 0. \quad (2.12.7)$$

Решение этого уравнения в виде интеграла (запаздывающее решение) записывается как

$$\vec{H}^e = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{P} \left(t - \frac{|\Delta r|}{v}, \vec{r}' \right)}{\Delta r} dV', \quad (2.12.8)$$

где $\Delta r = |\vec{r} - \vec{r}'|$.

Выражение (2.12.8) определяет физический смысл вектора Герца и объясняет, почему его иногда называют «поляризационным потенциалом»: он непосредственно связан с вектором электрической поляризации. Аналогичные рассуждения приводят к интегральному соотношению для магнитного вектора Герца:

$$\vec{H}^m = \frac{1}{4\pi\mu\mu_0} \int_V \frac{\vec{M} \left(t - \frac{|\Delta r|}{v}, \vec{r}' \right)}{\Delta r} dV', \quad (2.12.9)$$

где \vec{M} — вектор намагниченности.

Волновым уравнениям могут удовлетворять поля различных типов волн. Одна из основных задач электродинамики состоит в решении волнового уравнения при заданных граничных условиях. Однако далеко не для любых граничных условий можно подобрать систему координат, в которой уравнение разрешимо. В этой связи большое практическое значение имеет система цилиндрических координат. Наиболее типичным случаем, охватывающим большое число электродинамических задач, является случай, когда поле, описывается одной составляющей вектора Герца, например, $\vec{H}^e = \vec{H}_z^e \vec{z}_0$. Как следует из соотношений (2.12.4) и (2.12.8), эта

ситуация соответствует случаю линейных электрических (магнитных) токов или постоянного в пространстве направления векторов электрической поляризации и намагничивания.

Запишем первое уравнение из (2.12.4) для случая, когда линейный ток проводимости \vec{j}^e ориентирован вдоль оси z (рассматриваем гармонические процессы):

$$\Delta \vec{P}_z^e + k_0^2 \epsilon \mu \vec{P}_z^e = \frac{i}{\omega \epsilon \epsilon_0} \vec{j}_z^e. \quad (2.12.10)$$

С учетом выражения для оператора Лапласа в цилиндрической системе координат последнее уравнение переписываем как (с $j_z^e = 0$):

$$\frac{\partial^2 P_z^e}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_z^e}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 P_z^e}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 P_z^e}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon \mu P_z^e = 0. \quad (2.12.11)$$

Подставим в (2.12.11) функцию

$$P_z^e = f(\rho, \phi) \psi(z), \quad (2.12.12)$$

тем самым будем использовать метод разделения переменных в цилиндрической системе координат.

В результате получаем

$$\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right\} + k_0^2 \epsilon \mu = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \gamma^2,$$

где γ — некоторая постоянная.

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right\} + (k_0^2 \epsilon \mu - \gamma^2) f &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \gamma^2 \psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.12.13)$$

Так как решение второго уравнения из (2.12.13) есть функция:

$$\psi = A_1 e^{i\gamma z} + A_2 e^{-i\gamma z}, \quad (2.12.14)$$

где A_1, A_2 — постоянные, то с учётом принятой в книге гармонической зависимости от времени $(\exp\{i\omega t\})$ составляющую P_z^e можно представить в виде:

$$P_z^e = f(\rho, \phi) (A_1 e^{ihz} + A_2 e^{-ihz}) e^{i\omega t}. \quad (2.12.15)$$

Первое слагаемое в (2.12.15) определяет собственную волну, распространяющуюся против оси z , второе слагаемое — волну по оси z .

Знание вида z -ой составляющей комплексной амплитуды вектора Герца в цилиндрической системе координат позволяет определить взаимную ориентацию векторов \vec{E} и \vec{B} в плоскости $z = \text{const}$. Нетрудно доказать с помощью соотношений (2.3.33), что для изотропной среды (ϵ, μ — скаляры):

$$E_\rho H_\rho + E_\phi H_\phi = 0. \quad (2.12.16)$$

Следовательно, векторы \vec{E} и \vec{B} в плоскости $z = \text{const}$ перпендикулярны друг другу. Аналогично, доказывается соотношение (2.12.16) для случая линейных магнитных токов, когда $\vec{J}^m = \vec{J}_z^m \vec{z}_0$.

Поля, найденные для случаев $\vec{J}^e = \vec{J}_z^e \vec{z}_0$ и $\vec{J}^m = \vec{J}_z^m \vec{z}_0$ в цилиндрической системе координат, образуют совокупность волн типа E и типа H . Как уже было упомянуто, ими можно удовлетворить большое число граничных условий для различных цилиндрических поверхностей. Однако для этого необходимо, чтобы в первом из уравнений (2.12.13) переменные разделялись, т.е. чтобы можно было функцию $f(\rho, \varphi)$ представить в виде:

$$f(\rho, \varphi) = f_1(\rho)f_2(\varphi) \quad (2.12.12a)$$

и получить два уравнения (для f_1 и f_2).

Подставив (2.12.12a) в первое уравнение из (2.12.13) после разделения переменных получим два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_2}{d\varphi^2} + p^2 f_2 &= 0, \\ \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df_1}{d\rho} \right) + \left[(k^2 - \gamma^2) \rho^2 - p^2 \right] f_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.12.17)$$

где p — постоянная разделения.

Решение для f_2 имеет вид

$$f_2 = e^{ip\varphi}. \quad (2.12.18)$$

Второе уравнение из (2.12.17) после замены $\sqrt{k^2 - \gamma^2} \rho = r$ дает

$$\frac{r}{\sqrt{k^2 - \gamma^2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\sqrt{k^2 - \gamma^2}} \frac{df_1}{dr} \sqrt{k^2 - \gamma^2} \right) \sqrt{k^2 - \gamma^2} + [r^2 - p^2] f_1 = 0,$$

или

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df_1}{dr} \right) + [r^2 - p^2] f_1 = 0, \quad (2.12.19)$$

Отсюда

$$r^2 \frac{d^2 f_1}{dr^2} + r \frac{df_1}{dr} + [r^2 - p^2] f_1 = 0,$$

или

$$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} + \left[1 - \frac{p^2}{r^2} \right] f_1 = 0, \quad (2.12.20)$$

Это уравнение Бесселя, решениями которого являются цилиндрические функции. Частный вид цилиндрических функций представляют функции Бесселя $J_p(r)$ и $Y_p(r)$, где $J_p(r)$ — функция Бесселя 1-го рода, порядка p , конечная при $r = 0$, тогда как $Y_p(r)$ — функция Бесселя 2-го рода, порядка p , которая при $r = 0$

обращается в бесконечность, а поэтому поля, конечные на оси цилиндрической системы, она представлять не может. Между функциями $J_p(r)$ и $Y_p(r)$ существует связь

$$Y_p(r) = \frac{1}{\sin p\pi} [J_p(r) \cos p\pi - J_{-p}(r)].$$

При достаточно больших r таких, что $r \gg 1$ и $r \gg |p|$, функции $J_p(r)$ и $Y_p(r)$ конечны, а их асимптотическое представление имеет вид:

$$J_p(r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{2p+1}{4}\pi\right), \quad (2.12.21)$$

$$Y_p(r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin\left(r - \frac{2p+1}{4}\pi\right). \quad (2.12.22)$$

При очень больших расстояниях от оси цилиндрической системы функции $J_p(r)$ и $Y_p(r)$ относятся друг к другу как \cos и \sin и затухают пропорционально $\sqrt{1/r}$. Такие функции удобны для представления стоячих цилиндрических волн.

Построим бегущие цилиндрические волны.

В случае плоских волн бегущую волну можно выразить так:

$$e^{\pm ikz + i\omega t} = (\cos kz \pm i \sin kz) e^{i\omega t}. \quad (2.12.23)$$

Выбор знака перед членом ikz в показателе экспоненты соответствует выбору направления распространения волны в положительном или отрицательном направлении оси OZ .

Аналогично (2.12.23) строятся и цилиндрические бегущие волны: $J_p(r)$ соответствует косинусу, а $Y_p(r)$ — синусу этого равенства, то очевидно, что координатные части бегущей волны будут иметь вид:

$$\begin{aligned} J_p(r) + iY_p(r) &= H_p^{(1)}(r), \\ J_p(r) - iY_p(r) &= H_p^{(2)}(r), \end{aligned} \quad (2.12.24)$$

где функции $H_p^{(1)}(r)$ и $H_p^{(2)}(r)$, называемые функциями Ханкеля первого и второго родов соответственно, описывают бегущие цилиндрические волны, причем $H_p^{(1)}(r)$ соответствует волне, бегущей в сторону убывающих r , а $H_p^{(2)}(r)$ описывает волну, распространяющуюся в обратном направлении (при временной зависимости $e^{i\omega t}$). Для выполнения физических условий задачи в области, лишенной источников поля, в качестве решений нужно брать различные цилиндрические функции. В области $r \rightarrow 0$, физический смысл для электромагнитных полей имеет $J_p(r)$, в области бегущих волн — $H_p^{(1)}(r)$.

Таким образом, цилиндрической волной будем называть электромагнитное поле, векторы которого в каждый момент времени на системе замкнутых цилиндрических поверхностях $\rho = \text{const}$, зависят только от азимутальной координаты φ . Для любого выбранного направления $\varphi = \text{const}$ (в цилиндрической системе координат) поле цилиндрической волны зависят только от координаты ρ . Для цилиндрической волны характерна зависимость от двух координат ρ и φ . Для сравнения, электромагнитное поле плоской волны зависит только от одной координаты, вдоль которой происходит ее распространение.

Теперь можно написать решение для Π_z в случае изотропной и однородной среды

$$\Pi_z^e = \psi_p = e^{ip\varphi} H_p^{(2)} \left(\sqrt{k^2 - \gamma^2} \rho \right) e^{\pm i\gamma z + i\omega t}. \quad (2.12.25)$$

Зная Π_z^e , можно найти поля:

$$E_\rho = \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial z \partial \rho} = \pm i\gamma \frac{\partial \psi_p}{\partial \rho}. \quad (2.12.26)$$

Для поперечно-электрического поля (то есть при введении вектора $\vec{H}^m = \vec{H}_z^m \vec{z}_0$) получаем другую формулу:

$$E_\rho = -\mu \frac{1}{rc} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \psi_p}{\partial \varphi} \right\} = -\frac{\mu}{rc} \{ i\rho \psi_p \} = \frac{i\mu p}{rc} \frac{\partial \psi_p}{\partial t} = \frac{\mu\omega}{rc} p \psi_p. \quad (2.12.27)$$

При заданных ω (или k) и γ общее решение для E_ρ можно получить как суперпозицию частных решений (2.12.27):

$$E_\rho = -i\gamma \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p \frac{\partial \psi_p}{\partial \rho} - \frac{\mu\omega}{rc} \sum_{p=-\infty}^{\infty} p b_p \psi_p, \quad (2.12.28)$$

где постоянные a_p и b_p определяются из граничных условий задачи. Аналогичные суммы можно составить и для других компонент поля.

2.12.2. Построение цилиндрических волн из плоских. Плоская волна, распространяющаяся в направлении $\vec{\xi}$ (рис. 2.18), фиксированном в пространстве, имеет вид

$$\psi = e^{-ik\xi + i\omega t}. \quad (2.12.29)$$

Здесь $\xi = |\vec{\xi}|$ есть расстояние в направлении $\vec{\xi}$ от начала отсчёта. Но (рис. 2.18)

$$\xi = n_x x + n_y y + n_z z,$$

где

$$n_x = \sin \alpha \cos \beta, \quad n_y = \sin \alpha \sin \beta, \quad n_z = \cos \alpha$$

представляют направляющие косинусы вектора $\vec{\xi}$, а x, y, z — проекции радиуса-вектора \vec{r} плоскости равных фаз на оси декартовой системы координат.

Поэтому

$$\psi = e^{-ik(x \sin \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \sin \beta + z \cos \alpha) + i\omega t}.$$

Соответствующим выбором α и β вектору нормали $\vec{\xi}$ к волновому фронту можно придать любую пространственную ориентацию. Сопоставим каждому направлению амплитуду $g(\alpha, \beta)$ и построим суперпозицию плоских волн, которая возможна вследствие линейности уравнений поля:

$$\psi(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\alpha, \beta) d\beta d\alpha e^{ik(x \sin \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \sin \beta + z \cos \alpha)}. \quad (2.12.29)$$

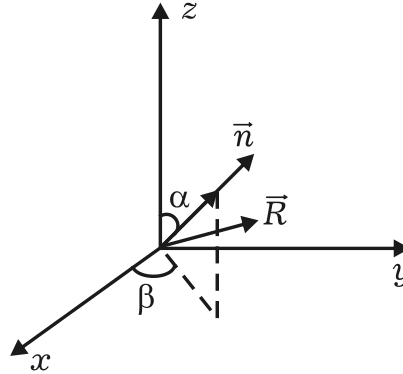


Рис. 2.18

Для цилиндрических волн, как это следует из (2.12.14), зависимость от z выражается экспонентой $e^{\pm i\gamma z}$, то есть

$$kz \cos \alpha = \pm \gamma z. \quad (2.12.30)$$

Это означает, что в случае цилиндрических волн угол α , образованный направлением распространения составляющих плоских волн с осью z , постоянен. Он определяется волновым числом и постоянной распространения. Иными словами, возможные направления вектора $\vec{\xi}$ образуют конус с углом 2α при вершине. Следовательно, цилиндрическая волна будет выражаться через совокупность плоских волн формулой:

$$\psi(x, y, z, t) = e^{\pm i\gamma z + i\omega t} \int_0^{2\pi} d\beta g(\beta) e^{ik \sin \alpha (x \cos \beta + y \sin \beta)}. \quad (2.12.31)$$

Для того, чтобы построить цилиндрическую волну, нужно знать \vec{k} и ω , то есть четыре величины; но уравнение Гельмгольца дает связь между этими величинами, поэтому заданию подлежат только три из них.

Действительно, составляющие вектора \vec{k} будут

$$k_\rho = k \sin \alpha \cos \beta, \quad k_\phi = k \sin \alpha \sin \beta, \quad k_z = k \cos \alpha = \gamma.$$

Подставив $\psi = e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z) + i\omega t}$ в уравнение

$$\nabla^2 \psi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

получим

$$k_\rho^2 + k_\phi^2 + k_z^2 = \frac{\mu \epsilon \omega^2}{c^2}, \quad (2.12.32)$$

то есть

$$k_\rho^2 + k_\phi^2 + k_z^2 = k^2.$$

Следовательно, для построения волны нужно задать три параметра, например k_ρ, k_φ и ω , а k_z найдем из (2.12.32). Поэтому волну $\psi(x, y, z, t)$ можно представить в виде следующего интеграла:

$$\psi(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_\rho, k_\varphi, \omega) e^{i(k_\rho x + k_\varphi y + k_z z + \omega t)} dk_\rho dk_\varphi d\omega. \quad (2.12.33)$$

Здесь k_ρ, k_φ и ω действительны, а k_z комплексно:

$$k_z = \sqrt{\frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - k_\rho^2 - k_\varphi^2}.$$

Если задан начальный вид функции (или при $z = 0$, или при $t = 0$; в первом случае задается вид функции в сечении $z = 0$ для каждого момента времени, а во втором — вид функции во всем пространстве в данный момент времени $t = 0$), например

$$\psi(x, y, 0, t) = f(x, y, t),$$

то

$$f(x, y, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_1, k_2, \omega) e^{i(k_1 x + k_2 y + \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega. \quad (2.12.34)$$

Амплитудная функция может быть определена как обратное представление Фурье:

$$g(k_1, k_2, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) e^{-i(k_1 x + k_2 y + \omega t)} dx dy dt.$$

Заметим, что при $\sigma = 0$ (отсутствие диссипации) фазовая скорость каждой компоненты цилиндрической волны в направлении оси z определяется величиной

$$v_z = \frac{\omega}{k_z}, \quad (2.12.35)$$

$$k_z = \sqrt{\frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - k_\rho^2 - k_\varphi^2}$$

то есть она зависит от $\omega, k_\rho, k_\varphi$:

$$v_z = v_z(\omega, k_\rho, k_\varphi). \quad (2.12.36)$$

Следовательно, каждой составляющей (плоской волне) соответствует своя фазовая скорость в направлении оси z . Это означает искажение фронта (в сечении $z = \text{const}$), то есть общего решения для фронта волны (если задан фронт в сечении $z = 0$ в виде функции $f(x, y, t)$) типа $f(x, y, t - z/v)$ не существует.

2.12.3. Интегральные представления цилиндрических функций. Цилиндрическая волна, представляемая в виде суперпозиции плоских волн, имеет вид (2.12.31):

$$\psi(x, y, z, t) = e^{\pm i\gamma z + i\omega t} \int d\beta g(\beta) e^{ik \sin \alpha (x \cos \beta + y \sin \beta)}.$$

Подставляя вместо функции ψ ее выражение

$$\psi = f(\rho, \varphi) e^{\pm i\gamma z + i\omega t}$$

получим

$$f(\rho, \varphi) = \int d\beta g(\beta) e^{ik \sin \alpha (x \cos \beta + y \sin \beta)}.$$

Введя полярные координаты и в показатель экспоненты $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, и обозначая $k\rho \sin \alpha = r$, получим

$$f(\rho, \varphi) = f_1(\rho) f_2(\varphi) = \int d\beta g(\beta) e^{ir \cos(\varphi - \beta)}, \quad (2.12.37)$$

где

$$f_2(\varphi) = e^{ip\varphi},$$

$$f_1(\rho) e^{ip\varphi} = \int_0^{2\pi} d\beta g(\beta) e^{ir \cos(\varphi - \beta)}.$$

Произведем замену

$$\beta - \varphi = \theta, d\beta = d\theta, g(\beta) = g(\varphi + \theta),$$

$$f_1(r) e^{ip\varphi} = \int_0^{\varphi - 2\pi} d\theta g(\theta + \varphi) e^{ir \cos \theta}.$$

Предположим, что $f_1(r)$ имеет вид:

$$f_1(r) = \int g_1(\theta) e^{ir \cos \theta} d\theta. \quad (2.12.38)$$

Далее учтем, что $f_1(r)$ должна быть решением уравнения Бесселя (2.12.20).

Поэтому подстановка интеграла (2.12.38) в уравнение Бесселя приводит к условиям (приводим без доказательства):

1. Функция g_1 должна быть решением уравнения

$$\frac{d^2 g_1}{d\theta^2} + p^2 g_1 = 0.$$

2. Выражение

$$(r \sin \theta + p) e^{i(r \cos \theta + p\theta)} \quad (2.12.39)$$

при подстановке пределов должно давать нуль. Отсюда следует, что функция g_1 должна иметь вид:

$$g_1 \sim e^{ip\theta}.$$

Оказывается, что для того, чтобы $f_1(r)$ была тождественна с цилиндрической функцией, g_1 надо положить равной

$$g_1 = \frac{1}{\pi} e^{-ip\frac{\pi}{2}} \cdot e^{ip\theta}. \quad (2.12.40)$$

Подставив (2.12.40) в (2.12.38), получим интегральное представление цилиндрических функций

$$Z(r) = \frac{e^{-ip\frac{\pi}{2}}}{\pi} \int_C e^{i(r \cos \theta + p\varphi)} d\theta. \quad (2.12.41)$$

Здесь контур C нужно подобрать так, чтобы удовлетворить условиям (2.12.39).

Возможны следующие интегральные представления для функций Ханкеля первого и второго родов:

$$H_p^{(1)}(r) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty + \pi i} e^{rsh\theta - p\theta} d\theta, \quad H_p^{(2)}(r) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty - \pi i} e^{rsh\theta - p\theta} d\theta. \quad (2.12.42)$$

Функция Бесселя $J_p(r)$ определится как

$$J_p(r) = \frac{1}{2} [H_p^{(1)} + H_p^{(2)}].$$

При p целом ($p = n$) условие (2.12.39) выполняется при интегрировании по любому отрезку длиной 2π по действительной оси r . Величина $\exp(-in\pi/2)$ переходит в i^{-n} .

Для функций Бесселя 1-го рода целого индекса получаем

$$J_p(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(r \sin \theta - p\theta) d\theta - \frac{\sin p\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-rsh t - pt} dt, \quad (|\arg r| < \pi/2). \quad (2.12.43)$$

В частном случае целого индекса p ($p \equiv n$):

$$J_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - r \sin \varphi) d\varphi. \quad (2.12.43a)$$

2.12.4. Представление плоской волны через цилиндрические функции. Отбрасывая зависимость от z и ω , для плоской волны имеем выражение (см. 2.12.31):

$$\psi(x, y) = e^{ik \sin \alpha (x \cos \beta + y \sin \beta)}.$$

В полярных координатах получим

$$\psi(\rho, \varphi) = e^{ir \cos(\varphi - \beta)},$$

где $r = k\rho \sin \alpha$.

Это функция, периодическая по φ . Представим ее по координате φ в виде ряда Фурье:

$$\psi(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(r) e^{in\varphi}. \quad (2.12.44)$$

Коэффициенты Фурье $\psi_n(r)$ определяются формулой

$$\psi_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Подставим в последнюю формулу значение $\psi(\rho, \varphi)$:

$$\psi_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir \cos(\varphi - \beta) - in\varphi} d\varphi.$$

Заменяя $\beta - \varphi = \theta$ (при этом интервал интегрирования не изменится), получим

$$\psi_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir \cos \theta - in\beta + in\theta} d\theta.$$

$$\psi_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} e^{-in\beta} e^{-in\frac{\pi}{2}} e^{in\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} e^{i(r \cos \theta + n\theta)} d\theta$$

или

$$\psi_n(\rho) = i^n e^{-in\beta} \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(r \cos \theta + n\theta)} d\theta = i^n e^{-in\beta} J_n(r).$$

Полученное значение $\psi_n(\rho)$ подставим в сумму (2.12.44):

$$\psi(\rho, \varphi) = e^{ik\rho \sin \alpha \cos(\beta - \varphi)} = \sum_n i^n e^{-in\beta} e^{in\varphi} J_n(k\rho \sin \alpha). \quad (2.12.45)$$

Таким образом, мы получили разложение плоской волны в ряд по цилиндрическим функциям.

Из формулы (2.12.45) получаем полезные формулы:

$$e^{ir \cos(\varphi - \beta)} = \sum_n i^n e^{in(\varphi - \beta)} J_n(r),$$

$$e^{ir \cos \theta} = \sum_n i^n e^{-in\theta} J_n(r).$$

Положив

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi,$$

получим

$$e^{ir \sin \psi} = \sum_n i^n e^{-in\frac{\pi}{2}} e^{in\psi} J_n(r) = \sum_n e^{in\psi} J_n(r).$$

Откуда

$$\cos(r \sin \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) \cos n\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{1 + \delta_{n0}} J_{2n}(r) \cos 2n\psi,$$

$$\sin(r \sin \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) \sin n\psi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(r) \sin \{(2n-1)\psi\}, \quad (2.12.46)$$

где $\delta_{n0} = 1$ при $n = 0$, $\delta_{n0} = 0$ при $n > 0$, т.к. $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

2.12.5. Преобразование Фурье-Бесселя. Рассмотрим интеграл Фурье для двух переменных:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int g(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 y)} dk_1 dk_2. \quad (2.12.47)$$

Произведем замену переменных

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & k_1 &= \lambda \cos \beta, \\ y &= \rho \sin \varphi, & k_2 &= \lambda \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.12.48)$$

то есть замену одинаковым способом как для пространства x, y , так и для пространства k . В последнем случае λ играет роль радиуса-вектора, β — роль азимута.

Подставив (2.12.45) в (2.12.44), получим

$$f(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \int_0^{2\pi} d\beta e^{i\lambda \rho \cos(\beta - \varphi)} g(\lambda, \beta). \quad (2.12.49)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$g(\lambda, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\mu f(\rho, \mu) e^{-i\lambda r \cos(\beta - \mu)}. \quad (2.12.50)$$

Применив соотношения (2.12.46) и (2.12.47) для цилиндрических функций $f_n(\rho) e^{in\varphi}$, получим пару преобразований Фурье Бесселя:

$$f_n(\rho) = \int_0^{\infty} g_n(\lambda) J_n(\lambda \rho) \lambda d\lambda, \quad (2.12.51)$$

$$g_n(\lambda) = \int_0^{\infty} f_n(r) J_n(\lambda r) r dr. \quad (2.12.52)$$

Решение волнового уравнения в цилиндрических координатах для заданных k и ω будет иметь вид

$$\psi = e^{i\omega t} \sum_n e^{in\varphi} f_n(\rho) e^{\pm i\gamma z}, \quad (2.12.53)$$

$$\gamma = k_z; \quad k_\rho^2 + k_\varphi^2 + k_z^2 = k^2.$$

С учетом (2.12.48) вместо (2.12.53) можно записать:

$$\psi = e^{i\omega t} \sum_n e^{in\varphi} \int_0^{\infty} g_n(\lambda) J_n(\lambda \rho) e^{\pm i\sqrt{k^2 - \lambda^2} z} \lambda d\lambda. \quad (2.12.54)$$

2.13(*). Сферические волны

Рассмотрим решение скалярного уравнения Гельмгольца в сферических координатах относительно функции $\psi(r, \theta, \varphi)$, представляющей собой какую-либо со-

ставляющую векторов \vec{E} или \vec{H} :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right] + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \Psi = 0. \end{aligned} \quad (2.13.1)$$

Уравнение (2.13.1) решается методом разделения переменных, в соответствии с которым представим функцию $\Psi(r, \theta, \varphi)$ в виде:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Q(\theta) \Phi(\varphi). \quad (2.13.2)$$

Подставив выражение (2.13.2) в уравнение Гельмгольца (2.13.1), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R(r)} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{Q(\theta)} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dQ}{d\theta} \right] + \\ & + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.13.3)$$

Из уравнения (2.13.3) следуют соотношения:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \theta}{R(r)} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] + k^2 r^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{Q(\theta)} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dQ}{d\theta} \right] = m^2, \\ & - \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2, \end{aligned} \quad (2.13.4)$$

где m — постоянная разделения переменных.

Разделяя переменные в первом уравнении (2.13.4), получаем:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] + k^2 r^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{Q(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dQ}{d\theta} \right] = n(n+1),$$

где n — постоянная разделения переменных.

В результате получаем три несвязанных дифференциальных уравнения относительно функций $R(r)$, $Q(\theta)$ и $\Phi(\varphi)$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0, \\ & \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dQ(\theta)}{d\theta} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] Q(\theta) = 0, \\ & \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right] + [k^2 r^2 - n(n+1)] R(r) = 0. \end{aligned} \quad (2.13.5)$$

Первое уравнение имеет два линейно независимых решения:

$$\Phi_c(\varphi) = \cos(m\varphi), \quad \Phi_s(\varphi) = \sin(m\varphi), \quad (2.13.6)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ — целое положительное число.

Решения $Q(\theta)$ второго уравнения (2.13.5) должны принимать конечные значения при $\theta = 0; \pi$ и записываются в виде присоединенных полиномов Лежандра первого рода $P_n^m(\cos \theta)$ (m — порядок полинома; n — его степень):

$$Q(\theta) = P_n^m(\cos \theta). \quad (2.13.7)$$

При $m = 0$ присоединенные полиномы Лежандра называют полиномами Лежандра и обозначают через $P_n(\cos \theta)$.

Произвольная поверхностная сферическая гармоническая функция может быть представлена в виде суммы:

$$\mathcal{Y}(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{nm} \cos(m\varphi) + b_{nm} \sin(m\varphi)) P_n^m(\cos \theta), \quad (2.13.8)$$

где a_{nm}, b_{nm} — коэффициенты разложения.

В ряд по сферическим поверхностным функциям $\mathcal{Y}(\theta, \varphi)$ (2.13.8) можно разложить произвольную функцию $G(\theta, \varphi)$:

$$G(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^{+\infty} (a_{nm} \cos(m\varphi) + b_{nm} \sin(m\varphi)) P_n^m(\cos \theta) \right]. \quad (2.13.9)$$

В третьем уравнении (2.13.5) перейдем к безразмерной переменной $\rho = kr$, введем функцию $\mathcal{R} = R\sqrt{r}$ и перепишем его следующим образом:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d\mathcal{R}(\rho)}{d\rho} \right] + \left[\rho^2 - n \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \mathcal{R}(\rho) = 0. \quad (2.13.10)$$

Линейно независимые решения уравнения (2.13.10) представляют собой сферические функции Бесселя первого и второго родов вида:

$$j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+1/2}(\rho), \quad \mathcal{Y}_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Y_{n+1/2}(\rho),$$

где $J_n(\rho)$ и $Y_n(\rho)$ — цилиндрические функции Бесселя и Неймана порядка n .

Зачастую удобно использовать функции Риккати-Бесселя, которые определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \psi_n(\rho) &= \rho j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{n+1/2}(\rho), \\ \chi_n(\rho) &= \rho \mathcal{Y}_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} Y_{n+1/2}(\rho), \end{aligned} \quad (2.13.11)$$

Любая линейная комбинация $\psi_n(\rho)$ и $\chi_n(\rho)$ является решением уравнения (2.13.10). Кроме того, решением также являются функции Риккати-Ханкеля:

$$\xi_n^{(1)}(\rho) = \psi_n(\rho) + i\chi_n(\rho), \quad \xi_n^{(2)}(\rho) = \psi_n(\rho) - i\chi_n(\rho). \quad (2.13.12)$$

Таким образом, было найдено решение скалярного уравнения Гельмгольца (2.13.1), которое с учетом (2.13.6), (2.13.7) принимает вид:

$$\begin{aligned}\psi_{c,mn} &= z_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi), \\ \psi_{s,mn} &= z_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi),\end{aligned}\tag{2.13.13}$$

где $z_n(kr)$ — любая из четырех сферических бесселевых функций $\psi_n(\rho)$, $\chi_n(\rho)$, $\xi_n^{(1)}(\rho)$ или $\xi_n^{(2)}(\rho)$.

Суммируя решения (2.13.13) с учетом (2.13.9), получаем общее решение уравнения Гельмгольца (2.13.1):

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} z_n(kr) \{a_{n0} P_n(\cos \theta) + \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} (a_{nm} \cos(m\varphi) + b_{nm} \sin(m\varphi)) P_n^m(\cos \theta)\}.\end{aligned}\tag{2.13.14}$$

Соотношение (2.13.14) представляет собой разложение функции ψ по элементарным сферическим волнам. Рассмотрим случай, когда функция ψ представляет плоскую волну. Используя соотношение (2.13.14) и учитывая независимость от координаты φ , получаем следующее разложение:

$$e^{ikr} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_n(kr) P_n(\cos \theta),\tag{2.13.15}$$

где a_n — неизвестные коэффициенты.

Разложение волн на элементарные сферические волны используется при решении задач дифракции плоских электромагнитных волн на сферических телах вращения и т.п. Читателей, интересующихся строгим решением задачи дифракции плоской электромагнитной волны на сфере с идеально проводящей поверхностью, отсылаем к [Л9.3, Л.38].

Глава

3

Основные принципы и теоремы электродинамики

3.1. Поведение волновых полей на бесконечности	138
3.2(*). Условие на ребре для электромагнитного поля. Метод Мейкснера	142
3.3. Теоремы единственности	147
3.4. Понятие магнитного тока	150
3.5. Лемма Лоренца для изотропных и анизотропных сред	154
3.6(*). Теоремы (соотношения) взаимности	156
3.7(*). Теоремы эквивалентности. Магнитные токи	159
3.8. Принцип двойственности	162
3.9(*). Метод эквивалентных электрических и магнитных токов поляризации	165
3.10(*). Принцип электродинамического подобия для материальных сред	166

) Символом «» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 3. Основные принципы и теоремы электродинамики

3.1. Поведение волновых полей на бесконечности

Когда границы рассматриваемой области уходят в бесконечность (внешняя краевая задача электродинамики), можно получить два корректных решения системы уравнений Максвелла, среди которых, как правило, лишь одно верно описывает исследуемую физическую реальность. Для обеспечения единственности решения необходимо ввести некоторые физические ограничения. При решении краевой задачи для свободного пространства, когда все источники сосредоточены в конечной области, таким дополнительным ограничением, определяющим поведение полей на бесконечности, является *условие излучения*.

Определим характер поведения полей на бесконечности в изотропной непоглощающей среде. Считая, что все источники (заряды и токи) расположены в конечной области, нетрудно установить, что поле на бесконечности определяется функцией Грина $G(\tau, \vec{r})$, которую физически можно рассматривать как одну из составляющих электромагнитного поля, создаваемую точечным источником, расположенным в начале координат. Функция Грина для источника, расположенного в начале координат, удовлетворяет уравнению:

$$\Delta G(\tau, \vec{r}) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G(\tau, \vec{r})}{\partial \tau^2} = -\delta(\tau) \delta(\vec{r}), \quad (3.1.1)$$

в котором δ -функции представляются в виде интеграла Фурье:

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.1.2)$$

Используя соотношение (3.1.2) и записывая в виде интеграла Фурье функцию Грина:

$$G(\tau, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} G_\omega(\vec{r}) d\omega, \quad (3.1.3)$$

устанавливаем, что Фурье-образ $G_\omega(\vec{r})$ функции Грина удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k_0^2 \epsilon \mu) G_\omega(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}). \quad (3.1.4)$$

Поскольку уравнению (3.1.4) при $\vec{r} \neq 0$ удовлетворяют функции

$$G_\omega^{\text{од}} = A_0 \frac{e^{ik|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} + B_0 \frac{e^{-ik|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}, \quad (3.1.5)$$

где $k = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$, A_0 , B_0 — некоторые постоянные, решение уравнения (3.1.4) будем искать в виде

$$G_\omega(\vec{r}) = \frac{u(|\vec{r}|)}{|\vec{r}|}, \quad (3.1.6)$$

где $u(|\vec{r}|)$ — некоторая неизвестная функция, зависящая от $|\vec{r}|$.

Подставляя (3.1.6) в (3.1.4), находим, что функция $u(|\vec{r}|)$ удовлетворяет уравнению

$$-4\pi u(0)\delta(\vec{r}) + \frac{1}{|\vec{r}|}(u'' + k^2 u) = -\delta(\vec{r}), \quad (3.1.7)$$

где $u'' = \partial^2 u / \partial |\vec{r}|^2$. Заметим, что при выводе последнего уравнения использованы следующие свойства δ -функции [Л.40]:

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right), \quad (3.1.8)$$

$$f(\vec{r})\delta(\vec{r}) = f(0)\delta(\vec{r}), \quad (3.1.9)$$

где $f(\vec{r})$ — произвольная функция от вектора \vec{r} .

Равенство (3.1.7) может быть выполнено, если

$$u'' + k^2 u = 0 \quad (3.1.10)$$

и $u(0) = 1/(4\pi)$. Таким образом, частное решение уравнения (3.1.4) имеет вид:

$$G_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} [A \exp(ikr) + B \exp(-ikr)], \quad (3.1.11)$$

где A, B — произвольные постоянные; $r \equiv |\vec{r}|$ — радиальная координата сферической системы координат.

Следовательно, $G_\omega(r)$ — есть функция Грина неограниченного пространства, когда точечный источник расположен в начале координат, а процессы являются гармоническими во времени. Она определяется из уравнения (3.1.4), которое в сферической системе координат при $r \neq 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G_\omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G_\omega}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G_\omega}{\partial \phi^2} + k^2 G_\omega = 0. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Таким образом, решение трёхмерного уравнения Гельмгольца (3.1.12) представимо в виде (3.1.11) и при действительном k имеет место оценка^{*)}

$$G_\omega(\vec{r}) = O(1/r) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3.1.13)$$

Для гармонических процессов с временной зависимостью $\exp(i\omega t)$ Фурье-образ $G_\omega(\vec{r})$ функции Грина также удовлетворяет уравнению (3.1.4), причём мгновенное значение любой составляющей электромагнитного поля u соответствующее (3.1.11), имеет вид:

$$u(r, t) = u_1 + u_2 = A \frac{e^{i(\omega t + kr)}}{4\pi r} + B \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r}. \quad (3.1.14)$$

Первое решение в (3.1.4) описывает сферические волны, сходящиеся к источнику излучения, второе — расходящиеся от него. Если $k \equiv k_0 = \omega/c$, указанные волны

^{*)} Здесь и в дальнейшем используется символ O , имеющий следующий смысл: $f(x) = O[g(x)]$ при $x \rightarrow x_0$, если имеется некоторая постоянная A , такая что $|f(x)| \leq A|g(x)|$ при $x \rightarrow x_0$.

распространяются со скоростью света. Очевидно, что физический смысл имеет только второе решение (3.1.14).

Функции, описывающие координатную зависимость решений волнового уравнения:

$$u_1 = \frac{e^{ikr}}{r} \text{ и } u_2 = \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (3.1.15)$$

являются решениями уравнения:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + k^2 u = 0 \quad (3.1.16)$$

и для них нетрудно получить соотношения:

$$\frac{d u_1}{dr} = \frac{1}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) e^{ikr}, \quad \frac{d u_2}{dr} = -\frac{1}{r} \left(ik + \frac{1}{r} \right) e^{-ikr}, \quad (3.1.17)$$

из которых следует, что

$$u_1 = -r \left(\frac{du_1}{dr} - iku_1 \right), \quad u_2 = -r \left(\frac{du_2}{dr} + iku_2 \right).$$

Поскольку, как следует из (3.1.15)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_1 = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u_2 = 0,$$

из (3.1.17) получаем:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{du_1}{dr} - iku_1 \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{du_2}{dr} + iku_2 \right) = 0. \quad (3.1.18)$$

Предельные соотношения (3.1.18) устанавливают общий аналитический признак решений внешней краевой задачи по их поведению на бесконечности. Он получен для сферически симметричного поля излучения, создаваемого элементарным (точечным) источником. В силу принципа суперпозиции его можно распространить и на сферически несимметричное поле, создаваемое всей совокупностью источников, распределённых в области, ограниченной некоторой поверхностью $r = r_0$.

Поскольку на достаточно большом расстоянии ($r \gg r_0$) любая система волн по характеру координатной зависимости близка к сферической, вся совокупность волн, создаваемых источниками, расположенными в области $r < r_0$, удовлетворяет вышеуказанному признаку, то есть поле излучения, создаваемое любыми источниками, сосредоточенными в конечной области, удовлетворяет предельным соотношениям:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} + iku_2 \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u_2 = 0, \quad (3.1.19)$$

называемыми *условиями излучения* или *условиями Зоммерфельда*.

Они обеспечивают единственность решений внешних краевых задач на уравнении Гельмгольца.

В условиях (3.1.19), в отличие от (3.1.18), введены частные производные, поскольку предполагается выполнение предельных соотношений и для сферически

несимметричного поля, создаваемого произвольной системой источников, расположенных в конечной области.

Рассмотрим теперь двумерный случай. Пусть функция $G_\omega(\rho, \varphi)$ при $\rho \neq 0$ удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца, которое в полярной системе координат имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial G_\omega}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 G_\omega}{\partial \varphi^2} + k^2 G_\omega = 0. \quad (3.1.20)$$

На любой окружности радиуса $\rho > 0$ функция $G_\omega(\rho, \varphi)$ может быть разложена в тригонометрический ряд

$$G_\omega(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(\rho) e^{in\varphi}, \quad (3.1.21)$$

где

$$g_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_\omega(\rho, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Чтобы найти $g_n(\rho)$, домножим уравнение (3.1.20) на $\exp(-in\varphi)/(2\pi)$ и проинтегрируем по φ от 0 до 2π . В результате получаем

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dg_n}{d\rho} \right) - \frac{n^2}{\rho^2} g_n + k^2 g_n = 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (3.1.22)$$

Соотношения (3.1.22) есть уравнения Бесселя, решения которых удобно записать следующим образом:

$$g_n(\rho) = A_n H_n^{(1)}(k\rho) + B_n H_n^{(2)}(k\rho),$$

где $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ — функции Ханкеля n -го порядка первого и второго родов, соответственно.

Таким образом, решение однородного двумерного уравнения Гельмгольца (3.1.20) при $\rho > 0$ может быть представлено рядом

$$G_\omega(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n H_n^{(1)}(k\rho) + B_n H_n^{(2)}(k\rho)] e^{in\varphi}. \quad (3.1.23)$$

Учитывая асимптотическое поведение функций Ханкеля при $x \rightarrow \infty$:

$$H_n^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i(x - n\pi/2 - \pi/4)} + O(x^{-3/2}),$$

из (3.1.23) нетрудно получить оценку при действительном k :

$$G_\omega(\rho, \varphi) = O(1/\sqrt{\rho}) \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty. \quad (3.1.24)$$

Таким образом, волновые поля в среде без поглощения на бесконечности не могут убывать быстрее, чем $1/r$ в трёхмерном случае и $1/\sqrt{\rho}$ в двумерном случае.

Заметим, что если k — комплексное ($k = k' - ik''$), то из (3.1.11) и (3.1.23) видно, что решение однородного уравнения Гельмгольца можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых убывает по экспоненте, а другое по экспоненте

неограниченно возрастает при $r \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow \infty$). Из физических соображений решение уравнений Гельмгольца при комплексном k на бесконечности обязательно должно убывать по экспоненте. В частности, в трёхмерном случае ограниченное решение на бесконечности имеет оценку

$$G_{\omega}(r, \varphi) = e^{-|\operatorname{Im} k| r} O(1/r) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3.1.25)$$

Аналогично, для двумерного случая (в полярной системе координат)

$$G_{\omega}(\rho, \varphi) = e^{-|\operatorname{Im} k| \rho} O(1/\sqrt{\rho}) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3.1.26)$$

В случае двумерной краевой задачи для функции Грина G_{ω} в цилиндрической системе координат при отсутствии угловой зависимости имеет вид:

$$\frac{d^2 G_{\omega}}{d\rho^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_{\omega}}{d\rho} + k^2 G_{\omega} = \delta(\vec{r}) \quad (3.1.27)$$

и совпадает с уравнением Бесселя нулевого порядка. При этом источник излучения представляет собой бесконечно тонкую, протяжённую вдоль оси нить. По аналогии со сферически симметричной внешней краевой задачей можно получить условие излучения, которое имеет вид:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \rho} + i k u_2 \right) = 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} u_2 = 0.$$

Не случайно здесь фигурирует частная производная: условие излучения можно распространить и на решение с угловой зависимостью.

Физически, условию излучения (3.1.19) удовлетворяет второе слагаемое в решении (3.1.14), которое описывает волну, бегущую от источника, расположенного в начале координат. Первое слагаемое из (3.1.14), описывающее волну, распространяющуюся из бесконечности к началу координат, условию излучения не удовлетворяет.

Таким образом, в краевых задачах электродинамики для безграничных областей (внешних задач электродинамики) необходимо полученное решение всегда проверять на условие излучения на бесконечности.

3.2(*). Условие на ребре для электромагнитного поля. Метод Мейкснера

Решение уравнений Максвелла не определяется однозначно также и в том случае, когда рассматриваемые граничные поверхности имеют геометрические сингулярности, например, острые рёбра. Дополнительное физическое условие, необходимое для однозначного определения решения, вводят следующим образом:

$$\int_{V' \rightarrow 0} (\vec{\mathcal{E}} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) dV \rightarrow 0, \quad (3.2.1)$$

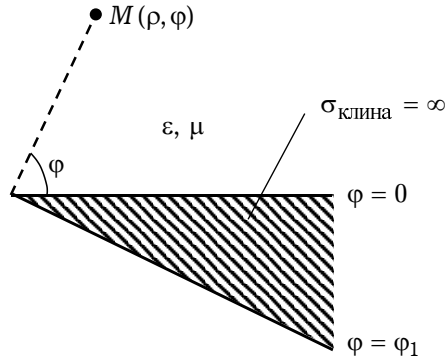


Рис. 3.1

где V' — объём в окрестности ребра (рис. 3.1). Физически, условие (3.2.1) означает конечность энергии электромагнитного поля, запасённой в любом конечном объёме в окрестности ребра. Из условия (3.2.1) следует, что в окрестности ребра ни одна составляющая электромагнитного поля не может возрастать быстрее, чем $\rho^{-1+\beta}$ ($\beta > 0$) при $\rho \rightarrow 0$, где ρ — радиальная цилиндрическая координата. Ниже опишем *метод Мейкснера*, позволяющий вычислять значение β для различных заданных конфигураций острого края поверхности.

В качестве конкретного примера, рассмотрим двумерный идеально проводящий клин, изображённый на рис. 3.1. Пусть ребро клина окружено однородной изотропной средой с параметрами ε и μ . Значение угла клина φ_1 заключено в интервале: $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$.

Запишем уравнения Максвелла для комплексных амплитуд в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) для однородной изотропной среды без источников с параметрами ε и μ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -i\omega \mu \mu_0 H_\rho, \quad \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -i\omega \mu \mu_0 H_\varphi, \quad (3.2.2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = -i\omega \mu \mu_0 H_z, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = i\omega \varepsilon \varepsilon_0 E_\rho, \quad \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = i\omega \varepsilon \varepsilon_0 E_\varphi, \quad (3.2.3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = i\omega \varepsilon \varepsilon_0 E_z.$$

Рассматривая поле вблизи ребра ($\rho \rightarrow 0$), его составляющие можно представить в виде рядов по степеням ρ . С учётом того, что составляющие поля не могут возрастать быстрее, чем $\rho^{-1+\beta}$, где $\beta > 0$, можно записать

$$E_\rho = \rho^{-1+\beta} [a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots], \\ E_\varphi = \rho^{-1+\beta} [b_0 + b_1 \rho + b_2 \rho^2 + \dots], \\ E_z = \rho^{-1+\beta} [c_0 + c_1 \rho + c_2 \rho^2 + \dots], \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned}
H_\rho &= \rho^{-1+\beta} [A_0 + A_1\rho + A_2\rho^2 + \dots], \\
H_\varphi &= \rho^{-1+\beta} [B_0 + B_1\rho + B_2\rho^2 + \dots], \\
H_z &= \rho^{-1+\beta} [C_0 + C_1\rho + C_2\rho^2 + \dots].
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Заметим, что коэффициенты в разложениях (3.2.4) и (3.2.5) зависят лишь от координат φ и z . Подставляя разложения (3.2.4), (3.2.5) в уравнения Максвелла (3.2.2), (3.2.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ρ , получаем

$$c_0(\beta - 1) = 0, \tag{3.2.6a}$$

$$i\omega\epsilon\epsilon_0 a_0 = \frac{\partial C_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_0}{\partial z}, \tag{3.2.6б}$$

$$i\omega\epsilon\epsilon_0 b_0 = \frac{\partial A_0}{\partial z} - \beta C_1, \tag{3.2.6в}$$

$$0 = \beta B_0 - \frac{\partial A_0}{\partial \varphi}, \tag{3.2.6г}$$

$$C_0(\beta - 1) = 0, \tag{3.2.7a}$$

$$-i\omega\mu\mu_0 A_0 = \frac{\partial c_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial b_0}{\partial z}, \tag{3.2.7б}$$

$$-i\omega\mu\mu_0 B_0 = \frac{\partial a_0}{\partial z} - \beta c_1, \tag{3.2.7в}$$

$$0 = \beta b_0 - \frac{\partial a_0}{\partial \varphi}. \tag{3.2.7г}$$

Соотношения (3.2.6a) и (3.2.7a) справедливы, если $\beta = 1$ или $c_0 = C_0 = 0$. В любом из этих случаев касательные составляющие поля E_z и H_z вблизи ребра конечны.

Умножаем уравнение (3.2.6б) на β , дифференцируем (3.2.6в) по φ , а (3.2.6г) по z , и складываем полученные уравнения. В результате приходим (при $\omega \neq 0$) к равенству

$$\frac{\partial b_0}{\partial \varphi} + \beta a_0 = 0. \tag{3.2.8}$$

Подставив (3.2.8) в (3.2.7г), получаем дифференциальное уравнение для коэффициента a_0

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial \varphi^2} + \beta^2 a_0 = 0. \tag{3.2.9}$$

Общее решение уравнения (3.2.9) имеет вид

$$a_0 = p \sin \beta \varphi + q \cos \beta \varphi, \tag{3.2.10}$$

где p, q — некоторые постоянные.

Аналогичным образом можно записать

$$A_0 = P \sin \beta \varphi + Q \cos \beta \varphi. \tag{3.2.11}$$

Так как $\beta > 0$, из соотношений (3.2.6)–(3.2.8) следует, что

$$\begin{aligned} b_0 &= p \cos \beta\varphi - q \sin \beta\varphi, & B_0 &= P \cos \beta\varphi - Q \sin \beta\varphi, \\ c_1 &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial p}{\partial z} \sin \beta\varphi + \frac{\partial q}{\partial z} \cos \beta\varphi \right] + \frac{i\omega \mu \mu_0}{\beta} [P \cos \beta\varphi - Q \sin \beta\varphi], \\ C_1 &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial P}{\partial z} \sin \beta\varphi + \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \beta\varphi \right] - \frac{i\omega \varepsilon \varepsilon_0}{\beta} [p \cos \beta\varphi - q \sin \beta\varphi]. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Формулы (3.2.10)–(3.2.12) дают 6 линейных алгебраических уравнений относительно десяти неизвестных постоянных коэффициентов $\{a_0, b_0, c_1, A_0, B_0, C_1, p, q, P, Q\}$. Дополнительные четыре уравнения можно получить, используя граничные условия на поверхностях клина: обращение в нуль касательных составляющих электрического поля при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$. Полученные при этом четыре уравнения и уравнения (3.2.10)–(3.2.12) (6 уравнений) образуют полную систему линейных алгебраических уравнений для определения 10 неизвестных коэффициентов $\{a_0, b_0, c_1, \dots\}$. Для существования нетривиальных решений необходимо, чтобы эта система уравнений была совместной: для этого её главный определитель должен быть равен нулю.

Воспользуемся граничными условиями при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$. Из граничного условия $E_\rho = 0$ ($a_0 = 0$) при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$ следует, что $q = 0$ и

$$a_0 = p \sin \beta\varphi, \quad (3.2.13a)$$

где

$$\beta = \pi n / \varphi_1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \infty). \quad (3.2.13b)$$

Соответственно, из граничного условия $E_z = 0$ ($c_0 = 0$) следуют равенства:

$$\frac{\partial q}{\partial z} + i\omega \mu \mu_0 P = 0 \quad \text{при } \varphi = 0 \quad (3.2.14a)$$

и

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} - i\omega \mu \mu_0 Q \right) \sin \beta\varphi_1 + \left(\frac{\partial q}{\partial z} + i\omega \mu \mu_0 P \right) \cos \beta\varphi_1 = 0 \quad \text{при } \varphi = \varphi_1. \quad (3.2.14b)$$

Заметим, что с учётом равенств (3.2.13б) и (3.2.14a) условие (3.2.14б) при $\varphi = \varphi_1$ удовлетворяется автоматически. Таким образом, равенство (3.2.13б) определяет значение коэффициента β в разложениях составляющих электромагнитного поля (3.2.4) и (3.2.5).

Как видно из (3.2.13б), характеристическое уравнение для β допускает множество решений, а значит, может быть множество представлений полей (3.2.4), (3.2.5). Так как нас интересует *верхняя граница* порядка сингулярности поля вблизи ребра, то в качестве β следует выбрать наименьшее положительное решение уравнения (3.2.13б), то есть положить $n = 1$.

Таким образом, имеем

$$\beta = \pi / \varphi_1. \quad (3.2.15)$$

Так как $\beta > 0$, то из разложений (3.2.4) и (3.2.5) следует, что при $\rho \rightarrow 0$

$$\vec{E}_\perp, \vec{H}_\perp = O(\rho^{-1+\beta}) \quad (3.2.16a)$$

$$\vec{E}_z, \vec{H}_z = O(\rho^\beta), \quad (3.2.16b)$$

Таблица 3.1

Геометрия клина (рис.)	Рис. 3.2а	Рис. 3.2б	Рис. 3.2в	Рис. 3.2г
φ_1	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
β	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{4}{7}$
$\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$	$O(\rho^{-1/3})$	$O(\rho^{-1/2})$	$O(\rho^{-1})$	$O(\rho^{-3/7})$
E_z, H_z	$O(\rho^{2/3})$	$O(\rho^{1/2})$	$O(\rho^2)$	$O(\rho^{4/7})$

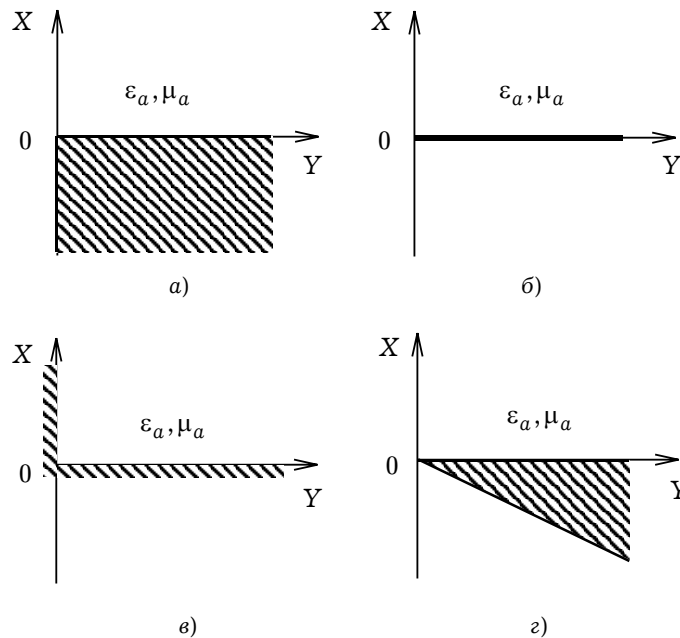


Рис. 3.2

где $\vec{E}_\perp, \vec{H}_\perp$ — соответственно составляющие электрического и магнитного полей, расположенные в плоскости, перпендикулярной оси OZ . Таким образом, лишь составляющие электромагнитного поля $\vec{E}_\perp, \vec{H}_\perp$ могут иметь сингулярность вблизи ребра; остальные составляющие поля регулярны везде.

Применяя формулу (3.2.15), выпишем условия вблизи ребра (значения коэффициента β) для некоторых часто встречающихся структур, изображённых на рис. 3.2. Значения коэффициента β , а также характер поведения поля вблизи ребра для этих структур описываются в таблице 3.1.

3.3. Теоремы единственности

Вначале рассмотрим внутреннюю задачу: электромагнитное поле в области пространства V , ограниченной замкнутой поверхностью S (рис. 1.19a). Пусть в этой области распределены сторонние электрические токи $\vec{J}^{\text{ст}}$, а на ограничивающей поверхности S задано граничное условие (в самом общем виде):

$$[\vec{n}_0, \vec{\mathcal{E}}] = \vec{Z} \vec{\mathcal{H}}, \quad (3.3.1)$$

где

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} —$$

аффино́р «импедансов», характеризующий свойства границы S (\vec{n}_0 — внешняя нормаль к этой поверхности). В частном случае для идеально проводящей поверхности $\vec{Z} \equiv 0$. Для того, чтобы векторы $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ электромагнитного поля были определены единственным образом, необходимо, чтобы в том случае, когда его источники ($\vec{J}^{\text{ст}}$) при $t < t_0$ отсутствуют, поля удовлетворяют начальному условию (принцип причинности):

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{D}} = 0, \\ \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{B}} = 0. \end{aligned} \quad \text{при } t \leq t_0 \quad (3.3.2)$$

Покажем, что решение уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{J}^{\text{ст}}, \quad \text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (3.3.3)$$

в области, ограниченной поверхностью S (рис. 1.19a) будет единственным, если оно удовлетворяет граничным условиям (3.3.1) и начальным условиям (3.3.2).

Доказательство теоремы единственности проведём «методом от противного», предполагая, что существует два решения поставленной задачи: $\vec{\mathcal{E}}_1, \vec{\mathcal{H}}_1, \vec{\mathcal{D}}_1, \vec{\mathcal{B}}_1$ и $\vec{\mathcal{E}}_2, \vec{\mathcal{H}}_2, \vec{\mathcal{D}}_2, \vec{\mathcal{B}}_2$.

Образует разность этих решений:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_p = \vec{\mathcal{E}}_1 - \vec{\mathcal{E}}_2, \quad \vec{\mathcal{H}}_p = \vec{\mathcal{H}}_1 - \vec{\mathcal{H}}_2, \\ \vec{\mathcal{D}}_p = \vec{\mathcal{D}}_1 - \vec{\mathcal{D}}_2, \quad \vec{\mathcal{B}}_p = \vec{\mathcal{B}}_1 - \vec{\mathcal{B}}_2. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Очевидно, что разностное решение удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла ($\vec{J}^{\text{ст}} = 0$) в силу их линейности:

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}}_p = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}_p}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{\mathcal{E}}_p = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_p}{\partial t} \quad (3.3.5)$$

при нулевом граничном условии на поверхности S : $[\vec{n}_0, \vec{\mathcal{E}}_p] = 0$.

Применим к решению $\vec{\mathcal{E}}_p, \vec{\mathcal{H}}_p$ уравнение (1.13.3) общего баланса энергии поля в объёме V :

$$-\int_V \vec{\mathcal{E}}_p \vec{J}^{\text{ст}} dV = \int_V \left(\vec{\mathcal{E}}_p \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}_p}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}}_p \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_p}{\partial t} \right) dV + \int_S [\vec{\mathcal{E}}_p, \vec{\mathcal{H}}_p] \vec{n}_0 dS. \quad (3.3.6)$$

Левая часть этого уравнения равна нулю, поскольку для разностного поля сторонние токи отсутствуют ($\vec{J}^{\text{CT}} = 0$). Так как в последнем слагаемом правой части (3.3.6) можно сделать перестановку

$$[\vec{\mathcal{E}}_p, \vec{H}_p] \vec{n}_0 = [\vec{n}_0, \vec{\mathcal{E}}_p] \vec{H}_p,$$

в силу нулевого граничного условия на поверхности S получаем:

$$\int_S [\vec{\mathcal{E}}_p, \vec{H}_p] \vec{n}_0 dS = 0. \quad (3.3.7)$$

В результате из уравнения (3.3.6) с учётом (3.3.7) вытекает, что

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}_p \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}_p}{\partial t} dV + \int_V \vec{H}_p \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_p}{\partial t} dV = 0. \quad (3.3.8)$$

Предположим, что среда, заполняющая объём V , является анизотропной. Тогда для неё справедливы материальные уравнения:

$$\vec{\mathcal{D}}_p = \epsilon_0 \vec{\epsilon} \vec{\mathcal{E}}_p, \quad \vec{\mathcal{B}}_p = \mu_0 \vec{\mu} \vec{H}_p. \quad (3.3.9)$$

Рассмотрим два случая. Пусть среда является диссипативной, то есть

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}' - i \vec{\epsilon}'', \quad \vec{\mu} = \vec{\mu}' - i \vec{\mu}''. \quad (3.3.10)$$

С учётом соотношений (3.3.9) и (3.3.10) уравнение (3.3.8) записывается (предполагается, что ϵ и μ не зависят от времени) в виде:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \int_V \vec{\epsilon}' \vec{\mathcal{E}}_p \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_p}{\partial t} dV + \mu_0 \int_V \vec{\mu}' \vec{H}_p \frac{\partial \vec{H}_p}{\partial t} dV = \\ = i \epsilon_0 \int_V \vec{\epsilon}'' \vec{\mathcal{E}}_p \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_p}{\partial t} dV + i \mu_0 \int_V \vec{\mu}'' \vec{H}_p \frac{\partial \vec{H}_p}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Слагаемые в правой части (3.3.11) определяют потери энергии внутри объёма V . Равенство (3.3.7) означает, что энергия разностного поля через поверхность S , ограничивающую объём V , не проходит; отсутствие сторонних токов внутри этого объёма говорит о том, что для разностного поля энергия не генерируется. Следовательно, изменение энергии разностного поля внутри рассматриваемой области должно быть равно нулю. Поэтому имеем

$$\int_V \vec{\epsilon}'' \vec{\mathcal{E}}_p \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_p}{\partial t} dV = 0, \quad \int_V \vec{\mu}'' \vec{H}_p \frac{\partial \vec{H}_p}{\partial t} dV = 0 \quad (3.3.12)$$

и из соотношения (3.3.11) получаем

$$\epsilon_0 \int_V \vec{\epsilon}' \vec{\mathcal{E}}_p \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_p}{\partial t} dV = - \mu_0 \int_V \vec{\mu}' \vec{H}_p \frac{\partial \vec{H}_p}{\partial t} dV. \quad (3.3.13)$$

Если $\vec{\epsilon}'' \neq 0$, из (3.3.12) с учётом начального условия (3.3.2) следует: $\vec{\mathcal{E}}_p = 0$. Но тогда из (3.3.13) с учётом начального условия (3.3.2) получим, что $\vec{H}_p = 0$ в области V ,

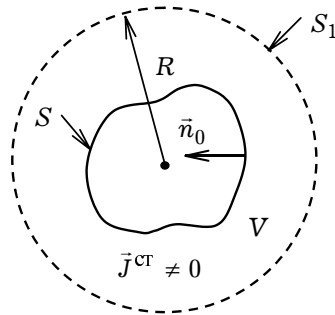


Рис. 3.3

откуда следует, что решения уравнений Максвелла \vec{E}_1, \vec{H}_1 и \vec{E}_2, \vec{H}_2 тождественно совпадают. Следовательно, единственность решений уравнений Максвелла в объёме V при наличии потерь обеспечивается заданием граничных условий на поверхности S и начальных условий при $t = t_0$.

Аналогичный результат можно получить, положив $\vec{\mu}'' \neq 0$.

Во втором случае, когда $\vec{\epsilon}'' = 0$ и $\vec{\mu}'' = 0$ (потери в объёме V отсутствуют) равенства (3.3.12) удовлетворяются тождественно. В этом случае, используя уравнения (3.3.13), можно показать, что с учётом начального условия (3.3.2) $\vec{H}_p = \vec{E}_p = 0$, то есть решения уравнений Максвелла \vec{E}_1, \vec{H}_1 и \vec{E}_2, \vec{H}_2 при отсутствии потерь в объёме V также тождественно совпадают.

При рассмотрении однородной системы уравнений Максвелла ($\vec{j}^{ct} = 0$) (однородная задача) начальные условия (3.3.2) использовать нельзя. В этом случае, как следует из уравнения (3.3.13), разностное поле \vec{E}_p, \vec{H}_p может отличаться от нуля; тогда полная средняя энергия электрического поля равна полной средней энергии магнитного поля. Это значит, что энергия разностного поля в ограниченном пространстве находится в колебательном состоянии.

Таким образом, при отсутствии сторонних токов и потерь в среде единственность решений внутренних задач электродинамики имеет место только на частотах, отличных от резонансных.

Теорема единственности остаётся справедливой и для внешней задачи электродинамики. Пусть рассматриваемая область V ограничена изнутри поверхностью S (см. рис. 3.3), на которой заданы граничные условия в виде (3.3.1); начальные условия (3.3.2) сохраняются.

Для доказательства теоремы при этом необходимо сделать следующие предположения:

1. В объёме V существуют электрические и (или) магнитные потери.
2. Сторонние токи \vec{j}^{ct} в объёме V находятся на конечном расстоянии от внутренней поверхности, ограничивающей объём V .

Для доказательства теоремы единственности внешней задачи электродинамики ограничим рассматриваемую область V снаружи сферической поверхностью S_1 радиуса R (рис. 3.3). Используя доказательство от противного, применим опять к

разностному решению (3.3.4) уравнение баланса энергии в объёме V (1.13.3). В результате получим уравнение (3.3.6) с дополнительным слагаемым в правой части:

$$\int_{S_1} [\vec{\mathcal{E}}_p, \vec{\mathcal{H}}_p] \vec{n}_0 dS.$$

Устремив радиус R поверхности S_1 к бесконечности, с учётом конечной скорости распространения поля, имеем:

$$\int_{S_1} [\vec{\mathcal{E}}_p, \vec{\mathcal{H}}_p] \vec{n}_0 dS \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (3.3.14)$$

Выполнение условия (3.3.14) может гарантировать и условие излучения, если оно выполняется.

Дальнейшее доказательство теоремы единственности решения внешней задачи электродинамики проводится точно так же, как и внутренней. Таким образом, единственность решения внешней краевой задачи выполняется при заданных граничном (3.3.1), начальном (3.3.2) условиях и условии излучения.

Решение внешней задачи при отсутствии сторонних источников и потерь также *теряет свою единственность*. Так, для безграничного пространства электромагнитное поле не определяется однозначно: помимо запаздывающего решения полное решение неоднородной задачи содержит опережающее решение (см. раздел 2.3), а также решение однородной задачи, например, сумму плоских волн. Вводя поглощение в пространстве, мы исключаем как опережающее решение (имеющее вид волн, сходящихся из бесконечности к источнику поля), так и решение однородных уравнений в виде плоских волн. Таким образом, решение внешней задачи электродинамики находится в виде запаздывающих решений, имеющих вид расходящихся от источников сферических волн. Опережающие же решения при $R \rightarrow \infty$ экспоненциально возрастают, поскольку направление их распространения — из бесконечности к области источников.

3.4. Понятие магнитного тока

3.4.1. Уравнения Максвелла с магнитными токами. В теории возбуждения электромагнитных волн обычно используют следующую систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^e, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{J}^m, \quad (3.4.1)$$

где \vec{H} , \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} — мгновенные значения векторов, \vec{J}^e , \vec{J}^m — мгновенные значения векторов объёмных плотностей электрического и магнитного токов.

Как следствие законов сохранения зарядов, справедливы уравнения непрерывности:

$$\text{div } \vec{J}^e + \frac{\partial R^e}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \vec{J}^m + \frac{\partial R^m}{\partial t} = 0, \quad (3.4.2)$$

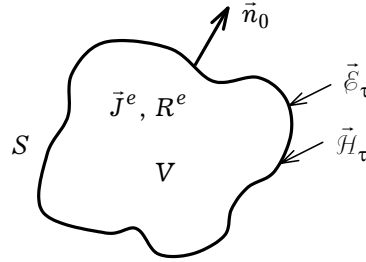


Рис. 3.4

где R^e, R^m — мгновенные значения объёмных плотностей электрического и магнитного зарядов.

Так как

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0,$$

где \vec{F} — любой вектор, то из (3.4.1) следуют ещё два уравнения:

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{D}} = R^e, \quad \operatorname{div} \vec{\mathcal{B}} = R^m. \quad (3.4.3)$$

В уравнения Максвелла (3.4.1) формально введены свободные магнитные токи и заряды. В действительности они не существуют. Однако с их помощью, как будет показано ниже, упрощается решение многих задач электродинамики. Остановимся на обосновании формального введения магнитных токов и зарядов.

Пусть поверхность S ограничивает некоторый объём V , в котором заданы электрические токи и заряды (рис. 3.4). Очевидно, что указанные источники на поверхности S возбуждают некоторые тангенциальные составляющие поля $\vec{\mathcal{E}}_\tau, \vec{\mathcal{H}}_\tau$. Известно, что мгновенное значение поверхностной плотности электрического тока определяется как

$$\vec{\eta}^e = [\vec{\mathcal{H}}, \vec{n}_0], \quad (3.4.4)$$

где \vec{n}_0 — нормаль к поверхности S , направленная из объёма V . По аналогии можно ввести и мгновенное значение поверхностной плотности магнитного тока:

$$\vec{\eta}^m = -[\vec{\mathcal{E}}, \vec{n}_0]. \quad (3.4.5)$$

Знак « $-$ » в (3.4.5) связан со знаком « $-$ » перед \vec{J}^m в правой части второго уравнения Максвелла из (3.4.1).

Связь между объёмными и поверхностными плотностями токов следующая:

$$\vec{J}^{e,m} = \vec{\eta}^{e,m}(u_1, u_2) \delta(n - n'), \quad (3.4.6)$$

где токи $\vec{\eta}^{e,m}$ заданы на поверхности S как функции координат u_1, u_2 ; n — нормальная координата (по отношению к поверхности S), принимающая значение n' при пересечении поверхности S ; $\delta(n - n')$ — одномерная дельта-функция Дирака.

Система двух векторных уравнений (3.4.1) связывает между собой шесть векторов. Поэтому она является неполной и к ней нужно добавить ещё четыре уравнения.

Для изотропной среды имеет место соотношение: $\vec{J} = \vec{J}_{\text{пр}} + \vec{J}^{\text{ст}}$; $\vec{J}_{\text{пр}}$ — ток

проводимости; $\vec{J}^{\text{ст}}$ — сторонний ток. Поэтому

$$\vec{J}^e = \sigma^e (\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}^{\text{ст}}), \quad \vec{J}^m = \sigma^m (\vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{H}}^{\text{ст}}), \quad (3.4.7)$$

и

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{\mathcal{E}}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{\mathcal{H}}, \quad (3.4.8)$$

где σ^e, σ^m — удельные электрическая и магнитная проводимости; $\vec{\mathcal{E}}^{\text{ст}}, \vec{\mathcal{H}}^{\text{ст}}$ — напряжённости сторонних (заданных) электрического и магнитного полей.

Под *сторонними полями* в электродинамике понимают:

- поля, создаваемые электродвижущими и магнитодвижущими силами неэлектромагнитного происхождения (химическими, диффузионными и др.);
- поля, создаваемые некоторой частью объёма, принимаемой за источник и не рассматриваемой детально.

При анализе реальных излучающих систем выделение некоторой их части в качестве области источников часто оказывается необходимым для упрощения решения задачи. В процессе решения $\vec{\mathcal{E}}^{\text{ст}}, \vec{\mathcal{H}}^{\text{ст}}$ считаются заданными. В качестве примера можно привести следующую задачу. Пусть требуется определить электромагнитное поле, создаваемое в любой точке пространства сторонними источниками $\vec{J}^{e,\text{ст}}, R^{e,\text{ст}}$. Выделим область V , ограниченную поверхностью S , в которой расположены все сторонние источники (рис. 3.5а) и определим $\vec{\mathcal{E}}_{\tau}, \vec{\mathcal{H}}_{\tau}$ на поверхности S , которые в дальнейшем будем считать сторонними: $\vec{\mathcal{E}}_{\tau}^{\text{ст}}, \vec{\mathcal{H}}_{\tau}^{\text{ст}}$. По ним можно определять электромагнитное поле вне объёма V (рис. 3.5б). В соответствии с формулами (3.4.4) и (3.4.5) при этом заданными считаются и $\vec{\eta}^{e,\text{ст}}, \vec{\eta}^{m,\text{ст}}$. Указанная выше процедура перехода от одной краевой задачи электродинамики к другой часто может существенно упростить вычисления полей. Возможность указанного упрощения связана, по крайней мере, с двумя обстоятельствами. Во-первых, учитывая физические и геометрические особенности задачи, можно выбрать простую поверхность S . Например, часто в роли поверхности S может выступать плоскость. Во-вторых, иногда $\vec{\mathcal{E}}_{\tau}^{\text{ст}}, \vec{\mathcal{H}}_{\tau}^{\text{ст}}$ можно определить приближённо, исходя, опять же, из физических и геометрических особенностей задачи.

Подстановка соотношений (3.4.7), (3.4.8) в (3.4.1) приводит к замкнутой системе уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathcal{H}} &= \varepsilon_a \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \sigma^e \vec{\mathcal{E}} + \vec{J}^{e,\text{ст}}, \quad \text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\mu_a \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} - \sigma^m \vec{\mathcal{H}} - \vec{J}^{m,\text{ст}}, \\ \text{div } \varepsilon_a \vec{\mathcal{E}} &= R^e, \quad \text{div } \mu_a \vec{\mathcal{H}} = R^m. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

3.4.2. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд поля. Граничные условия.

В дальнейшем будем рассматривать гармонические во времени электромагнитные поля. В соответствии с методом комплексных амплитуд (см. п. 2.4) запишем:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[\vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \right], \quad \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t} \right], \\ \vec{J}^{e,\text{ст}}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[\vec{j}^{e,\text{ст}}(\vec{r}) e^{i\omega t} \right], \quad R^{e,\text{ст}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\rho^{e,\text{ст}}(\vec{r}) e^{i\omega t} \right], \\ \vec{J}^{m,\text{ст}}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[\vec{j}^{m,\text{ст}}(\vec{r}) e^{i\omega t} \right], \quad R^{m,\text{ст}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\rho^{m,\text{ст}}(\vec{r}) e^{i\omega t} \right], \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

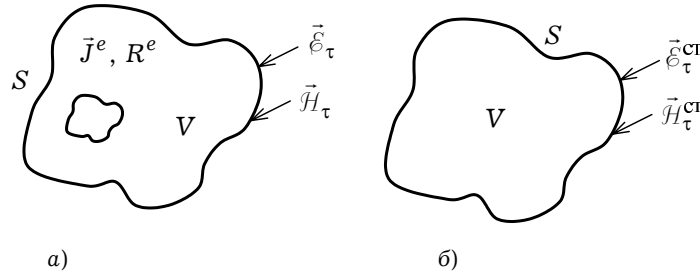


Рис. 3.5

где $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$; $\vec{j}^{e,m}$, $\rho^{e,m}$ — комплексные амплитуды соответствующих векторов.

При этом уравнения Максвелла относительно комплексных амплитуд получаются заменой $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$. В результате из (3.4.9) имеем:

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon_a \vec{E} + \sigma^e \vec{E} + \vec{j}^{e,ct}, \quad (3.4.11)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_a \vec{H} - \sigma^m \vec{H} - \vec{j}^{m,ct},$$

$$\text{div } \epsilon_a \vec{E} = \rho^e, \quad \text{div } \mu_a \vec{H} = \rho^m, \quad (3.4.12)$$

где ρ^e , ρ^m — комплексные амплитуды общих плотностей свободных зарядов, в том числе и сторонних.

Для однородной изотропной среды ($\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$) уравнения Максвелла (3.4.11) принимают вид:

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon_0 \epsilon_k \vec{E} + \vec{j}^{e,ct}, \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_0 \mu_k \vec{H} - \vec{j}^{m,ct}, \quad (3.4.13)$$

где $\epsilon_k = \epsilon - i\sigma^e/(\omega\epsilon_0)$ — комплексная диэлектрическая проницаемость среды, $\mu_k = \mu - i\sigma^m/(\omega\mu_0)$ — комплексная магнитная проницаемость среды, ϵ и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Граничные условия для векторов \vec{E} и \vec{H} при наличии на границе раздела поверхностных электрических и магнитных токов и зарядов (рис. 3.6) имеют вид:

$$[\vec{n}_0, \vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}] = -\vec{\eta}^m, \quad [\vec{n}_0, \vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}] = \vec{\eta}^e, \quad (3.4.14)$$

$$\epsilon_0 (\epsilon_k^{(2)} \vec{E}^{(2)} - \epsilon_k^{(1)} \vec{E}^{(1)}) \cdot \vec{n}_0 = \xi^e, \quad \mu_0 (\mu_k^{(2)} \vec{H}^{(2)} - \mu_k^{(1)} \vec{H}^{(1)}) \cdot \vec{n}_0 = \xi^m, \quad (3.4.15)$$

где $\vec{\eta}^e$, $\vec{\eta}^m$ — комплексные амплитуды поверхностных плотностей электрического и магнитного токов; ξ^e , ξ^m — комплексные амплитуды поверхностных плотностей электрического и магнитного зарядов. Заметим, что под поверхностными токами и зарядами в уравнениях (3.4.14) и (3.4.15) понимаются как сторонние токи и заряды, так и заряды, возбуждённые электромагнитным полем.

На поверхности идеального электрического проводника ($\vec{E}^{(1)} = \vec{H}^{(1)} = 0$) граничные условия принимают более простую форму:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 (\vec{n}_0, \epsilon_k^{(2)} \vec{E}^{(2)}) &= \xi^e, & [\vec{n}_0, \vec{E}^{(2)}] &= 0, \\ (\vec{n}_0, \mu_k^{(2)} \vec{H}^{(2)}) &= 0, & [\vec{n}_0, \vec{H}^{(2)}] &= \vec{\eta}^e, \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

то есть на идеальном металле ($\sigma^e \rightarrow \infty$) магнитные токи и заряды не существуют.

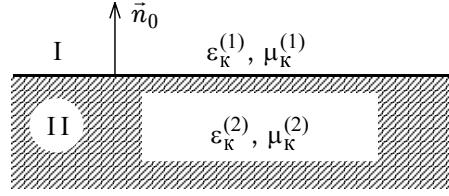


Рис. 3.6

Соответственно, на идеальном магнитном проводнике ($\sigma^m \rightarrow \infty$) отсутствуют электрические токи и заряды и граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} (\vec{n}_0, \epsilon_k^{(2)} \vec{E}^{(2)}) &= 0, & [\vec{n}_0, \vec{E}^{(2)}] &= -\vec{\eta}^m, \\ \mu_0 (\vec{n}_0, \mu_k^{(2)} \vec{H}^{(2)}) &= \xi^m, & [\vec{n}_0, \vec{H}^{(2)}] &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

3.5. Лемма Лоренца для изотропных и анизотропных сред

Пусть в анизотропной среде с тензорными параметрами $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\mu}$, являющимися произвольными функциями координат, задано объёмное распределение сторонних электрических и магнитных токов $\vec{j}_{\text{ст}}^{e(1)}, \vec{j}_{\text{ст}}^{m(1)}$. Запишем уравнения Максвелла для комплексных амплитуд электромагнитного поля, возбуждаемого этими токами (поле $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$):

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}^{(1)} &= i\omega \epsilon_0 \tilde{\epsilon} \vec{E}^{(1)} + \vec{j}_{\text{ст}}^{e(1)}, \\ \text{rot } \vec{E}^{(1)} &= -i\omega \mu_0 \tilde{\mu} \vec{H}^{(1)} - \vec{j}_{\text{ст}}^{m(1)}. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Оставляя частоту колебаний ω неизменной, зададим в той же среде другое распределение сторонних токов $\vec{j}_{\text{ст}}^{e(2)}, \vec{j}_{\text{ст}}^{m(2)}$. Поле $\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}$, возбуждаемое этими токами, удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}^{(2)} &= i\omega \epsilon_0 \tilde{\epsilon} \vec{E}^{(2)} + \vec{j}_{\text{ст}}^{e(2)}, \\ \text{rot } \vec{E}^{(2)} &= -i\omega \mu_0 \tilde{\mu} \vec{H}^{(2)} - \vec{j}_{\text{ст}}^{m(2)}. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Умножим скалярно первое уравнение системы (3.5.1) на $\vec{E}^{(2)}$, второе уравнение системы (3.5.2) на $\vec{H}^{(1)}$ и вычтем из первого полученного уравнения второе. Воспользовавшись векторным тождеством $\text{div} [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{B} \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \text{rot } \vec{B}$, получим

$$\begin{aligned} -\text{div} [\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(1)}] &= i\omega \epsilon_0 \vec{E}^{(2)} \tilde{\epsilon} \vec{E}^{(1)} + i\omega \mu_0 \vec{H}^{(1)} \tilde{\mu} \vec{H}^{(2)} + \\ &+ \vec{E}^{(2)} \vec{j}_{\text{ст}}^{e(1)} + \vec{H}^{(1)} \vec{j}_{\text{ст}}^{m(2)}. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Далее умножим скалярно второе уравнение системы (3.5.1) на $\vec{H}^{(2)}$, первое уравнение системы (3.5.2) на $\vec{E}^{(1)}$ и вычтем из первого уравнения второе. В результате

получим:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left[\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(2)} \right] &= i\omega\epsilon_0 \vec{E}^{(1)} \vec{\epsilon} \vec{E}^{(2)} + i\omega\mu_0 \vec{H}^{(2)} \vec{\mu} \vec{H}^{(1)} + \\ &+ \vec{E}^{(1)} \vec{j}_{\text{CT}}^{e(2)} + \vec{H}^{(2)} \vec{j}_{\text{CT}}^{m(1)}. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Сложив уравнения (3.5.3) и (3.5.4), получаем уравнение, называемое *леммой Лоренца* для сред с произвольными тензорными параметрами [Л10.3]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left\{ \left[\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(2)} \right] - \left[\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(1)} \right] \right\} &= i\omega \left\{ \epsilon_0 \left(\vec{E}^{(2)} \vec{\epsilon} \vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(1)} \vec{\epsilon} \vec{E}^{(2)} \right) - \right. \\ &\left. - \mu_0 \left(\vec{H}^{(2)} \vec{\mu} \vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(1)} \vec{\mu} \vec{H}^{(2)} \right) \right\} + \vec{E}^{(2)} \vec{j}_{\text{CT}}^{e(1)} - \vec{E}^{(1)} \vec{j}_{\text{CT}}^{e(2)} + \vec{H}^{(1)} \vec{j}_{\text{CT}}^{m(2)} - \vec{H}^{(2)} \vec{j}_{\text{CT}}^{m(1)}. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Рассмотрим соотношение (3.5.5) более подробно. Представим $\vec{\epsilon}$ и $\vec{\mu}$ в виде сумм симметричных ($\vec{\epsilon}_c$, $\vec{\mu}_c$) и антисимметричных ($\vec{\epsilon}_{as}$, $\vec{\mu}_{as}$) тензоров, для которых

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(2)} \vec{\epsilon}_c \vec{E}^{(1)} &= \vec{E}^{(1)} \vec{\epsilon}_c \vec{E}^{(2)}, \quad \vec{E}^{(2)} \vec{\epsilon}_{as} \vec{E}^{(1)} = -\vec{E}^{(1)} \vec{\epsilon}_{as} \vec{E}^{(2)}, \\ \vec{H}^{(2)} \vec{\mu}_c \vec{H}^{(1)} &= \vec{H}^{(1)} \vec{\mu}_c \vec{H}^{(2)}, \quad \vec{H}^{(2)} \vec{\mu}_{as} \vec{H}^{(1)} = -\vec{H}^{(1)} \vec{\mu}_{as} \vec{H}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

С учётом (3.5.6) лемма Лоренца запишется в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left\{ \left[\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(2)} \right] - \left[\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(1)} \right] \right\} &= i2\omega \left(\epsilon_0 \vec{E}^{(2)} \vec{\epsilon}_{as} \vec{E}^{(1)} - \mu_0 \vec{H}^{(2)} \vec{\mu}_{as} \vec{H}^{(1)} \right) + \\ &+ \vec{E}^{(2)} \vec{j}_{\text{CT}}^{e(1)} - \vec{E}^{(1)} \vec{j}_{\text{CT}}^{e(2)} + \vec{H}^{(1)} \vec{j}_{\text{CT}}^{m(2)} - \vec{H}^{(2)} \vec{j}_{\text{CT}}^{m(1)}. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Если $\vec{\epsilon}$ и $\vec{\mu}$ являются симметричными тензорами или, в частности, скалярными величинами, то уравнение (3.5.5) переходит в обычную *лемму Лоренца для изотропных сред*:

$$\operatorname{div} \left\{ \left[\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(2)} \right] - \left[\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(1)} \right] \right\} = \vec{E}^{(2)} \vec{j}_{\text{CT}}^{e(1)} + \vec{H}^{(1)} \vec{j}_{\text{CT}}^{m(2)} - \vec{E}^{(1)} \vec{j}_{\text{CT}}^{e(2)} - \vec{H}^{(2)} \vec{j}_{\text{CT}}^{m(1)}. \quad (3.5.8)$$

Уравнения (3.5.5), (3.5.7), (3.5.8) представляют собой запись *леммы Лоренца в дифференциальной форме*. Проинтегрируем уравнение (3.5.7) по объёму V , ограниченному поверхностью S . Пользуясь при этом теоремой Остроградского-Гаусса, получим *лемму Лоренца в интегральной форме*:

$$\begin{aligned} \oint_S \left\{ \left[\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(2)} \right] - \left[\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(1)} \right] \right\} \vec{n}_0 dS &= 2i\omega \int_V \left(\epsilon_0 \vec{E}^{(2)} \vec{\epsilon}_{as} \vec{E}^{(1)} - \right. \\ &\left. - \mu_0 \vec{H}^{(2)} \vec{\mu}_{as} \vec{H}^{(1)} \right) dV + \int_V \left(\vec{E}^{(2)} \vec{j}_{\text{CT}}^{e(1)} + \vec{H}^{(1)} \vec{j}_{\text{CT}}^{m(2)} - \vec{E}^{(1)} \vec{j}_{\text{CT}}^{e(2)} - \vec{H}^{(2)} \vec{j}_{\text{CT}}^{m(1)} \right) dV, \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

где \vec{n}_0 — единичная, внешняя по отношению к поверхности S , нормаль.

Если внутри поверхности S среда является изотропной, лемма Лоренца в интегральной форме принимает вид:

$$\begin{aligned} \oint_S \left\{ \left[\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(2)} \right] - \left[\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(1)} \right] \right\} \vec{n}_0 dS &= \\ &= \int_V \left(\vec{E}^{(2)} \vec{j}_{\text{CT}}^{e(1)} + \vec{H}^{(1)} \vec{j}_{\text{CT}}^{m(2)} - \vec{E}^{(1)} \vec{j}_{\text{CT}}^{e(2)} - \vec{H}^{(2)} \vec{j}_{\text{CT}}^{m(1)} \right) dV, \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Лемма Лоренца в интегральной форме используется во многих задачах, в частности, при составлении интегральных уравнений относительно распределе-

ний электрических токов, наводимых на проводящих телах. Ниже с помощью леммы Лоренца выводятся теоремы эквивалентности и взаимности.

3.6(*). Теоремы (соотношения) взаимности

Рассмотрим два электромагнитных поля $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}$, возбуждаемых в объёме V , ограниченном поверхностью S , сторонними токами $\vec{j}_{\text{ст}}^{e(1)}, \vec{j}_{\text{ст}}^{m(1)}$ и $\vec{j}_{\text{ст}}^{e(2)}, \vec{j}_{\text{ст}}^{m(2)}$. В первом случае свойства среды описываются зависящими от пространственных координат тензорами диэлектрической $\vec{\epsilon}^{(1)}(\vec{r})$ и магнитной $\vec{\mu}^{(1)}(\vec{r})$ проницаемостей, во втором — тензорами $\vec{\epsilon}^{(2)}(\vec{r})$ и $\vec{\mu}^{(2)}(\vec{r})$. Пусть оба электромагнитных процесса имеют общую частоту ω . Тогда каждое из полей удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}^{(1)} &= i\omega \epsilon_0 \vec{\epsilon}^{(1)} \vec{E}^{(1)} + \vec{j}_{\text{ст}}^{e(1)}, \\ \text{rot } \vec{E}^{(1)} &= -i\omega \mu_0 \vec{\mu}^{(1)} \vec{H}^{(1)} - \vec{j}_{\text{ст}}^{m(1)} \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

и

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}^{(2)} &= i\omega \epsilon_0 \vec{\epsilon}^{(2)} \vec{E}^{(2)} + \vec{j}_{\text{ст}}^{e(2)}, \\ \text{rot } \vec{E}^{(2)} &= -i\omega \mu_0 \vec{\mu}^{(2)} \vec{H}^{(2)} - \vec{j}_{\text{ст}}^{m(2)}. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

В общем случае на поверхности S для полей $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}$ могут быть заданы различные граничные импедансные (адмитансные) условия [Л10.6].

Из (3.6.1), (3.6.2) с использованием выражения векторной алгебры $\text{div}[\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(2)}] = \vec{H}^{(2)} \text{rot } \vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(1)} \text{rot } \vec{H}^{(2)}$ и теоремы Остроградского-Гаусса, получаем:

$$\begin{aligned} &\oint_S \left\{ [\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(2)}] - [\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(1)}] \right\} \vec{n}_0 dS + i\omega \int_V \left\{ \mu_0 \left(\vec{H}^{(2)} \vec{\mu}^{(1)} \vec{H}^{(1)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \vec{H}^{(1)} \vec{\mu}^{(2)} \vec{H}^{(2)} \right) - \epsilon_0 \left(\vec{E}^{(1)} \vec{\epsilon}^{(2)} \vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(2)} \vec{\epsilon}^{(1)} \vec{E}^{(1)} \right) \right\} dV = \\ &= \int_V \left[\vec{H}^{(1)} \vec{j}_{\text{ст}}^{m(2)} + \vec{E}^{(2)} \vec{j}_{\text{ст}}^{e(1)} - \vec{H}^{(2)} \vec{j}_{\text{ст}}^{m(1)} - \vec{E}^{(1)} \vec{j}_{\text{ст}}^{e(2)} \right] dV. \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

При определённых условиях из (3.6.3), которое является математической записью теоремы (соотношения) взаимности, получаем уравнение:

$$\int_V \left[\vec{H}^{(1)} \vec{j}_{\text{ст}}^{m(2)} + \vec{E}^{(2)} \vec{j}_{\text{ст}}^{e(1)} - \vec{H}^{(2)} \vec{j}_{\text{ст}}^{m(1)} - \vec{E}^{(1)} \vec{j}_{\text{ст}}^{e(2)} \right] dV = 0. \quad (3.6.4)$$

Рассмотрим условия, при которых выполняется теорема взаимности. Первое слагаемое в левой части соотношения (3.6.3) обращается в нуль в случаях:

1. Поверхность S является идеально проводящей, в этом случае учитывается, что члены $[\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(2)}] \vec{n}_0$, $[\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(1)}] \vec{n}_0$ пропорциональны тангенциальным к поверхности компонентам $\vec{E}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}$.

2. Поверхность S , ограничивающая объём V , стремится к бесконечности. Тогда в силу условия излучения (3.1.19) поверхностный интеграл в (3.6.3) также оказывается равным нулю.

3. В случае задания на поверхности S граничных условий в наиболее общей

форме (3.3.1):

$$[\vec{n}_0, \vec{E}^{(1)}] = \vec{Z}^{(1)} \vec{H}^{(1)}, \quad (3.6.5)$$

$$[\vec{n}_0, \vec{E}^{(2)}] = \vec{Z}^{(2)} \vec{H}^{(2)}, \quad (3.6.6)$$

когда выполняется условие

$$\vec{Z}^{(2)} = [\vec{Z}^{(1)}]^T, \quad (3.6.7)$$

где индекс «Т» означает операцию транспонирования аффинора $\vec{Z}^{(1)}$.

4. С учётом скин-эффекта в толще любой проводящей оболочки, ограничивающей объём V .

Обращение в нуль второго слагаемого (объёмного интеграла) в (3.6.3) происходит в случаях:

1. Рассматриваемые поля $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}$ возбуждаются в одной и той же изотропной среде:

$$\vec{\epsilon}^{(2)} = \vec{\epsilon}^{(1)} = \epsilon \vec{I}, \quad \vec{\mu}^{(2)} = \vec{\mu}^{(1)} = \mu \vec{I}, \quad (3.6.8)$$

где \vec{I} — единичный аффинор.

2. Поля $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}$ возбуждаются в одной и той же анизотропной среде, описываемой симметричными тензорами:

$$\vec{\epsilon}^{(2)} = \vec{\epsilon}^{(1)} = \vec{\epsilon}_c, \quad \vec{\mu}^{(2)} = \vec{\mu}^{(1)} = \vec{\mu}_c. \quad (3.6.9)$$

3. Параметры сред для полей $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}$ описываются транспонированными тензорами:

$$\vec{\epsilon}^{(2)} = [\vec{\epsilon}^{(1)}]^T, \quad \vec{\mu}^{(2)} = [\vec{\mu}^{(1)}]^T. \quad (3.6.10)$$

Таким образом, выполнение любой пары условий из (3.6.5)-(3.6.7) и (3.6.8)-(3.6.10) обеспечивает выполнение теоремы взаимности (3.6.4). В общем случае теорема (соотношение) взаимности связывает поля «транспонированных» задач, то есть задач, для которых справедливы соотношения (3.6.7) для граничных условий на поверхности S и соотношения (3.6.10) для параметров среды. В этом случае теорема взаимности сопоставляет результаты двух опытов в одном и том же объёме V , ограниченном поверхностью S , но с различными средами, для которых справедливо условие (3.6.10). Теорема взаимности применима и к полям в одной и той же среде, если только среда является изотропной, или когда анизотропия среды является симметричной. В этом случае теорема взаимности сопоставляет результаты двух опытов в объёме V для одной и той же среды.

Поясним соотношение взаимности (3.6.4) на примерах, в которых условия возбуждения будут выбраны специальным образом. Пусть магнитные токи отсутствуют, а электрические токи являются токами элементарных электрических диполей:

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\text{ст}}^{e(1)} &= \vec{I}^{(1)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1), & \vec{j}_{\text{ст}}^{e(2)} &= \vec{I}^{(2)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_2), \\ \vec{j}_{\text{ст}}^{m(1)} &= \vec{j}_{\text{ст}}^{m(2)} = 0, \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

где $\vec{I}^{(1)}, \vec{I}^{(2)}$ — постоянные векторы.

В этом случае сравниваются поля, созданные двумя электрическими диполями, расположенными соответственно в точках \vec{r}_1 и \vec{r}_2 и ориентированными по направлениям $\vec{I}^{(1)}$ и $\vec{I}^{(2)}$. Из соотношения взаимности (3.6.4) с использованием свойства дельта-функции (П.5.1) при этом получаем:

$$\vec{I}^{(1)} \vec{E}^{(2)}(\vec{r}_1) = \vec{I}^{(2)} \vec{E}^{(1)}(\vec{r}_2). \quad (3.6.12)$$

Согласно этому соотношению в области с параметрами $\vec{\epsilon}, \vec{\mu}, \vec{Z}$ составляющая электрического поля в точке \vec{r}_2 в направлении $\vec{I}^{(2)}$, возбуждаемого электрическим током $\vec{I}^{(1)}$ в точке \vec{r}_1 , совпадает с составляющей электрического поля в точке \vec{r}_1 в направлении $\vec{I}^{(1)}$, возбуждаемого электрическим током $\vec{I}^{(2)}$ в точке \vec{r}_2 в области с той же геометрией и параметрами $\vec{\epsilon}^T, \vec{\mu}^T, \vec{Z}^T$.

Если соотношение (3.6.12) применяется к изотропной среде при условии, что граница S отсутствует (бесконечная среда), либо S представляет собой металлизированную поверхность, то теорема взаимности сопоставляет результаты двух опытов в одной и той же среде. В первом опыте диполь помещается в точку \vec{r}_1 , а поле наблюдается в некоторой точке \vec{r}_2 . Во втором опыте диполь помещается в точку \vec{r}_2 , а поле измеряется в точке \vec{r}_1 . Утверждается, что соответствующие компоненты полей в обоих опытах одинаковы. Таким образом, в отсутствие невзаимных элементов невозможно, например, передать энергию по тракту в одном направлении и обеспечить отсутствие передачи в обратном направлении.

Аналогичным образом в случае

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\text{ст}}^{m(1)} &= \vec{I}^{m(1)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1), \quad \vec{j}_{\text{ст}}^{m(2)} = \vec{I}^{m(2)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_2), \\ \vec{j}_{\text{ст}}^{e(1)} &= \vec{j}_{\text{ст}}^{e(2)} = 0, \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

где $\vec{I}^{m(1)}, \vec{I}^{m(2)}$ — постоянные векторы, имеем

$$\vec{I}^{m(1)} \vec{H}^{(2)}(\vec{r}_1) = \vec{I}^{m(2)} \vec{H}^{(1)}(\vec{r}_2). \quad (3.6.14)$$

Соотношение (3.6.14) устанавливает связь между полями, созданными двумя элементарными магнитными диполями (3.6.13).

Пусть в другом примере с двумя элементарными диполями первый является электрическим с моментом $\vec{I}^{(1)}$, второй — магнитным с моментом $\vec{I}^{m(2)}$. Тогда из теоремы (3.6.4) получим:

$$\vec{I}^{(1)} \vec{E}^{(2)}(\vec{r}_1) = -\vec{I}^{m(2)} \vec{H}^{(1)}(\vec{r}_2). \quad (3.6.15)$$

Дадим физическое толкование равенства (3.6.15) в случае, когда теорема взаимности (3.6.4) применяется для сопоставления двух измерений в одной и той же изотропной среде. Пусть $\vec{I}^{(1)} = J^{(1)} \vec{l}_1$, $\vec{I}^{m(2)} = J^{m(2)} \vec{l}_2$, где \vec{l}_1, \vec{l}_2 — единичные векторы, определяющие направления соответствующих диполей. Тогда соотношение (3.6.15) можно переписать следующим образом:

$$J^{(1)} \mathcal{E}_2(\vec{r}_1) = -J^{m(2)} \mathcal{M}_2(\vec{r}_2), \quad (3.6.16)$$

где $\mathcal{E}_2(\vec{r}_1) = \vec{l}_1 \vec{E}^{(2)}(\vec{r}_1)$ — э.д.с, наводимая магнитным диполем в месте расположения электрического, $\mathcal{M}_2(\vec{r}_2) = \vec{l}_2 \vec{H}^{(2)}(\vec{r}_2)$ — м.д.с, наводимая электрическим диполем в месте расположения магнитного.

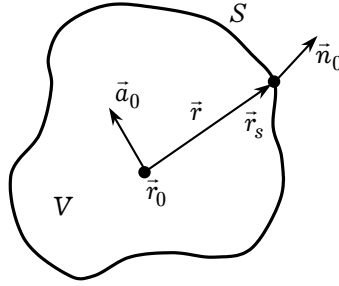


Рис. 3.7

Теоремы взаимности связывают между собой определённые компоненты векторов поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла. Если, например, решена задача о вертикальном электрическом диполе (\vec{l}_1 направлен вертикально), расположенном в точке \vec{r}_1 , и оказалось, что этот диполь не создаёт в какой-либо точке \vec{r}_2 магнитное поле в направлении \vec{l}_2 (то есть $\vec{H}^{(1)}(\vec{r}_2) \vec{l}_2 = 0$), то согласно соотношению (3.6.15), электрическое поле магнитного диполя, расположенного в точке \vec{r}_2 и ориентированного вдоль направления \vec{l}_2 , не содержит в точке \vec{r}_1 вертикальной компоненты электрического поля: $\vec{E}^{(2)}(\vec{r}_1) \vec{l}_1 = 0$.

3.7(*). Теорема эквивалентности. Магнитные токи

Требуется определить электромагнитное поле в области V , ограниченной замкнутой поверхностью S (рис. 3.7). Пусть в области V , содержащей изотропную среду, задано распределение электрических и магнитных токов, и также известны тангенциальные составляющие напряжённости искомого электрического и магнитного полей на поверхности S . Эти условия оказываются достаточными по теореме единственности для однозначного определения поля в области V .

Для определения искомого поля воспользуемся леммой Лоренца для изотропной среды (3.5.10). Будем считать, что в этом соотношении $\vec{E} = \vec{E}^{(1)}$, $\vec{H} = \vec{H}^{(1)}$ — искомое поле, порождаемое заданным распределением возбуждающих токов $\vec{j}_{\text{ст}}^e = \vec{j}_{\text{ст}}^{e(1)}$, $\vec{j}_{\text{ст}}^m = \vec{j}_{\text{ст}}^{m(1)}$. Под $\vec{E}^{(2)}$, $\vec{H}^{(2)}$ будем понимать поле вспомогательных точечных электрического и магнитного источников, расположенных в точке наблюдения \vec{r}_0 искомого поля.

Возьмём в качестве вспомогательного источника электрический диполь в точке \vec{r}_0 с единичным электрическим моментом тока, совпадающим по направлению с единичным вектором \vec{a}_0 :

$$\vec{j}_{\text{ст}}^{m(2)} = 0, \quad \vec{j}_{\text{ст}}^{e(2)} = \vec{a}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (3.7.1)$$

Подставив соотношения (3.7.1) в лемму Лоренца (3.5.10), получаем:

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 \vec{E}(\vec{r}_0) = & \int_V \left\{ \vec{j}_{\text{ст}}^e(\vec{r}) \vec{E}^{(e)}(\vec{r}, \vec{r}_0) - \vec{j}_{\text{ст}}^m(\vec{r}) \vec{H}^{(e)}(\vec{r}, \vec{r}_0) \right\} dV + \\ & + \oint_S \left\{ \left[\vec{E}^{(e)}, \vec{H} \right] - \left[\vec{E}, \vec{H}^{(e)} \right] \right\} \vec{n}_0 dS, \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

где через $\vec{E}^{(e)}(\vec{r}, \vec{r}_0)$, $\vec{H}^{(e)}(\vec{r}, \vec{r}_0)$ обозначено поле вспомогательного электрического диполя, расположенного в точке \vec{r}_0 и обладающего единичным моментом тока \vec{a}_0 .

Если в точке \vec{r}_0 располагается магнитный диполь с единичным моментом тока, совпадающим по направлению с единичным вектором \vec{a}_0 :

$$\vec{j}_{\text{ст}}^{e(2)} = 0, \quad \vec{j}_{\text{ст}}^{m(2)} = \vec{a}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (3.7.3)$$

из леммы Лоренца получается выражение

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 \vec{H}(\vec{r}_0) = & \int_V \left[\vec{j}_{\text{ст}}^m(\vec{r}) \vec{H}^{(m)}(\vec{r}, \vec{r}_0) - \vec{j}_{\text{ст}}^e(\vec{r}) \vec{E}^{(m)}(\vec{r}, \vec{r}_0) \right] dV + \\ & + \oint_S \left\{ \left[\vec{E}, \vec{H}^{(m)} \right] - \left[\vec{E}^{(m)}, \vec{H} \right] \right\} \vec{n}_0 dS, \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

где через $\vec{E}^{(m)}$, $\vec{H}^{(m)}$ обозначено поле вспомогательного магнитного диполя, расположенного в точке \vec{r}_0 .

Основой дальнейших рассуждений является следующая особенность формул (3.7.2) и (3.7.4): одни и те же поля $\vec{E}^{(e)}$, $\vec{H}^{(e)}$ (или $\vec{E}^{(m)}$, $\vec{H}^{(m)}$) в первом слагаемом умножаются на $\vec{j}_{\text{ст}}^e$, $\vec{j}_{\text{ст}}^m$, во втором на тангенциальные к поверхности интегрирования составляющие искомых полей \vec{E}_τ , \vec{H}_τ . Следовательно, поле в любой точке \vec{r}_0 будет одинаковым в двух задачах — в одной, в которой на границе S касательные составляющие полей равны заданным значениям \vec{E}_τ , \vec{H}_τ , и в другой, в которой на границе S задаются распределённые поверхностные электрические и магнитные токи (сравните с формулами (3.4.4) и (3.4.5)) с плотностями:

$$\vec{\eta}^e = [\vec{H}, \vec{n}_0], \quad (3.7.5a)$$

$$\vec{\eta}^m = [\vec{n}_0, \vec{E}], \quad (3.7.5b)$$

где \vec{n}_0 — нормаль к поверхности, направленная из объёма V .

С учётом принятых обозначений (3.7.5) соотношения (3.7.2) и (3.7.4) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 \vec{E}(\vec{r}_0) = & \int_V \left\{ \vec{j}_{\text{ст}}^e(\vec{r}) \vec{E}^{(e)}(\vec{r}, \vec{r}_0) - \vec{j}_{\text{ст}}^m(\vec{r}) \vec{H}^{(e)}(\vec{r}, \vec{r}_0) \right\} dV + \\ & + \oint_S \left\{ \vec{\eta}^e(\vec{r}_s) \vec{E}^{(e)}(\vec{r}_s, \vec{r}_0) - \vec{\eta}^m(\vec{r}_s) \vec{H}^{(e)}(\vec{r}_s, \vec{r}_0) \right\} dS, \end{aligned} \quad (3.7.6a)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 \vec{H}(\vec{r}_0) = & \int_V \left\{ \vec{j}_{\text{ст}}^m(\vec{r}) \vec{H}^{(m)}(\vec{r}, \vec{r}_0) - \vec{j}_{\text{ст}}^e(\vec{r}) \vec{E}^{(m)}(\vec{r}, \vec{r}_0) \right\} dV + \\ & + \oint_S \left\{ \vec{\eta}^m(\vec{r}_s) \vec{H}^{(m)}(\vec{r}_s, \vec{r}_0) - \vec{\eta}^e(\vec{r}_s) \vec{E}^{(m)}(\vec{r}_s, \vec{r}_0) \right\} dS, \end{aligned} \quad (3.7.6b)$$

где \vec{r}_s — текущая точка (точка интегрирования), принадлежащая поверхности S .

Таким образом, для определения поля в области V необходимо знать распределение возбуждающих объёмных токов в этой области и распределение

тангенциальных составляющих напряжённости электрического и магнитного полей (искемого поля) на ограничивающей поверхности S . Причём тангенциальные составляющие поля, согласно выражениям (3.7.5), могут рассматриваться как поверхностные плотности электрических $\vec{\eta}^e$ и магнитных $\vec{\eta}^m$ токов, распределённых на поверхности S .

В том случае, когда в области V объёмные сторонние токи отсутствуют ($\vec{j}_{\text{ст}}^e = \vec{j}_{\text{ст}}^m = 0$), первые слагаемые в правых частях формул (3.7.6) исчезают и поле в области V определяется только поверхностными интегралами, то есть поверхностными электрическими и магнитными токами. Поскольку поверхность S может быть выбрана произвольно, очевидно, что фактически поле в области V определяется сторонними электрическими и магнитными токами, распределёнными вне области V . В этом смысле поверхностные электрические и магнитные токи, определяемые формулами (3.7.5), при расчёте поля в области V являются эквивалентными объёмному распределению истинных возбуждающих токов вне области V . Последнее утверждение и составляет содержание *теоремы эквивалентности*, которая говорит о том, что поле в свободной от источников области V , ограниченной поверхностью S , может быть вычислено через электрические и магнитные токи, распределённые на этой поверхности, то есть действительные источники поля можно заменить «эквивалентными» поверхностными токами.

Обратим теперь внимание на то, что при выборе вспомогательных полей $\vec{E}^{(e)}$, $\vec{H}^{(e)}$ и $\vec{E}^{(m)}$, $\vec{H}^{(m)}$ допускается некоторый произвол в смысле наложения на них граничных условий на поверхности S . Проще всего потребовать, чтобы поле $\vec{E}^{(e)}$, $\vec{H}^{(e)}$ (или $\vec{E}^{(m)}$, $\vec{H}^{(m)}$) удовлетворяло принципу излучения на бесконечности. Тогда тангенциальные составляющие поля $\vec{E}^{(e)}$, $\vec{H}^{(e)}$ (или $\vec{E}^{(m)}$, $\vec{H}^{(m)}$) на границе S должны быть конечными. Для однородной изотропной области V это будут поля электрического (или магнитного) диполя. В этом случае для однозначного определения поля внутри поверхности достаточно знать на поверхности S распределение эквивалентных электрических $\vec{\eta}^e$ и магнитных $\vec{\eta}^m$ токов.

Вспомогательные поля $\vec{E}^{(e)}$, $\vec{H}^{(e)}$ (или $\vec{E}^{(m)}$, $\vec{H}^{(m)}$) можно выбрать и таким образом, что поверхностные интегралы в формулах (3.7.6) будут содержать только по одному слагаемому. Действительно, если определить поле $\vec{E}^{(e)}$, $\vec{H}^{(e)}$ как решение системы уравнений Максвелла ($\vec{r}_0 \in V$)

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{H}^{(e)} &= i\omega\epsilon\epsilon_0\vec{E}^{(e)} + \vec{a}_0\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \\ \text{rot } \vec{E}^{(e)} &= -i\omega\mu\mu_0\vec{H}^{(e)},\end{aligned}\quad (3.7.7)$$

удовлетворяющее на поверхности S граничному условию

$$\vec{E}_\tau^{(e)}(\vec{r}) = 0; \vec{r} \in S, \quad (3.7.8)$$

то первый поверхностный интеграл в формуле (3.7.6a) исчезает, и поле во всём объёме будет определено лишь через граничное значение электрического поля (истинного поля) \vec{E}_τ на поверхности S . Если выбрать вспомогательное поле, удовлетворяющее системе уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{H}^{(m)} &= i\omega\epsilon\epsilon_0\vec{E}^{(m)}, \\ \text{rot } \vec{E}^{(m)} &= -i\omega\mu\mu_0\vec{H}^{(m)} - \vec{a}_0\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\end{aligned}\quad (3.7.9)$$

и граничному условию

$$\vec{H}_\tau^{(m)}(\vec{r}) = 0; \quad \vec{r} \in S, \quad (3.7.10)$$

то исчезает первый поверхностный интеграл в формуле (3.7.6б).

Разумеется, фактическое определение вспомогательных полей $\vec{E}^{(e)}, \vec{H}^{(e)}$ (или $\vec{E}^{(m)}, \vec{H}^{(m)}$), удовлетворяющих условию (3.7.8) или (3.7.10), представляет собой, вообще говоря, задачу значительно более трудную, нежели нахождение поля элементарного диполя в свободном пространстве. Однако для простых поверхностей эти поля находятся относительно легко. Например, если поверхность S есть плоскость, то они представляют собой сумму или разность полей двух элементарных диполей — одного, расположенного в точке \vec{r}_0 , в которой находится поле $\vec{E}(\vec{r}_0)$, и другого, являющегося зеркальным отображением первого относительно плоскости S .

В заключение отметим, что существование формул (3.7.5а) и (3.7.5б), устанавливающих соответствия между тангенциальными составляющими поля $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$ и эквивалентными поверхностными токами \vec{j} и \vec{j}^m , является одним из обоснований введения понятия магнитного тока.

3.8. Принцип двойственности

Рассматривая уравнения Максвелла для изотропной непроводящей среды, свободной от источников ($\vec{j}_{\text{ст}}^e = \vec{j}_{\text{ст}}^m = 0$), нетрудно заметить, что замена

$$\varepsilon \varepsilon_0 \rightarrow -\mu \mu_0, \quad \vec{E} \leftrightarrow \vec{H}, \quad \vec{D} \leftrightarrow \vec{B} \quad (3.8.1)$$

сохраняет систему уравнений Максвелла.

Действительно, первое уравнение (3.4.1) при отсутствии источников переходит во второе и, наоборот, второе уравнение — в первое; уравнения

$$\text{div } \vec{D} = R^e \quad \text{и} \quad \text{div } \vec{B} = R^m$$

при отсутствии свободных зарядов взаимно переходят одно в другое.

Отсюда можно сделать вывод, что если известно решение однородной краевой задачи: \vec{E}_1, \vec{H}_1 с граничным условием для электрического поля, например, $\vec{E}_\tau|_S = 0$ (S — поверхность, ограничивающая рассматриваемый объём), то решение однородной краевой задачи: \vec{E}_2, \vec{H}_2 с аналогичным (двойственным) граничным условием для магнитного поля $\vec{H}_\tau|_S = 0$, согласно (3.8.1), получается заменой:

$$\vec{E}_1 \rightarrow \vec{H}_2, \quad \vec{H}_1 \rightarrow \vec{E}_2, \quad \varepsilon_0 \varepsilon \leftrightarrow -\mu_0 \mu. \quad (3.8.2)$$

В первой задаче в данном конкретном случае поверхность S называется *электрической стенкой*, во второй — *магнитной*. Такой принцип получения решений задачи с двойственными граничными условиями называется *принципом двойственности*.

Принцип двойственности можно распространить и на неоднородные краевые задачи, то есть задачи с источниками, если симметризовать уравнения Максвелла, вводя магнитные токи и образующие эти токи подвижные магнитные заряды. Симметризованная система уравнений Максвелла имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\vec{J}^m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{D} &= R^e, \quad \text{div } \vec{B} = R^m. \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

Магнитный ток в (3.8.3) введён со знаком «–» для того, чтобы выполнялся закон сохранения магнитного заряда.

Придав симметрию уравнениям Максвелла, можно дать более широкое толкование принципа двойственности. Допустим, поле \vec{E}_1, \vec{H}_1 создаётся источником электрического типа. В этом случае в системе уравнений (3.8.3) $\vec{J}^m = 0$, под \vec{J} понимается сторонний электрический ток.

Учитывая симметрию уравнений Максвелла (3.8.3), можем утверждать, что магнитный сторонний ток, имеющий такое же координатное распределение, что и электрический, создаёт поле \vec{E}_2, \vec{H}_2 , удовлетворяющее системе уравнений (3.8.3), в которой $\vec{J} = 0$. При этом указанное поле, согласно принципу двойственности, получается заменой

$$\vec{E}_1 \rightarrow \vec{H}_2, \vec{H}_1 \rightarrow \vec{E}_2, \vec{J} \rightarrow \vec{J}^m, \epsilon_0 \epsilon \leftrightarrow -\mu_0 \mu. \quad (3.8.4)$$

Таким образом, принцип двойственности позволяет находить решения однородных краевых задач с двойственными граничными условиями и неоднородных, если известно решение задачи с источниками электрического типа, и наоборот.

В качестве примера применим принцип двойственности для определения электромагнитного поля магнитного диполя в бесконечном пространстве. Будем считать, что известно поле электрического диполя с моментом тока $I_z^3 l$ (l — длина диполя, I_z^3 — амплитуда тока в диполе), ориентированного вдоль оси OZ , в дальней зоне:

$$\begin{aligned} H_\varphi &= i \frac{I_z^3 l k}{4\pi r} \sin \theta e^{-ikr}, \\ E_\theta &= i \frac{I_z^3 l k^2}{4\pi \omega \epsilon_0 r} \sin \theta e^{-ikr}. \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

Если заменить электрический диполь магнитным диполем с моментом $I_z^M l$ и той же ориентацией в пространстве, то согласно принципу двойственности (3.8.4) его поле в дальней зоне определится формулами:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= -i \frac{I_z^M l k}{4\pi r} \sin \theta e^{-ikr}, \\ H_\theta &= i \frac{I_z^M l k^2}{4\pi \omega \mu_0 r} \sin \theta e^{-ikr}, \end{aligned}$$

получаемыми из (3.8.5) заменой (3.8.4).

В качестве второго примера применения принципа двойственности рассмотрим связь между двумя следующими внешними краевыми задачами.

Первая задача: Требуется найти поле $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$, порождаемое сторонними электрическими токами $\vec{j}_{\text{ст}}^{e(1)}$ в присутствии бесконечно тонкой идеально проводящей пластины, расположенной в плоскости $z = 0$ (рис. 3.8а).

Обозначим через $S_3^{(1)}$ — поверхность идеально проводящей пластины, через $S_{\text{III}}^{(1)}$ — остальную часть плоскости $z = 0$ и будем считать, что сторонние электрические токи расположены в верхнем полупространстве $z < 0$.

Двойственную задачу проще всего сформулировать используя теорему единственности для нижнего полупространства $z > 0$. В этой области источники

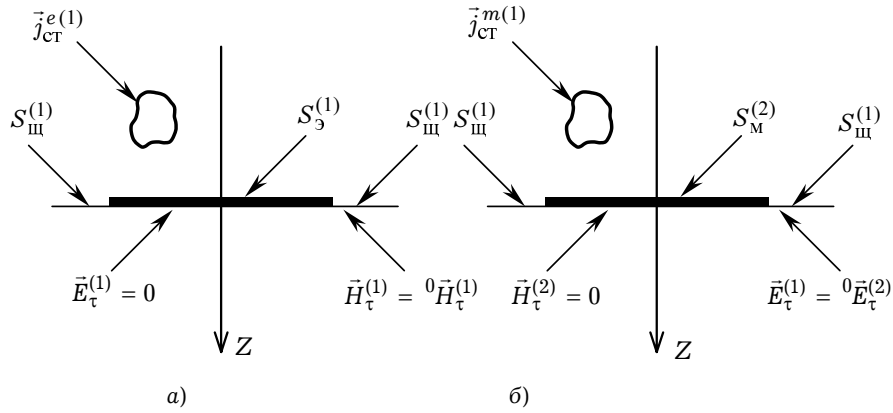


Рис. 3.8

отсутствуют, поэтому в первой задаче электромагнитное поле в ней ($z > 0$) определяется тангенциальными составляющими \vec{E}_τ или \vec{H}_τ в плоскости $z = 0$ однозначно. Электромагнитное поле первой задачи в плоскости $z = 0$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\vec{E}_\tau^{(1)} = 0 \text{ на } S_3^{(1)}, \quad \vec{H}_\tau^{(1)} = {}^0\vec{H}_\tau^{(1)} \text{ на } S_\text{щ}^{(1)}, \quad (3.8.6)$$

где ${}^0\vec{H}_\tau^{(1)}$ — стороннее тангенциальное поле на поверхности $S_\text{щ}^{(1)}$, порождаемое током $\vec{j}_\text{ст}^{e(1)}$.

Применяя принцип двойственности к граничным условиям (3.8.6), делаем замену: $\vec{E}^{(1)} \rightarrow \vec{H}^{(2)}$, $\vec{H}^{(1)} \rightarrow \vec{E}^{(2)}$. Тогда на поверхности S имеем:

$$\vec{H}_\tau^{(2)} = 0 \text{ на } S_M^{(2)}, \quad \vec{E}_\tau^{(2)} = {}^0\vec{E}_\tau^{(2)} \text{ на } S_\text{щ}^{(1)}, \quad (3.8.7)$$

где $S_M^{(2)}$ представляет собой уже магнитную пластину (геометрически $S_M^{(2)} \equiv S_3^{(1)}$), а ${}^0\vec{E}_\tau^{(2)}$ — тангенциальное электрическое поле на поверхности $S_\text{щ}^{(1)}$, порождаемое током $\vec{j}_\text{ст}^{m(2)}$ (рис. 3.8б). При этом справедлива перестановка

$${}^0\vec{E}_\tau^{(2)} \rightarrow {}^0\vec{H}_\tau^{(1)} \text{ на } S_\text{щ}.$$

Для окончательной формулировки двойственной задачи необходимо воспользоваться перестановочными соотношениями (3.8.4). Таким образом, двойственную задачу можно сформулировать следующим образом:

Требуется найти поле $\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}$, порождаемое сторонними магнитными токами $\vec{j}_\text{ст}^{m(2)}$ в присутствии бесконечно тонкой, идеально магнитопроводящей пластины, расположенной в плоскости $z = 0$ (рис. 3.8б) при граничных условиях (3.8.7) на поверхности $z = 0$. При выполнении условия $S_3^{(1)} \equiv S_M^{(2)}$ электродинамические задачи 1 и 2 будут двойственными.

Нетрудно заметить, что перестановочные соотношения (3.8.4) являются не единственно возможными. В частности, замена

$$\vec{j}_\text{ст}^e \rightarrow -\vec{j}_\text{ст}^m, \quad \epsilon\epsilon_0 \rightarrow \mu\mu_0, \quad \vec{E} \rightarrow -\vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow \vec{E}$$

также сохраняет систему уравнений Максвелла. Естественно, в этом случае необходимо, соответственно, в двойственной задаче изменить и граничные условия (3.8.7).

3.9(*). Метод эквивалентных электрических и магнитных токов поляризации

В некоторых случаях, особенно при нахождении электромагнитных полей в неоднородных средах, полезно вводить электрические и магнитные токи поляризации. Это связано с тем, что токи поляризации при нахождении полей могут рассматриваться как сторонние токи, но уже расположенные в однородном пространстве. Ниже рассмотрим так называемый *метод эквивалентных токов поляризации*, позволяющий сводить электродинамические задачи для неоднородных сред к задачам для однородного пространства.

Запишем уравнения Максвелла для электромагнитного поля в неоднородной среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon^{(1)}, \mu^{(1)}$, возбуждаемого сторонними источниками $\vec{j}_{\text{ст}}^e, \vec{j}_{\text{ст}}^m$:

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \varepsilon^{(1)} \vec{E} + \vec{j}_{\text{ст}}^e, \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu^{(1)} \vec{H} - \vec{j}_{\text{ст}}^m. \quad (3.9.1)$$

Прибавляя и отнимая к правым частям уравнений (3.9.1) величины $i\omega \varepsilon^{(2)} \vec{E}$ и $i\omega \mu^{(2)} \vec{H}$, где $\varepsilon^{(2)}, \mu^{(2)}$ — произвольно выбранные (из физических соображений) постоянные диэлектрическая и магнитная проницаемости, уравнения Максвелла (3.9.1) для неоднородной среды можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= i\omega \varepsilon^{(2)} \vec{E} + \vec{j}_{\text{пол}}^e + \vec{j}_{\text{ст}}^e, \\ \text{rot } \vec{E} &= -i\omega \mu^{(2)} \vec{H} - \vec{j}_{\text{пол}}^m - \vec{j}_{\text{ст}}^m, \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

где

$$\vec{j}_{\text{пол}}^e = i\omega \varepsilon_0 (\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}) \vec{E}, \quad \vec{j}_{\text{пол}}^m = i\omega \mu_0 (\mu^{(1)} - \mu^{(2)}) \vec{H} \quad (3.9.3)$$

— соответственно электрический и магнитный токи поляризации.

Таким образом, формальное введение токов поляризации по формулам (3.9.3) неоднородную среду сводит к однородной. К решению уравнений (3.9.2) можно теперь применять все методы, справедливые при решении задач о возбуждении электромагнитных волн в однородных средах.

В качестве примера рассмотрим задачу возбуждения сторонними токами $\vec{j}_{\text{ст}}^e, \vec{j}_{\text{ст}}^m$, являющимися произвольными функциями координат, тела объема V с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε, μ , окружённого неограниченной средой с параметрами ε_0, μ_0 . Решение уравнений (3.9.2) можно записать через векторные электродинамические потенциалы и функцию Грина свободного пространства следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -i\omega \mu_0 \vec{A} + \frac{1}{i\omega \varepsilon_0} \text{grad div } \vec{A} - \text{rot } \vec{A}^m, \\ \vec{H} &= -i\omega \varepsilon_0 \vec{A}^m + \frac{1}{i\omega \mu_0} \text{grad div } \vec{A}^m + \text{rot } \vec{A}, \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \int_V \vec{j}_{\text{пол}}^e(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV + \int_{V'} \vec{j}_{\text{ст}}^e(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV', \\ \vec{A}^m(\vec{r}) &= \int_V \vec{j}_{\text{пол}}^m(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV + \int_{V'} \vec{j}_{\text{ст}}^m(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV', \end{aligned} \quad (3.9.5)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad (3.9.6)$$

$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ — расстояние между точками \vec{r} и \vec{r}' ; интегрирование в (3.9.5) во вторых слагаемых проводится по областям, занимаемым сторонними источниками $\vec{j}_{\text{ст}}^e$ и $\vec{j}_{\text{ст}}^m$. При этом токи поляризации, занимающие объём тела V

$$\vec{j}_{\text{пол}}^e = i\omega\epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E}, \quad \vec{j}_{\text{пол}}^m = i\omega\mu_0(\mu - 1)\vec{H}, \quad (3.9.7)$$

представляют собой вполне реальные токи, связанные с поляризацией магнетодиэлектрика в свободном пространстве.

Естественно, что введение токов поляризации несколько не упрощает граничную задачу о возбуждении рассматриваемого тела V , поскольку токи поляризации также зависят от искомого (неизвестного) электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} . Однако эта задача может быть сведена к интегральному уравнению относительно неизвестных токов поляризации, после чего по формулам (3.9.4) можно определить электромагнитное поле в любой точке пространства.

3.10(*). Принцип электродинамического подобия для материальных сред

Принцип подобия и теория моделей (в частности, в механике) возникли ещё во времена Ньютона. Принцип подобия определяет условия, при которых процессы в двух различных электродинамических системах будут проходить одинаково. Ниже приведён вывод уравнений подобия для изотропной среды.

Запишем однородные уравнения Максвелла для изотропной безграничной среды с учётом тока проводимости

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \sigma \vec{\mathcal{E}}. \quad (3.10.1)$$

Введём безразмерные величины $\vec{\tilde{E}}, \vec{\tilde{H}}, L, s$ и T с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= e \vec{\tilde{\mathcal{E}}}, \quad \vec{H} = h \vec{\tilde{H}}, \quad \sigma = \sigma_0 s, \\ l &= l_0 L, \quad t = t_0 T, \end{aligned} \quad (3.10.2)$$

где e, h, σ_0, l_0, t_0 — единичные величины, имеющие размерность. Подставляя (3.10.2) в (3.10.1), для введённых безразмерных величин получаем уравнения:

$$\text{rot } \vec{\tilde{\mathcal{E}}} = -\alpha \mu \frac{\partial \vec{\tilde{H}}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{\tilde{H}} = \beta \epsilon \frac{\partial \vec{\tilde{\mathcal{E}}}}{\partial t} + \gamma s \vec{\tilde{\mathcal{E}}}, \quad (3.10.3)$$

где

$$\alpha = \frac{\mu_0 l_0}{t_0} \frac{h}{e}, \quad \beta = \frac{\epsilon_0 l_0 e}{t_0 h}, \quad \gamma = l_0 \frac{e}{h} \quad —$$

безразмерные величины. Из (3.10.2) и (3.10.3) следует, что для подобия двух электромагнитных систем необходимо и достаточно, чтобы величины $\alpha\mu, \beta\epsilon, \gamma s$

были постоянными, тогда:

$$\varepsilon \mu \left(\frac{l_0}{t_0} \right)^2 = \text{const}, \quad \mu \gamma \frac{l_0^2}{t_0} = \text{const}. \quad (3.10.4)$$

Эти выражения и представляют *условия подобия для изотропных сред*, которые нашли самое широкое применение при экспериментальной обработке и проектировании самых различных СВЧ-приборов.

Физический смысл уравнений подобия (3.10.4) заключается в следующем. Пусть имеется некоторая реальная электродинамическая система, для которой по каким-то причинам затруднены расчёт и экспериментальное исследование (например, необходимо исследовать поле в достаточно большой области на больших временных интервалах). Уравнения подобия позволяют создать достаточно малую электродинамическую систему, для которой можно произвести измерения характеристик электромагнитного поля на малых временных интервалах, а затем по формулам (3.10.4) перенести полученные результаты на реальную электродинамическую систему.

Глава

4

Электромагнитные волны в направляющих системах

4.1. Общие сведения о регулярных линиях передачи.....	169
4.2. Общий метод исследования собственных волн регулярных линий передачи	172
4.3. Основные характеристики волн в линии передачи	174
4.4. Особенности направляемых волн	175
4.5. Прямоугольный волновод	180
4.6. Круглый волновод	188
4.7. Коаксиальная линия передачи	195
4.8. Прямоугольные волноводы с плоскопараллельными слоями	199
4.9(*). Плоские оптические волноводы	202
4.10(*). Волоконные световоды	210
4.11(*). Замедляющие системы	216

) Символом «» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 4. Электромагнитные волны в направляющих системах

4.1. Общие сведения о регулярных линиях передачи

4.1.1. Типы линий передачи. Устройство, ограничивающее область распространения электромагнитных колебаний и направляющее поток электромагнитной энергии в заданном направлении, называется *линией передачи*. Линии передачи служат для переноса (транспортировки) электромагнитной энергии от источника к потребителю, например, от передатчика к антенне и от антенны к приёмному устройству, а также для соединения отдельных частей и узлов радиоаппаратуры. Простейшим элементом, направляющим электромагнитную энергию, является плоская граница раздела двух сред, на которой происходит полное внутреннее отражение падающей волны.

Линия передачи называется *регулярной*, если в продольном направлении неизменны её поперечное сечение, положение его в пространстве (например, нет поворота поперечного сечения вокруг какой-либо точки и т.п.) и электромагнитные свойства заполняющих её сред. Линия передачи называется *однородной*, если в произвольном поперечном сечении параметры среды неизменны. Различают открытые линии и волноводы. В *открытых линиях передачи* отсутствует проводящий экран, ограничивающий область распространения электромагнитной энергии в поперечном сечении. В *волноводах (экранированных линиях передачи)* обязательно имеется одна или несколько поверхностей, ограничивающих область распространения электромагнитной волны в поперечном направлении. Особое место среди экранированных линий передачи занимают *полые волноводы* — металлические трубы того или иного поперечного сечения.

В технике связи применяются (рис. 4.1): двухпроводная (а), открытая полосковая (б), однопроводная (в), открытая диэлектрическая (г) линии передачи; коаксиальный кабель (д); прямоугольный (е), круглый (ж), эллиптический (з), частично-заполненный прямоугольный (и) волноводы; экранированная полосковая линия передачи (к), волоконный световод (л), плоский диэлектрический волновод (м) и др. На рис. 4.1 показаны поперечные сечения указанных линий. Многообразие линий передачи связано с различными требованиями к их технико-экономическим характеристикам и с использованием их в различных частотных диапазонах.

Передающие линии СВЧ и КВЧ диапазонов с точки зрения их математических моделей подразделяются на два типа. К первому типу относятся линии передачи, процессы в которых могут быть описаны с позиции теории цепей — *телеграфными уравнениями*. К их числу принадлежат различные модификации двухпроводных и коаксиальных линий различных поперечных сечений. Ко второму типу относятся линии, процессы в которых могут быть описаны только на *электродинамическом уровне*. К ним принадлежат экранированные волноводы различных попе-

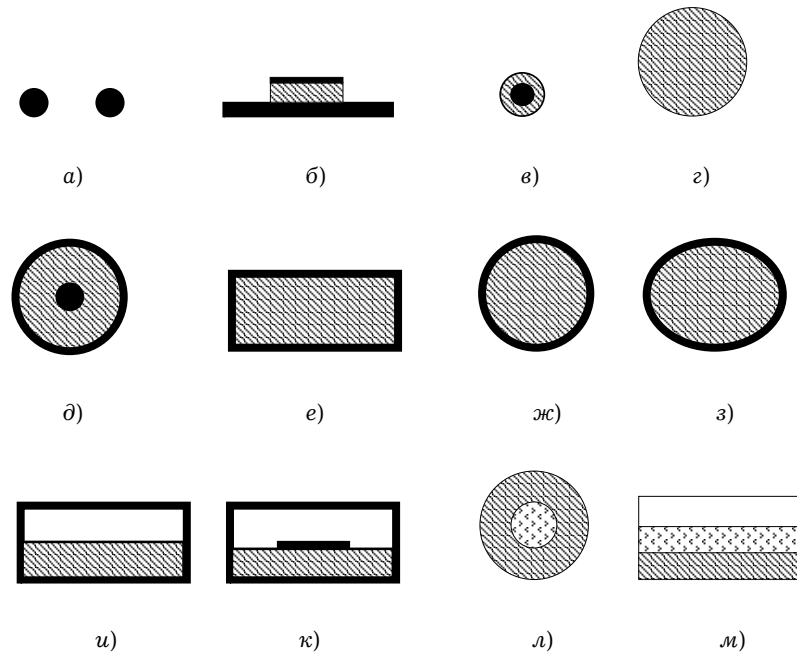


Рис. 4.1

речных сечений, однородно и неоднородно заполненные изотропной и анизотропной средами; различные виды замедляющих систем: спиральные линии, периодически диафрагмированные волноводы, гребенчатые направляющие структуры, диэлектрические волноводы (экранированные и открытые), гофрированные цилиндрические структуры, экранированные и открытые полосковые (микрополосковые) и щелевые линии.

В некоторых случаях передающие линии второго типа могут рассматриваться с позиции *телеграфных уравнений*. Это относится, например, к полосковым, щелевым, спиральным направляющим структурам. Телеграфные уравнения позволяют приближённо рассчитывать их характеристики. Таким образом, чёткое разграничение линий передачи по принципу их теоретического описания возможно лишь на основе выбора строгих математических моделей.

Одним из основных понятий, используемых при рассмотрении линий передачи, является понятие *собственной волны*. При этом под собственной волной линии передачи будем понимать электромагнитную волну, которая описывается решением однородной краевой задачи и распространяется в линии при создании необходимых условий. Таким образом, собственные волны волноведущей структуры — это все волны, которые эта структура способна направлять.

В линии передачи СВЧ или КВЧ-диапазонов на любой фиксированной частоте в общем случае может существовать бесконечное число собственных волн: распространяющихся и реактивно затухающих. Распространяющиеся собственные волны

линии передачи имеют характер бегущих волн. Реактивно затухающие собственные волны являются нераспространяющимися. Они возникают вблизи любой неоднородности в линии передачи при падении на неё какой-либо распространяющейся собственной волны. Такие волны быстро затухают при удалении от неоднородности и при отсутствии других неоднородностей в процессе переноса энергии по линии передачи не участвуют. При увеличении рабочей частоты затухающие собственные волны становятся распространяющимися. Ниже рассмотрим некоторые особенности собственных волн линий передачи.

4.1.2. Классификация направляемых волн. При выборе линии передачи решающее значение имеет тип волны, которому соответствует определённая структура электромагнитного поля и *критическая частота* — частота, на которой прекращается перенос энергии. Эти характеристики определяются из решения соответствующей краевой задачи о собственных волнах линии передачи. Как правило, линии передачи используются в режиме *основной волны*, имеющей наименьшую критическую частоту $f_{кр}$. Однако в некоторых случаях предпочтение отдаётся волнам высших типов с критической частотой, превышающей частоту основной волны.

Различают следующие классы волн:

а) ***T (ТЕМ)-волны*** (поперечные электромагнитные волны; обозначение идёт от англ. «transverse» — поперечный), не содержащие при отсутствии диссипации энергии продольных в направлении переноса энергии составляющих векторов электромагнитного поля. Т-волны существуют только в линиях передачи, имеющих не менее двух изолированных проводников, причём для них критическая частота $f_{кр} = 0$;

б) ***E (ТМ)-волны*** (электрические волны), не имеющие продольной составляющей магнитного поля. У них присутствует продольная составляющая электрического поля. Эти волны называют *поперечно-магнитными*;

в) ***H (ТЕ)-волны*** (магнитные волны), не имеющие продольной составляющей электрического поля. Эти волны называют *поперечно-электрическими*;

г) ***LE-волны*** (*продольно-электрические волны*), у которых в поперечном сечении линии передачи присутствует только одна координатная составляющая электрического поля;

д) ***LM-волны*** (*продольно-магнитные волны*), у которых в поперечном сечении линии передачи присутствует только одна координатная составляющая магнитного поля;

е) ***гибридные волны типа HE или EH***, у которых присутствуют все шесть составляющих электромагнитного поля.

H- и E-волны существуют в волноводах с однородным диэлектрическим заполнением. *Критические частоты* этих волн отличны от нуля и зависят от формы и размеров поперечного сечения волновода, а также от параметров среды, заполняющей его.

LE- и LM-волны характерны для продольно-регулярных прямоугольных волноводов с плоско-параллельными координатными слоями.

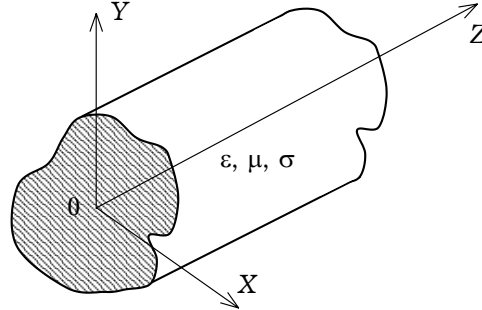


Рис. 4.2

4.2. Общий метод исследования собственных волн регулярных линий передачи

Задача исследования поля в линии передачи состоит в определении его структуры, установлении условий распространения различных типов направляемых волн и нахождении их характеристик.

На рис. 4.2 изображена регулярная линия передачи с произвольным поперечным сечением в декартовой системе координат $\{XYZ\}$, причём ось OZ совпадает с направлением распространения волны. Ввиду поперечной неоднородности структуры поле не может быть неизменным в плоскости $z = \text{const}$, поэтому в уравнениях Максвелла следует полагать $\partial/\partial x \neq 0$, $\partial/\partial y \neq 0$. Постоянная распространения волны в линии передачи (обозначим её через γ) в общем случае будет отличаться от волнового числа $k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$. Комплексные амплитуды векторов напряжённости электрического и магнитного полей волны, распространяющейся вдоль оси OZ , в этом случае можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z) &= \vec{e}(x, y) e^{-i\gamma z}, \\ \vec{H}(x, y, z) &= \vec{h}(x, y) e^{-i\gamma z},\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

где функции $\vec{e}(x, y)$, $\vec{h}(x, y)$ описывают распределение электромагнитного поля в поперечном сечении линии. Выражения (4.2.1) соответствуют полю *плоской неоднородной волны*. Параметр γ называется *продольным волновым числом* или *постоянной распространения* волны.

Векторы \vec{E} и \vec{H} поля волны, распространяющейся в линии передачи, подчиняются однородным уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0.\tag{4.2.2}$$

Применяя оператор Лапласа, например, к вектору \vec{E} , получаем:

$$\nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E} = \nabla_{\perp}^2 \vec{e} - \gamma^2 \vec{e},\tag{4.2.3}$$

где

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

С учётом (4.2.1) и (4.2.3) уравнения Гельмгольца (4.2.2) переходят в следующие двумерные уравнения:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \bar{e}(x, y) + \gamma_{\perp}^2 \bar{e}(x, y) &= 0, \\ \nabla_{\perp}^2 \bar{h}(x, y) + \gamma_{\perp}^2 \bar{h}(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

где $\gamma_{\perp}^2 = k^2 - \gamma^2$ — поперечное волновое число.

Векторные уравнения (4.2.4) можно представить в виде системы шести скалярных уравнений. Обычно решают уравнения относительно продольных составляющих векторов поля:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 e_z + \gamma_{\perp}^2 e_z &= 0, \\ \nabla_{\perp}^2 h_z + \gamma_{\perp}^2 h_z &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

а поперечные составляющие определяют через продольные с помощью соотношений связи, вытекающих из уравнений Максвелла в дифференциальной форме, которые в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} e_x &= -\frac{i\gamma}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial e_z}{\partial x} - \frac{i\omega\mu_a}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial h_z}{\partial y}, & e_y &= -\frac{i\gamma}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial e_z}{\partial y} + \frac{i\omega\mu_a}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial h_z}{\partial x}, \\ h_x &= \frac{i\omega\varepsilon_a}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{i\gamma}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial h_z}{\partial x}, & h_y &= -\frac{i\omega\varepsilon_a}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial e_z}{\partial x} - \frac{i\gamma}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial h_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Соотношения связи продольных и поперечных составляющих поля можно записать в общем виде. Обозначая поперечные составляющие векторов \bar{e} и \bar{h} как \bar{e}_{τ} и \bar{h}_{τ} :

$$\bar{e}_{\tau} = \bar{x}_0 e_x + \bar{y}_0 e_y, \quad \bar{h}_{\tau} = \bar{x}_0 h_x + \bar{y}_0 h_y, \quad (4.2.7)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{\tau} &= -\frac{i\gamma}{\gamma_{\perp}^2} \text{grad}_{\perp} e_z - \frac{i\omega\mu_a}{\gamma_{\perp}^2} \text{rot}_{\perp} \bar{h}_z, \\ \bar{h}_{\tau} &= -\frac{i\gamma}{\gamma_{\perp}^2} \text{grad}_{\perp} h_z + \frac{i\omega\varepsilon_a}{\gamma_{\perp}^2} \text{rot}_{\perp} \bar{e}_z, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

где символ \perp означает, что операция дифференцирования производится по поперечным координатам. Явный вид операторов grad_{\perp} , rot_{\perp} зависит от системы координат, выбор которой определяется геометрией рассматриваемой линии передачи.

Уравнения (4.2.5), записанные в одной из ортогональных систем координат, решаются методом разделения переменных, согласно которому искомое решение представляется в виде произведения функций, зависящих только от одной координаты. Например, решение первого уравнения из (4.2.5) в декартовой системе координат ищется в виде:

$$e_z(x, y) = e_1(x) e_2(y). \quad (4.2.9)$$

Выражение (4.2.9) описывает общее решение первого уравнения системы (4.2.5). Из него необходимо выделить только те частные решения, которые удовлетворяют граничным условиям на проводящих стенках (экране) и границах раздела слоёв конкретной линии передачи.

4.3. Основные характеристики волн в линии передачи

Постоянная распространения (коэффициент распространения). Коэффициент распространения γ собственной бегущей волны линии передачи характеризует изменения её амплитуды и фазы. Под бегущей волной вдоль оси Oz будем понимать электромагнитную волну, зависимость поля которой от координаты z и времени t имеет вид $\exp\{i(\omega t - \gamma z)\}$. Коэффициент распространения волны в общем случае является комплексной величиной:

$$\gamma = \gamma' - i\gamma'' . \quad (4.3.1)$$

Коэффициент фазы (фазовая постоянная). Коэффициент фазы β определяет изменение фазы волны при прохождении единицы длины линии передачи. Коэффициент фазы измеряется в *радианах на метр* ($[\beta] = \text{рад/м}$) и равен действительной части постоянной распространения: $\beta \equiv \gamma'$.

Коэффициент затухания. Коэффициент затухания γ'' определяет уменьшение амплитуды электромагнитной волны при прохождении единицы длины линии передачи. Обычно он измеряется в децибелах на метр ($[\alpha] = \text{дБ/м}$):

$$\alpha = 8.68 \gamma'' . \quad (4.3.2)$$

Критическая длина волны — это длина волны, на которой прекращается распространение электромагнитного поля. Она разделяет частотные области распространяющихся и реактивно затухающих волн и определяется по формуле:

$$\lambda_{\text{кр}} = 2\pi / \gamma_{\perp} . \quad (4.3.3)$$

Ей соответствует *критическая частота (частота отсечки собственной волны)*: $f_{\text{кр}} = \gamma_{\perp} / (2\pi \sqrt{\epsilon_a \mu_a})$. Значения $\lambda_{\text{кр}}$, $f_{\text{кр}}$ определяются формой и размерами поперечного сечения линии передачи, типом собственной волны, а частота отсечки также параметрами среды, заполняющей линию.

Фазовая скорость. Скорость распространения волнового фронта гармонической волны называется *фазовой скоростью*. Поле гармонической волны, распространяясь вдоль оси OZ в линии без потерь, описывается следующим образом:

$$\vec{E}(x, y, z; t) = \vec{e}(x, y) \exp\{i(\omega t - \beta z)\} .$$

Волновой фронт этой волны, как плоскость постоянной фазы, не меняющийся при движении, должен удовлетворять уравнению $\omega t - \beta z = \text{const}$. Пользуясь обычным определением скорости, найдем, что фазовая скорость волны выражается как

$$v_{\text{ф}} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} . \quad (4.3.4)$$

Фазовая скорость волны связана с критической длиной волны следующим соотно-

шением:

$$v_{\phi} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{\text{кр}})^2}}, \quad (4.3.5)$$

где v, λ — соответственно, фазовая скорость и длина плоской волны в среде, заполняющей линию.

Длина волны в волноводе. Длина волны — есть расстояние, пройденное волной за время, равное периоду колебания T . Так как $T = 2\pi / \omega$, то длина волны в волноводе вычисляется как

$$\Lambda = v_{\phi} T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{\text{кр}})^2}}. \quad (4.3.6)$$

Дисперсионная характеристика. Дисперсией называется зависимость фазовой скорости от частоты, а дисперсионная характеристика представляет собой конкретный вид зависимости, задаваемой формулой или графиком.

Т-волны в линиях передачи не имеют дисперсии. Фазовая скорость Т-волн на любой частоте равна скорости распространения плоской электромагнитной волны в среде, заполняющей линию передачи: $v_{\phi} = c / \sqrt{\epsilon \mu}$, где c — скорость света в вакууме.

Линии передачи, работающие на других типах волн, обладают дисперсией. Дисперсионная зависимость в общем случае для линии передачи в виде формул отсутствует (кроме Н- и Е-волн); она определяется численно из решения дисперсионного уравнения.

Групповая скорость. Групповая скорость — скорость распространения огибающей электромагнитного сигнала. Понятие групповой скорости вводится в случае дисперсной линии передачи и сложных сигналов, которым соответствует определённый спектр частот.

Групповая скорость u при отсутствии диссипации (потерь) энергии вычисляется как

$$u = \frac{d\omega}{d\beta}. \quad (4.3.7)$$

Соотношения (4.3.4), (4.3.5), (4.3.6) и (4.3.7) определяют основные характеристики волны.

4.4. Особенности направляемых волн

4.4.1. Дисперсия направляемых волн. Из формул (4.3.4), (4.3.5) следует, что характеристики направляемых волн (фазовый коэффициент β и фазовая скорость v_{ϕ}) зависят частоты f . Это означает, что в линиях передачи имеет место дисперсия. С ростом частоты f длина волны λ уменьшается и дисперсия ослабевает.

При $f \rightarrow \infty$: $\lambda \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow k$, $\Lambda \rightarrow \lambda$, $v_{\phi} \approx u \rightarrow v$, $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$.

4.4.2. Условие распространения волны. Из соотношений (4.3.4), (4.3.5) можно определить зависимость фазового коэффициента β от длины волны:

$$\beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}, \quad (4.4.1)$$

из которой следует, что при $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ коэффициент фазы β является чисто мнимой величиной:

$$\beta = \pm i k \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 - 1} = \pm i \alpha. \quad (4.4.2)$$

В этом случае волна в волноводе распространяться не будет. Действительно, из выражения для напряжённости электрического поля:

$$\vec{E}(x, y, z; t) = \vec{e}(x, y) \exp\{i(\omega t - \beta z)\} \quad (4.4.3)$$

при выполнении равенства (4.4.2) (со знаком «-»), получаем:

$$\vec{E}(x, y, z; t) = \vec{e}(x, y) e^{i\omega t} e^{-\alpha z}, \quad (4.4.4)$$

откуда следует, что при $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ поле в линии передачи теряет характер бегущей волны и экспоненциально затухает в направлении распространения без изменения фазы. Соотношение (4.4.4), в отличие от (4.4.3), уже нельзя трактовать как выражение для поля бегущей волны, так как поля в любой (по координате z) точке волновода при фиксированном t являются синфазными. Следовательно, условием распространения направляемой волны в линии передачи является неравенство:

$$\lambda < \lambda_{\text{кр}} \quad \text{или} \quad f > f_{\text{кр}}. \quad (4.4.5)$$

Критическая длина направляемой волны $\lambda_{\text{кр}}$ — это максимальная длина волны, до которой возможно её распространение в линии передачи. Каждая собственная волна линии передачи имеет свою критическую частоту.

Режим, при котором $\lambda = \lambda_{\text{кр}}$ какой-либо собственной волны линии передачи, называется *режимом отсечки* (в этом случае $\beta = 0$) для этой собственной волны, а волновод при $f < f_{\text{кр}}$ или $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ для этой волны является *запредельным*.

4.4.3. Т-волны. Как уже отмечалось, в некоторых линиях передачи может распространяться волна, у которой отсутствуют продольные составляющие векторов электромагнитного поля ($E_z = H_z = 0$). Такая волна получила название *поперечной электромагнитной* или *Т-волны*.

Из выражений (4.2.6) следует, что если $E_z = H_z = 0$, то при $\gamma_{\perp}^2 \neq 0$ обращаются в нуль все составляющие поля, а это означает, что существование Т-волн невозможно. Однако этот запрет снимается при условии $\gamma_{\perp}^2 = 0$, так как в этом случае в выражениях (4.2.6) для поперечных компонент поля возникает неопределённость типа 0/0. Поэтому условие $\gamma_{\perp} = 0$ является общим признаком всех Т-волн.

К классу Т-волн относится изученная ранее плоская однородная электромагнитная волна, распространяющаяся в неограниченной однородной изотропной среде.

Из условия $\gamma_{\perp} = 0$ следует, что постоянная распространения Т-волны равна постоянной распространения плоской волны в однородной среде с параметрами ϵ_a, μ_a :

$$\gamma = k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}.$$

Следовательно, в случае Т-волны выражения для фазовой скорости и длины волны в линии передачи имеют вид:

$$v_{\text{ф}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}, \quad \Lambda = \lambda,$$

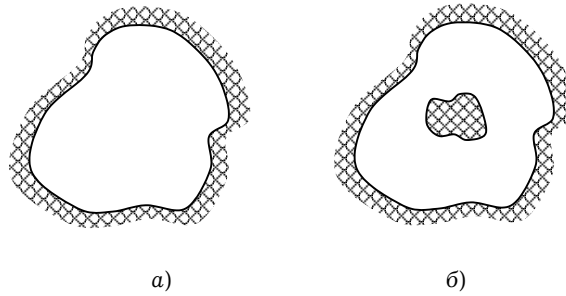


Рис. 4.3

то есть значения фазовой скорости и длины Т-волны в линии передачи оказываются такими же, как у плоской однородной волны в безграничной однородной среде. Фазовая скорость Т-волны в продольно-регулярной линии определяется только значениями проницаемостей среды (заполнителя линии передачи) и не зависит от геометрической конфигурации поперечного сечения линии.

Из условия $\gamma_{\perp} = 0$ с учётом (4.3.3) нетрудно определить критические длину волны и частоту для Т-волны:

$$f_{\text{кр}} = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_{\text{кр}} \rightarrow \infty.$$

Таким образом, распространение Т-волны возможно на любой частоте: режим отсечки отсутствует.

В заключение подраздела определим условие, при выполнении которого можно сделать однозначный вывод о возможности распространения Т-волны в той или иной линии передачи. Иными словами, необходимо ответить на вопрос: как по виду линии передачи определить возможность распространения в ней Т-волны?

Уравнения Гельмгольца (4.2.4) в случае Т-волн переходят в однородные уравнения Лапласа:

$$\nabla_{\perp}^2 \vec{e} = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 \vec{h} = 0. \quad (4.4.6)$$

Из раздела 1.15 известно, что векторные уравнения Лапласа описывают постоянные во времени электромагнитные поля (электростатическое и стационарное магнитное). Поэтому рассматривая ту или иную линию передачи, необходимо определить: возможна ли в ней структура поля, аналогичная структуре электростатического поля неподвижных зарядов и магнитного поля постоянного тока. Линии электростатического поля должны начинаться и заканчиваться в областях, где сосредоточен электрический заряд, то есть на проводящих элементах. Причём необходимо, чтобы эти элементы образовывали не односвязную область, а были отделены друг от друга. Поэтому для того, чтобы в линии могла существовать Т-волна, необходимо наличие в ней не менее двух изолированных проводников. На рис. 4.3 показаны поперечные сечения двух произвольных линий передачи; в первой (а) распространение Т-волны невозможно, так как проводящий экран ограничивает односвязную область; во второй — существование Т-волны может иметь место, так как присутствуют два изолированных проводника. Исходя из вышесказанного мож-

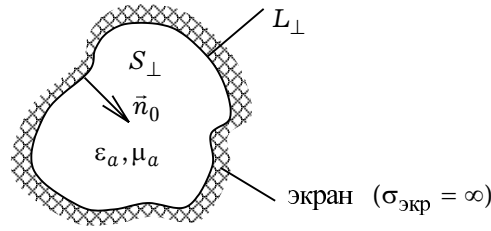


Рис. 4.4

но заключить, что в коаксиальной (рис. 4.1б) и в двухпроводной (рис. 4.1а) линиях передачи Т-волна может существовать, а в экранированных волноводах, не содержащих продольных проводников (рис. 4.1е, ж, з) — Т-волна не может распространяться.

Характеристики Т-волны при отсутствии диссипации энергии не зависят от частоты и поэтому дисперсия в линиях передачи с таким типом волны отсутствует. Заметим, что условие $\gamma_{\perp} = 0$ является фактически необходимым условием отсутствия дисперсии в линии передачи.

4.4.4. Е- и Н-волны. Для Е- и Н-волн выполняются условия:

$$\gamma' < k, \quad v_{\phi} > v = 1 / \sqrt{\epsilon_a \mu_a},$$

то есть фазовые скорости Е- и Н-волн больше фазовой скорости плоской волны в однородной среде с параметрами ϵ_a, μ_a . Волны, распространяющиеся в некоторой однородной среде с фазовой скоростью, превышающей фазовую скорость Т-волны в этой же среде, называются *быстрыми*. В дальнейшем будет показано, что быстрыми являются Е- и Н-волны в полностью экранированных идеально проводящим экраном волноводах (например, в прямоугольном и круглом волноводах).

Рассмотрим волноведущую структуру, поперечное сечение которой показано на рис. 4.4. Через L_{\perp} обозначен контур экрана в поперечном сечении волновода; через S_{\perp} — поперечное сечение волновода; \vec{n}_0 — вектор нормали к экрану волновода. Удельная проводимость экрана $\sigma_{\text{экp}}$ полагается бесконечной, а сам экран, соответственно, идеально проводящим.

При рассмотрении Е-волн волновода воспользуемся первым уравнением из системы (4.2.5), записанным относительно продольной составляющей e_z . Это уравнение должно решаться при следующих граничных условиях: на идеально проводящих стенках экрана тангенциальные составляющие электрического поля равны нулю. Поэтому формулировка краевой задачи для Е-волн имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 e_z + \gamma_{\perp}^2 e_z &= 0 \quad \text{в } S_{\perp}, \\ e_z &= 0 \quad \text{на } L_{\perp} \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

и называется *краевой задачей первого типа на уравнении Гельмгольца (задача Дирихле)*.

Для конкретной линии передачи задачу (4.4.7) необходимо решать в удобной системе координат, в которой легче всего удовлетворить заданным граничным

условиям. Поскольку рассматриваемая краевая задача является однородной, в результате её решения определяются собственные значения γ_{\perp}^2 и собственные функции e_z . Собственные значения дают волновые числа и дисперсионные характеристики Е-волн волноведущей структуры, а собственные функции — распределения составляющей e_z в поперечном сечении линии передачи. Для нахождения остальных составляющих поля необходимо воспользоваться соотношениями (4.2.6).

При рассмотрении Н-волн на уравнении Гельмгольца формулируется *краевая задача второго типа* — *задача Неймана*:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 h_z + \gamma_{\perp}^2 h_z &= 0 & \text{в } S_{\perp}, \\ \frac{\partial h_z}{\partial n} &= 0 & \text{на } L_{\perp}, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

где \vec{n} — нормаль к внутренней поверхности идеально-проводящего экрана. Граничное условие в (4.4.8) вытекает из следующих соображений. На поверхности идеального проводника тангенциальная составляющая электрического поля \vec{e}_{τ} и нормальная составляющая вектора магнитной индукции равны нулю. Из уравнения Максвелла следует:

$$\frac{\partial h_z}{\partial n} + i\gamma h_n = i\omega\epsilon_a e_{\tau},$$

откуда с учётом того, что $\vec{e}_{\tau} = 0$ и $h_n = 0$, получаем:

$$\left. \frac{\partial h_z}{\partial n} \right|_{L_{\perp}} = 0. \quad (4.4.9)$$

Решение краевой задачи (4.4.8) для Н-волн производится так же, как и краевой задачи (4.4.7) для Е-волн.

В литературе можно встретить и другой вид постановки краевых задач для нахождения Е- и Н-волн, основанный на использовании комплексной амплитуды вектора Герца $\vec{\Pi}$. В параграфе 2.3 было дано определение электрического вектора Герца $\vec{\Pi}^e$. Введём его комплексную амплитуду как

$$\vec{\Pi}^e(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\vec{\Pi}^e(\vec{r}) e^{i\omega t} \right]. \quad (4.4.10)$$

Через комплексную амплитуду электрического вектора Герца $\vec{\Pi}^e$ краевая задача для Е-волн формулируется в виде:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \Pi^e + \gamma_{\perp}^2 \Pi^e &= 0 & \text{в } S_{\perp}, \\ \Pi^e &= 0 & \text{на } L_{\perp}. \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

После решения краевой задачи (4.4.11) электромагнитное поле определяется через составляющую вектора Герца Π_z^e следующим образом:

$$\vec{E} = \text{grad div } \vec{\Pi}^e + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{\Pi}^e, \quad \vec{H} = i\omega\epsilon_a \text{rot } \vec{\Pi}^e. \quad (4.4.12)$$

Краевая задача для Н-волн формулируется через комплексную амплитуду магнитного вектора Герца $\vec{\Pi}^m$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \Pi^m + \gamma_{\perp}^2 \Pi^m &= 0 \quad \text{в } S_{\perp}, \\ \frac{\partial \Pi^m}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } L_{\perp}, \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

с которым векторы электромагнитного поля связаны выражениями:

$$\vec{E} = -i\omega\mu_a \text{rot } \vec{\Pi}^m, \quad \vec{H} = \text{grad div } \vec{\Pi}^m + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{\Pi}^m. \quad (4.4.14)$$

Следует отметить, что использование обоих подходов при рассмотрении Е- и Н-волн является полностью эквивалентным.

В заключение заметим, что линии передачи с Е- и Н-волнами всегда обладают дисперсией, так как характеристики этих волн, определяемые соотношениями (4.3.5), (4.4.1), зависят от частоты (длины волны). Кроме того, для Е- и Н-волн невозможно выполнение условия $\gamma_{\perp} = 0$, что приводит к существованию критических частот:

$$f_{\text{кр}} = \gamma_{\perp} / (2\pi \sqrt{\epsilon_a \mu_a}),$$

которые определяются не только параметрами среды-заполнителя (ϵ_a, μ_a), но и характеристикой волны (γ_{\perp}), то есть геометрической конфигурацией линии передачи, так как поперечное волновое число γ_{\perp} зависит от поперечных размеров волновода. В результате можно сделать вывод о том, что в линиях передачи, которые могут направлять Е- и Н-волны, всегда существуют режимы отсечек этих волн, когда они становятся заперёдными, а также заперёдный режим работы, при котором невозможно распространение в линии передачи ни одного типа собственных волн.

При анализе собственных волн экранированных структур необходимо решить краевые задачи (4.4.7) и (4.4.8), либо (4.4.11) и (4.4.13), в результате чего определить собственные значения $\gamma_{\perp}^2 = k^2 - \gamma^2$. Затем из условия $\gamma = 0$ найти значения $k_{\text{кр}}$, соответствующие частотам отсечек $f_{\text{кр}}$.

Составляющие электромагнитного поля вычисляются через e_z, h_z или через Π_z^e, Π_z^m с помощью соотношений: либо (4.2.6), (4.2.8), либо (4.4.12), (4.4.14).

Очевидно, что в диапазоне частот $0 < f < f_{\text{кр}}^{\min}$, где $f_{\text{кр}}^{\min}$ — минимальная частота отсечки собственных волн линии передачи, невозможно распространение ни одной Е- и Н-волны. Таким образом, условие $f < f_{\text{кр}}^{\min}$ определяет *заперёдный режим* линии передачи.

4.5. Прямоугольный волновод

Из экранированных волноводов самым распространённым является волновод прямоугольного поперечного сечения, изображённый на рис. 4.5. Исследование процесса распространения волн в волноведущей структуре будем проводить при следующих ограничениях: 1) стенки волновода полагаем идеально проводящими ($\sigma_{\text{эк}} = \infty$); 2) волновод

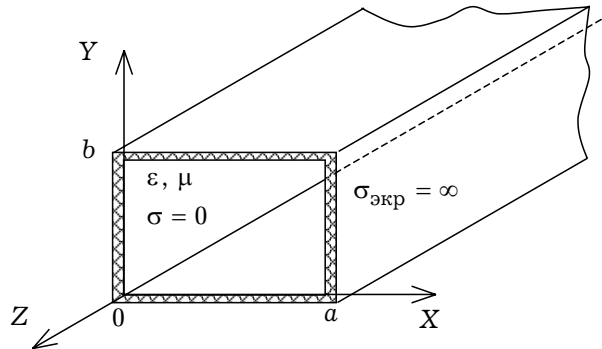


Рис. 4.5

заполнен однородной диэлектрической средой без потерь с параметрами ϵ и μ . Согласно разделу 4.4, в таком волноводе не может существовать Т-волна и спектр собственных волн составляют волны Е- и Н-типа. Размеры поперечного сечения выбираются так, чтобы выполнялось условие $a > b$.

4.5.1. Е-волны. Краевая задача Дирихле в данном случае может быть поставлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 e_z + \gamma_{\perp}^2 e_z &= 0 \quad \text{при } 0 < x < a, 0 < y < b; \\ e_z &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a, y = 0, y = b. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Решение краевой задачи (4.5.1) рассмотрено в П.7. Собственные функции краевой задачи (4.5.1) имеют вид:

$$e_z = e_z^{mn} = E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (4.5.2)$$

где E_0 — амплитуда, определяемая из условий возбуждения; m и $n = 1, 2, \dots$. Собственные значения краевой задачи определяются по формуле:

$$\gamma_{\perp}^2 = \gamma_{\perp mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2. \quad (4.5.3)$$

Подставляя соотношения (4.5.3) в выражение $\gamma_{\perp}^2 = k^2 - \gamma^2$, определяем постоянные распространения γ_{mn}^E Е-волн прямоугольного волновода следующим образом:

$$\gamma_{mn}^E = \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}. \quad (4.5.4)$$

Формула (4.5.4) фактически является дисперсионным уравнением собственных волн Е-типа прямоугольного волновода.

Из (4.5.4) следует, что спектр собственных волн Е-типа представляет собой бесконечный набор волн с собственными функциями e_z^{mn} и постоянными распространения γ_{mn}^E . Такие волны будем в дальнейшем называть волнами типа E_{mn} . На рис. 4.6 представлены распределения составляющей e_z полей $E_{11}, E_{21}, E_{31}, E_{32}$ в поперечном сечении структуры (эпюры). Из (4.5.2) понятен физический смысл ин-

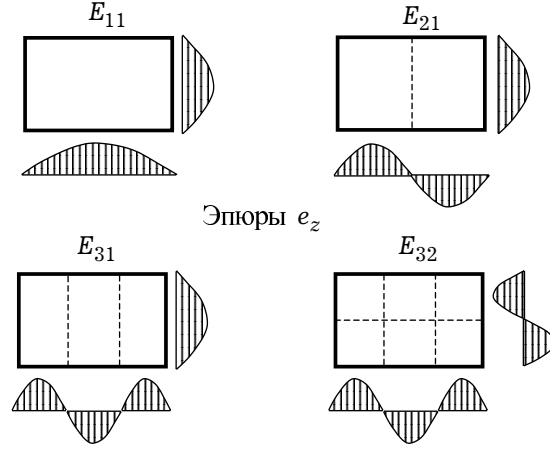


Рис. 4.6

дексов m и n . Индекс m определяет число вариаций поля e_z вдоль широкой стенки волновода, а индекс n — вдоль узкой стенки.

Составляющая E_z образуется домножением (4.5.2) на фазовый множитель $\exp\{-i\gamma z\}$:

$$E_z = E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-i\gamma z}.$$

Остальные составляющие поля E_{mn} — волны определяются из соотношений (4.2.6) и записываются в виде:

$$\begin{aligned} E_x &= -iE_0 \frac{\gamma\chi_x}{\gamma_{\perp}^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-i\gamma z}, \\ E_y &= -iE_0 \frac{\gamma\chi_y}{\gamma_{\perp}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-i\gamma z}, \\ H_x &= iE_0 \frac{\omega\epsilon_a\chi_y}{\gamma_{\perp}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-i\gamma z}, \\ H_y &= -iE_0 \frac{\omega\epsilon_a\chi_x}{\gamma_{\perp}^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-i\gamma z}, \quad H_z = 0, \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

где $\chi_x = m\pi/a$, $\chi_y = n\pi/b$, $\gamma_{\perp} = \gamma_{\perp mn}$.

На рис. 4.7 показаны структуры полей различных типов Е-волн прямоугольного волновода, построенные в соответствии с выражениями (4.5.5) для составляющих поля. Сплошными линиями изображены силовые линии электрического поля, штриховыми — силовые линии магнитного поля. Силовые линии магнитного поля целиком лежат в плоскости поперечного сечения волновода, так как у Е-волн отсутствует продольная составляющая магнитного поля H_z . Направление электрических и магнитных силовых линий в любой точке волновода должно быть таким, чтобы вектор Умова-Пойнтинга был направлен в положительном направлении оси OZ .

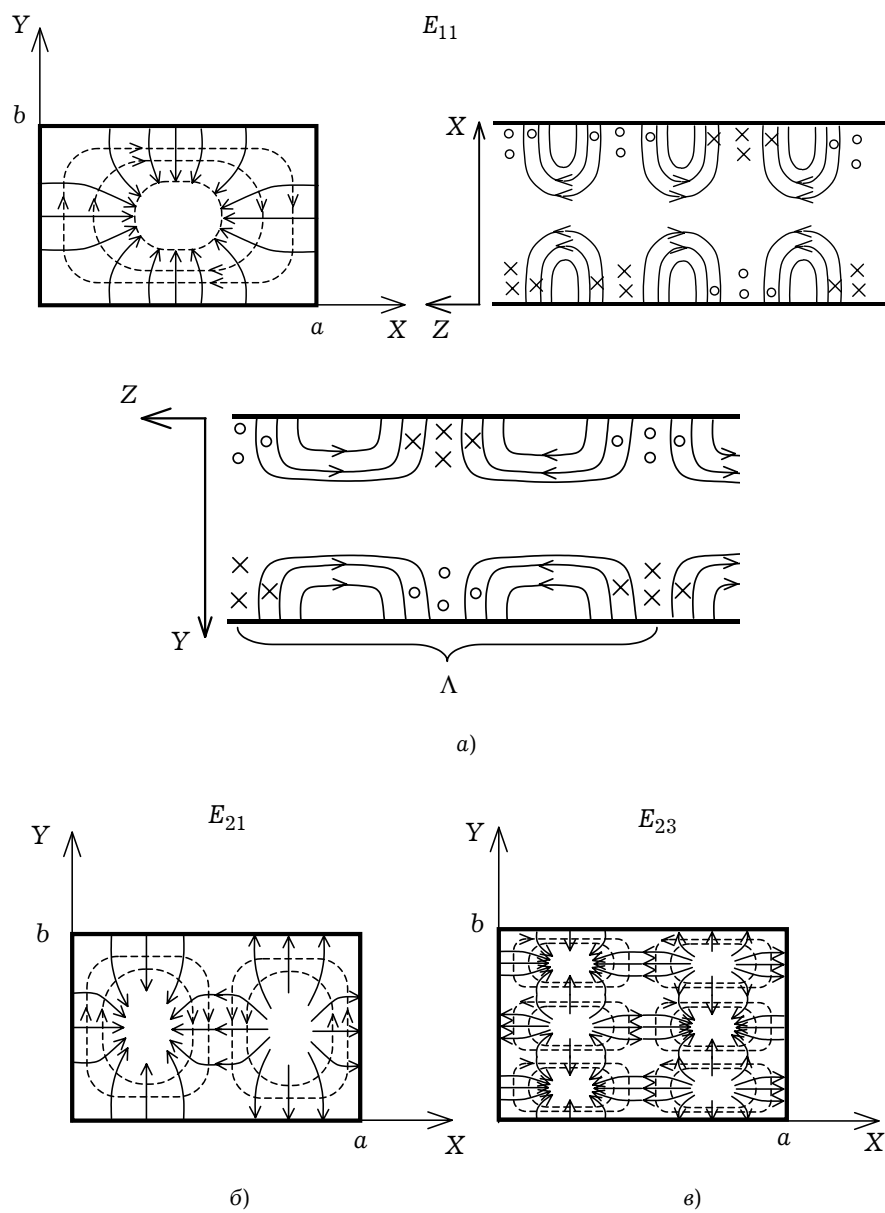


Рис. 4.7

Кроме того, магнитные и электрические силовые линии должны быть всегда взаимно ортогональны.

Самой простой структурой поля обладает волна E_{11} . При отсутствии поглощения поле периодически в направлении оси OZ с периодом Λ . Для построения структур полей E -волн высших порядков ($n > 1$, $m > 1$) можно воспользоваться картиной поля волны E_{11} в поперечном сечении волновода, повторив её изображение вдоль оси OX m раз, а вдоль оси OY — n раз с учётом фаз соседних максимумов поля. Именно в соответствии с этими принципами на рис. 4.7 построены структуры полей для волн E_{21} (б) и E_{23} (в).

Критические длины волн и критические частоты волн E_{nm} определяются следующими формулами:

$$\lambda_{кр} = \lambda_{кр}^{mn} = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}, \quad (4.5.6)$$

$$f_{кр} = f_{кр}^{mn} = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (4.5.7)$$

Из (4.5.6), (4.5.7) следует, что минимальной критической частотой (максимальной критической длиной волны) обладает волна E_{11} . Для неё

$$\lambda_{кр}^{E_{11}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.5.8)$$

Из (4.5.7) следует, что частоты отсечки собственных волн экранированного прямоугольного волновода определяются его геометрическими размерами a , b и параметрами среды-заполнителя ϵ и μ .

4.5.2. Н-волны. Краевая задача Неймана для H -волн прямоугольного волновода может быть поставлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 h_z + \gamma_{\perp}^2 h_z &= 0 \quad \text{при } 0 < x < a, 0 < y < b; \\ \frac{\partial h_z}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a; \quad \frac{\partial h_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b. \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Решение краевой задачи (4.5.9) рассмотрено в П.7. Собственные функции краевой задачи (4.5.9) имеют вид:

$$h_z = h_z^{mn} = H_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (4.5.10)$$

где H_0 — амплитуда, определяемая из условий возбуждения; m и $n = 0, 1, 2, \dots$. Причём индексы n и m не могут быть равны нулю одновременно.

Собственные значения данной задачи определяются как

$$\gamma_{\perp}^2 = \gamma_{\perp mn}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2, \quad m = (0), 1, \dots; \quad n = (0), 1, \dots \quad *) \quad (4.5.11)$$

Из сравнения формул (4.5.3) и (4.5.11) следует, что собственные значения краевых задач для E - и H -волн совпадают. Это приводит к тому, что дисперсионное уравнение и формулы для критических частот и длин волн для H -волн будут такими же, как и для E -волн. В частности, формулы (4.5.6) и (4.5.7) определяют

*) Запись $m = (0)$, $n = (0)$ обозначает, что индексы n и m не могут одновременно равняться нулю

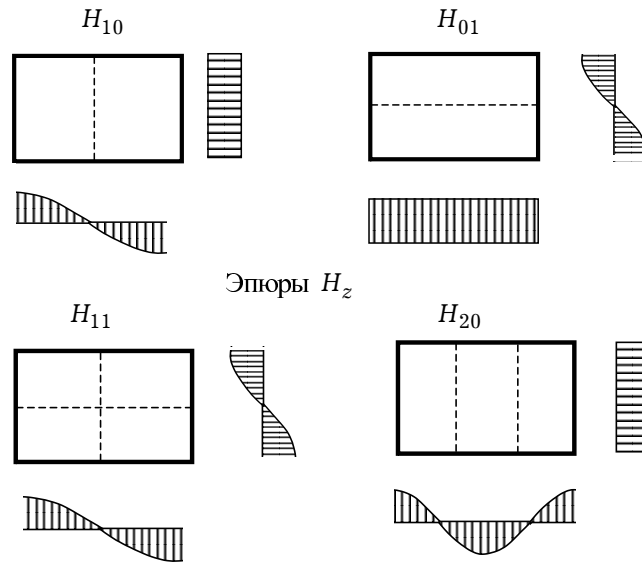


Рис. 4.8

критические длины волн и критические частоты Н-волн соответственно. Этот факт называется *вырождением*.

Спектр собственных волн Н-типа представляет собой бесконечный набор волн с собственными функциями h_z^{mn} и постоянными распространения γ_{mn}^H :

$$\gamma_{mn}^H = \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2}. \quad (4.5.12)$$

Такие волны будем в дальнейшем называть волнами типа H_{mn} . На рис. 4.8 представлены эпюры составляющей h_z волн H_{10} , H_{01} , H_{11} , H_{20} .

Составляющие полей H_{mn} -волн определяются выражениями:

$$\begin{aligned} H_x &= iH_0 \frac{\gamma \chi_x}{\gamma_{\perp}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-i\gamma z}, \\ H_y &= iH_0 \frac{\gamma \chi_y}{\gamma_{\perp}^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-i\gamma z}, \\ H_z &= H_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-i\gamma z}, \\ E_x &= iH_0 \frac{\omega \mu_a \chi_y}{\gamma_{\perp}^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-i\gamma z}, \\ E_y &= -iH_0 \frac{\omega \mu_a \chi_x}{\gamma_{\perp}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-i\gamma z}, \quad E_z = 0. \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

На рис. 4.9 изображены структуры полей волн H_{10} , H_{01} , H_{11} , построенные в соответствии с (4.5.13). Так как Н-волны не имеют продольных составляющих электрического поля, электрические силовые линии целиком лежат в плоскостях поперечных сечений, в то время как магнитные силовые линии образуют замкнутые контуры в

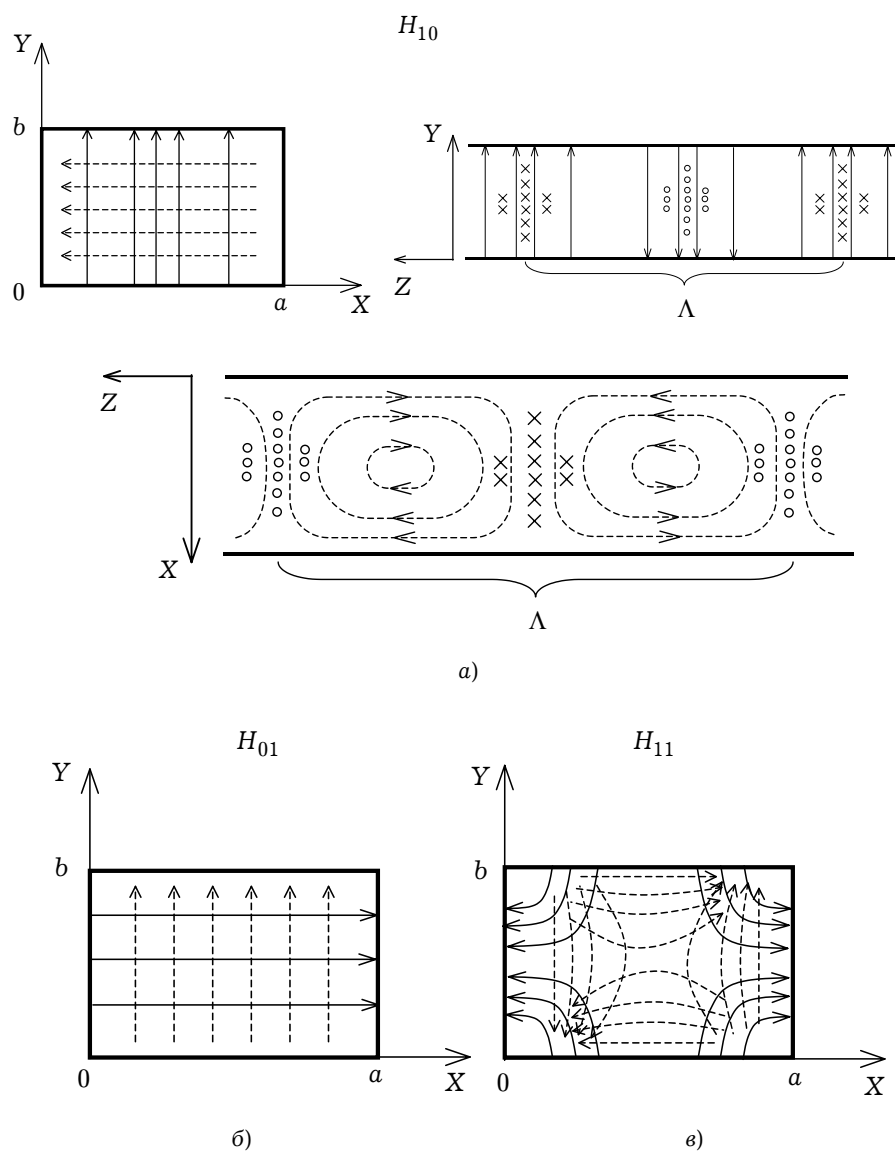


Рис. 4.9

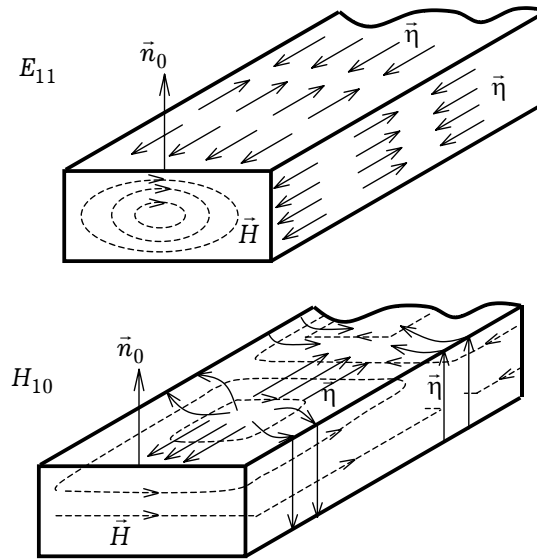


Рис. 4.10

продольных плоскостях. Волны H_{m0} и H_{0n} , имеющие один нулевой индекс, не содержат вариаций поля вдоль осей OY и OX соответственно. Как и в случае Е-волн, индексы m и n указывают число пространственных полупериодов по осям OX и OY .

Формулы для критических длин Н-волн имеют вид:

$$\lambda_{кр} = \lambda_{кр}^{mn} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}, \quad (4.5.14)$$

где m и $n = (0), 1, 2, \dots$

Из (4.5.14) видно, что критические длины волн H_{10} и H_{01} больше, чем у волны E_{11} : $\lambda_{кр}^{H_{10}} = 2a$, $\lambda_{кр}^{H_{01}} = 2b$. Так как $b < a$, наибольшую критическую длину имеет волна H_{10} . Следовательно, она обладает наименьшей частотой отсечки. Если выполняется условие $f_{кр}^{H_{10}} < f < f_{кр}^{H_{01}}$, в прямоугольном волноводе может распространяться только одна собственная волна H_{10} . Эта волна имеет наибольшее практическое значение; она называется основной волной прямоугольного волновода. На ней при $f < f_{кр}^{H_{01}}$ осуществляется одноволновый режим.

Так как волна H_{10} имеет наибольшую критическую длину, размеры поперечного сечения волновода, при которых возможна передача энергии на заданной частоте, для этой волны наименьшие. Работа на волне H_{10} позволяет уменьшить габариты и массу волновода, а следовательно, и его стоимость. Прямоугольные волноводы на основной волне широко используется в качестве фидерных линий в радиорелейных, радиолокационных и других системах сантиметрового диапазона длин волн.

4.5.3. Поверхностные токи на стенках волновода. Каждому типу волны в волноводе соответствует своя структура поверхностных токов на идеально проводящих

стенках. Плотность поверхностного тока определяется из соотношения:

$$\vec{n} = [\vec{n}_0, \vec{H}], \quad (4.5.15)$$

где \vec{n}_0 — внешняя нормаль к поверхности экрана (рис. 4.10).

Из (4.5.15) следует, что линии вектора \vec{n} всегда ортогональны магнитным силовым линиям на металлической поверхности волновода.

Для Е-волн продольная составляющая вектора \vec{H} равна нулю и поверхностный ток имеет только продольные составляющие. Для Н-волн на стенках волновода существуют как поперечный, так и продольный поверхностные токи. На рис. 4.10 представлены распределения поверхностных токов для волн E_{11} и H_{10} . Сплошными линиями показаны линии поверхностного тока, штриховыми линиями — силовые линии напряжённости магнитного поля.

Знание распределения поверхностного тока имеет большое практическое значение. Структура поверхностного тока \vec{n} учитывается при выполнении отверстий и щелей в стенках волновода, применяемых для его возбуждения, а также в качестве элементов связи в различных устройствах и излучающих элементов щелевых антенн. Щель излучает максимально, если она прорезана перпендикулярно линиям поверхностного тока, где он максимален. Если щель используется для введения зонда, она должна быть неизлучающей. В этом случае она должна прорезаться параллельно линиям поверхностного тока.

4.5.4. Электрическая прочность волновода. Повышение уровня мощности, переносимой волной по волноводу, приводит к увеличению напряжённости электрического поля. В результате этого может наступить электрический или тепловой пробой. Пробой воздуха при нормальном атмосферном давлении наступает при предельной напряжённости электрического поля $E_{\text{пред}} = 30$ кВ/см. В том месте волновода, где возникает электрический разряд, происходит интенсивное выделение тепла, сопровождающееся окислением металла. Опасность электрического пробоя заключается также в том, что в разрядном промежутке резко возрастает плотность электронов, что эквивалентно короткому замыканию в месте пробоя. Нормальная передача энергии при этом прекращается, и появляется отражённая волна, образование которой может привести к выходу из строя генератора.

Предельной называется мощность $P_{\text{пред}}$, при которой напряжённость электрического поля в режиме бегущей волны достигает значения $E_{\text{пред}}$. Допустимая или рабочая мощность должна быть значительно меньше предельной, чтобы обеспечить запас электрической прочности. Значение допустимой мощности обычно принимается не превышающим 20-30% от предельной.

4.6. Круглый волновод

Другим распространённым в технике СВЧ экранированным волноводом является волновод круглого поперечного сечения, изображённый на рис. 4.11. Рассмотрение волн в этой направляющей структуре будем проводить с использованием двух

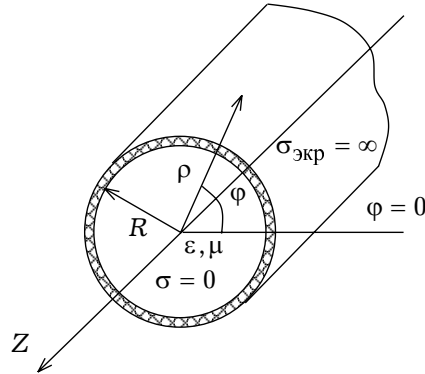


Рис. 4.11

ограничений: 1) стенки волновода (экран) полагаются идеально проводящими ($\sigma_{\text{экp}} = \infty$); 2) волновод заполнен однородным диэлектриком без потерь с параметрами ε и μ . Согласно разделу 4.4, в таком волноводе не может существовать Т-волна и спектр собственных волн составляют волны Е- и Н-типов. В силу геометрии структуры краевые задачи для собственных волн поставим в цилиндрической системе координат $\{\rho, \varphi, z\}$.

4.6.1. Е-волны. Краевая задача для Е-волн круглого волновода формулируется следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial e_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial \varphi^2} + \gamma_{\perp}^2 e_z = 0$$

(4.6.1)

при $0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi$;
 $e_z = 0$ при $\rho = R$,

где $\gamma_{\perp}^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \gamma^2$.

Для решения краевой задачи (4.6.1) воспользуемся методом разделения переменных, представляя функцию e_z в следующем виде:

$$e_z(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi), \quad (4.6.2)$$

где $R(\rho), \Phi(\varphi)$ — неизвестные функции, зависящие от соответствующих координат.

Подставляя решение (4.6.2) в уравнение Гельмгольца, из (4.6.1) с учётом периодичности поля по угловой координате приходим к двум дифференциальным уравнениям относительно функций R и Φ :

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\gamma_{\perp}^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0,$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi = 0, \quad (4.6.3)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ — постоянная разделения.

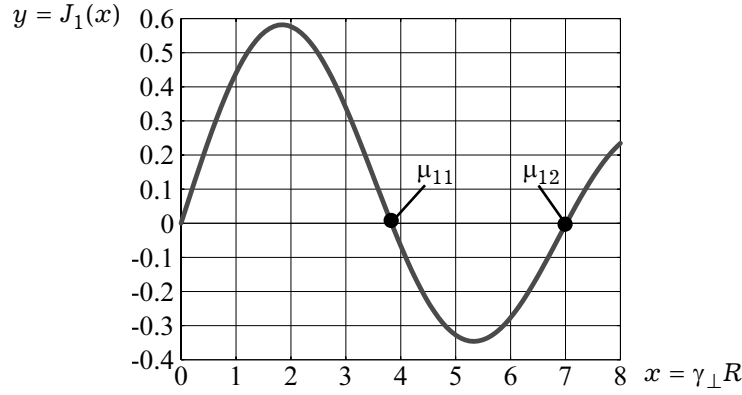


Рис. 4.12

Первое уравнение из (4.6.3) называется *уравнением Бесселя*. Оно имеет два решения:

$$R(\rho) = A J_n(\gamma_{\perp} \rho) + B Y_n(\gamma_{\perp} \rho), \quad (4.6.4)$$

где A, B — постоянные интегрирования; $J_n(x)$, $Y_n(x)$ — цилиндрические функции 1-го и 2-го родов порядка n ; $J_n(x)$ — функция Бесселя; $Y_n(x)$ — функция Неймана.

Решение (4.6.4) описывает распределение поля вдоль радиальной координаты при любом значении ρ , в том числе и при $\rho = 0$. Функции Неймана $Y_n(\gamma_{\perp} \rho)$ при $\rho = 0$ стремятся к $-\infty$. Поскольку источники конечной мощности не могут создавать бесконечно большого поля, в решении (4.6.4) необходимо положить $B = 0$.

Второе уравнение из (4.6.3) имеет решение:

$$\Phi_n(\varphi) = C \cos n\varphi + D \sin n\varphi, \quad (4.6.5)$$

где C, D — неопределённые постоянные.

Общее решение уравнения Гельмгольца (4.6.1) с учётом (4.6.2), (4.6.4) и (4.6.5) имеет следующий вид:

$$e_z(\rho, \varphi) = J_n(\gamma_{\perp} \rho) \{ C \cos n\varphi + D \sin n\varphi \}. \quad (4.6.6)$$

Остальные составляющие электромагнитного поля E -волн находятся из соотношений, получаемых из системы уравнений Максвелла, записанной в цилиндрической системе координат ($h_z = 0$):

$$\begin{aligned} e_{\rho} &= -\frac{i\gamma}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial e_z}{\partial \rho}, \quad e_{\varphi} = -\frac{i\gamma}{\gamma_{\perp}^2 \rho} \frac{\partial e_z}{\partial \varphi}, \\ h_{\rho} &= \frac{i\omega \varepsilon_a}{\gamma_{\perp}^2 \rho} \frac{\partial e_z}{\partial \varphi}, \quad h_{\varphi} = -\frac{i\omega \varepsilon_a}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial e_z}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Из граничного условия $e_z(\rho = R) = 0$ для решения (4.6.6) определяем собственные значения краевой задачи:

$$\gamma_{\perp nm}^2 = \left(\frac{\mu_{nm}}{R} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6.8)$$

Таблица 4.1

n	m	1	2	3
0		2.405	5.520	8.654
1		3.832	7.016	10.173
2		5.136	8.417	11.620
3		6.380	9.761	13.015

где μ_{nm} — m -ый корень уравнения $J_n(\gamma_\perp R) = 0$. В качестве иллюстрации на рис. 4.12 приведён график функции $y = J_1(x)$. На этом же рисунке показаны значения корней μ_{11}, μ_{12} . Значения первых трёх корней уравнений $J_n(\gamma_\perp R) = 0$ при $n = 0, 1, 2, 3$ приведены в таблице 4.1.

Выражения для составляющих поля Е-волн круглого экранированного волновода имеют вид:

$$\begin{aligned}
 E_\rho^{nm} &= -i \frac{\gamma}{\gamma_\perp} J'_n(\gamma_\perp \rho) \Phi_n(\varphi) e^{-i\gamma z}, \\
 E_\varphi^{nm} &= -i \frac{n\gamma}{\gamma_\perp^2} J_n(\gamma_\perp \rho) \Phi'_n(\varphi) e^{-i\gamma z}, \\
 E_z^{nm} &= J_n(\gamma_\perp \rho) \Phi_n(\varphi) e^{-i\gamma z}, \\
 H_\rho^{nm} &= i \frac{n\omega\epsilon_a}{\gamma_\perp^2} J_n(\gamma_\perp \rho) \Phi'_n(\varphi) e^{-i\gamma z}, \\
 H_\varphi^{nm} &= -i \frac{\omega\epsilon_a}{\gamma_\perp} J'_n(\gamma_\perp \rho) \Phi_n(\varphi) e^{-i\gamma z}, \\
 H_z^{nm} &= 0, \quad \gamma_\perp = \gamma_{\perp nm} = \mu_{nm} / R.
 \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

В выражениях (4.6.9): $\gamma_\perp \equiv \gamma_{\perp nm}$, $J'(\gamma_\perp \rho)$ — производная функции по всему аргументу $\gamma_\perp \rho$; $\Phi'_n(\varphi) = -C \sin n\varphi + D \cos n\varphi$. Поперечные составляющие поля в (4.6.9) получены с использованием формул (4.6.7).

С учётом (4.6.8) несложно записать дисперсионное уравнение для определения постоянных распространения собственных Е-волн круглого волновода:

$$\gamma \equiv \gamma_{nm}^E = \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - (\mu_{nm} / R)^2}. \tag{4.6.10}$$

Критические длины волн и критические частоты Е-волн определяются по формулам:

$$\lambda_{кр}^{nm} = \frac{2\pi R}{\mu_{nm}}, \tag{4.6.11}$$

$$f_{кр}^{nm} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\mu_{nm}}{R}. \tag{4.6.12}$$

Из соотношений (4.6.11), (4.6.12) и таблицы 4.1 следует, что наибольшей критической длиной волны (наименьшей критической частотой) обладает волна E_{01} .

4.6.2. Н-волны. Краевая задача для Н-волн круглого волновода в цилиндрической системе координат формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial h_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 h_z}{\partial \varphi^2} + \gamma_{\perp}^2 h_z &= 0 \\ \text{при } 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ \frac{\partial h_z}{\partial \rho} &= 0 \quad \text{при } \rho = R, \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

где $\gamma_{\perp}^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \gamma^2$.

Решение уравнения Гельмгольца (4.6.13) имеет такой же вид, как и для случая Е-волн круглого волновода:

$$h_z(\rho, \varphi) = J_n(\gamma_{\perp} \rho) \{ C \cos n\varphi + D \sin n\varphi \}. \quad (4.6.14)$$

Граничное условие $\partial h_z / \partial \rho = 0$ при $\rho = R$ приводит к уравнению $J'_n(\gamma_{\perp} R) = 0$, которое позволяет в решении (4.6.14) определить собственные значения краевой задачи:

$$\gamma_{\perp nm}^2 = (\chi_{nm} / R)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6.15)$$

где χ_{nm} — m -ый корень уравнения $J'_n(\gamma_{\perp} R) = 0$. Значения корней уравнений $J'_n(\gamma_{\perp} R) = 0$ при $n = 0, 1, 2, 3$ приведены в таблице 4.2.

Другие составляющие поля Н-волн круглого волновода выражаются через составляющую h_z следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{\rho} &= -\frac{i \omega \mu_a}{\gamma_{\perp}^2 \rho} \frac{\partial h_z}{\partial \varphi}, \quad e_{\varphi} = \frac{i \omega \mu_a}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial h_z}{\partial \rho}, \\ h_{\rho} &= -\frac{i \gamma}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\partial h_z}{\partial \rho}, \quad h_{\varphi} = -\frac{i \gamma}{\gamma_{\perp}^2 \rho} \frac{\partial h_z}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

Выражения для составляющих полей Н-волн имеют вид:

$$\begin{aligned} H_{\rho}^{nm} &= -i \frac{\gamma}{\gamma_{\perp}} J'_n(\gamma_{\perp} \rho) \Phi_n(\varphi) e^{-i \gamma z}, \\ H_{\varphi}^{nm} &= -i \frac{n \gamma}{\gamma_{\perp}^2 \rho} J_n(\gamma_{\perp} \rho) \Phi'_n(\varphi) e^{-i \gamma z}, \\ H_z^{nm} &= J_n(\gamma_{\perp} \rho) \Phi_n(\varphi) e^{-i \gamma z}, \\ E_{\rho}^{nm} &= -i \frac{n \omega \mu_a}{\gamma_{\perp}^2 \rho} J_n(\gamma_{\perp} \rho) \Phi'_n(\varphi) e^{-i \gamma z}, \\ E_{\varphi}^{nm} &= i \frac{\omega \mu_a}{\gamma_{\perp}} J'_n(\gamma_{\perp} \rho) \Phi_n(\varphi) e^{-i \gamma z}, \\ E_z^{nm} &= 0, \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

где $\gamma_{\perp} = \gamma_{\perp nm}$ определяется формулой (4.6.15). Поперечные составляющие поля в (4.6.17) получены с использованием формул (4.6.16).

Таблица 4.2

n	m	1	2	3
0		3.832	7.016	10.173
1		1.841	5.331	8.536
2		3.054	6.706	9.969
3		4.201	8.015	11.346

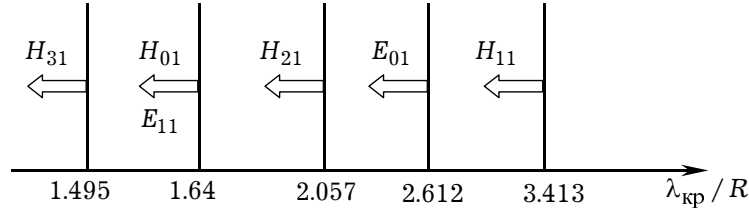


Рис. 4.13

Дисперсионное уравнение, частоты отсечки и критические длины волн Н-волн круглого волновода определяются как

$$\gamma \equiv \gamma_{nm}^H = \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - (\chi_{nm} / R)^2}, \quad (4.6.18)$$

$$f_{кр}^{nm} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\chi_{nm}}{R}, \quad (4.6.19)$$

$$\lambda_{кр}^{nm} = \frac{2\pi R}{\chi_{nm}}. \quad (4.6.20)$$

На рис. 4.13 в порядке убывания показаны нормированные критические длины волн для Е- и Н-волн круглого полого волновода. Основным типом волны является волна типа H_{11} . На рис. 4.14 показаны структуры электрического и магнитного полей в поперечном сечении волновода для нескольких низших типов волн. Волна H_{11} не является низшей с точки зрения индексов и не обладает самой простой структурой поля в поперечной плоскости. Сравнивая рис. 4.14 и рис. 4.9, можно сделать вывод о том, что по своей структуре поля волна H_{11} круглого волновода похожа на волну H_{10} прямоугольного волновода. Поэтому при создании волноводных переходов между круглым и прямоугольным волноводами, в которых указанные волны являются основными, это обстоятельство учитывается.

Применение круглых волноводов с волной H_{11} в качестве протяжённых фидерных трактов ограничивается её поляризационной неустойчивостью. Эта особенность волны H_{11} проявляется в возникновении поля с паразитной ортогональной поляризацией, вызванной неточностью изготовления, деформацией и изгибами волновода. Однако короткие отрезки круглого волновода с волной H_{11} могут служить основой для создания различных устройств СВЧ трактов: поляризаторов, фазовращателей, циркуляторов и др. Отрезки круглых волноводов с волной E_{01} , обладающей осесимметричной структурой поля (рис. 4.14), и используются во вращающихся сочленениях волноводов.

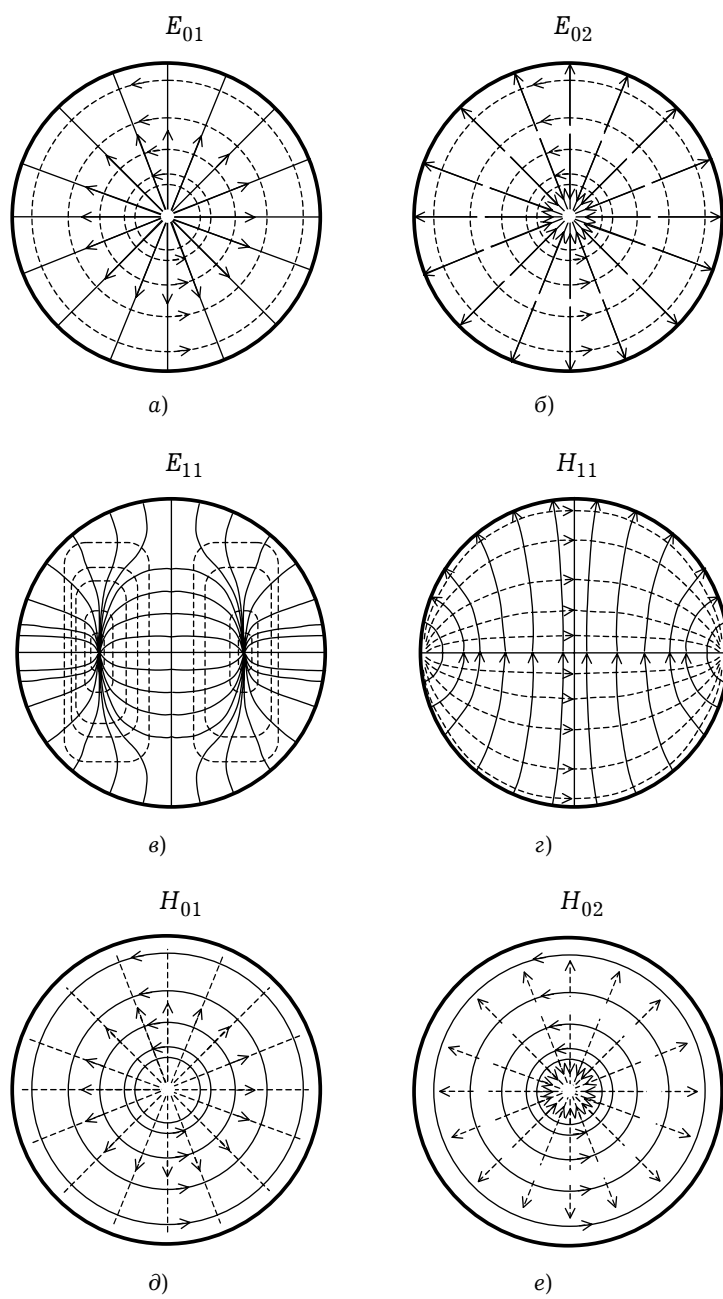


Рис. 4.14

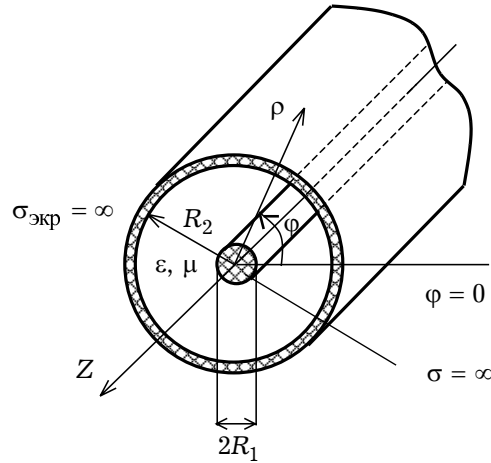


Рис. 4.15

Основные характеристики волн круглого волновода рассчитываются по формулам: (4.6.10)–(4.6.12), (4.6.18)–(4.6.20).

4.7. Коаксиальная линия передачи

Коаксиальная линия передачи представляет собой волноведущую структуру, состоящую из двух металлических соосных несвязанных проводников, — центрального проводника (жилы) и экрана (рис. 4.15). Как уже отмечалось, в подобных структурах возможно распространение Т-волны с нулевой частотой отсечки. У этой волны структура электрического поля совпадает со структурой поля коаксиального конденсатора, а структура магнитного поля совпадает с полем прямолинейного проводника с током.

В коаксиальной линии наряду с Т-волной могут распространяться Е- и Н-волны, обладающие свойствами, описанными в разделе 4.4.

При анализе собственных волн коаксиальной линии передачи будем считать, что её центральный проводник и экран являются идеально проводящими.

4.7.1. Т-волна. Структура поля Т-волны представлена на рис. 4.16, из которого видно, что оно (поле) имеет только две компоненты: E_ρ и H_ϕ . Комплексные амплитуды поля Т-волны записываются в виде:

$$\vec{E} = \vec{\rho}_0 \frac{ZI}{2\pi\rho}, \quad \vec{H} = \vec{\phi}_0 \frac{I}{2\pi\rho}, \quad (4.7.1)$$

где $\vec{\rho}_0, \vec{\phi}_0$ — единичные орты цилиндрической системы координат; $I = I_0 \exp\{-ikz\}$ ($k = k_0\sqrt{\epsilon\mu}$) — комплексная амплитуда тока в линии; Z — характеристическое сопротивление среды-заполнителя.

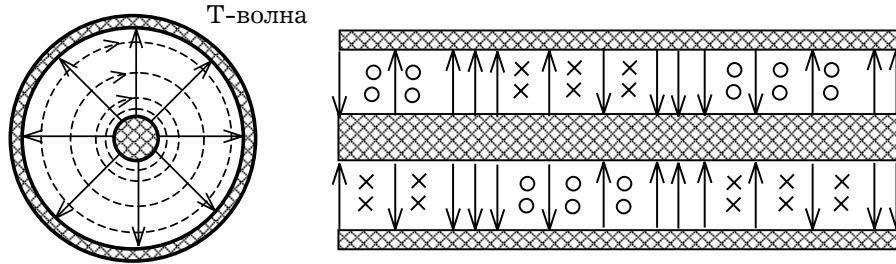


Рис. 4.16

Вычислим комплексную амплитуду напряжения между проводниками:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_\rho d\rho = Z \frac{I}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{ZI}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (4.7.2)$$

где R_1 — радиус центрального проводника, R_2 — радиус экрана. Составляющую поля E_ρ в (4.7.2) подставили в виде (4.7.1).

Из (4.7.2) получаем формулу для волнового сопротивления $Z_{\text{л}}$ коаксиальной линии передачи:

$$Z_{\text{л}} = \frac{U}{I} = \frac{Z}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.7.3)$$

Если между проводниками линии — вакуум ($Z = Z_0 = 120\pi$), выражение (4.7.3) приобретает более простой вид: $Z_{\text{л}} = 60 \ln(R_2 / R_1)$.

Из соотношения (4.7.3) следует вывод: волновое сопротивление коаксиальной линии на Т-волне определяется только свойствами среды-заполнителя и отношением радиусов проводников.

Критическая длина волны и частота отсечки Т-волны коаксиальной линии определяются выражениями:

$$\lambda_{\text{кр}}^{\text{T}} = \infty, \quad f_{\text{кр}}^{\text{T}} = 0.$$

4.7.2. Е- и Н-волны. В коаксиальной линии передачи наряду с Т-волной могут распространяться волны высших типов, обладающие всеми свойствами волноводных волн. Они обладают отличными от нуля критическими частотами, дисперсией и классифицируются как Е- и Н-волны. Краевые задачи для Е- и Н-волн коаксиальной линии формулируются так же, как и для волн круглого экранированного волновода, рассмотренного в разделе 4.6.

Рассмотрим сначала Е-волны. Формулировка краевой задачи для этих волн имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial e_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial \varphi^2} + \gamma_{\perp}^2 e_z &= 0 \\ \text{при } R_1 < \rho < R_2, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ e_z &= 0 \quad \text{при } \rho = R_1, R_2, \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

где $\gamma_{\perp}^2 = k^2 - \gamma^2$.

При записи решений уравнения Гельмгольца в краевой задаче (4.7.4) необходимо учесть, что в данном случае точка $\rho = 0$ выпадает из области рассмотрения (она находится внутри проводника), поэтому в решениях необходимо учитывать как функции Бесселя, так и функции Неймана. С учётом этого решение имеет вид:

$$E_z(\rho, \varphi, z) \equiv e_z(\rho, \varphi) e^{-i\gamma z} = \{A J_n(\gamma_\perp \rho) + B Y_n(\gamma_\perp \rho)\} \Phi_n(\varphi) e^{-i\gamma z}, \quad (4.7.5)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Функции $\Phi_n(\varphi)$ определяются выражениями (4.6.5).

Используя граничные условия для e_z при $\rho = R_1$ и $\rho = R_2$, приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных A и B :

$$\begin{aligned} A J_n(\gamma_\perp R_1) + B Y_n(\gamma_\perp R_1) &= 0, \\ A J_n(\gamma_\perp R_2) + B Y_n(\gamma_\perp R_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Приравнявая к нулю главный определитель системы (4.7.6), получаем дисперсионное уравнение Е-волн коаксиальной линии передачи:

$$J_n(\gamma_\perp R_1) Y_n(\gamma_\perp R_2) - J_n(\gamma_\perp R_2) Y_n(\gamma_\perp R_1) = 0. \quad (4.7.7)$$

Из уравнения (4.7.7) определяем поперечные волновые числа $\gamma_{\perp nm} = \alpha_{nm}$, где m — номер корня уравнения (4.7.7). В результате спектр собственных волн Е-типа коаксиальной линии образуют волны E_{nm} ($n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, 3, \dots$).

Критические частоты Е-волн определяются формулой:

$$f_{кр}^{nm} = \frac{\alpha_{nm}}{2\pi\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (4.7.8)$$

Рассмотрим Н-волны. Формулировка краевой задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial h_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 h_z}{\partial \varphi^2} + \gamma_\perp^2 h_z &= 0 \\ \text{при } R_1 < \rho < R_2, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ \frac{\partial h_z}{\partial \rho} &= 0 \quad \text{при } \rho = R_1, R_2. \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

Решение уравнения Гельмгольца, соответствующее краевой задаче (4.7.9), имеет вид:

$$H_z(\rho, \varphi, z) \equiv h_z(\rho, \varphi) e^{-i\gamma z} = \{A J_n(\gamma_\perp \rho) + B Y_n(\gamma_\perp \rho)\} \Phi_n(\varphi) e^{-i\gamma z}, \quad (4.7.10)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Подставляя в граничные условия для h_z при $\rho = R_1$ и $\rho = R_2$ выражение (4.7.10), приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных A и B :

$$\begin{aligned} A J'_n(\gamma_\perp R_1) + B Y'_n(\gamma_\perp R_1) &= 0, \\ A J'_n(\gamma_\perp R_2) + B Y'_n(\gamma_\perp R_2) &= 0, \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

где штрихом обозначены производные функций по всему аргументу.

Приравнявая к нулю главный определитель системы (4.7.11), получаем дисперсионное уравнение Н-волн коаксиальной линии передачи:

$$J'_n(\gamma_\perp R_1) Y'_n(\gamma_\perp R_2) - J'_n(\gamma_\perp R_2) Y'_n(\gamma_\perp R_1) = 0. \quad (4.7.12)$$

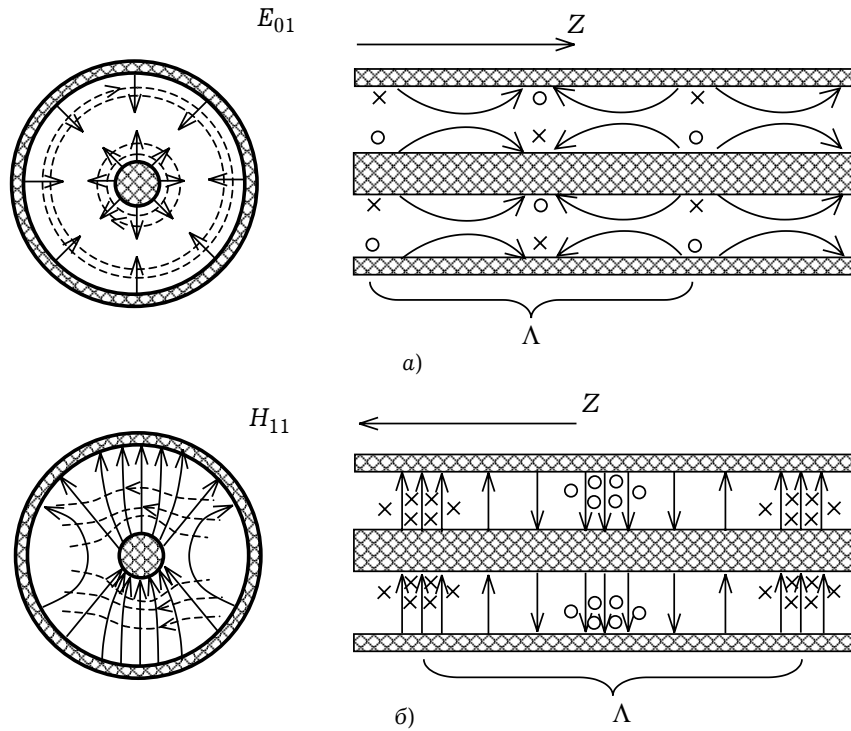


Рис. 4.17

Из уравнения (4.7.12) определяем поперечные волновые числа $\gamma_{\perp nm} = \eta_{nm}$, где m — номер корня уравнения (4.7.12). В результате спектр собственных волн Н-типа коаксиальной линии образуют волны H_{nm} ($n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, 3, \dots$).

Критические длины волн и критические частоты Н-волн определяются формулами:

$$\lambda_{\text{кр}}^{nm} = \frac{2\pi}{\eta_{nm}}, \quad f_{\text{кр}}^{nm} = \frac{\eta_{nm}}{2\pi\sqrt{\epsilon_a\mu_a}}. \quad (4.7.13)$$

Для коаксиальной линии передачи, как видно из (4.7.8), (4.7.13), наибольшей критической длиной волны обладает волна H_{11} :

$$\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} \approx \pi(R_1 + R_2).$$

Таким образом, при $\lambda > \pi(R_1 + R_2)$ коаксиальная линия передачи является одноволновой и в ней может распространяться только Т-волна.

На рис. 4.17 показаны распределения полей волн H_{11} и E_{01} коаксиальной линии передачи.

Коаксиальный кабель в основном используется в диапазоне УКВ. При $\lambda < 10$ см значительно возрастают потери в его проводниках и изоляторах, их величина начинает превышать потери в экранированных металлических волноводах. Поэтому в сантиметровом диапазоне применяют только короткие отрезки коаксиальных кабелей.

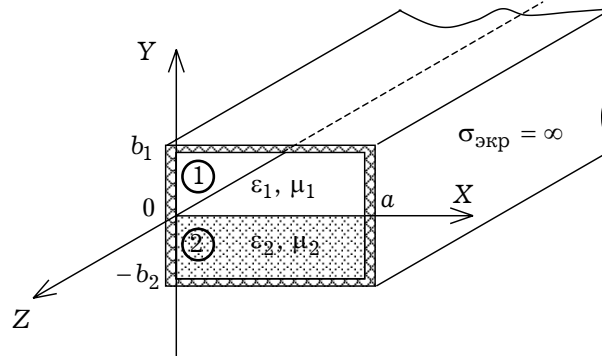


Рис. 4.18

4.8. Прямоугольные волноводы с плоскопараллельными слоями

На рис. 4.18 показана геометрия экранированного прямоугольного волновода с двумя диэлектрическими плоскопараллельными слоями. Обозначим через a ширину волновода, через b_1 и b_2 — толщины первого и второго слоёв соответственно. Будем считать экран волновода идеально проводящим и не будем учитывать потери в диэлектриках.

При решении задач о собственных волнах многослойных волноведущих структур обычно используется *метод частичных областей* (МЧО). Его суть заключается в следующем. На первом этапе решения задачи из системы уравнений Максвелла с учётом граничных условий на идеально проводящих стенках определяются поля отдельно в каждом из диэлектрических слоёв. Полученные решения содержат неизвестные постоянные коэффициенты, которые на втором этапе определяются из постановки условий непрерывности тангенциальных составляющих поля на границах раздела слоёв. Второй этап решения задачи обычно называется *сшиванием полей*.

Применим МЧО для вывода дисперсионных уравнений волн двухслойного прямоугольного волновода.

В силу регулярности линии передачи вдоль оси OZ комплексные амплитуды поля в каждой из отдельных областей будем искать в виде ($k = 1, 2$):

$$\begin{aligned}\vec{E}^{(k)}(x, y, z) &= \vec{e}^{(k)}(x, y) e^{-i\gamma z}, \\ \vec{H}^{(k)}(x, y, z) &= \vec{h}^{(k)}(x, y) e^{-i\gamma z},\end{aligned}\quad (4.8.1)$$

где γ — неизвестная пока постоянная распространения волны; верхний индекс « k » указывает на принадлежность к соответствующей области.

Постановка краевой задачи относительно e_z для первой области имеет вид:

$$\begin{aligned}\nabla_{\perp}^2 e_z^{(1)} + \gamma_{\perp 1}^2 e_z^{(1)} &= 0 \quad \text{при } 0 < x < a, 0 < y < b_1; \\ e_z^{(1)} &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a, y = b_1,\end{aligned}\quad (4.8.2)$$

где $\gamma_{\perp 1}^2 = \omega^2 \varepsilon_{a1} \mu_{a1} - \gamma^2$; индекс «1» указывает на принадлежность к первому слою; γ в соответствии с (4.8.1) — постоянная распространения.

При анализе частично-заполненных волноводов, в отличие от однородно-заполненных, не удаётся из-за несоответствия числа граничных условий и постоянных интегрирования провести анализ электромагнитных процессов отдельно для Е- и Н-волн. Поэтому краевая задача (4.8.2) должна быть дополнена аналогичной задачей относительно h_z :

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 h_z^{(1)} + \gamma_{\perp 1}^2 h_z^{(1)} &= 0 \quad \text{при } 0 < x < a, 0 < y < b_1; \\ \frac{\partial h_z^{(1)}}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a; \quad \frac{\partial h_z^{(1)}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = b_1. \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

Поперечные составляющие электромагнитного поля определяются через e_z и h_z по формулам:

$$\begin{aligned} h_x &= \frac{i}{\gamma^2 - k^2} \left\{ -\gamma \frac{\partial h_z}{\partial x} + \omega \varepsilon_a \frac{\partial e_z}{\partial y} \right\}, \quad h_y = -\frac{i}{\gamma^2 - k^2} \left\{ \gamma \frac{\partial h_z}{\partial y} + \omega \varepsilon_a \frac{\partial e_z}{\partial x} \right\}, \\ e_x &= -\frac{i}{\gamma^2 - k^2} \left\{ \gamma \frac{\partial e_z}{\partial x} + \omega \mu_a \frac{\partial h_z}{\partial y} \right\}, \quad e_y = \frac{i}{\gamma^2 - k^2} \left\{ -\gamma \frac{\partial e_z}{\partial y} + \omega \mu_a \frac{\partial h_z}{\partial x} \right\}, \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a$. В системе уравнений (4.8.4) опущены верхние индексы «(1)» и «(2)», так как она является одинаковой для полей в первом и во втором слоях, определяемых краевыми задачами вида (4.8.2), (4.8.3).

Решения краевых задач (4.8.2) и (4.8.3) записываем в виде:

$$\begin{aligned} e_z^{(1)}(x, y) &= A \sin(k_{x1}x) \left\{ \sin(k_{y1}y) - \operatorname{tg}(k_{y1}b_1) \cos(k_{y1}y) \right\}, \\ h_z^{(1)}(x, y) &= B \cos(k_{x1}x) \left\{ \sin(k_{y1}y) + \operatorname{ctg}(k_{y1}b_1) \cos(k_{y1}y) \right\}, \end{aligned} \quad (4.8.5)$$

где $k_{x1} = \pi m / a$, $k_{y1} = \sqrt{\gamma_{\perp 1}^2 - k_{x1}^2}$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$; A и B — неопределённые постоянные.

Постановки краевых задач для составляющих e_z , h_z во второй области записываются аналогичным образом:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 e_z^{(2)} + \gamma_{\perp 2}^2 e_z^{(2)} &= 0 \quad \text{при } 0 < x < a, -b_2 < y < 0; \\ e_z^{(2)} &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a, y = -b_2, \end{aligned} \quad (4.8.6)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 h_z^{(2)} + \gamma_{\perp 2}^2 h_z^{(2)} &= 0 \quad \text{при } 0 < x < a, -b_2 < y < 0; \\ \frac{\partial h_z^{(2)}}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a; \quad \frac{\partial h_z^{(2)}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = -b_2, \end{aligned} \quad (4.8.7)$$

где $\gamma_{\perp 2}^2 = \omega^2 \varepsilon_{a2} \mu_{a2} - \gamma^2$; верхний индекс «(2)» указывает на принадлежность ко второму слою.

Решения краевых задач (4.8.6) и (4.8.7) имеют вид:

$$\begin{aligned} e_z^{(2)}(x, y) &= C \sin(k_{x2}x) \left\{ \sin(k_{y2}y) + \operatorname{tg}(k_{y2}b_2) \cos(k_{y2}y) \right\}, \\ h_z^{(2)}(x, y) &= D \cos(k_{x2}x) \left\{ \sin(k_{y2}y) - \operatorname{ctg}(k_{y2}b_2) \cos(k_{y2}y) \right\}, \end{aligned} \quad (4.8.8)$$

где $k_{x2} = k_{x1} = \pi m / a$, $k_{y2} = \sqrt{\gamma_{\perp 2}^2 - k_{x2}^2}$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$; C и D — неопределённые постоянные.

Выражения (4.8.5) и (4.8.8) для продольных составляющих полей содержат четыре неизвестные постоянные: A , B , C , D . Для их определения воспользуемся граничными условиями при $y = 0$:

$$\begin{aligned} e_z^{(1)} &= e_z^{(2)}, \quad h_z^{(1)} = h_z^{(2)}, \\ e_x^{(1)} &= e_x^{(2)}, \quad h_x^{(1)} = h_x^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.8.9)$$

Явные выражения для x -составляющих полей получаются из (4.8.4).

Из первых двух граничных условий (4.8.9) получаем систему двух алгебраических уравнений:

$$-A \operatorname{tg}(k_{y1}b_1) = C \operatorname{tg}(k_{y2}b_2), \quad B \operatorname{ctg}(k_{y1}b_1) = -D \operatorname{ctg}(k_{y2}b_2). \quad (4.8.10)$$

Подстановка уравнений (4.8.10) в 3-е и 4-е граничные условия (4.8.9) приводит к двум независимым дисперсионным уравнениям:

$$\frac{k_{y2}}{k_{y1}} \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg}(k_{y1}b_1) + \operatorname{tg}(k_{y2}b_2) = 0, \quad (4.8.11)$$

$$\frac{k_{y1}}{k_{y2}} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{tg}(k_{y1}b_1) + \operatorname{tg}(k_{y2}b_2) = 0. \quad (4.8.12)$$

Дисперсионное уравнение (4.8.11) соответствует LE-волнам, уравнение (4.8.12) — LM-волнам. Поля, соответствующие этим собственным волнам, характеризуются отсутствием одной из поперечных компонент электрического или магнитного полей соответственно. В частности, у LE (продольно-электрической) волны отсутствует поперечная составляющая электрического поля, направленная перпендикулярно к границе раздела диэлектрических слоёв ($E_y = 0$, $H_y \neq 0$). У LM (продольно-магнитной) волны отсутствует поперечная составляющая магнитного поля, направленная перпендикулярно к границе раздела диэлектрических слоёв ($H_y = 0$, $E_y \neq 0$). Отсутствие указанных составляющих поля следует непосредственно из уравнений (4.8.4).

Рассмотрим классификацию собственных волн двухслойного прямоугольного волновода. Будем характеризовать LE- и LM-волны двумя целочисленными индексами m и n ($m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, 3, \dots$). Индекс m — число вариаций поля вдоль широкой стенки волновода, индекс n — порядковый номер корня одного из уравнений (4.8.11) и (4.8.12). Соответственно будем обозначать собственные волны как LE_{mn} и LM_{mn} . При отсутствии зависимости поля от поперечной координаты x LM_{0n} -волны становятся тождественными H_{0n} -волнам однородно-заполненного прямоугольного волновода.

Каждое из дисперсионных уравнений (4.8.11), (4.8.12) совместно с соотношениями, связывающими волновые числа:

$$\omega^2 \varepsilon_{a1,2} \mu_{a1,2} = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + k_{y1,2}^2 + \gamma^2,$$

образуют две системы из трёх уравнений, каждая относительно неизвестных: $k_{y1,2}$, γ . Решение этих систем даёт дисперсионные зависимости $\gamma = \gamma(\omega)$. На рис. 4.19 представлен качественный вид зависимости нормированной постоянной распространения

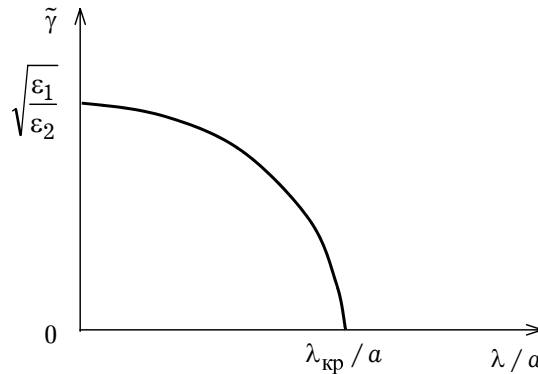


Рис. 4.19

ния $\tilde{\gamma} = \gamma/k_2$ от частоты. Зависимости соответствуют параметрам: $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\epsilon_1 > \epsilon_2$. Как видно из рисунка, коэффициент замедления $\tilde{\gamma}$ с ростом частоты стремится к величине $\sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}$. Это говорит о том, что фазовая скорость собственной волны линии передачи стремится к скорости света в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 . Такая закономерность объясняется тем, что с ростом частоты проявляется *диэлектрический эффект*, заключающийся во «втягивании» поля электромагнитной волны в оптически более плотную (с большей диэлектрической проницаемостью) среду.

4.9(*). Плоские оптические волноводы

Оптические волноводы используются для концентрации и направления света в устройствах и схемах интегральной оптики. В оптических интегральных схемах, как правило, используют планарные волноведущие структуры в виде плёнок и полосок. Использование плоских оптических волноводов хорошо согласуется с концепцией интегральной оптики, согласно которой все базовые элементы схем должны быть плоскими. Простейший плоский оптический волновод, изображённый на рис. 4.20, состоит из тонкой световедущей плёнки толщиной h с показателем преломления n_f («f» — от англ. film), помещённой между подложкой и покровным слоем с меньшими показателями преломления, соответственно n_s («s» — от англ. substrate) и n_c («c» — от англ. cover) ($n_f > n_s \geq n_c$). Часто покровным материалом является воздух ($n_c = 1$). Типичные значения разности между показателями преломления подложки и покровного слоя лежат в пределах 0.0001–0.1, а толщина плёнки составляет величину порядка 1 мкм.

При исследовании распространения электромагнитных волн в оптических волноводах используют два подхода: с позиций геометрической оптики и электродинамический подход.

4.9.1. Геометрическая оптика. В основе подхода лежит представление о распространении световой энергии вдоль лучей по зигзагообразным траекториям путём переотражения от границ раздела «плёнка–покровный слой» и «плёнка–подложка».

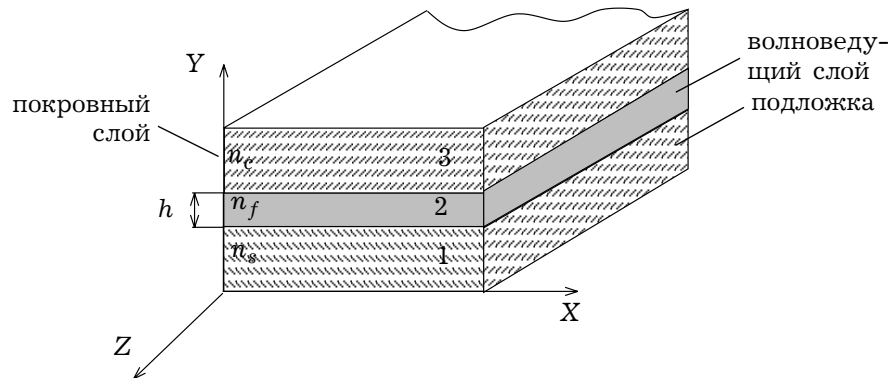


Рис. 4.20

Процесс распространения света в таком представлении основан на эффекте полного внутреннего отражения от оптически менее плотной среды. Именно поэтому в плоских оптических волноводах показатель преломления волноведущей плёнки должен быть больше показателей преломления подложки и покровного слоя.

Вследствие явления полного внутреннего отражения у поверхностей раздела «плёнка–подложка» и «плёнка–покровный слой» области распространения света оказываются ограниченными, появляется возможность распространения большого числа мод, образуемых лучами, имеющими различные углы падения на указанные границы раздела, для которых выполняется условие полного внутреннего отражения.

Критический угол $\theta_{кр}$ полного внутреннего отражения поля направляемой плёнкой волны определяется из формулы:

$$\sin \theta_{кр} = n_2 / n_1, \quad (4.9.1)$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления слоёв, причём $n_1 > n_2$. При угле падения лучей, образующих волну на границу раздела сред $\theta > \theta_{кр}$, возникает явление полного внутреннего отражения и падающая волна отражается обратно в область с большим показателем преломления. При этом поле волны, проникая в оптически менее плотные среды, граничащие с направляющей плёнкой, экспоненциально убывает в этих средах при удалении от плёнки.

Базовой структурой при создании оптических интегральных схем является плоский асимметричный диэлектрический волновод, у которого показатели преломления подложки и покровного слоя различны. В этом случае важными оптическими параметрами являются два критических угла полного внутреннего отражения — θ_s («плёнка–подложка») и θ_c («плёнка–покровный слой»). Эти критические углы определяются из выражений:

$$\sin \theta_s = n_s / n_f, \quad \sin \theta_c = n_c / n_f,$$

аналогичных (4.9.1)

В зависимости от соотношения между критическими углами θ_s , θ_c и углом падения θ лучей, образующих электромагнитную волну, в асимметричном плоском волноводе возможно существование трёх типов волн, в оптике часто называемых *модами*:

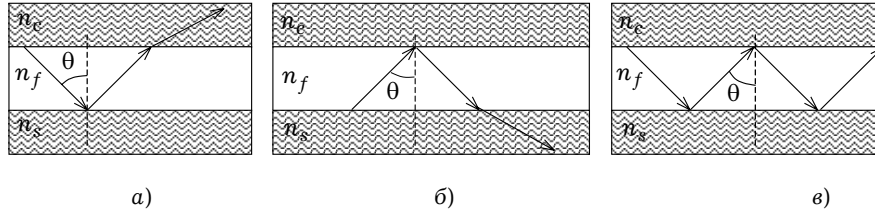


Рис. 4.21

1. *Излучающие моды* ($\theta_s < \theta < \theta_c$) (рис. 4.21а). Световая волна, отражаясь от подложки, выходит из волновода через покровный слой.

2. *Излучающие моды подложки* ($\theta_c < \theta < \theta_s$) (рис. 4.21б). Световая волна, отражаясь от границы раздела «плёнка–покровный слой», выходит из волновода в подложку.

3. *Волноводные моды* ($\theta > \theta_s, \theta_c$) (рис. 4.21в). Световая волна испытывает полное внутреннее отражение на обеих границах раздела слоёв и распространяется внутри световедущей плёнки путём переотражений.

Дисперсионное уравнение для мод плоского волновода может быть получено исходя из условия согласования фаз. Предположим, что луч света направляется в световедущей плёнке вдоль оси OZ , последовательно отражаясь от верхней и нижней границ раздела сред. В этом случае физическая картина волноводного распространения электромагнитной волны состоит в том, что световая энергия, как уже отмечалось, идёт внутри плёнки вдоль лучей по зигзагообразным траекториям. Точнее говоря, поле волны образуется суперпозицией двух однородных плоских волн, нормали к волновым фронтам которых описывают зигзагообразную кривую. На границах плёнки эти волны испытывают полное внутреннее отражение. Будем характеризовать гармоническую волну частотой ω и волновым вектором $\vec{k}_0 n_f$. Постоянная распространения волны γ определяется углом переотражения θ и вычисляется как

$$\gamma = (\vec{k}_0 n_f)_z = \omega / v_\phi = k_0 n_f \sin \theta, \quad (4.9.2)$$

где v_ϕ — фазовая скорость.

В выражении (4.9.2) угол θ для каждой моды принимает вполне определённое значение.

Рассмотрим подробно двумерное в плоскости YOZ (рис. 4.20) распространение поля вдоль светового луча между двумя последовательными переотражениями на границах раздела. Для того, чтобы поле было устойчивым (самосогласованным), сумма всех фазовых набегов в плоскостях $y = \text{const}$ (рис. 4.20) за один проход между двумя переотражениями должна быть кратной 2π . В качестве отправной плоскости $y = \text{const}$ возьмём плоскость, совпадающую с поверхностью подложки. Набег фазы при распространении волны от подложки до покровного слоя равен $k_0 h n_f \cos \theta$, на границе раздела «плёнка–покровный слой» за счёт полного внутреннего отражения появляется фазовый сдвиг $-2\Phi_c$, на обратном пути в плёнке

добавляется фазовый набег $k_0 h n_f \cos \theta$, а при полном внутреннем отражении от подложки возникает фазовый сдвиг $-2\Phi_s$. Таким образом, условие самосогласования (условие поперечного резонанса) имеет вид:

$$k_0 h n_f \cos \theta - \Phi_c - \Phi_s = \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9.3)$$

где n — целое число, которое определяет порядок моды;

$$\Phi_{s,c} = \arctg \frac{\sqrt{n_f^2 \sin^2 \theta - n_{s,c}^2}}{n_f \cos \theta} \quad \text{для Н-мод;}$$

$$\Phi_{s,c} = \frac{n_f^2}{n_{s,c}^2} \arctg \frac{\sqrt{n_f^2 \sin^2 \theta - n_{s,c}^2}}{n_f \cos \theta} \quad \text{для Е-мод.}$$

В оптике принято при построении дисперсионных характеристик мод световодов переходить к безразмерным нормированным величинам, аналогам волнового числа k_0 и постоянной распространения $\gamma = k_0 n_f \sin \theta$. Обычно используют три нормированных параметра:

$N = \gamma / k_0 = n_f \sin \theta$ — эффективный показатель преломления,

$V = k_0 h \sqrt{n_f^2 - n_s^2}$ — нормированная частота,

$b = \frac{N^2 - n_s^2}{n_f^2 - n_s^2}$ — нормированный эффективный показатель преломления.

Для описания степени несимметрии показателей преломления подложки и покровного слоя вводят параметр асимметрии:

$$a = (n_s^2 - n_c^2) / (n_f^2 - n_s^2). \quad (4.9.4)$$

С учётом введённых нормированных параметров V , b и a дисперсионное уравнение (4.9.3) волн плоского трёхслойного оптического волновода при постоянном показателе преломления n_f волноведущей плёнки принимает вид:

$$V \sqrt{1-b} = \pi n + \arctg \sqrt{\frac{b}{1-b}} + \arctg \sqrt{\frac{b+a}{1-b}}. \quad (4.9.5)$$

Нормированные частоты отсечек V_n могут быть получены из уравнения (4.9.5) при $b = 0$:

$$V_n = \arctg \sqrt{a} + \pi n, \quad (4.9.6)$$

где a определяется соотношением (4.9.4).

На рис. 4.22 представлены дисперсионные характеристики $b = b(V)$ Н-волн плоского трёхслойного волновода с параметром асимметрии $a = 0$, рассчитанные на основе уравнения (4.9.5).

4.9.2. Электромагнитная теория плоских оптических волноводов. Основой теории является система уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \mu_a \vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon_a \vec{E}. \quad (4.9.7)$$

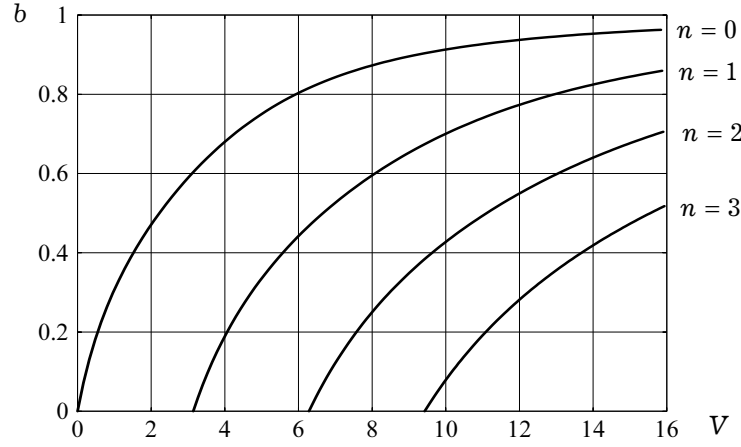


Рис. 4.22

На практике диэлектрическая проницаемость волноведущего слоя, а следовательно, и его показатель преломления могут зависеть от поперечной координаты y : $\varepsilon(y) = n^2(y)$. Функция $n(y)$, называемая *профилем показателя преломления* слоя, обычно имеет максимальное значение в плоскости симметрии волноведущего слоя.

В плоском оптическом волноводе может распространяться некоторое число собственных волн, поля которых представим в виде:

$$\vec{E}_n(x, y, z) = \vec{e}_n(x, y) e^{-i\gamma_n z}, \quad \vec{H}_n(x, y, z) = \vec{h}_n(x, y) e^{-i\gamma_n z}, \quad (4.9.8)$$

где n — номер моды; γ_n — постоянная распространения моды с индексом n ; функции $e_n(x, y)$, $h_n(x, y)$ в (4.9.8) описывают распределение поля n -моды в поперечном сечении волновода ($z = \text{const}$).

Нетрудно показать, что в плоских оптических волноводах возможно распространение двух типов собственных волн — Е- и Н-волн.

Из системы уравнений Максвелла (4.9.7) в предположении отсутствия вариации поля вдоль оси ОХ ($\partial/\partial x \equiv 0$) несложно получить уравнения Гельмгольца относительно продольных составляющих полей:

$$\frac{d^2 e_z}{dy^2} + [k_0^2 n^2(y) - \gamma_n^2] e_z = 0 \quad (4.9.9)$$

для Е-волн и

$$\frac{d^2 h_z}{dy^2} + n^2(y) \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{n^2(y)} \frac{dh_z}{dy} \right] + [k_0^2 n^2(y) - \gamma_n^2] h_z = 0 \quad (4.9.10)$$

для Н-волн.

Очевидно, что в случае, когда волноведущий слой имеет постоянное значение показателя преломления, уравнения Гельмгольца (4.9.9) и (4.9.10) для Е- и Н-волн по виду совпадают между собой. В результате решения уравнений Гельмгольца

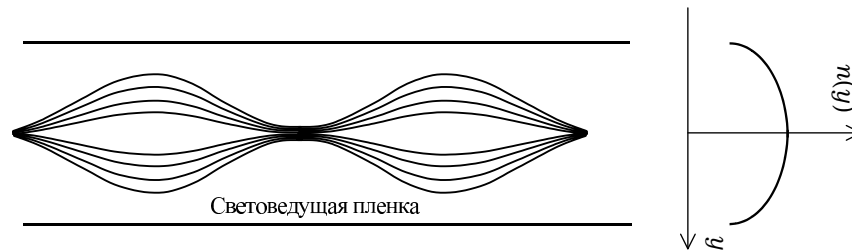


Рис. 4.23

можно определить структуры полей Е- и Н-волн в поперечной плоскости волновода, чего не позволяет получить геометрический подход, описанный выше.

4.9.3. Плоские диэлектрические волноводы с изменяющимся профилем показателя преломления. Вследствие явления полного внутреннего отражения на поверхностях раздела «плёнка–подложка» и «плёнка–покровный слой» область распространения света оказывается ограниченной. В ней распространяется большое число мод, образуемых лучами с различными углами падения на поверхности раздела, удовлетворяющими условию полного внутреннего отражения. Поскольку длина лучей, соответствующих различным модам, разная, время прохождения световой энергии, переносимой различными модами, будет различным. Поэтому передаваемые по волноводу сигналы всегда будут искажаться. Если на вход световода подать короткий импульс, переносимый совокупностью различных мод, на его выходе либо происходит уширение входного импульса, либо вместо одного импульса наблюдается их серия. Описанное явление называется *межмодовой дисперсией*. Для её устранения у волноведущей плёнки делают плавно изменяющимся показатель преломления $n_f = n_f(y)$, где y — поперечная координата. Показатель преломления, как правило, постепенно убывает от максимального значения в середине плёнки до минимальных значений на границах её раздела с подложкой и покровным слоем. Плоские оптические волноводы такого типа называются *градиентными*, или *световодами с плавно изменяющимся профилем показателя преломления*. Согласно геометрической оптике, в этом случае различные моды, имеющие неодинаковые фазовые скорости, будут испытывать различные рефракционные искривления траекторий лучей, их образующих, что приводит к их периодической фокусировке (рис. 4.23). Лучи, введённые в градиентный волновод под малыми углами к его оси, рефрагируют слабо. Если луч вводится под большим углом, то при распространении световой энергии вдоль волновода он будет испытывать большое рефракционное искривление. Геометрическая длина пути распространяющегося света вдоль сильно искривлённого луча, естественно, больше, но оптическая длина пути за счёт того, что значительная часть пути луча находится в оптически менее плотной среде, оказывается близкой (в идеальном случае, рис. 4.23, равной) оптическому пути вдоль слабо искривлённого луча. В результате межмодовая дисперсия уменьшается. В этом случае удаётся уравнивать время распространения световой энергии вдоль лучей, падающих на торец под различными углами, при помощи выбора необ-

ходимого закона $n_f(y)$. Как показывают расчёты, это достигается в волноводах, у которых профиль показателя преломления описывается квадратичной функцией или функцией вида $1/\operatorname{ch}^2(y)$. Кроме этого, использование градиентных плёнок позволяет концентрировать передаваемую энергию вблизи плоскости симметрии плёнки, что, в свою очередь, уменьшает величину потерь на границах раздела «плёнка–подложка» и «плёнка–покровный слой». На практике для изготовления плёнок с плавно изменяющимся профилем показателя преломления применяют методы диффузии и ионной имплантации.

4.9.4. Параболический профиль показателя преломления. Рассмотрим распространение электромагнитной волны в среде, показатель преломления которой изменяется по параболическому закону:

$$n(y) = n_0 - n_2 y^2, \quad (4.9.11)$$

где n_0 — значение показателя преломления на оси при $y = 0$ волновода; n_2 — некоторая положительная постоянная.

В этом случае уравнение Гельмгольца (4.9.9) после подстановки в него (4.9.11) для Е-волн запишется в виде:

$$\frac{d^2 e_z}{dy^2} + [(k_0^2 K_0 - \gamma^2) - k_0^2 K_2 y^2] e_z = 0, \quad (4.9.12)$$

где $K_0 = n_0^2$, $K_2 = 2n_0 n_2$.

При записи уравнения (4.9.12) полагаем, что волноведущая структура является двумерной: вдоль оси ОХ поле волны не изменяется ($\partial/\partial x \equiv 0$); профиль показателя преломления слабо изменяющийся, в результате чего $k_0^2 n_2^2 y^4 \ll 2n_0 n_2 k_0^2 y^2$.

Заменой переменных [Л4.35]:

$$\alpha = \sqrt[4]{k_0^{-2} K_2^{-1}}, \quad \xi = y/\alpha, \quad \lambda = \frac{k_0^2 K_0 - \gamma^2}{k_0 \sqrt{K_2}}.$$

уравнение (4.9.12) приводится к более простому виду:

$$\frac{d^2 e_z}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) e_z(\xi) = 0. \quad (4.9.13)$$

Уравнение (4.9.13) совпадает по виду с одномерным уравнением Шредингера для линейного гармонического осциллятора. Для того, чтобы его решение было ограниченным при $\xi \rightarrow \pm\infty$, необходимо собственное значение образуемой при этом краевой задачи выбрать в виде:

$$\lambda = \lambda_n = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9.14)$$

Собственные функции, соответствующие собственным значениям (4.9.14), представляют собой функции Эрмита–Гаусса:

$$e_z^n(\xi) = A_n \mathcal{H}_n(\xi) e^{-\xi^2/2}; \quad n = \overline{0, +\infty}, \quad (4.9.15)$$

где A_n — произвольные постоянные; $\mathcal{H}_n(\xi)$ — полином Эрмита порядка n .

Полиномы Эрмита низших порядков имеют следующий вид:

$$\mathcal{H}_0(\xi) = 1, \quad \mathcal{H}_1(\xi) = 2\xi, \quad \mathcal{H}_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \quad \mathcal{H}_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi.$$

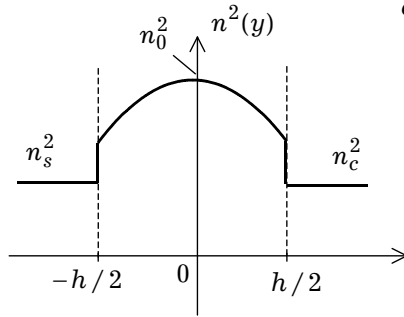


Рис. 4.24

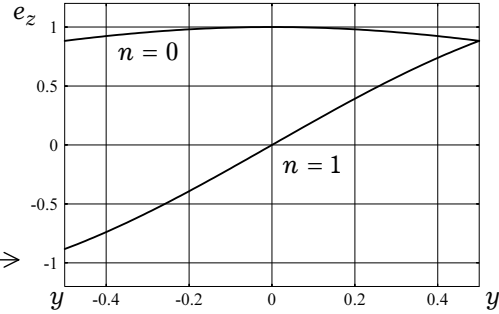


Рис. 4.25

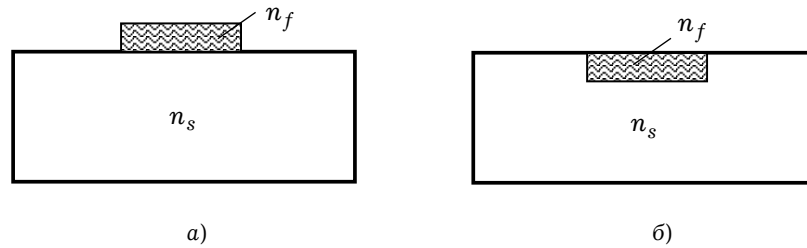


Рис. 4.26

Составляющая поля e_z определяется суперпозицией функций (4.9.15):

$$e_z(\xi) = e^{-\xi^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \mathcal{H}_n(\xi).$$

Дисперсионное уравнение для собственных волн волноведущей структуры находится из равенства (4.9.14) и имеет вид:

$$\gamma_n^2 = k_0^2 K_0 - (2n+1)k_0 \sqrt{K_2}.$$

На рис. 4.24 показан параболический профиль показателя преломления плоского оптического волновода, на рис. 4.25 — распределение составляющей e_z вдоль координаты y для первых двух мод волновода. Следует обратить внимание на то, что моды с чётными n обладают симметричным распределением поля относительно оси волновода $y = 0$, моды с нечётными n — антисимметричным.

4.9.5. Типы плоских оптических волноводов. На практике обычно применяются две конструкции плоских световодов — планарная (полосковая, плёночная) (рис. 4.26а) и канальная (рис. 4.26б). В планарной конструкции световедущая плёнка расположена на подложке с меньшим ($n_s < n_f$) показателем преломления, а в канальной конструкции — световедущая плёнка «утоплена» в подложку. Как уже отмечалось, плёнка (канал) и подложка выполняются из оптически прозрачных материалов с различными показателями преломления. Толщина световедущей плёнки имеет величину порядка 0.1–1 мкм, а ширина канала достигает 5–10 мкм.

Канальные волноводы оптического диапазона находят широкое применение при создании инжекционных полупроводниковых лазеров. Плоские световоды являются основой устройств интегральной оптики: модуляторов, переключателей, фильтров, направленных ответвителей, поляризационных элементов, устройств сопряжения волоконных световодов с источниками (полупроводниковыми инжекционными лазерами) и приёмниками излучения (фотодиодами), которые, согласно основной концепции интегрально-оптических схем, также имеют планарную конструкцию.

4.10(*). Волоконные световоды

Если плоские диэлектрические волноводы используют в интегрально-оптических схемах, *волоконные световоды* применяют для направленной передачи оптического излучения на большие расстояния. В простейшем случае оптическое волокно представляет собой нить круглого сечения из прозрачного в нужной спектральной области материала (стекло, кварц или различные полимеры). Распространение световой волны в оптическом волокне основано на явлении полного внутреннего отражения. При этом необходимо, чтобы показатель преломления волокна был больше, чем показатель преломления окружающей среды.

Оптическое излучение вводят через торцевой (обычно плоский) конец волокна. В качестве источника излучения используют светоизлучающие диоды и полупроводниковые инжекционные лазеры. На практике применяется волоконный световод, состоящий из волокна (сердцевины) и оболочки. Диаметр сердцевины обычно составляет 1–100 мкм, диаметр оболочки — 10 мкм–1 мм (один из стандартных диаметров оболочки — 125 мкм). Световод (волокно и оболочка) на практике покрывают ещё одной защитной оболочкой — чехлом, который увеличивает прочность и стойкость к воздействию окружающей среды. Такая структура носит название *оптического кабеля*. Оптический кабель может содержать как один, так и множество волоконных световодов и, кроме того, включать в себя электрические провода для обеспечения питания, например, удалённых электронных устройств. Оптические кабели являются основой современных волоконно-оптических линий связи (ВОЛС).

4.10.1. Собственные волны круглого диэлектрического волновода. В качестве базовой структуры при расчёте характеристик волоконных световодов используется круглый диэлектрический волновод (ДВ), изображённый на рис. 4.27. Собственными волнами такого волновода называются волны, поля которых удовлетворяют условию излучения при $\rho \rightarrow \infty$. Как и в круглом металлическом волноводе, в рассматриваемой структуре возможно распространение волн типа Е и Н. Однако различие граничных условий на поверхности диэлектрического и стенках металлического волноводов приводит к тому, что в диэлектрическом волноводе только волны с симметричной (относительно угловой цилиндрической координаты) структурой поля (E_{0m}, H_{0m}) могут существовать раздельно. Несимметричные волны являются гибридными и классифицируются как HE_{nm} и EH_{nm} .

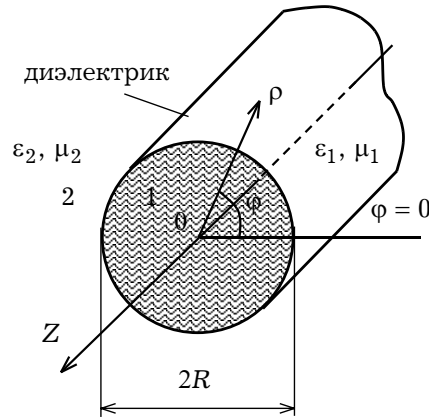


Рис. 4.27

С физической точки зрения существование гибридных волн можно объяснить, используя аналогию с полым волноводом. В полном металлическом волноводe при возбуждении несимметричных волн поверхностные токи проводимости \vec{j} на стенках волновода содержат поперечные и продольные составляющие. В качестве примера, структура \vec{j} волны H_{11} показана на рис. 4.28. При возбуждении волны H_{11} в диэлектрическом волноводe на его поверхности возникают токи смещения $\vec{j}^{\text{см}}$ с аналогичной структурой. Наличие продольной составляющей $j_z^{\text{см}}$ свидетельствует о том, что при возбуждении волны H_{11} появляется составляющая $E_z \neq 0$, то есть волна H_{11} становится гибридной. Поэтому при постановке краевой задачи для ДВ необходимо полагать, что в общем случае в нём распространяются гибридные волны, у которых присутствуют обе продольные составляющие поля: E_z и H_z .

Запишем уравнения Гельмгольца относительно продольных составляющих полей гибридных волн круглого диэлектрического волновода в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a E_z &= 0, \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a H_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.10.1)$$

Уравнения (4.10.1) решаются независимо в первой и второй областях (рис. 4.26). Решение для внутренней области 1 имеет вид:

$$\begin{aligned} E_z^{(1)}(\rho, \varphi, z) &= A_1 J_n(\gamma_{\perp 1} \rho) \cos(n\varphi) e^{-i\gamma z}, \\ H_z^{(1)}(\rho, \varphi, z) &= B_1 J_n(\gamma_{\perp 1} \rho) \sin(n\varphi) e^{-i\gamma z}, \end{aligned} \quad (4.10.2)$$

где $\gamma_{\perp 1} = \omega^2 \varepsilon_{a1} \mu_{a1} - \gamma^2$, γ — постоянная распространения; A_1 и B_1 — неопределённые постоянные; $n = 0, 1, 2, \dots$; $\gamma_{\perp 1}$ — поперечное волновое число в первой области (внутри ДВ).

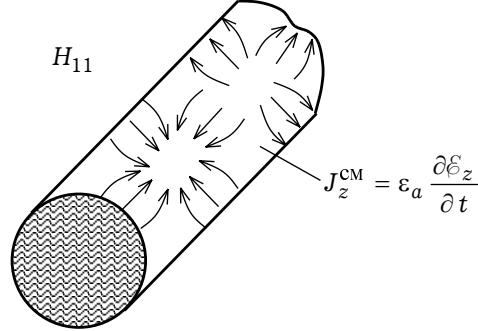


Рис. 4.28

Решение уравнений (4.10.1) во внешней области 2 имеет другой вид:

$$\begin{aligned} E_z^{(2)}(\rho, \varphi, z) &= A_2 H_n^{(2)}(\gamma_{\perp 2} \rho) \cos(n\varphi) e^{-i\gamma z}, \\ H_z^{(2)}(\rho, \varphi, z) &= B_2 H_n^{(2)}(\gamma_{\perp 2} \rho) \sin(n\varphi) e^{-i\gamma z}, \end{aligned} \quad (4.10.3)$$

где $\gamma_{\perp 2} = \omega^2 \epsilon_{a2} \mu_{a2} - \gamma^2$, A_2 и B_2 — неопределённые постоянные; $n = 0, 1, 2, \dots$; $H_n^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля 2-го рода; $\gamma_{\perp 2}$ — поперечное волновое число во второй области (во внешней среде).

Представление решения краевой задачи во второй области функциями Ханкеля $H_n^{(2)}(x)$ обеспечивает возможность описания в направляющей структуре поверхностных волн, у которых поле экспоненциально убывает в радиальном направлении при удалении от диэлектрического волновода. С учётом асимптотического (при больших ρ) представления функций Ханкеля

$$H_n^{(2)}(\gamma_{\perp 2} \rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma_{\perp 2} \rho}} e^{-\left[\gamma_{\perp 2} \rho - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]}, \quad (4.10.4)$$

указанное экспоненциальное затухание будет иметь место при условии $Im \gamma_{\perp 2} < 0$, которое является обязательным для поверхностных волн круглого диэлектрического волновода.

Составляющие полей E_φ , E_ρ , H_φ и H_ρ в 1-й и 2-й областях определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{i\omega\mu_a}{\gamma_{\perp 2}^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{i\gamma}{\gamma_{\perp 2}^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}, & E_\varphi &= \frac{i\omega\mu_a}{\gamma_{\perp 2}^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{i\gamma}{\gamma_{\perp 2}^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \\ H_\rho &= -\frac{i\gamma}{\gamma_{\perp 2}^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{i\omega\epsilon_a}{\gamma_{\perp 2}^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, & H_\varphi &= -\frac{i\gamma}{\gamma_{\perp 2}^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{i\omega\epsilon_a}{\gamma_{\perp 2}^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (4.10.5)$$

В (4.10.5) верхние индексы опущены, так как эти формулы справедливы для обеих областей.

Запишем условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} на границе раздела двух сред:

$$\begin{aligned} E_z^{(1)} &= E_z^{(2)}, & H_z^{(1)} &= H_z^{(2)}, \\ E_\phi^{(1)} &= E_\phi^{(2)}, & H_\phi^{(1)} &= H_\phi^{(2)} \quad \text{при } \rho = R. \end{aligned} \quad (4.10.6)$$

Из граничных условий (4.10.6) с учётом (4.10.2), (4.10.3) и (4.10.5) получается система четырёх линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов: A_1, B_1, A_2, B_2 . Записывая условие нетривиальности её решения (приравнявая нулю главный определитель), получаем дисперсионное уравнение волн HE_{nm}, EH_{nm} круглого ДВ:

$$\begin{aligned} & \frac{n^2}{R^2} \left(\frac{1}{\gamma_{\perp 1}^2} - \frac{1}{\gamma_{\perp 2}^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\gamma_{\perp 1}^2} - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\gamma_{\perp 2}^2} \right) = \\ &= \left[\frac{\varepsilon_1}{\gamma_{\perp 1}^2} \frac{J'_n(\gamma_{\perp 1} R)}{J_n(\gamma_{\perp 1} R)} - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_{\perp 2}^2} \frac{H'_n{}^{(2)}(\gamma_{\perp 2} R)}{H_n^{(2)}(\gamma_{\perp 2} R)} \right] \times \\ & \times \left[\frac{\mu_1}{\gamma_{\perp 1}^2} \frac{J'_n(\gamma_{\perp 1} R)}{J_n(\gamma_{\perp 1} R)} - \frac{\mu_2}{\gamma_{\perp 2}^2} \frac{H'_n{}^{(2)}(\gamma_{\perp 2} R)}{H_n^{(2)}(\gamma_{\perp 2} R)} \right], \end{aligned} \quad (4.10.7)$$

где $k_{1,2}^2 = \omega^2 \varepsilon_{a1,2} \mu_{1,2}$; штрихи обозначают производные от цилиндрических функций по ρ .

Уравнение (4.10.7) решается совместно с уравнением, связывающим поперечные волновые числа

$$\gamma_{\perp 1}^2 - \gamma_{\perp 2}^2 = k_1^2 - k_2^2 \quad (4.10.8)$$

относительно $\gamma, \gamma_{\perp 1}, \gamma_{\perp 2}$. Уравнение (4.10.7) справедливо и для случая диэлектриков с потерями. При этом необходимо лишь полагать комплексными диэлектрическую и магнитную проницаемости и волновые числа (см. раздел 2.6).

Проведём анализ дисперсионного уравнения (4.10.7). Если в нём положить индекс $n = 0$, оно распадается на два уравнения. При этом уравнение

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \gamma_{\perp 1} R \frac{J_0(\gamma_{\perp 1} R)}{J'_0(\gamma_{\perp 1} R)} - \gamma_{\perp 2} R \frac{H_0^{(2)}(\gamma_{\perp 2} R)}{H_0'^{(2)}(\gamma_{\perp 2} R)} = 0 \quad (4.10.9)$$

описывает H_{0m} -волны, а уравнение

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \gamma_{\perp 1} R \frac{J_0(\gamma_{\perp 1} R)}{J'_0(\gamma_{\perp 1} R)} - \gamma_{\perp 2} R \frac{H_0^{(2)}(\gamma_{\perp 2} R)}{H_0'^{(2)}(\gamma_{\perp 2} R)} = 0 \quad (4.10.10)$$

описывает E_{0m} -волны круглого диэлектрического волновода.

Уравнение (4.10.9) можно получить, подставляя решения второго уравнения (4.10.1) в граничные условия:

$$H_z^{(1)}(\rho = R) = H_z^{(2)}(\rho = R), \quad E_\phi^{(1)}(\rho = R) = E_\phi^{(2)}(\rho = R),$$

а уравнение (4.10.10) — подставляя решения первого уравнения (4.10.1) в граничные условия:

$$E_z^{(1)}(\rho = R) = E_z^{(2)}(\rho = R), \quad H_\phi^{(1)}(\rho = R) = H_\phi^{(2)}(\rho = R),$$

полагая при этом $n = 0$.

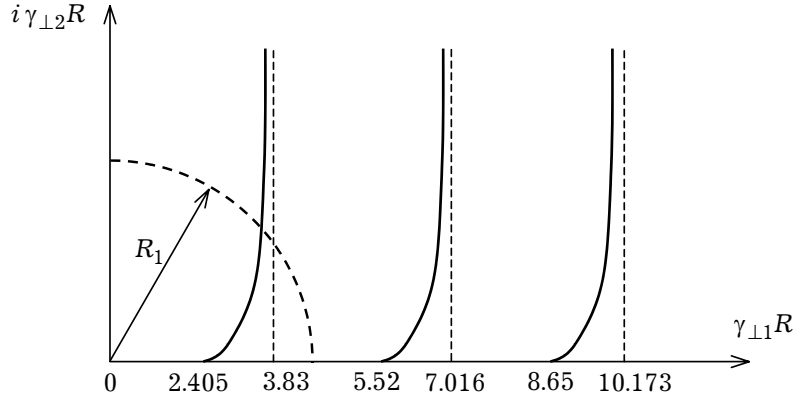


Рис. 4.29

Таким образом, в круглом ДВ только симметричные волны, поля которых не зависят от угловой координаты, можно классифицировать как E_{0m} - и H_{0m} -волны; волны, имеющие угловую зависимость ($n > 0$), являются гибридными и классифицируются как EH_{nm} - или HE_{nm} -волны. В обозначениях гибридных волн первый индекс n означает число вариаций поля по координате ϕ , а второй индекс m — номер корня уравнения (4.10.7).

Рассмотрим волны E_{0m} . С учётом соотношений (П.6.10)

$$J'_0(\gamma_{\perp 1}R) = -J_1(\gamma_{\perp 1}R), \quad H_0^{(2)}(\gamma_{\perp 2}R) = -H_1^{(2)}(\gamma_{\perp 2}R),$$

уравнение (4.10.10) приводится к виду:

$$\frac{\gamma_{\perp 1}}{\varepsilon_1} \frac{J_0(\gamma_{\perp 1}R)}{J_1(\gamma_{\perp 1}R)} = \frac{\gamma_{\perp 2}}{\varepsilon_2} \frac{H_0^{(2)}(\gamma_{\perp 2}R)}{H_1^{(2)}(\gamma_{\perp 2}R)} = 0. \quad (4.10.11)$$

Дисперсионное уравнение (4.10.11) необходимо решать совместно с уравнением, связывающим поперечные волновые числа:

$$(\gamma_{\perp 1}R)^2 + (i\gamma_{\perp 2}R)^2 = k_0^2 R^2 (\varepsilon_{a1}\mu_{a1} - \varepsilon_{a2}\mu_{a2}). \quad (4.10.12)$$

Рассмотрим графический способ решения указанных уравнений. Нетрудно видеть, что (4.10.12) представляет собой уравнение окружности радиуса $R_1 = k_0 R \sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1} - \varepsilon_{a2}\mu_{a2}}$ (рис. 4.29), точки пересечения которой с ветвями решений уравнения (4.10.11) дают поперечные волновые числа симметричных поверхностных волн E_{0m} . Из (4.10.11) видно, что указанные ветви решений начинаются при значениях $\gamma_{\perp 1}R$, являющихся корнями уравнения

$$J_0(\gamma_{\perp 1}R) = 0, \quad (4.10.13)$$

и уходят по $\gamma_{\perp 2}R$ в бесконечность при значениях $\gamma_{\perp 1}R$, являющихся корнями уравнения

$$J_1(\gamma_{\perp 1}R) = 0. \quad (4.10.14)$$

Поскольку уравнения (4.10.13) и (4.10.14) имеют бесчисленное множество корней, полагаем соответствующую им последовательность ветвей решений уравнения (4.10.11). Каждая ветвь решений соответствует своей собственной волне (рис. 4.29).

Второй индекс в обозначении волны E_{0m} — номер ветви решения дисперсионного уравнения (4.10.11).

Значения $\gamma_{\perp 1}^{(m)}$, определяемые как корни уравнения (4.10.13), соответствуют критическим частотам поверхностных волн E_{0m} . Поскольку на критических частотах, как видно из рис. 4.29, $\gamma_{\perp 2} = 0$, значения критических частот с учётом (4.10.12) определяются по формуле:

$$\omega_{\text{кр}}^{E_{0m}} = \frac{\gamma_{\perp 1}^{(m)} c}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}}. \quad (4.10.15)$$

Сопоставляя уравнения (4.10.10) и (4.10.9), нетрудно убедиться, что критические частоты волн H_{0m} будут определяться также по формуле (4.10.15). Таким образом, критические частоты поверхностных волн E_{0m} и H_{0m} совпадают. Из (4.10.8) видно, что при $\omega \rightarrow \omega_{\text{кр}}$ фазовая скорость поверхностной волны $v_{\text{ф}} \rightarrow c / \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ (поскольку в этом случае $\gamma_{\perp 2} = 0$), то есть $v_{\text{ф}}$ стремится к скорости распространения плоской волны в свободном пространстве с параметрами ϵ_2, μ_2 . На критической частоте поле начинает излучаться из диэлектрического волновода в окружающую среду, и поверхностная волна прекращает свое существование.

При $\omega > \omega_{\text{кр}}$ $v_{\text{ф}} < c / \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ (волна становится медленной), поэтому, как видно из (4.10.8), поперечное волновое число $\gamma_{\perp 2}$ является мнимым. Будучи при этом отрицательным, оно согласно (4.10.4) обеспечивает экспоненциальное убывание поля в радиальном направлении при удалении от круглого ДВ.

4.10.2. Типы волоконных световодов. Многомодовое оптическое волокно. В многомодовом оптическом волокне может одновременно распространяться большое число мод, образуемых лучами, вводимыми в световод под разными углами. Многомодовое волокно обладает относительно большим диаметром сердцевины (стандартные значения 50 и 62.5 мкм) и, соответственно, большими размерами, что облегчает его монтаж и эксплуатацию. Основным недостатком такого волокна является наличие *межмодовой дисперсии*, возникающей из-за того, что различные моды проходят в волокне разный оптический путь. Для уменьшения межмодовой дисперсии применяют *волокно с градиентным показателем преломления*. В таком волокне значение показателя преломления сердцевины плавно изменяется от центра к краям по закону

$$n^2(\rho) = n_1^2 \{1 - 2\Delta(\rho/R)^2\},$$

где $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$, n_1 — показатель преломления на оси сердцевины, n_2 — показатель преломления оболочки, R — радиус сердцевины. Благодаря этому, световая энергия, переносимая различными модами в волокне, распространяется по различным рефрагированным траекториям, разность оптических путей которых, а следовательно, и межмодовая дисперсия существенно меньше, чем в многомодовом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления. Однако полностью устранить межмодовую дисперсию в многомодовом волокне всё же не удаётся, что объясняется несовершенством профиля показателя преломления и наличием так называемых *спиральных мод*, возникающих вследствие осевой симметрии волокна, избавиться от которых в принципе невозможно. Область применения многомодового волокна: локальные и внутриобъектные сети.

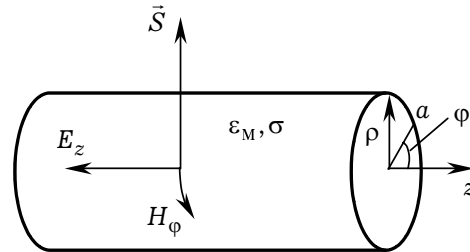


Рис. 4.30

Стандартное одномодовое волокно (SM). Потребность в увеличении полосы пропускания и дальности передачи сигнала приводит к необходимости применения одномодового оптического волокна, то есть волокна со ступенчатым профилем показателя преломления. При этом диаметр сердцевины и отношение показателей преломления сердцевины и оболочки выбираются таким образом, чтобы в волокне могла распространяться только одна мода. Явление межмодовой дисперсии в таком волокне отсутствует. Стандартное одномодовое волокно предназначено для работы в диапазоне длин волн 1.285-1.33 мкм. Растущая потребность в увеличении полосы пропускания и протяжённости оптических линий связи привела к возникновению ряда модификаций стандартного одномодового волокна (волокно со смещённой нулевой и ненулевой дисперсиями, TrueWave RS-волокно, AllWave-волокно и др.).

4.11(*). Замедляющие структуры

К замедляющим направляющим структурам относятся линии передачи, в которых электромагнитные волны (в отличие от обычных, рассмотренных выше, волноводов) распространяются с фазовой скоростью $v_{\phi} < c$. Такие структуры находят применение при создании линий задержки в СВЧ трактах, в электронных приборах типа лампы бегущей (обратной) волны, в линейных ускорителях заряженных частиц. К наиболее распространённым замедляющим структурам относятся различные диэлектрические волноводы (открытые и экранированные), спиральные линии, гребенчатые направляющие структуры, различные диафрагмированные волноводы (экранированные волноводы с периодически вдоль оси расположенными диафрагмами), открытые гофрированные волноводы и т.д. Исходя из перечисленных направляющих структур, можно понять, что замедление в них осуществляется либо за счёт концентрации поля волны в диэлектрической среде, либо за счёт увеличения траектории его распространения.

4.11.1. Распространение электромагнитного поля вдоль импеданского цилиндра.

Рассмотрим круглый металлический стержень, имеющий конечную проводимость (рис. 4.30).

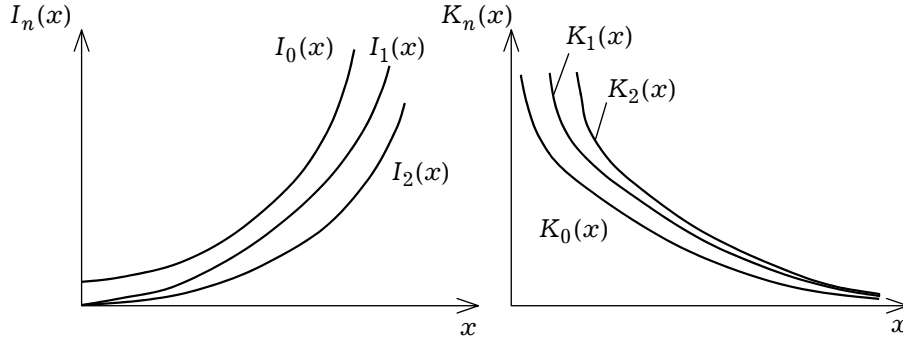


Рис. 4.31

Поле во внешней области будем описывать с помощью продольных компонент векторов Герца, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_z^{e,m}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial z^2} + \varepsilon_a \mu_a \omega^2 \Pi_z^{e,m} = 0.$$

Полагая его симметричным (не зависящим от угловой координаты), краевые задачи для каждого из векторов Герца можем ставить самостоятельно, то есть для волн типа E ставим краевую задачу на уравнении Гельмгольца относительно электрического вектора Герца, для волн типа H — относительно магнитного.

После разделения переменных получаем два уравнения:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0,$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n^2 \Phi = 0,$$

где n — постоянная разделения переменных; $\alpha^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \gamma^2$.

Первое из них в предположении того, что волна, направляемая не идеально проводящим стержнем, является замедленной, вследствие чего поперечное волновое число α — мнимая величина, преобразуется в модифицированное уравнение Бесселя, которое в общем случае (при произвольном n) записывается как

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \left(\chi^2 + \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (4.11.1)$$

где $\chi = i\alpha$. Решениями этого уравнения являются модифицированные функции Бесселя $I_n(\chi\rho)$ и функции Мак-Дональда $K_n(\chi\rho)$, качественные графические зависимости для которых показаны на рис. 4.31.

Поскольку направляемое стержнем поле должно концентрироваться вблизи поверхности $\rho = a$, для его описания выбираем функцию Мак-Дональда, как убывающую в радиальном направлении и обеспечивающую выполнение нулевого граничного условия на бесконечности. В нашем случае (в отсутствии угловой зависи-

мости поля) это будет функция $K_0(\chi\rho)$. Таким образом, решение краевой задачи для волны типа E записываем как

$$\Pi_z^e = AK_0(\chi\rho)e^{-i\gamma z}, \quad (4.11.2)$$

где $\gamma = \sqrt{k_0^2\epsilon\mu + \chi^2}$ — продольное волновое число, ϵ и μ — параметры среды, окружающей проводящий стержень.

Компоненты поля симметричной E -волны, выраженные через вектор Герца (4.11.2), с использованием формулы дифференцирования:

$$K_0'(\chi\rho) = -\chi K_1(\chi\rho)$$

запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} E_z &= \chi^2 A K_0(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, \\ E_\rho &= i\gamma\chi K_1(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, \\ H_\varphi &= i\omega\epsilon_a\chi A K_1(\chi\rho) e^{-i\gamma z}. \end{aligned} \quad (4.11.3)$$

На поверхности проводящего цилиндра тангенциальные (по отношению к поверхности) компоненты поля связаны граничными условиями Щукина-Леонтовича:

$$E_z = -Z H_\varphi, \quad (4.11.4)$$

где Z — волновое сопротивление металла. Знак « $-$ » в импедансном соотношении связан с поляризацией поля, излучаемого с поверхности проводящего цилиндра (рис. 4.30). Как видно из рисунка, взаимная ориентация векторов поля такова, что $\vec{E}_z \uparrow\downarrow \vec{z}_0$, где \vec{z}_0 — единичный орт, направленный вдоль оси проводящего цилиндра.

Подставляя компоненты поля (4.11.3) в (4.11.4), получаем дисперсионное уравнение волн E_{0m} , направляемых проводящим цилиндром:

$$\chi a \frac{K_0(\chi a)}{K_1(\chi a)} = i\omega\epsilon_a Z a.$$

Волновое сопротивление металла обычно мало, поэтому правая часть последнего уравнения: $\omega\epsilon_a Z a \ll 1$. Левая часть может быть малой лишь при $\chi a \ll 1$. В этом случае можно воспользоваться асимптотическими формулами:

$$K_0(\chi a) \approx \ln \frac{2}{v\chi a}, \quad K_1(\chi a) \approx \frac{1}{\chi a}, \quad v = 1.781,$$

с учетом которых последнее уравнение преобразуется к виду:

$$(\chi a)^2 \ln \frac{2}{v\chi a} = i\omega\epsilon_a Z a. \quad (4.11.5)$$

Благодаря конечной проводимости металла волна имеет затухание, а поскольку поле оказывается «привязанным» к диэлектрически более плотной среде, фазовая скорость волны меньше скорости света в окружающей среде, что видно из соотношения

$$\epsilon_a\mu_a\omega^2 = \gamma^2 - \chi^2, \quad (4.11.6)$$

совместно с которым решается уравнение (4.11.5).

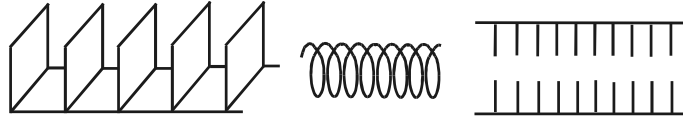


Рис. 4.32

Волновое сопротивление металла записывается в виде:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_m}} = \sqrt{\frac{\mu_a(\varepsilon_0 + i\sigma/\omega)}{\varepsilon_0^2 + \sigma^2/\omega^2}}, \quad (4.11.7)$$

где $\varepsilon_m = \varepsilon_0(1 - i\sigma/(\omega\varepsilon_0))$ — диэлектрическая проницаемость металла; σ — его удельная проводимость.

При $\sigma \rightarrow \infty$, как видно из (4.11.7), $Z \rightarrow 0$. В этом случае уравнение (4.11.5) может иметь решение только при $\chi \rightarrow 0$. Тогда, как следует из (4.11.6), фазовая скорость волны $v_{\phi} \rightarrow c/\sqrt{\varepsilon_m}$, то есть проводящий цилиндр перестает быть направляющей структурой. Таким образом, одиночные идеальные ($\sigma \rightarrow \infty$) проводники не могут направлять электромагнитные поля. Лишь провод с конечной проводимостью является направляющей линией, поскольку он концентрирует вблизи себя поле волны. Концентрация эта тем меньше, чем меньше толщина скин-слоя δ . Поскольку $\sigma \sim 1/\sqrt{\omega}$, с ростом частоты концентрация поля вблизи провода должна уменьшаться. При $\omega \rightarrow \infty$ волновое сопротивление материала провода $Z \rightarrow \sqrt{\mu_a/\varepsilon_0}$. При этом провод может направлять электромагнитную волну только при условии $\sigma/\omega > \varepsilon_0$. Волны, направляемые импедансными цилиндрами, обычно называют волнами Зоммерфельда.

4.11.2. Периодические замедляющие структуры. Открытый и экранированный диэлектрические волноводы, импедансный цилиндр, металлический провод, покрытый диэлектриком, и т.д. относятся к гладким замедляющим структурам. Замедляющие структуры без диэлектрика: гребенчатая направляющая структура, спираль, диафрагмированный волновод (рис. 4.32) и т.д. обязательно должны иметь периодически (по продольной оси структуры) расположенные идентичные неоднородности.

Периодичность направляющей структуры обязательно нужно учитывать, если расстояние между неоднородностями имеет порядок длины волны. Примерами неоднородностей, делающих продольно-регулярные направляющие структуры замедляющими, могут служить металлические штыри, ребра, диафрагмы и щели в волноводах, разрывы гальванического контакта в токоведущих поверхностях и т.п.

Поле в периодической замедляющей структуре удовлетворяет уравнению Гельмгольца и может быть представлено в виде

$$\vec{E} = \sum_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_n e^{-i\left(\gamma_0 + \frac{2\pi n}{d}\right)z}, \quad (4.11.8)$$

где d — период структуры; $\gamma_n = \gamma_0 + 2\pi n/d$ — постоянная распространения n -й пространственной гармоники. Магнитное поле представляется аналогичным образом. Амплитудные коэффициенты $\vec{E}_n(\vec{H}_n)$ являются функциями поперечных координат и зависят от конфигурации направляющей структуры.

В соответствии с (4.11.8) поля в периодических замедляющих структурах представляются наборами пространственных гармоник. Положительным n соответствуют прямые пространственные гармоники, отрицательным — обратные. Величина γ_0 — постоянная распространения основной пространственной гармоники.

Поскольку фазовая скорость каждой пространственной гармоники определяется как $v_{\phi n} = \omega/\gamma_n$, с увеличением номера n она убывает. Наибольшую фазовую скорость имеет основная пространственная гармоника. При $n > 0$ $v_{\phi n} > 0$, при $n < 0$ $v_{\phi n} < 0$. И прямые, и обратные гармоники энергию переносят в прямом направлении. Таким образом, для обратных пространственных гармоник характерно взаимно противоположное направление фазовой и групповой скоростей.

В обычно используемых периодических замедляющих структурах амплитуды пространственных гармоник убывают с ростом номера n . В связи с этим на практике такие структуры используют (в частности, в электронных СВЧ приборах типа ламп бегущей или обратной волны) на гармониках с номерами $n = 0, \pm 1$. Только эти гармоники имеют достаточно высокую мощность.

Отличие набора пространственных гармоник в периодических направляющих структурах от набора собственных волн в регулярных волноводах в том, что собственные волны регулярных волноводов (например, рассмотренные ранее однородно-заполненные прямоугольный и круглый волноводы) взаимно независимы, в то время как пространственные гармоники обязательно существуют совместно.

Групповая скорость пространственных гармоник в структурах без диссипации энергии вычисляется как:

$$u_n = \frac{d\omega}{d\gamma_n} = \left(\frac{d\omega}{d\gamma_n} \right)^{-1} = u_0,$$

то есть у всех гармоник она одинакова. Таким образом, энергия переносится всем набором пространственных гармоник. Явление $v_{\phi n} \uparrow \downarrow u$ называется *отрицательной дисперсией*.

4.11.3. Открытая гребенчатая направляющая структура. Как отмечалось выше, открытый диэлектрический волновод, импедансный цилиндр, провод, покрытый слоем диэлектрика, направляют *поверхностные волны* — замедленные волны, поля которых убывают при удалении от направляющей структуры. Существуют и другие открытые линии передачи, вдоль которых могут распространяться поверхностные волны. Примером открытой периодической направляющей структуры является гребенчатая поверхность, изображенная на рис. 4.33. Она представляет собой металлическую плоскость, на которой эквидистантно расположены металлические перегородки — гребни.

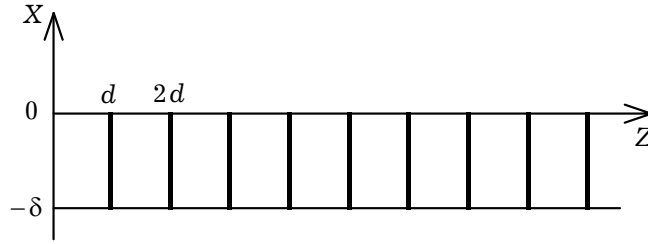


Рис. 4.33

Полагая направляющую структуру бесконечно протяженной вдоль оси OY (рис. 4.32), краевую задачу будем решать, накладывая условия

$$\bar{E}_\tau|_S = 0, \quad \lambda \gg d, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (4.11.9)$$

При этих условиях поле внутри ячеек «гребенки», практически не меняющееся по продольной координате z (в пределах ширины ячейки d), как следует из уравнений Максвелла, будет иметь лишь две компоненты E_z и H_y , то есть будет эквивалентно полю, образованному плоскими волнами: падающей на дно ячейки ($x = -\delta$) и отраженной от него. Тогда любая из указанных компонент (в частности, E_z) будет удовлетворять уравнению:

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + k^2 E_z = 0, \quad (4.11.10)$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ — постоянная распространения плоской волны в свободном пространстве с параметрами ϵ и μ .

Решение уравнения (4.11.10), удовлетворяющее нулевому граничному условию при $x = -\delta$, записывается как

$$E_z = A \sin k(x + \delta). \quad (4.11.11)$$

Подставляя (4.11.11) в уравнение

$$\text{rot } \bar{E} = -i \omega \mu_a \bar{H},$$

находим вторую компоненту поля:

$$H_y = -\frac{ik}{\omega \mu_a} A \cos k(x + \delta).$$

Величину:

$$\frac{E_z}{H_y} = i \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \text{tg } k\delta \quad (4.11.12)$$

будем называть импедансом на выходе ($x = 0$) из ячейки «гребенки».

Вне «гребенки» электромагнитное поле распространяется вдоль оси OZ и согласно условиям (4.11.9) может быть описано продольной компонентой электрического вектора Герца:

$$\Pi_z^e = \psi(x) e^{-i\gamma z}, \quad (4.11.13)$$

где γ — постоянная распространения волны вдоль гребенчатой направляющей структуры; $\psi(x)$ — потенциальная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2\psi = 0, \quad (4.11.14)$$

где $\alpha = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a \omega^2 - \gamma^2}$ — постоянная распространения поля в направлении оси x .

Записывая решение уравнения (4.11.14) в виде

$$\psi = B e^{-i\alpha x}$$

и используя связь компонент поля с электрическим вектором Герца, получаем, что

$$E_z = \alpha^2 B e^{-i(\alpha x + \gamma z)}, \quad H_y = -\varepsilon_a \omega \alpha B e^{-i(\alpha x + \gamma z)}.$$

Тогда импеданс на входе в ячейку «гребенки» запишется как

$$\frac{E_z}{H_y} = -\frac{\alpha}{\varepsilon_a \omega}. \quad (4.11.15)$$

Приравнявая (4.11.12) и (4.11.15), получаем дисперсионное уравнение волны типа E открытой гребенчатой направляющей структуры:

$$\alpha = -ik \operatorname{tg} k\delta, \quad (4.11.16)$$

являющееся аналитическим выражением для поперечного волнового числа α . Как видно из (4.11.16), при $\operatorname{tg} k\delta > 0$ $\operatorname{Im} \alpha < 0$. В этом случае во внешней области поле экспоненциально убывает при удалении от гребенчатой направляющей структуры, что соответствует поверхностной волне. Таким образом, на частотах, при которых $k\delta \in [0, \pi/2]; [\pi, 3\pi/2]$, вдоль «гребенки» распространяются поверхностные волны. Полосам частот, которые принадлежат интервалам $k\delta \in [\pi/2, \pi]; [3\pi/2, 2\pi]$, соответствуют *зоны запираания*, в пределах которых поверхностные волны распространяться не могут. Естественно, сделанные выводы справедливы лишь до тех частот, при которых выполняется условие $\lambda \gg d$. Поскольку для поверхностных волн α является мнимой (отрицательной) величиной, $\gamma > k_0 \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$, $v_\phi < 1/\sqrt{\varepsilon \mu}$, то есть поверхностные волны — замедленные.

В своем рассмотрении мы в силу условия $\lambda \gg d$ не учитывали периодичность направляющей структуры. С учетом ее поле вне «гребенки» должно иметь вид:

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^2 A_n(x) e^{-i\left(\gamma + \frac{2\pi n}{d}\right)z}. \quad (4.11.17)$$

Подставляя (4.11.17) в уравнение Гельмгольца, получаем

$$\frac{d^2 A_n}{dx^2} + \alpha_n^2 A_n = 0,$$

где

$$\alpha_n^2 = \varepsilon \mu k_0^2 - \left(\gamma + \frac{2\pi n}{d}\right)^2.$$

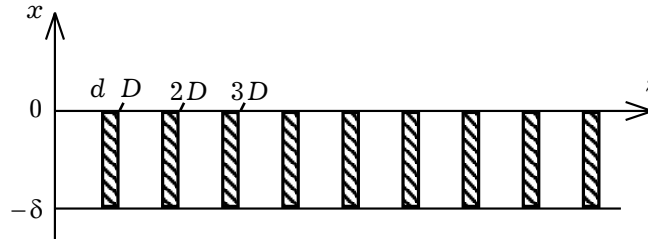


Рис. 4.34

Поскольку при $\lambda \gg d$ имеет место неравенство $2\pi n/d \gg \gamma$, имеем $Im \alpha_n \gg Im \alpha_0$. Отсюда следует, что амплитуды всех пространственных гармоник, за исключением A_0 , очень быстро убывают при удалении от направляющей гребенчатой поверхности. В результате периодичность поля вне «гребенки» сглаживается, поэтому проведенное рассмотрение дает корректное представление о поле поверхностной волны, направляемой гребенчатой замедляющей структурой.

В рассмотренной выше модели толщина перегородок между ячейками направляющей структуры полагалась равной нулю. В том случае, когда толщина перегородок конечная (рис. 4.34), импеданс на выходе из ячеек может быть приближенно записан [Л.16] в виде:

$$\frac{E_z}{H_y} = i q \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \operatorname{tg} k\delta, \quad (4.11.18)$$

где $q = d/D$ (рис. 4.34).

Подставляя (4.11.18) в импедансное граничное условие при $x = 0$, получаем

$$\alpha = -i q k \operatorname{tg} k\delta, \quad (4.11.19)$$

то есть условие поддержания замедленной поверхностной волны остается прежним: $\operatorname{tg} k\delta > 0$.

Описанный импедансный метод решения задачи о распространении поля вдоль открытой гребенчатой направляющей структуры можно распространить на гофрированный проводящий цилиндр (рис. 4.35), если рассматривать симметричные волны типа E .

В этом случае в ячейках гофры вместо компонент поля E_z и H_y предыдущей задачи будут E_z и H_ϕ , которые запишутся как

$$\begin{aligned} E_z &= A [J_0(k\rho)Y_0(kb) - Y_0(k\rho)J_0(kb)], \\ H_\phi &= i \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} A [J_1(k\rho)Y_0(kb) - Y_1(k\rho)J_0(kb)]. \end{aligned} \quad (4.11.20)$$

Подставляя отношение E_z/H_ϕ компонент (4.11.20) в импедансное граничное условие при $\rho = a$, получаем уравнение:

$$\alpha = -i q k \frac{J_0(ka)Y_0(kb) - Y_0(ka)J_0(kb)}{J_1(ka)Y_0(kb) - Y_1(ka)J_0(kb)},$$

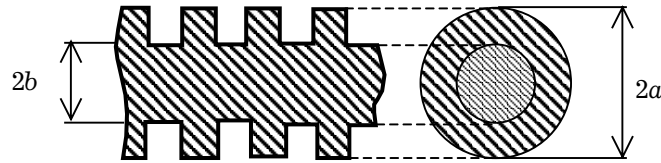


Рис. 4.35

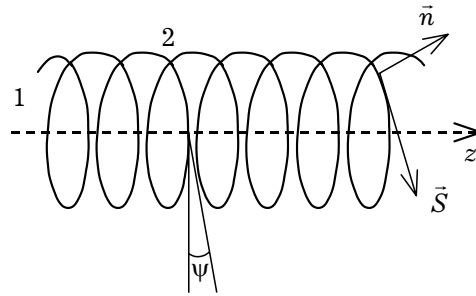


Рис. 4.36

аналогичное (4.11.19). Из него видно, что условием поддержания гофрированным цилиндром замедленной поверхностной волны будет неравенство:

$$\frac{J_0(ka)Y_0(kb) - Y_0(ka)J_0(kb)}{J_1(ka)Y_0(kb) - Y_1(ka)J_0(kb)} > 0.$$

4.11.4. Открытый спиральный волновод. Спиральные линии широко применяются как линии задержки в метровом диапазоне, как замедляющие системы в сантиметровом и как волноводные системы в миллиметровом диапазоне волн.

Для решения задачи о распространении электромагнитных волн вдоль спирали будем использовать модель спирально-проводящего цилиндра. Сущность этой модели состоит в том, что реальная направляющая структура (спираль) при достаточно малом ($d \ll \lambda$) шаге заменяется системой проводящих колец того же радиуса, что и спираль. Эти кольца плотно прилегают друг к другу, однако гальванического контакта не имеют. При бесконечном увеличении числа таких колец на единицу длины линии (при соответствующем уменьшении до нуля диаметра провода, образующего спираль) в пределе получаем сплошной цилиндр с анизотропной проводимостью. По такому цилиндру ток протекает вдоль витков спирали и не может протекать в направлении, перпендикулярном их плоскости, рис. 4.36.

Спирально-проводящий цилиндр с геометрической точки зрения является однородной (вдоль оси OZ) направляющей структурой, такой же, как, например, цилиндрический волновод. Так же, как в однородном волноводе, в спирально проводящем цилиндре распространяются в общем случае различные собственные волны и не существует никаких пространственных гармоник. Как показывает эксперимент, при определенных условиях ($\lambda \gg d$; $a \gg d$; толщина провода $\delta \rightarrow 0$) заме-

на в математической модели спирали спирально-проводящим цилиндром приводит к результатам, адекватно описывающим реальную направляющую структуру.

На рис. 4.36 вектор \vec{S} направлен вдоль витков спирали. В направлении этого вектора протекает ток, связанный с распространением электромагнитной волны. Вектор \vec{n} перпендикулярен плоскостям витков спирали и касающийся ее поверхности. В направлении \vec{n} ток отсутствует. Радиус спирали — a , угол намотки — ψ , шаг спирали — d .

Поскольку спираль используется как замедляющая структура, будем интересоваться лишь медленными волнами, для которых поперечное волновое число α , одинаковое (в силу однородной среды, в которую помещена спираль) в обеих областях 1 и 2 (рис. 4.36), удовлетворяет условию

$$\alpha^2 = \epsilon \mu k_0^2 - \gamma^2 < 0, \quad (4.11.21)$$

где γ , как обычно, постоянная распространения собственной волны.

Так как спирально-проводящий цилиндр пропускает ток лишь в направлении \vec{S} , то на его поверхности (в силу идеальной проводимости провода, образующего спираль) обращается в нуль только компонента E_s , в то время как E_z и E_ϕ , вообще говоря, не равны нулю. Это приводит к тому, что на поверхности спирали при $\rho = a$ необходимо удовлетворить граничным условиям для 4-х компонент поля: E_z , E_ϕ , H_z , H_ϕ (наличие тока \vec{j}_s приводит к существованию этих четырех компонент). В результате, поле электромагнитной волны в спиральной линии является всегда (и при отсутствии у него угловой зависимости) гибридным. Поэтому для описания его вводим продольные компоненты обоих векторов Герца, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца. После разделения в нем переменных получаем уравнения относительно ρ и ϕ (см. раздел 4.11.1). Первое из этих уравнений в силу условия (4.11.21) переходит в модифицированное уравнение Бесселя (4.11.1).

В результате решения уравнения (4.11.1) запишутся как

$$\begin{aligned} \Pi_{z1}^e &= A_1 I_n(\chi \rho) e^{-i n \phi} e^{-i \gamma z}, \\ \Pi_{z1}^m &= B_1 I_n(\chi \rho) e^{-i n \phi} e^{-i \gamma z} \end{aligned} \quad (4.11.22)$$

во внутренней области 1 и

$$\begin{aligned} \Pi_{z2}^e &= A_2 K_n(\chi \rho) e^{-i n \phi} e^{-i \gamma z}, \\ \Pi_{z2}^m &= B_2 K_n(\chi \rho) e^{-i n \phi} e^{-i \gamma z} \end{aligned} \quad (4.11.23)$$

во внешней области 2.

Характер угловой зависимости в (4.11.22) и (4.11.23) подчеркивает тот факт, что электромагнитное поле «бежит» вдоль витков спирали, что и приводит к замедлению волны. Радиальная зависимость поля говорит о его ограниченности в пределах всего поперечного сечения направляющей структуры и об экспоненциальном убывании при удалении от нее.

Рассмотрим процедуру вывода дисперсионного уравнения собственных волн спиральной линии, у которых отсутствует угловая зависимость поля. В этом случае $n = 0$, и компоненты поля, выраженные через векторы Герца (4.11.22)

и (4.11.23), записываются как

$$\begin{aligned} E_{z1} &= \chi^2 A_1 I_0(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, & H_{z1} &= \chi^2 B_1 I_0(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, \\ E_{\rho 1} &= -i\gamma\chi A_1 I_1(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, & H_{\rho 1} &= -i\gamma\chi B_1 I_1(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, \\ E_{\phi 1} &= i\omega\mu_a \chi B_1 I_1(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, & H_{\phi 1} &= -i\omega\varepsilon_a \chi A_1 I_1(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, \end{aligned}$$

во внутренней области и

$$\begin{aligned} E_{z2} &= \chi^2 A_2 K_0(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, & H_{z2} &= \chi^2 B_2 K_0(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, \\ E_{\rho 2} &= i\gamma\chi A_2 K_1(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, & H_{\rho 2} &= i\gamma\chi B_2 K_1(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, \\ E_{\phi 2} &= -i\omega\mu_a \chi B_2 K_1(\chi\rho) e^{-i\gamma z}, & H_{\phi 2} &= i\omega\varepsilon_a \chi A_2 K_1(\chi\rho) e^{-i\gamma z} \end{aligned}$$

во внешней области.

Подставляя компоненты поля в граничные условия

$$\begin{aligned} E_{s1}(\rho = a) &= E_{s2}(\rho = a) = 0, & H_{s1}(\rho = a) &= H_{s2}(\rho = a), \\ E_{z1}(\rho = a) &= E_{z2}(\rho = a), & E_{\phi 1}(\rho = a) &= E_{\phi 2}(\rho = a), \end{aligned}$$

где $E_s(H_s) = E_z(H_z)\sin\psi + E_\phi(H_\phi)\cos\psi$, получаем систему 4-х линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_{1,2}; B_{1,2}$. Записывая условие нетривиальности ее решений (приравнявая нулю главный определитель), получаем дисперсионное уравнение симметричных волн спирального волновода:

$$a^2\varepsilon\mu k_0^2 \operatorname{ctg}^2\psi = (a\chi)^2 \frac{I_0(\chi a)K_0(\chi a)}{I_1(\chi a)K_1(\chi a)}, \quad (4.11.24)$$

которое решается совместно с уравнением

$$\varepsilon\mu k_0^2 = \gamma^2 - \chi^2 \quad (4.11.25)$$

в плоскости (χ, γ) при частоте ω в качестве параметра.

Обозначив

$$N(\chi a) = \frac{I_0(\chi a)K_0(\chi a)}{I_1(\chi a)K_1(\chi a)},$$

из уравнений (4.11.24), (4.11.25) получаем:

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k_0\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2\psi}{N(\chi a)}}, \quad (4.11.26)$$

где $\tilde{\gamma} = c/v_\phi$ — коэффициент замедления волны.

При больших значениях χa с использованием асимптотических формул для модифицированных функций Бесселя формулу (4.11.26) можно привести к виду:

$$\tilde{\gamma} \approx \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\psi} = 1/\sin\psi. \quad (4.11.27)$$

Коэффициент замедления, вычисляемый по формуле (4.11.27), называется *геометрическим замедлением спирали*. Из (4.11.27) следует

$$v_\phi = c \sin\psi.$$

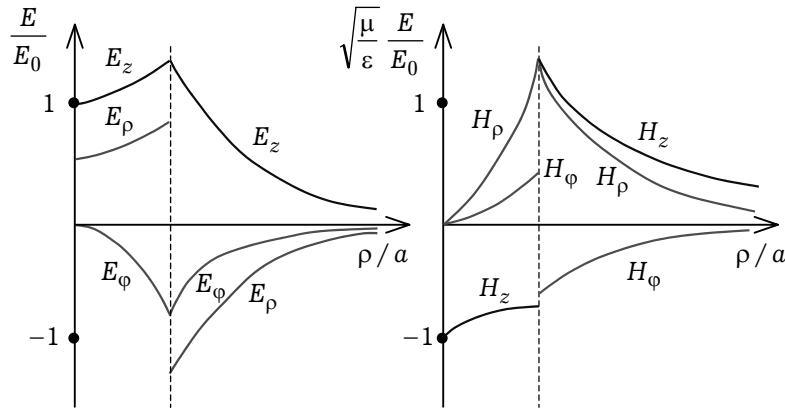


Рис. 4.37

При переходе от (4.11.26) к (4.11.27) полагалось $N(\chi a) \approx 1$. Если в асимптотических представлениях модифицированных цилиндрических функций учесть два члена разложения и пренебречь членами более высокого порядка малости, чем $(1/\chi a)^2$, то дисперсионное уравнение (4.11.24) может быть записано в виде

$$(k_0 \sqrt{\epsilon \mu} a \operatorname{ctg} \psi)^2 \approx (\chi a)^2 \left[1 + \frac{1}{2(\chi a)^2} \right],$$

а коэффициент замедления в этом случае будет

$$\tilde{\gamma} = \frac{c}{v_\phi} = \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \psi}{2 \epsilon \mu k_0^2 a^2}}. \quad (4.11.28)$$

Если формула (4.11.27) дает достоверные результаты при $\chi a > 1$, то формулой (4.11.28) можно пользоваться при $\chi a > 0.5$.

Формула (4.11.27) не учитывает дисперсии. Согласно формуле (4.11.28) с ростом частоты коэффициент замедления увеличивается. Таким образом, у волн спиральной линии при $n = 0$ дисперсия нормальная и положительная. Дисперсионная характеристика $\tilde{\gamma}(\omega)$ непрерывна во всем диапазоне частот. Результаты расчетов, получаемые на основе модели спирально-проводящего цилиндра хорошо совпадают с экспериментальными при выполнении условий: $\lambda \gg 2\pi a$; $\lambda \gg d$.

Из граничных условий, приводящих к дисперсионному уравнению, можно выразить все амплитудные коэффициенты через один, например, A_1 , подставляя в выражения для полей волновые числа, найденные из (4.11.24), (4.11.25). После этого можно построить зависимости компонент поля от радиальной координаты. Качественно такие зависимости изображены на рис. 4.37, из которого видно, что тангенциальные по отношению к поверхности $\rho = a$ компоненты электрического поля и нормальные — магнитного непрерывны. Во внешней области поля убывают в радиальном направлении по закону, близкому к экспоненциальному.

На оси спирального волновода продольное электрическое поле имеет значительную величину, что говорит о перспективности использования этой направляющей

структуры в электронных приборах, где требуется эффективное взаимодействие электромагнитного поля с электронным потоком.

Процедура составления дисперсионного уравнения несимметричных волн та же самая, только в этом случае компоненты поля должны быть выражены через векторы Герца (4.11.22), (4.11.23), записанные при $n \neq 0$. Дисперсионное уравнение несимметричных волн имеет вид:

$$\xi = nS_n(\chi a) \pm \sqrt{[1 + S_n(\chi a)][(\chi a \operatorname{tg} \psi)^2 + n^2 S_n(\chi a)]}, \quad (4.11.29)$$

где

$$\xi = d / \lambda_B, \quad \lambda_B = 2\pi / \gamma,$$

$$S_n(\chi a) = \frac{2I_n(\chi a)K_n(\chi a) \operatorname{tg}^2 \psi}{I_{n-1}(\chi a)K_{n-1}(\chi a) + I_{n+1}(\chi a)K_{n+1}(\chi a)}.$$

Из (4.11.29) видно, что дисперсионное уравнение (в силу двух знаков перед радикалом) имеет две ветви решений, то есть так же, как и в случае несимметричных волн круглого диэлектрического волновода, можно говорить о волнах HE_{nm} и EH_{nm} . Расчеты на основании уравнения (4.11.29) показывают, что несимметричные волны могут обладать аномальной дисперсией, когда коэффициент замедления (в определенных участках частотного диапазона) уменьшается с ростом частоты.

Глава

5

Электромагнитные колебания в объёмных резонаторах

5.1. Основные характеристики объёмных резонаторов	230
5.2. Свободные незатухающие колебания в объёмных закрытых резонаторах СВЧ	234
5.3. Свободные колебания в объёмных закрытых резонаторах СВЧ при наличии потерь	237
5.4. Общая электродинамическая теория объёмных резонаторов	242
5.5. Собственные колебания прямоугольного волноводного резонатора	244
5.6. Собственные колебания круглого волноводного резонатора	250
5.7. Коаксиальный резонатор	254
5.8(*). Диэлектрические резонаторы	260

) Символом «» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 5. Электромагнитные колебания в объёмных резонаторах

5.1. Основные характеристики объёмных резонаторов СВЧ

5.1.1. Общие сведения об объёмных резонаторах. *Объемным резонатором* называется колебательная электромагнитная система, представляющая собой область, ограниченную либо металлической поверхностью, либо поверхностью, разделяющей среды с различными диэлектрической и магнитной проницаемостями, либо их комбинацией. В соответствии с данным определением возможны следующие виды (типы) объёмных резонаторов: *металлические* (экранированные), *диэлектрические* (магнитодиэлектрические) и *резонаторы с боковой поверхностью, частично покрытой металлом* (иногда говорят — металлизированной). Заполнение резонаторов может быть как однородным, так и неоднородным с различными изотропными и анизотропными включениями. Особенностью СВЧ диапазона является соизмеримость длины волны генерируемых колебаний и линейных размеров самих колебательных систем. Если в диапазоне КВ в качестве колебательной системы используется контур, состоящий из сосредоточенных элементов (емкостей и индуктивностей), то в СВЧ диапазоне приходится применять системы, образуемые элементами с распределёнными параметрами (отрезками коаксиальных и открытых линий передачи, экранированных и диэлектрических волноводов и т.д.). На рис. 5.1 изображены три наиболее часто используемых типа объёмных резонаторов — прямоугольный (а), круглый (б) и коаксиальный (в). Все три указанные структуры представляют собой отрезки соответствующих линий передачи, ограниченные торцевыми проводящими стенками.

Существуют и так называемые *открытые резонаторы*. Это в первую очередь упомянутые выше диэлектрические резонаторы, принцип работы которых основан на эффекте полного внутреннего отражения электромагнитного поля от границы раздела двух диэлектрических сред. Кроме того, к открытым резонаторам относятся металлические резонансные структуры, в которых поле удерживается за счёт отражения волн, образующих устойчивый колебательный процесс, от так называемых критических сечений. Обычно критическое сечение получается в сужающейся части волновода, в которой постоянная распространения волны $\gamma = 0$. Этот эффект был известен давно и достаточно подробно описан в литературе, в том числе, и в учебной. Гораздо менее известным является эффект полного или почти полного отражения волны от критического сечения, расположенного в расширяющейся части волновода. На основе этого эффекта в России были предложены и построены открытые резонаторы с равномерным спектром собственных частот, таким как у струны. Это позволило создать класс резонаторов и генераторов на их основе с уникально редким спектром собственных частот, с огромным разрежением спек-

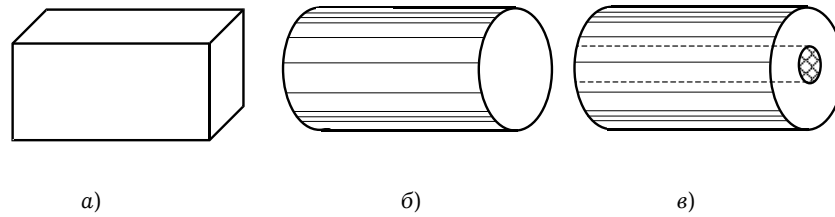


Рис. 5.1

ра, недостижимым в открытых двумерных резонаторах, а тем более, в целиком экранированных.

В технике СВЧ резонаторы используются в качестве колебательных систем генераторов, фильтров различного назначения, волномеров и других измерительных приборов; широкое применение резонансные структуры находят в антенной технике.

В ходе колебательного процесса во внутреннем объеме резонатора происходит непрерывный обмен между запасёнными электрической и магнитной энергиями. При изменении частоты и способа возбуждения колебаний в резонаторе могут образовываться самые различные структуры электромагнитного поля. В общем случае в резонаторе может существовать бесконечное множество резонансных колебаний. Колебание, которому соответствует минимальная частота, называется *низшим*. Если резонансные частоты двух или более колебаний с различными структурами полей совпадают, такие колебания называются *вырожденными*.

Как и в любых колебательных системах, в объёмных резонаторах существуют *свободные* и *вынужденные колебания*. Свободные колебания происходят в резонаторе после прекращения внешнего воздействия, вызвавшего их. В реальной ситуации свободные колебания в резонаторах СВЧ являются затухающими, так как всегда существуют потери в среде-заполнителе и в металлических стенках. Вынужденные колебания поддерживаются внешним источником энергии. При анализе вынужденных колебаний необходимо предварительно рассмотреть задачу о свободных (собственных) колебаниях, а затем полученные результаты использовать для решения задачи о вынужденных колебаниях.

При математическом описании свойств электромагнитных колебаний в резонаторах используют понятия *собственных колебаний* и *собственных частот*. Дадим их определения. Известно, что задачи о расчёте полей в резонаторах сводятся к задачам о нахождении решений уравнений Максвелла для векторных функций \vec{E} и \vec{H} , определённых в объёме V , ограниченном поверхностью S (под поверхностью S будем понимать стенки резонатора). Уравнения Максвелла решаются при заданных граничных условиях на поверхности S . Краевые задачи такого рода хорошо исследованы в математической физике. Известно, что ненулевые решения для функций \vec{E} и \vec{H} имеют место только при некоторых определённых значениях частоты $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots$. Дискретные значения $\{\omega_n\}$ параметра ω , при которых получаются ненулевые решения \vec{E} и \vec{H} , в математике называют собственными значениями параметра ω . В электродинамике значения

дискретных частот $\{\omega_n\}$ называют *собственными частотами резонатора*. Соответственно, ненулевые решения \vec{E} и \vec{H} , соответствующие собственным значениям параметра ω , называют *собственными функциями* краевых задач. При возбуждении резонатора на частотах ω_n в нём возникают свободные колебания, описываемые действительными функциями \vec{E} и \vec{H} . Такие колебания (свободные колебания на собственных частотах) в электродинамике называются *собственными колебаниями резонатора*.

Полная эквивалентная схема резонатора может быть представлена в виде бесконечного набора связанных резонансных контуров. На практике используются резонаторы, возбуждаемые на одном определенном типе колебаний. В этом случае вблизи резонансной частоты данного типа колебания эквивалентная схема представляет собой обычный резонансный контур, характеризующийся эквивалентным активным сопротивлением, ёмкостью и индуктивностью. При выборе того или иного типа объемного резонатора решающее значение имеют описываемые ниже электрические характеристики и параметры.

5.1.2. Основные характеристики резонаторов. Тип колебания, структура электромагнитного поля и собственная частота. Эти характеристики определяются из решения соответствующей краевой задачи о собственных колебаниях резонатора. Классификация типов колебаний аналогична классификации типов волн в линиях передачи: *E*- и *H*-колебания, *LE*- и *LM*-колебания и гибридные колебания. Резонансной частотой f_0 колебания называют частоту, на которой при прочих равных условиях амплитуда этого колебания достигает наибольшей величины.

Добротность резонатора (Q). Добротность резонатора Q определяется следующим образом:

$$Q = 2\pi \frac{W_{\text{зап}}}{W_{\text{пот}}} = \omega_0 \frac{W_{\text{зап}}}{P_{\text{пот}}}, \quad (5.1.1)$$

где $W_{\text{зап}}$ — энергия, запасенная за период T в резонаторе; $W_{\text{пот}}$ — энергия потерь, рассеиваемая за период T на резонансной частоте; $P_{\text{пот}}$ — мощность потерь.

С физической точки зрения определение Q через энергию и частоту в виде (5.1.1) является инвариантно независимым от типа резонатора.

Энергия, рассеиваемая за период T , может быть представлена в виде

$$W_{\text{пот}} = W_{\text{пот}}^{(p)} + W_{\text{пот}}^{(вн)}, \quad (5.1.2)$$

где $W_{\text{пот}}^{(p)}$ — энергия, рассеиваемая в резонаторе за период на резонансной частоте; $W_{\text{пот}}^{(вн)}$ — энергия, рассеиваемая во внешней цепи за период на резонансной частоте. Соответственно, различают и добротности резонатора:

$$Q_0 = 2\pi \frac{W_{\text{зап}}}{W_{\text{пот}}^{(p)}} \quad \text{—} \quad (5.1.3)$$

ненагруженная (собственная) добротность резонатора;

$$Q_{\text{вн}} = 2\pi \frac{W_{\text{зап}}}{W_{\text{пот}}^{(вн)}} \quad \text{—} \quad (5.1.4)$$

внешняя добротность резонатора;

$$Q_H = 2\pi \frac{W_{\text{зап}}}{W_{\text{пот}}^{(p)} + W_{\text{пот}}^{(\text{вн})}} \quad (5.1.5)$$

нагруженная добротность резонатора.

Из (5.1.2)–(5.1.5) между добротностями резонатора получается простая связь:

$$\frac{1}{Q_H} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{вн}}}. \quad (5.1.6)$$

Коэффициент связи ($K_{\text{св}}$) — отношение мощности, передаваемой резонатором во внешнюю цепь ($P_{\text{пот}}^{(\text{вн})}$), к мощности, теряемой в резонаторе на резонансной частоте ($P_{\text{пот}}^{(p)}$):

$$K_{\text{св}} = \frac{P_{\text{пот}}^{(\text{вн})}}{P_{\text{пот}}^{(p)}}. \quad (5.1.7)$$

5.1.3. Разрежение спектра собственных частот. Среди других характеристик резонатора *разрежение спектра* собственных колебаний является важнейшим его параметром, под которым понимается частотный интервал между резонансной частотой рабочего и ближайшего к нему нерабочего колебания. Рассмотрим понятие *разрежение спектра собственных колебаний* (собственных частот) с общих позиций.

Как видно из (5.1.1), добротность резонатора напрямую зависит от величины запасённой резонатором энергии. Очевидно, что запасённая энергия $W_{\text{зап}}$ определяется его объёмом V . Введем понятие «разрежение спектра собственных частот» $N_{\text{раз}}$ как число колебаний резонатора ΔN , приходящееся на интервал частот $\Delta\omega$. В этом случае, в соответствии с *теоремой Куранта* или *формулой Рэлея-Джинса* разрежение спектра собственных частот объёмного (трёхмерного) закрытого резонатора определяется как

$$N_{\text{раз}} = \frac{\Delta N}{\Delta\omega} = \frac{a V \omega^2}{2\pi^2 c^3}, \quad (5.1.8)$$

где V — объём резонатора, a — некоторая постоянная.

Из (5.1.8) видно, что разрежение спектра собственных частот закрытого резонатора прямо пропорционально кубу некоторого линейного размера L ($N_{\text{раз}} \sim L^3$).

Разрежение спектра собственных частот для двумерных открытых резонаторов определяется как

$$N_{\text{раз}} = \frac{a \omega}{\pi c^2} S. \quad (5.1.9)$$

где S обозначает площадь двумерной области, занятой электромагнитным полем резонатора. Таким образом, разрежение спектра в двумерном резонаторе пропорционально квадрату его линейного размера (L^2), в результате чего спектр открытого резонатора существенно реже, чем закрытого.

Отметим, что именно благодаря переходу к открытому резонатору, предложенному А.М. Прохоровым (и независимо от него Шавловым и Таунсом),

стало возможным построение лазеров и многих других приборов квантовой электроники.

И наконец, для одномерной области расстоянием L между бесконечными отражающими плоскостями, разрежение спектра собственных частот определяется как

$$N_{\text{раз}} = \frac{2a}{\pi c} L. \quad (5.1.10)$$

Таким образом, наиболее разреженный спектр собственных частот имеет одномерная область, которая обладает равномерным (эквидистантным) спектром.

Возникает естественный вопрос: нельзя ли построить объёмные, например, открытые резонаторы, у которых разрежение спектра собственных частот определялось бы как (5.1.10), а не как (5.1.8)? Как оказалось, такие объёмные колебательные структуры можно создать и они были предложены в России более 20 лет тому назад. Они получили название открытых резонаторов с «нефокусирующими» зеркалами. На основе этого класса резонансных структур было предложено и создано большое количество пассивных и активных приборов и устройств СВЧ, КВЧ и оптического диапазонов. В их числе: резонаторы, волномеры, лазеры, клистроны, магнетроны, оротроны (генераторы дифракционного излучения) и мн. др.

Резонаторы, внутренняя область которых полностью окружена металлической оболочкой, называются *закрытыми*. Резонаторы, внутренняя область которых не экранирована или только частично экранирована проводящей оболочкой, называются *открытыми*.

В отличие от теории колебательных контуров со сосредоточенными параметрами при рассмотрении явлений в объёмных резонаторах СВЧ нельзя ввести в качестве основных параметров напряжение и токи, так как электрическое поле внутри резонатора носит непотенциальный характер, а токи зависят от трёх координат и времени. Поэтому теория объёмных резонаторов СВЧ строится на основе системы уравнений Максвелла. Определив из неё напряжённости электрического и магнитного полей в резонаторе, можно рассчитать и токи, текущие по его стенкам (для диэлектрических неэкранированных резонаторов — токи смещения).

5.2. Свободные незатухающие колебания в объёмных закрытых резонаторах СВЧ

Рассмотрим задачу о собственных незатухающих колебаниях объёмного закрытого резонатора СВЧ общего вида, изображённого на рис. 5.2. В общем случае такой резонатор представляет собой некоторый объём V диэлектрической среды с параметрами ϵ , μ , σ , который ограничен со всех сторон замкнутой проводящей поверхностью S . Для того, чтобы электромагнитные колебания в объёмном резонаторе были незатухающими необходимо потребовать выполнения двух условий:

- поверхность S должна быть идеально проводящей, то есть $\sigma_{\text{жр}} \rightarrow \infty$;
- проводимость среды-заполнителя внутри объёма V должна быть равна нулю ($\sigma = 0$), что соответствует отсутствию потерь в диэлектрике.

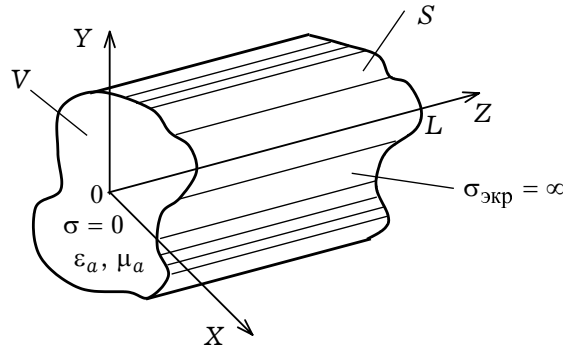


Рис. 5.2

Решение задачи о собственных колебаниях объёмного закрытого резонатора сводится к нахождению решений краевых задач на векторных однородных уравнениях Гельмгольца для вектора \vec{E} :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \quad \text{в } V; \\ \vec{E}_\tau &= 0 \quad \text{на } S \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

и для вектора \vec{H} :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \vec{H}(\vec{r}) &= 0 \quad \text{в } V; \\ H_n &= 0 \quad \text{на } S. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

В (5.2.1), (5.2.2) ε_a и μ_a — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Рассмотрим краевую задачу (5.2.1). Её решения существуют только для дискретного ряда значений $k_v = \omega_v \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$, называемых *собственными волновыми числами*. Величины k_v^2 называются *собственными значениями краевой задачи*. Соответствующие им решения $\vec{E}_v(\vec{r})$ называются *собственными векторными функциями*.

Значения k_v и явный вид функций $\vec{E}_v(\vec{r})$ определяются параметрами диэлектрика и формой поверхности резонатора. Число v — порядковый номер решения. Для резонатора с идеально проводящими стенками, заполненного однородной изотропной средой с параметрами ε и μ , справедлива формула:

$$\omega_v^2 \varepsilon_a \mu_a = \frac{\int_V |\text{rot } \vec{E}_v|^2 dV}{\int_V |\vec{E}_v|^2 dV} = \frac{\int_V |\text{rot } \vec{H}_v|^2 dV}{\int_V |\vec{H}_v|^2 dV}, \quad (5.2.3)$$

которая получается непосредственно из уравнений Максвелла с учётом того, что запасённые в объёме энергии электрического и магнитного полей в среднем за период равны:

$$\frac{1}{2} \int_V \mu_a |\vec{H}|^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_a |\vec{E}|^2 dV.$$

Из (5.2.3) следует, что

$$\omega_v^2 \varepsilon_a \mu_a \equiv k_v^2 > 0,$$

независимо от того, является ли внутренняя среда поглощающей или нет. Это является следствием общего положения математической физики: собственные значения однородных краевых задач (5.2.1), (5.2.2) — положительные величины.

Каждому волновому числу k_v соответствует определённая частота колебаний:

$$\omega_v = \frac{k_v}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}, \quad v = 1, 2, 3, \dots \quad (5.2.4)$$

Таким образом, в резонаторе могут существовать колебания лишь с определёнными собственными частотами, образующими бесконечный дискретный спектр.

Собственные функции краевой задачи для полого резонатора обладают свойством ортогональности и могут быть пронормированы:

$$\int_V \vec{E}_{v_1}(\vec{r}) \vec{E}_{v_2}^*(\vec{r}) dV = N_{v_1} \delta_{v_1 v_2}, \quad (5.2.5)$$

где $\delta_{v_1 v_2}$ — символ Кронекера, N_{v_1} — нормирующий множитель.

Вектор напряжённости электрического поля v -го колебания записывается как

$$\vec{\mathcal{E}}_v(\vec{r}, t) = \text{Re} [E_{0v} \vec{E}_v(\vec{r}) e^{i\omega_v t}], \quad (5.2.6)$$

где ω_v определяется соотношением (5.2.4); $\vec{E}_v(\vec{r})$ — собственная векторная функция (комплексная амплитуда) краевой задачи (5.2.1); E_{0v} — постоянная величина, определяемая из условий возбуждения.

Общее решение задачи (5.2.1) записывается в виде бесконечной суммы частных решений (5.2.6), представляющих собой электрические поля отдельных собственных колебаний:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \sum_v \text{Re} [E_{0v} \vec{E}_v(\vec{r}) e^{i\omega_v t}]. \quad (5.2.7)$$

Для нахождения напряжённости магнитного поля \vec{H} воспользуемся уравнением Максвелла:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{i}{\omega \mu_a} \text{rot} \vec{E}(\vec{r}). \quad (5.2.8)$$

Выражение (5.2.8) для напряжённости магнитного поля v -го колебания, можно записать в виде:

$$\vec{H}_v(\vec{r}) = \frac{e^{-i\pi/2}}{\omega_v \mu_a} \text{rot} \vec{E}_v(\vec{r}). \quad (5.2.9)$$

Общее решение задачи (5.2.1), представляющее напряжённость магнитного поля, есть сумма частных решений (5.2.9):

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_v \text{Re} [\vec{H}_v(\vec{r}) e^{i\omega_v t}]. \quad (5.2.10)$$

Из (5.2.9) следует, что векторы \vec{E}_v и \vec{H}_v сдвинуты по фазе на угол $\pi/2$, причём амплитуды этих векторов являются функциями координат. Такой вид электромагнитного поля, как уже отмечалось, носит название *стоячей волны*. В результате можно сделать вывод, что в резонаторе электромагнитное поле представляется в виде суперпозиции полей бесконечного числа стоячих волн, определяемых индексом v . Необходимо также отметить, что в любой точке резонатора в моменты, когда электрическое поле в резонаторе максимально, магнитное поле в этой точке равно нулю и наоборот.

С электрическим полем связана энергия:

$$W_v^e = \frac{\epsilon_a}{2} \int_V |\vec{E}_v(\vec{r})|^2 dV, \quad (5.2.11)$$

а с магнитным — энергия:

$$W_v^m = \frac{\mu_a}{2} \int_V |\vec{H}_v(\vec{r})|^2 dV. \quad (5.2.12)$$

В процессе колебаний в резонаторе происходит непрерывный переход энергии электрического поля в энергию магнитного поля и наоборот.

Поскольку распределения электрического и магнитного полей в резонаторе в любой момент времени не совпадают, переход одного вида энергии в другой связан с её движением внутри резонатора. Однако среднее за период колебания значение вектора Умова-Пойнтинга в любой точке резонатора равно нулю:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}, \vec{H}^*] = 0.$$

Таким образом, в любой точке резонатора в среднем за период колебания поток электромагнитной энергии отсутствует и превращение энергии заключается лишь в её переходе из одного вида в другой.

5.3. Свободные колебания в объёмных резонаторах СВЧ при наличии потерь

В реальных резонаторах СВЧ всегда имеют место потери энергии, приводящие к затуханию свободных колебаний. Диссипация энергии в резонаторах вызвана тремя основными причинами:

- потерями в стенках резонатора;
- потерями в среде, заполняющей резонатор;
- потерями, связанными с излучением в окружающую среду (для открытых резонаторов СВЧ и при наличии отверстий в экране, служащих для возбуждения резонаторов и вывода из них энергии).

5.3.1. Собственная (ненагруженная) добротность резонатора. Понятие «комплексной» частоты. Потери в резонаторе характеризуются параметром Q_0 , называемым *собственной добротностью резонатора*, определяемой формулой (5.1.3). При этом полная запасённая энергия электромагнитного поля резонатора

$W_{\text{зап}}$ на резонансной частоте ω_v удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dW_{\text{зап}}}{dt} + \frac{\omega_v}{Q_0} W_{\text{зап}} = 0 \quad (5.3.1)$$

и определяется как

$$W_{\text{зап}}(t) = W_{\text{зап}}(0) e^{-\omega_v t / Q_0}. \quad (5.3.2)$$

Из (5.3.1) и (5.3.2) следует, что запас энергии собственного колебания экспоненциально убывает. Так как энергия квадратично связана с полем, амплитуды величин \vec{E} и \vec{H} изменяются по закону $\exp\{-\omega_v t / (2Q_0)\}$.

При наличии потерь *собственные частоты* резонатора становятся *комплексными*:

$$\omega_v = \omega'_v + i\omega''_v.$$

Различные факторы, определяющие потери, при вычислении добротности Q_0 резонаторов можно учитывать отдельно. Общая мощность потерь $P_{\text{пот}}$ в резонаторе за период колебаний на резонансной частоте ω_v определяется как

$$P_{\text{пот}} = P_{\text{пот}}^M + P_{\text{пот}}^D + P_{\text{пот}}^\Sigma, \quad (5.3.3)$$

где $P_{\text{пот}}^M$ — мощность потерь в металле, $P_{\text{пот}}^D$ — мощность потерь в диэлектрике, $P_{\text{пот}}^\Sigma$ — мощность потерь на излучение. Тогда, связывая с каждым видом потерь своё значение добротности, можно записать:

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_M} + \frac{1}{Q_D} + \frac{1}{Q_\Sigma}, \quad (5.3.4)$$

где в соответствии с (5.3.3) и (5.3.4)

$$Q_M = \frac{\omega_v W_{\text{зап}}}{P_{\text{пот}}^M}, \quad Q_D = \frac{\omega_v W_{\text{зап}}}{P_{\text{пот}}^D}, \quad Q_\Sigma = \frac{\omega_v W_{\text{зап}}}{P_{\text{пот}}^\Sigma} \quad (5.3.5)$$

— частные (парциальные) добротности

5.3.2. Колебания при наличии потерь в стенках резонатора. Определим добротность резонатора, связанную с потерями в его металлических стенках. Будем исходить из первой формулы (5.3.5), где под $P_{\text{пот}}^M$ будем понимать среднюю (за период) мощность потерь в стенках резонатора.

Под воздействием электромагнитного поля в металле стенок резонатора наводятся электрические токи, на поддержание которых расходуется электромагнитная энергия. Вычислим соответствующую этому процессу среднюю за период мощность джоулевых потерь $\langle P_{\text{пот}}^M \rangle$. При отсутствии внутри объёма V резонатора сторонних источников из уравнения баланса энергии (1.13.3) имеем:

$$\langle P_{\text{пот}}^M \rangle + \langle P_\Sigma \rangle = 0,$$

где

$$\langle P_\Sigma \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \oint_S [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{S} \right\} —$$

средний за период поток мощности через внутреннюю поверхность резонатора S .

Следовательно,

$$\langle P_{\text{пот}}^{\text{м}} \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \oint_S (\vec{n}_0, [\vec{E}, \vec{H}^*]) dS \right\}, \quad (5.3.6)$$

где \vec{n}_0 — вектор внешней нормали к внутренней поверхности резонатора S . Из соотношения (5.3.6) следует, что потери $\langle P_{\text{пот}}^{\text{м}} \rangle$ определяются потоком энергии, направленным внутрь проводника.

Для оценки потерь в стенках резонатора на их внутренней поверхности будем использовать приближённое граничное условие Щукина-Леонтовича:

$$\vec{E}_{\tau} = -Z_{\text{м}} [\vec{n}_0, \vec{H}_{\tau}], \quad (5.3.7)$$

где

$$Z_{\text{м}} = (1 + i) \sqrt{\frac{\mu_{\text{м}} \mu_0 \omega}{2\sigma_{\text{м}}}} \quad \text{—}$$

поверхностное сопротивление металла с учётом его конечной проводимости $\sigma_{\text{м}}$; $\mu_{\text{м}}$ — относительная магнитная проницаемость металла; знак «—» в (5.3.7) означает, что вектор \vec{n}_0 направлен в металл.

Граничное условие (5.3.7) получается из равенства тангенциальных составляющих электрического поля на поверхности металла, в котором (равенстве) поле \vec{E} внутри металла является касательным к его поверхности и связано с магнитным полем соотношением $E = \sqrt{\mu_0 \mu / \epsilon_0 \epsilon} H$, соответствующим плоской волне, распространяющейся в металле нормально к его поверхности. При этом в приведённом соотношении ϵ и μ — параметры металла. Значение поверхностного сопротивления в (5.3.7) в представленном виде получается при условии $\epsilon_0 \omega / \sigma \ll 1$.

Подставляя (5.3.7) в (5.3.6), получаем

$$\langle P_{\text{пот}}^{\text{м}} \rangle = \frac{R_{\text{м}}}{2} \oint_S |\vec{H}_{\tau}|^2 dS, \quad (5.3.8)$$

где $R_{\text{м}} = \sqrt{\mu_{\text{м}} \mu_0 \omega / (2\sigma_{\text{м}})}$ — активная часть поверхностного сопротивления проводника.

Величину запасённой в резонаторе за период энергии магнитного поля ν -го собственного колебания запишем в виде:

$$W_{\text{зап}} = \frac{\mu_a}{2} \int_V |\vec{H}_{\nu}|^2 dV,$$

где $\mu_a = \mu_0 \mu$, μ — относительная проницаемость среды, заполняющей объём резонатора V .

Так как структура поля в резонаторе у поверхности реального проводника близка к структуре поля у идеально проводящей поверхности идеального проводника, при вычислении средних потерь $\langle P_{\text{пот}}^{\text{м}} \rangle$ в (5.3.8) можно поставить распределение $\vec{H}_{\nu\tau}$ ν -го собственного колебания резонатора с идеально проводящими стенками. Следовательно, добротность резонатора, связанная с потерями в его металлических стенках, определяется в соответствии с

формулой (5.3.5) как

$$Q_M = \frac{\omega_v W_{\text{зап}}}{\langle P_{\text{пот}}^M \rangle} = \frac{\omega_v \mu_a}{R_M} \frac{\int_V |\vec{H}_v|^2 dV}{\int_S |\vec{H}_{vt}|^2 dS}. \quad (5.3.9)$$

Так как

$$Z_M = \frac{1+i}{\Delta^0 \sigma_M},$$

где $\Delta^0 = \sqrt{2/(\omega_v \mu_M \mu_0 \sigma_M)}$ — глубина проникновения электромагнитного поля в проводящую среду (толщина скин-слоя), выражение для добротности (5.3.9) можно записать в виде:

$$Q_M = \frac{2\mu_a}{\mu_M \Delta^0} \frac{\int_V |\vec{H}_v|^2 dV}{\int_S |\vec{H}_{vt}|^2 dS}. \quad (5.3.10)$$

Из (5.3.10) следует, что добротность резонатора, связанная с потерями в металлических стенках, определяется законом распределения амплитуды магнитного поля конкретного собственного колебания.

5.3.3. Колебания при наличии потерь в среде-заполнителе. В реальных резонаторах среда-заполнитель обычно обладает отличной от нуля проводимостью, что приводит к возникновению потерь, связанных с поглощением электромагнитного поля этой средой. В этом случае можно считать, что резонатор заполнен однородной средой с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$. При отсутствии магнитных потерь ($\mu'' = 0$) средняя за период мощность электрических потерь (потери в диэлектрике) в объёме V определяется по формуле:

$$\langle P_{\text{пот}}^d \rangle = \frac{\omega_v \varepsilon_0 \varepsilon''}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dV,$$

которая следует из общей записи запасённой внутри диэлектрической среды, заполняющей резонатор, энергии электрического поля.

Запасённую за период энергию резонатора $W_{\text{зап}}$ можно определить через максимальную энергию электрического поля искомого v -го собственного колебания:

$$W_{\text{зап}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon'}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dV.$$

Следовательно, добротность резонатора $Q_d^{(1)}$, связанная с потерями в диэлектрике, обусловленными комплексностью диэлектрической проницаемости (диэлектрическими потерями), определяется следующим образом (см. вторую формулу в (5.3.5)):

$$Q_d^{(1)} = \frac{\omega_v W_{\text{зап}}}{\langle P_{\text{пот}}^d \rangle} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{1}{\text{tg } \delta}. \quad (5.3.11)$$

Аналогично, несложно показать, что добротность $Q_d^{(2)}$, обусловленная магнитными потерями в диэлектрике при $\varepsilon'' = 0$, определяется как

$$Q_d^{(2)} = \frac{\mu'}{\mu''} = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta^M}.$$

Добротность Q_d резонатора, заполненного веществом с параметрами $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ и $\mu = \mu' - i\mu''$, находится по формуле

$$\frac{1}{Q_d} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} + \frac{\mu''}{\mu'}.$$

С учётом того, что $\varepsilon'' = \sigma / \varepsilon_0 \omega_v$, где σ — электрическая проводимость среды, ω_v — частота v -го собственного колебания резонатора, добротность, связанная с тепловыми потерями в диэлектрике, вычисляется как

$$Q_d^{(1)} = \frac{\omega_v \varepsilon_0 \varepsilon'}{\sigma}.$$

В общем случае комплексность диэлектрической проницаемости связана не только с токами проводимости, но и с инерционностью среды, которая проявляется в том, что векторы \vec{D} и \vec{E} оказываются сдвинутыми по фазе, то есть

$$\vec{D} = |\varepsilon_a| \vec{E} e^{i\delta},$$

где $|\varepsilon_a|$ — модуль абсолютного значения диэлектрической проницаемости. В этом случае:

$$\varepsilon' = |\varepsilon| \cos \delta, \quad \varepsilon'' = |\varepsilon| \sin \delta - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$$

и, как следует из (5.3.11), добротность, связанная с потерями в диэлектрике, заполняющем резонатор, запишется в виде:

$$Q_d^{(1)} = \frac{|\varepsilon| \cos \delta}{|\varepsilon| \sin \delta - \sigma / (\varepsilon_0 \omega_v)}.$$

Комплексность магнитной проницаемости связана с тем, что по фазе оказываются сдвинутыми векторы \vec{B} и \vec{H} .

Таким образом, добротность резонатора, обусловленная потерями в среде, заполняющей его, зависит только от параметров среды-заполнителя и от частоты электромагнитного колебания, но не зависит от формы самого резонатора и от типа колебания. Необходимо также отметить, что добротность при наличии потерь в среде будет тем больше, чем больше частота колебания.

5.3.4. Колебания при наличии потерь на излучение. Данный вид потерь связан с излучением электромагнитной энергии через отверстия в стенках резонатора или через боковую поверхность в открытых резонансных структурах СВЧ. Излучение электромагнитной энергии во внешнюю среду приводит к затуханию свободных колебаний внутри резонатора. Влияние отверстий на затухание колебаний можно охарактеризовать так называемой *внешней добротностью*:

$$Q_\Sigma = \frac{\omega_v W_{\text{зап}}}{P_{\text{пот}}^\Sigma}, \quad (5.3.12)$$

где $P_{\text{пот}}^\Sigma$ — мощность потерь на излучение во внешнюю среду.

В качестве полной энергии, запасённой в резонаторе за период $W_{\text{зап}}$, в (5.3.12) необходимо взять сумму электрической и магнитной энергий свободных незатухающих колебаний (5.2.11), (5.2.12).

5.3.5. Электромагнитное поле в реальном резонаторе с потерями. Векторы напряжённостей электрического и магнитного полей ν -го колебания, с которыми энергия, запасённая в резонаторе (5.3.2), связана квадратично, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_\nu(\vec{r}, t) &= \vec{E}_\nu(\vec{r}) e^{-\frac{\omega_\nu t}{2Q_\nu}} \cos(\omega_\nu t), \\ \vec{\mathcal{H}}_\nu(\vec{r}, t) &= \vec{H}_\nu(\vec{r}) e^{-\frac{\omega_\nu t}{2Q_\nu}} \sin(\omega_\nu t).\end{aligned}\quad (5.3.13)$$

Из выражений (5.3.13) при $Q_\nu \rightarrow \infty$ получаются выражения для напряжённостей электрического и магнитного полей в случае резонатора без потерь.

5.4. Общая электродинамическая теория объёмных резонаторов

Рассмотрим некоторые общие свойства собственных колебаний резонаторов вне зависимости от их конфигурации. Будем рассматривать напряжённости полей \vec{E}_ν , \vec{H}_ν и резонансные частоты ω_ν как собственные функции и собственные значения векторной краевой задачи, состоящей из уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H}_\nu = i\omega_\nu \epsilon_a \vec{E}_\nu, \quad \text{rot } \vec{E}_\nu = -i\omega_\nu \mu_a \vec{H}_\nu \quad (5.4.1)$$

и граничного условия

$$\vec{E}_\nu|_S = 0, \quad (5.4.2)$$

где S — поверхность, ограничивающая резонансный объем, ν — номер колебания.

Как уже отмечалось выше, собственные значения рассматриваемой однородной краевой задачи при отсутствии потерь — вещественны. Покажем это. Второе уравнение из (5.4.1) умножим скалярно на \vec{H}_ν^* , а уравнение, комплексно сопряженное с первым, на $-\vec{E}_\nu$. После сложения преобразованных уравнений имеем:

$$\vec{H}_\nu^* \text{rot } \vec{E}_\nu - \vec{E}_\nu \text{rot } \vec{H}_\nu^* = -i\omega_\nu \mu_a |\vec{H}_\nu|^2 + i\omega_\nu^* \epsilon_a |\vec{E}_\nu|^2$$

или с учётом (П.3.3)

$$\text{div} [\vec{E}_\nu \times \vec{H}_\nu^*] = -i\omega_\nu \mu_a |\vec{H}_\nu|^2 + i\omega_\nu^* \epsilon_a |\vec{E}_\nu|^2. \quad (5.4.3)$$

Воспользовавшись соотношением:

$$\epsilon_a^2 \omega_\nu^2 |\vec{E}_\nu|^2 = |\text{rot } \vec{H}_\nu|^2,$$

уравнение (5.4.3) преобразуем к виду:

$$\omega_\nu^2 \mu_a |\vec{H}_\nu|^2 = \frac{1}{\epsilon_a} |\text{rot } \vec{H}_\nu|^2 + i\omega_\nu \text{div} [\vec{E}_\nu \times \vec{H}_\nu^*]. \quad (5.4.4)$$

Проинтегрировав (5.4.4) по всему объёму V резонатора, получаем:

$$\omega_v^2 = \frac{\varepsilon_a^{-1} \int_V |\operatorname{rot} \vec{H}_v|^2 dV + i \omega_v \oint_S [\vec{E}_v, \vec{H}_v^*] d\vec{S}}{\mu_a \int_V |\vec{H}_v|^2 dV}. \quad (5.4.5)$$

При условии (5.4.2) поверхностный интеграл в (5.4.5) равен нулю. В результате ω_v — вещественная величина при вещественных параметрах ε и μ . Таким образом, доказано, что собственные значения краевой задачи (5.4.1), (5.4.2) вещественны.

Вещественность ω_v означает, что колебания — незатухающие. Этого и следовало ожидать при вещественных параметрах ε и μ среды, заполняющей резонатор, и при отсутствии потока мощности в его стенках, определяемого поверхностным интегралом в (5.4.5).

Формула (5.4.5) позволяет определить мнимую часть собственного значения, которая появляется при невыполнении условия (5.4.2), что имеет место в реальных резонаторах. Обозначив $\omega_v = \omega'_v + i\omega''_v$, формулу (5.4.5) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \omega_v'^2 - \omega_v''^2 + 2i\omega'_v\omega_v'' = \\ = \frac{\varepsilon_a^{-1} \int_V |\operatorname{rot} \vec{H}_v|^2 dV + (i\omega'_v - \omega_v'') \oint_S [\vec{E}_v, \vec{H}_v^*] d\vec{S}}{\mu_a \int_V |\vec{H}_v|^2 dV}. \end{aligned}$$

Приравнявая мнимые части, при условии $\omega'_v \gg \omega_v''$ получаем:

$$\omega_v'' = \frac{S \operatorname{Re} \oint_S [\vec{E}_v, \vec{H}_v^*] d\vec{S}}{2\mu_a \int_V |\vec{H}_v|^2 dV}. \quad (5.4.6)$$

В (5.4.6) все величины имеют конкретный физический смысл:

$$W = \frac{\mu_a}{2} \int_V |\vec{H}_v|^2 dV \quad —$$

энергия, запасенная в резонаторе;

$$P = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \oint_S [\vec{E}_v, \vec{H}_v^*] d\vec{S} \quad —$$

средний за период поток мощности через внутреннюю поверхность S , ограничивающую резонансный объем.

Величина

$$Q = \omega \frac{\mu_a \int_V |\vec{H}_v|^2 dV}{\operatorname{Re} \oint_S [\vec{E}_v, \vec{H}_v^*] d\vec{S}} \quad (5.4.7)$$

является добротностью резонатора. Здесь подразумевается, что $\omega = \omega'_v$.

Отношение

$$\frac{\operatorname{Re} \oint_S [\vec{E}_v, \vec{H}_v^*] d\vec{S}}{2\pi \frac{S}{2\omega}} = \frac{T}{2} \operatorname{Re} \oint_S [\vec{E}_v, \vec{H}_v^*] d\vec{S}$$

— есть потери энергии в стенках резонатора за период T . Таким образом, можно сказать, что *добротность резонатора* Q — это умноженное на 2π отношение запасенной в резонаторе энергии к потерям ее за период.

С учетом (5.4.7) формулу (5.4.6) можем переписать как

$$\omega_v'' = \frac{\omega}{2Q}.$$

Тогда

$$\omega_v = \omega_v' + \frac{i\omega_v'}{2Q} = \omega \left(1 + \frac{i}{2Q} \right),$$

и временная зависимость колебательного процесса в резонаторе будет описываться функцией

$$f(t) = e^{i\omega t} e^{-\frac{\omega}{2Q}t},$$

то есть добротность будет определять скорость затухания колебаний.

Добротность различных собственных колебаний одного и того же резонатора разная, поскольку колебания имеют различные структуры полей и по-разному взаимодействуют с экранирующей поверхностью. В тех случаях, когда можно получить аналитические выражения для полей \vec{E}_v , \vec{H}_v , подставляя их в (5.4.7) и производя интегрирование, нетрудно получить формулы для вычисления добротности того или иного колебания в конкретном резонаторе.

В общем случае для любого колебания в объемном экранированном резонаторе имеет место пропорциональность:

$$Q \sim \frac{V}{\Delta^0 S}, \quad (5.4.8)$$

где V — объем резонатора, S — площадь поверхности, ограничивающей резонансный объём; Δ^0 — толщина скин-слоя.

Поскольку $\Delta^0 \sim \sqrt{\lambda}$; $V \sim \lambda^3$; $S \sim \lambda^2$; из (5.4.8) получаем, что $Q \sim \sqrt{\lambda}$, то есть при стремлении сохранить одномодовый режим колебательной системы (в этом случае необходимо сохранять пропорцию: $V \sim \lambda^3$) с ростом частоты имеем падение добротности — $Q \sim 1/\sqrt{\omega}$.

5.5. Собственные колебания прямоугольного волноводного резонатора

Одним из наиболее часто используемых видов объёмных закрытых резонаторов является прямоугольный волноводный резонатор. Он представляет собой отрезок прямоугольного волновода длиной l с заматаллизованными торцевыми плоскостями

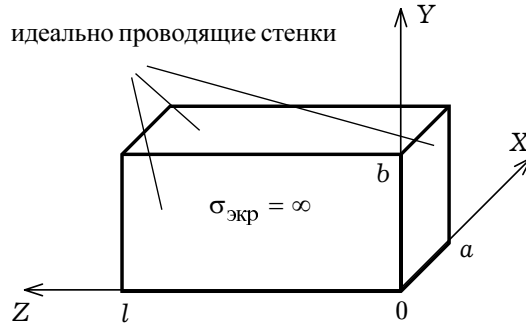


Рис. 5.3

(рис. 5.3). Будем считать, что рассматриваемый резонатор заполнен средой без потерь с параметрами ϵ и μ , а его стенки являются идеально проводящими ($\sigma_{\text{экр}} = \infty$). Ширину широкой стенки обозначим через a , а узкой — через b .

Электромагнитное поле резонатора можно найти путём решения краевых задач (5.2.1) и (5.2.2) (для колебаний типов E и H соответственно). В силу специфики геометрии рассматриваемого резонатора удобно воспользоваться декартовой системой координат.

Запишем трёхмерное уравнение Гельмгольца в проекциях на оси декартовой системы:

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} + k^2 \psi_i = 0, \quad (5.5.1)$$

где ψ_i — одна из составляющих векторов \vec{E} или \vec{H} ; $k^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a$.

Для решения уравнения (5.5.1) воспользуемся методом разделения переменных и представим неизвестное решение в виде:

$$\psi_i(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z). \quad (5.5.2)$$

После подстановки (5.5.2) в уравнение Гельмгольца (5.5.1) и деления его на XYZ получаем:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2. \quad (5.5.3)$$

Отсюда, в силу независимости функций X, Y и Z , получаем три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \chi_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \chi_y^2 Y = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + \chi_z^2 Z = 0 \quad (5.5.4)$$

и дополнительное условие:

$$\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z^2 = k^2, \quad (5.5.5)$$

где χ_x, χ_y, χ_z — неопределённые постоянные разделения.

Решения уравнений (5.5.4) имеют вид:

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \cos(\chi_x x) + A_2 \sin(\chi_x x), \\ Y(y) &= B_1 \cos(\chi_y y) + B_2 \sin(\chi_y y), \\ Z(z) &= C_1 \cos(\chi_z z) + C_2 \sin(\chi_z z), \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

где A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2$) — неопределённые постоянные (они определяются из граничных условий на идеально проводящих стенках экрана).

Понимая под ψ_i составляющие электрического поля, тангенциальные к боковым стенкам резонатора на решение (5.5.2) накладываем граничные условия:

$$\begin{aligned} \psi_i &= 0 \quad \text{при } x = 0, a; \\ \psi_i &= 0 \quad \text{при } y = 0, b; \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial z} &= 0 \quad \text{при } z = 0, l. \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

В результате с учётом (5.5.6) получаем собственные функции краевой задачи (5.5.1), (5.5.7) в виде:

$$\psi_{imnp}(x, y, z) = \psi_{0imnp} \sin(\chi_x x) \sin(\chi_y y) \cos(\chi_z z), \quad (5.5.8)$$

где ψ_{0imnp} — неопределённые коэффициенты; постоянные разделения в (5.5.8):

$$\chi_x = \frac{m\pi}{a}, \quad \chi_y = \frac{n\pi}{b}, \quad \chi_z = \frac{p\pi}{l}, \quad (5.5.9)$$

где $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, p = 0, 1, 2, \dots$, связаны соотношением (5.5.5).

Решение уравнения Гельмгольца (5.5.1) с граничными условиями (5.5.7) описывает E -колебания полого прямоугольного резонатора. Будем обозначать любое из них как E_{mnp} , где:

- m — число полуволн, укладываемых вдоль стенки с размером a ;
- n — число полуволн, укладываемых вдоль стенки с размером b ;
- p — число полуволн, укладываемых вдоль стенки с размером l .

Колебания E -типа характеризуются тем, что у них присутствует продольная вдоль оси Oz составляющая вектора \vec{E} . Поэтому в данном случае удобно положить $\psi_i = E_z$, а для определения других составляющих поля воспользоваться системой уравнений Максвелла. В результате для составляющих поля E -колебаний получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_x^{mnp} &= -E_0 \frac{\chi_x \chi_z}{\chi_{\perp}^2} \cos(\chi_x x) \sin(\chi_y y) \sin(\chi_z z), \\ E_y^{mnp} &= -E_0 \frac{\chi_y \chi_z}{\chi_{\perp}^2} \sin(\chi_x x) \cos(\chi_y y) \sin(\chi_z z), \\ E_z^{mnp} &= E_0 \sin(\chi_x x) \sin(\chi_y y) \cos(\chi_z z), \\ H_x^{mnp} &= iE_0 \frac{\omega \varepsilon_a \chi_y}{\chi_{\perp}^2} \sin(\chi_x x) \cos(\chi_y y) \cos(\chi_z z), \\ H_y^{mnp} &= -iE_0 \frac{\omega \varepsilon_a \chi_x}{\chi_{\perp}^2} \cos(\chi_x x) \sin(\chi_y y) \cos(\chi_z z), \\ H_z^{mnp} &= 0, \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

где $\chi_{\perp}^2 = \chi_{mn}^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2$; E_0 — амплитуда колебания.

Постоянные $\chi_{\perp} = \chi_{mn}$ представляют собой собственные числа краевой задачи (5.5.1), (5.5.7). В выражениях (5.5.9), (5.5.10) целочисленные индексы могут принимать следующие значения: $m = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Из (5.5.5) получаем формулу для собственных частот Е-колебаний:

$$\omega_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\chi_{mn}^2 + \chi_z^2} = \frac{\pi c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}. \quad (5.5.11)$$

Длины волн, соответствующие колебаниям Е-типа, определяются как

$$\lambda_{mnp} = 2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (5.5.12)$$

Формула (5.5.12) даёт значение длины волны в свободном пространстве с параметрами ϵ_0, μ_0 , которому соответствует резонансная частота, определяемая по формуле (5.5.11), резонатора, заполненного средой с параметрами ϵ_a, μ_a .

Рассмотрим теперь уравнение (5.5.1) совместно с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = 0, a; & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = 0, b; \\ \psi_i &= 0 \quad \text{при } z = 0, l. \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

В этом случае собственные функции краевой задачи (5.5.1), (5.5.13) имеют вид:

$$\psi_{imnp}(x, y, z) = \psi'_{imnp} \cos(\chi_x x) \cos(\chi_y y) \sin(\chi_z z), \quad (5.5.14)$$

где ψ'_{imnp} — неопределённые коэффициенты; постоянные разделения в (5.5.14) удовлетворяют соотношению (5.5.5).

Краевая задача (5.5.1), (5.5.13) описывает электромагнитные поля Н-колебаний, характеризующихся наличием продольной составляющей вектора напряжённости магнитного поля, поэтому удобно положить $\psi_i \equiv H_z$. В этом случае составляющие поля определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} E_x^{mnp} &= iH_0 \frac{\omega \mu_a \chi_y}{\chi_{\perp}^2} \cos(\chi_x x) \sin(\chi_y y) \sin(\chi_z z), \\ E_y^{mnp} &= -iH_0 \frac{\omega \mu_a \chi_x}{\chi_{\perp}^2} \sin(\chi_x x) \cos(\chi_y y) \sin(\chi_z z), \\ E_z^{mnp} &= 0, \\ H_x^{mnp} &= -H_0 \frac{\chi_x \chi_z}{\chi_{\perp}^2} \sin(\chi_x x) \cos(\chi_y y) \cos(\chi_z z), \\ H_y^{mnp} &= -H_0 \frac{\chi_y \chi_z}{\chi_{\perp}^2} \cos(\chi_x x) \sin(\chi_y y) \cos(\chi_z z), \\ H_z^{mnp} &= H_0 \cos(\chi_x x) \cos(\chi_y y) \sin(\chi_z z), \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

где H_0 — амплитуда колебания, определяемая источником возбуждения;

$\chi_{\perp}^2 = \chi_{mn}^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2$; $m = (0), 1, 2, \dots$, $n = (0), 1, 2, \dots$, $p = 1, 2, \dots$. Здесь обозначение (0) указывает на то, что индексы m и n одновременно не могут быть равными нулю, поскольку в этом случае, как следует из (5.5.15), будет отсутствовать поперечное электромагнитное поле.

H -колебания будем обозначать как H_{mnp} .

Частоты и длины волн собственных H -колебаний определяются выражениями (5.5.11) и (5.5.12), то есть совпадают с аналогичными параметрами E -колебаний.

Любые три целых числа m , n и p определяют структуры полей E_{mnp} и H_{mnp} -колебаний, имеющих тождественно равные собственные частоты. Отсюда следует, что при $a \neq b \neq l$ все типы колебаний волноводного прямоугольного резонатора имеют *двухкратное вырождение*. В случае кубического резонатора $a = b = l$ при любом сочетании m , n и p существует уже двенадцать типов колебаний с одинаковой собственной частотой.

Заметим, что выбор продольной оси (на рис. 5.3 — ось OZ) в случае прямоугольного резонатора является произвольным, поскольку в декартовой системе координат все оси равноправны.

Основным называют тип колебания с наименьшей собственной частотой. Из формулы (5.5.11) следует, что тип основного колебания зависит от соотношения между длинами рёбер прямоугольного резонатора a , b и l . Если взять $l < a$, $l < b$, из (5.5.11) следует, что

$$\min \{ \omega_{mnp} \} = \omega_{110} = \frac{\pi c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}, \quad (5.5.16)$$

то есть основным будет колебание типа E_{110} .

При $b < a$, $b < l$, как следует из формулы (5.5.11), основным колебанием является H_{101} ; а при $a < b$, $a < l$ — H_{011} . Данные утверждения вытекают из простых соображений: индекс, описывающий вариации поля вдоль самого короткого ребра должен быть равен нулю, так как размеры рёбер входят в (5.5.11) в знаменатели.

Таким образом, основным всегда является тип колебаний с отсутствием вариации поля вдоль наименьшего ребра.

Пусть на длины рёбер полого прямоугольного резонатора накладываются условия $b < a$, $b < l$ (то есть ребро b является самым коротким)^{*)}. В этом случае основным типом колебания будет H_{101} , составляющие поля которого определяются из (5.5.15) при $m = 1$, $n = 0$, $p = 1$:

$$\begin{aligned} E_y^{101} &= -iH_0 \frac{a \omega_{101} \mu_a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \\ H_x^{101} &= -H_0 \frac{a}{l} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right), \\ H_z^{101} &= H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

где $\omega_{101} = (\pi / \sqrt{\epsilon_a \mu_a}) \sqrt{1/a^2 + 1/l^2}$; остальные составляющие поля колебания H_{101} равны нулю.

^{*)} Этот случай является наиболее распространённым

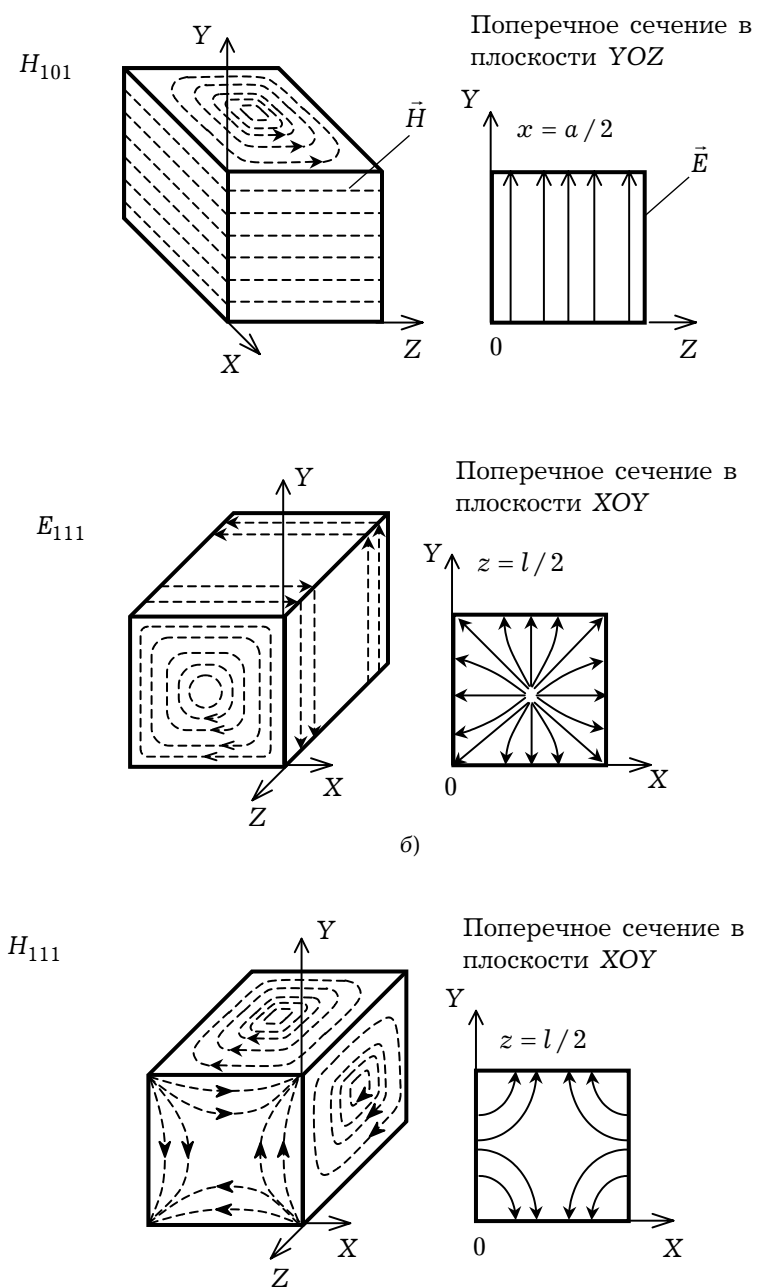


Рис. 5.4

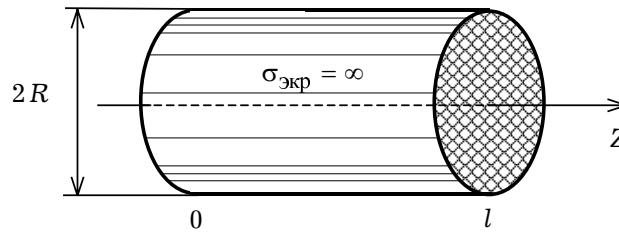


Рис. 5.5

Рассмотрим структуру электромагнитного поля колебания H_{101} (рис. 5.4а). У этого колебания силовые линии электрического поля параллельны оси OY . Силовые линии магнитного поля лежат в плоскостях $y = \text{const}$. Электрическое и магнитное поля резонатора сдвинуты на расстояние $\Lambda/4$ по оси OZ (где Λ — длина волны в однородно заполненном прямоугольном волноводе).

На рис. 5.4б приведена структура поля колебания E_{111} . В этом случае силовые линии магнитного поля являются пространственными кривыми, лежащими в плоскостях XOY , у них отсутствует продольная составляющая вдоль оси OZ . На рис. 5.4в изображена структура электромагнитного поля колебания H_{111} , у которого силовые линии электрического поля являются пространственными кривыми, расположенными в плоскостях YOX .

Структуры электромагнитных полей других типов собственных колебаний прямоугольного полого резонатора несложно получить, воспользовавшись структурами полей собственных волн прямоугольного волновода в поперечной плоскости.

Перестройка прямоугольного волноводного резонатора, как следует из (5.5.11), осуществляется изменением одного из его линейных размеров. Если резонатор рассматривать как отрезок волновода, заключенный между двумя металлическими перегородками $z = z_{1,2}$, то перестройку его резонансных частот можно осуществлять перемещением одной из перегородок. Подвижная перегородка называется *плунжером*. Плунжеры подразделяются на контактные и бесконтактные. Первые имеют гальванический контакт с поверхностью волновода. Вторые, будучи плотно прижатыми к поверхности волновода, изолированы от нее по току проводимости.

5.6. Собственные колебания круглого волноводного резонатора

Другим наиболее часто используемым объёмным резонатором СВЧ является круглый волноводный резонатор, образованный отрезком круглого волновода длины l с заматаллизованными торцевыми плоскостями (рис. 5.5). Будем, как всегда, предполагать, что стенки резонатора идеально проводящие, а его заполнение — однородный диэлектрик с параметрами ϵ и μ . Радиус круглого резонатора обозначим через R .

Электромагнитные поля собственных колебаний резонатора описывается решениями краевых задач (5.2.1) и (5.2.2) (для колебаний типов E и H , соответственно). В силу геометрии рассматриваемого резонатора удобно воспользоваться цилиндрической системой координат.

Запишем трёхмерное уравнение Гельмгольца в проекциях на оси цилиндрической системы координат:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi_i}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} + k^2 \psi_i = 0, \quad (5.6.1)$$

где ψ_i — одна из составляющих векторов \vec{E} или \vec{H} .

В соответствии с методом разделения переменных представим неизвестное решение в виде:

$$\psi_i(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z). \quad (5.6.2)$$

Подставляя (5.6.2) в уравнение (5.6.1), получаем три независимых дифференциальных уравнения для определения функций $R(\rho)$, $\Phi(\varphi)$ и $Z(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\chi_{\perp}^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi &= 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + \chi_z^2 Z = 0 \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

и дополнительное соотношение

$$\chi_{\perp}^2 + \chi_z^2 = k^2, \quad (5.6.4)$$

где χ_{\perp}^2 , χ_z^2 , n^2 — постоянные разделения.

Решения уравнений подобных двум первым уравнениям системы (5.6.3) в общем случае получены в параграфе 4.6 при рассмотрении круглого экранированного волновода. Решение третьего уравнения из (5.6.3) записывается в виде:

$$Z(z) = C_1 \cos(\chi_z z) + C_2 \sin(\chi_z z), \quad (5.6.5)$$

где C_1 , C_2 — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий.

Рассмотрим первую краевую задачу на уравнении Гельмгольца (5.6.1) с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi_i &= 0 \quad \text{при } \rho = R; \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial z} &= 0 \quad \text{при } z = 0, l. \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

При такой записи граничных условий под ψ_i следует понимать продольную составляющую поля E_z .

Используя результаты, полученные в параграфе 4.6, и граничные условия (5.6.6), получаем выражения для собственных функций данной краевой задачи:

$$\psi_{inmp} = \psi_{0nmp} J_n(\mu_{nm} \rho / R) \Phi_n(\varphi) \cos(\chi_z z), \quad (5.6.7)$$

где $\Phi_n(\varphi) = C \cos n\varphi + D \sin n\varphi$ (C , D — неизвестные постоянные). Из соотношения (5.6.4) с использованием граничных условий (5.6.6) получаем уравнение для

определения собственных значений:

$$k_{nmp}^2 = \left(\frac{\mu_{nm}}{R} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2. \quad (5.6.8)$$

В (5.6.7) ψ_{0nmp} — неизвестные амплитуды; в (5.6.8) μ_{nm} — m -й корень уравнения $J_n(\chi_\perp R) = 0$; $\chi_z = p\pi/l$; $m = 1, 2, 3, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $p = 0, 1, 2, \dots$; значения корней μ_{nm} приведены в таблице 4.1; $k_{nmp} = \omega_{nmp} \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$.

Решения краевой задачи (5.6.1), (5.6.6) описывают E -колебания однородно заполненного круглого резонатора, которые имеют в структуре электромагнитного поля составляющую E_z :

$$\begin{aligned} E_\rho^{nmp} &= -\psi_{0nmp} \frac{\chi_z}{\chi_\perp} J'_n(\chi_\perp \rho) \Phi_n(\varphi) \sin(\chi_z z), \\ E_\varphi^{nmp} &= -\psi_{0nmp} \frac{n \chi_z}{\chi_\perp^2} J_n(\chi_\perp \rho) \Phi'_n(\varphi) \sin(\chi_z z), \\ E_z^{nmp} &= \psi_{0nmp} J_n(\chi_\perp \rho) \Phi_n(\varphi) \cos(\chi_z z), \\ H_\rho^{nmp} &= i \psi_{0nmp} \frac{n \omega \varepsilon_a}{\chi_\perp^2} J_n(\chi_\perp \rho) \Phi'_n(\varphi) \cos(\chi_z z), \\ H_\varphi^{nmp} &= -i \psi_{0nmp} \frac{\omega \varepsilon_a}{\chi_\perp} J'_n(\chi_\perp \rho) \Phi_n(\varphi) \cos(\chi_z z), \\ H_z^{nmp} &= 0, \quad \chi_z = p\pi/l, \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

где $\chi_\perp = \chi_{nm} = \mu_{nm}/R$; $m = 1, 2, 3, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $p = 0, 1, 2, \dots$.

Колебания в круглом однородно заполненном резонаторе, поля которых определяются из соотношений (5.6.9), будем называть E_{nmp} -колебаниями. Целочисленный индекс p определяет число вариаций электромагнитного поля вдоль оси Oz (число полуволин, укладывающихся на длине l резонатора).

Собственные частоты и длины волн E_{nmp} -колебаний определяются следующими формулами:

$$\omega_{nmp}^E = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\left(\frac{\mu_{nm}}{R} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}, \quad (5.6.10)$$

$$\lambda_{nmp}^E = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{nm}}{R} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}}. \quad (5.6.11)$$

Формула (5.6.11) определяет длину волны в свободном пространстве с параметрами ε_0, μ_0 , соответствующую резонансной частоте ω_{nmp}^E резонатора, заполненного средой с параметрами ε_a, μ_a , вычисляемой по формуле (5.6.10).

Рассмотрим теперь краевую задачу на уравнении (5.6.1) с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial \rho} &= 0 & \text{при } \rho = R; \\ \psi_i &= 0 & \text{при } z = 0, l. \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

В этом случае под ψ_i следует понимать продольную составляющую магнитного поля H_z .

Собственные функции краевой задачи имеют следующий вид:

$$\psi_{inmp} = \psi'_{0nmp} J_n(\xi_{nm} \rho / R) \Phi_n(\varphi) \sin(\chi_z z), \quad (5.6.13)$$

где ψ'_{0nmp} — неизвестные амплитуды; ξ_{nm} — m -й корень уравнения $J'_n(\chi_\perp R) = 0$; $\chi_z = p\pi/l$; $m = 1, 2, 3, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $p = 1, 2, 3, \dots$; значения корней ξ_{nm} приведены в таблице 4.2 (следует обратить внимание, что в этой таблице они обозначены через χ_{nm}).

Собственные значения краевой задачи (5.6.1), (5.6.12) определяются из соотношений:

$$k_{nmp}^2 = \left(\frac{\xi_{nm}}{R} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2. \quad (5.6.14)$$

Решения краевой задачи (5.6.1), (5.6.12) описывают H -колебания, составляющие поля которых определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} E_\rho^{nmp} &= -i \psi'_{0nmp} \frac{n\omega\mu_a}{\chi_\perp^2} J_n(\chi_\perp \rho) \Phi'_n(\varphi) \sin(\chi_z z), \\ E_\varphi^{nmp} &= i \psi'_{0nmp} \frac{\omega\mu_a}{\chi_\perp} J'_n(\chi_\perp \rho) \Phi_n(\varphi) \sin(\chi_z z), \\ E_z^{nmp} &= 0, \\ H_\rho^{nmp} &= \psi'_{0nmp} \frac{\chi_z}{\chi_\perp} J'_n(\chi_\perp \rho) \Phi_n(\varphi) \cos(\chi_z z), \\ H_\varphi^{nmp} &= \psi'_{0nmp} \frac{n\chi_z}{\chi_\perp^2} J_n(\chi_\perp \rho) \Phi'_n(\varphi) \cos(\chi_z z), \\ H_z^{nmp} &= \psi'_{0nmp} J_n(\chi_\perp \rho) \Phi_n(\varphi) \sin(\chi_z z), \quad \chi_z = p\pi/l, \end{aligned} \quad (5.6.15)$$

где $\chi_\perp = \chi_{nm} = \xi_{nm}/R$; $m = 1, 2, 3, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $p = 1, 2, 3, \dots$.

Колебания в круглом однородно заполненном резонаторе, поля которых определяются соотношениями (5.6.15), будем называть H_{nmp} -колебаниями.

Собственные частоты и длины волн H -колебаний определяются следующими формулами:

$$\omega_{nmp}^H = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{\xi_{nm}}{R} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}, \quad (5.6.16)$$

$$\lambda_{nmp}^H = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\xi_{nm}}{R} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}}. \quad (5.6.17)$$

По формуле (5.6.17) вычисляются длины волн в свободном пространстве с параметрами ε_0, μ_0 , соответствующую собственным частотам ω_{nmp}^H резонатора, заполненного средой с параметрами ε_a, μ_a , вычисляемыми по формуле (5.6.16).

Для круглого резонатора, в отличие от прямоугольного, направление OZ является выделенным как продольная ось круглого волновода. Из сравнения соотношений (5.6.10) и (5.6.16) для E - и H -колебаний можно сделать вывод о том, что колебания данных типов при одинаковых целочисленных индексах n , m и p имеют различные собственные частоты.

Основным, как обычно, называется колебание, имеющее минимальную собственную частоту. Здесь необходимо отметить, что в зависимости от соотношения между радиусом резонатора R и длиной l основным типом является либо колебание H_{111} , либо E_{010} , в чём легко убедиться, пользуясь таблицами 4.1 и 4.2 для корней μ_{nm} и ξ_{nm} .

Несложно заметить, что собственные частоты колебаний H_{111} и E_{010} равны между собой при выполнении условия:

$$\left(\frac{\mu_{01}}{R}\right)^2 = \left(\frac{\xi_{11}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2. \quad (5.6.18)$$

Так как $\mu_{01} = 2.405$, $\xi_{11} = 1.841$, то из (5.6.18) следует, что

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_{01}^2 - \xi_{11}^2}} \approx 2.03.$$

Таким образом, при $l/R \approx 2.03$ колебания H_{111} и E_{010} являются вырожденными и обладают одинаковыми собственными частотами. При всех других соотношениях между R и l одна из собственных частот будет иметь меньшее значение:

$$\min \omega_{nmp} = \begin{cases} \omega_{010}^E & \text{при } l/R < 2.03; \\ \omega_{111}^H & \text{при } l/R > 2.03. \end{cases}$$

На рис. 5.6 приведены структуры полей круглого однородно заполненного резонатора для нескольких низших типов колебаний при $l > 2R$.

5.7. Коаксиальный резонатор

Коаксиальный резонатор представляет собой отрезок коаксиальной линии передачи длины l с заматализованными торцевыми плоскостями (рис. 5.7). Экран и центральный проводник линии предполагаются идеально проводящими, а заполнение резонатора — однородно-диэлектрическим с параметрами ϵ_a и μ_a . Радиус внутреннего проводника обозначим через R_1 , а внешнего — через R_2 . В рассматриваемой структуре резонанс возникает, когда между торцевыми поверхностями укладывается целое число длин полуволн.

5.7.1. Т-колебания коаксиального резонатора. При изучении коаксиальных резонансных структур основной интерес представляют T -колебания. Для нахождения поля T -колебания воспользуемся определением стоячей волны, которая образуется при сложении двух противоположно направленных бегущих T -волн.

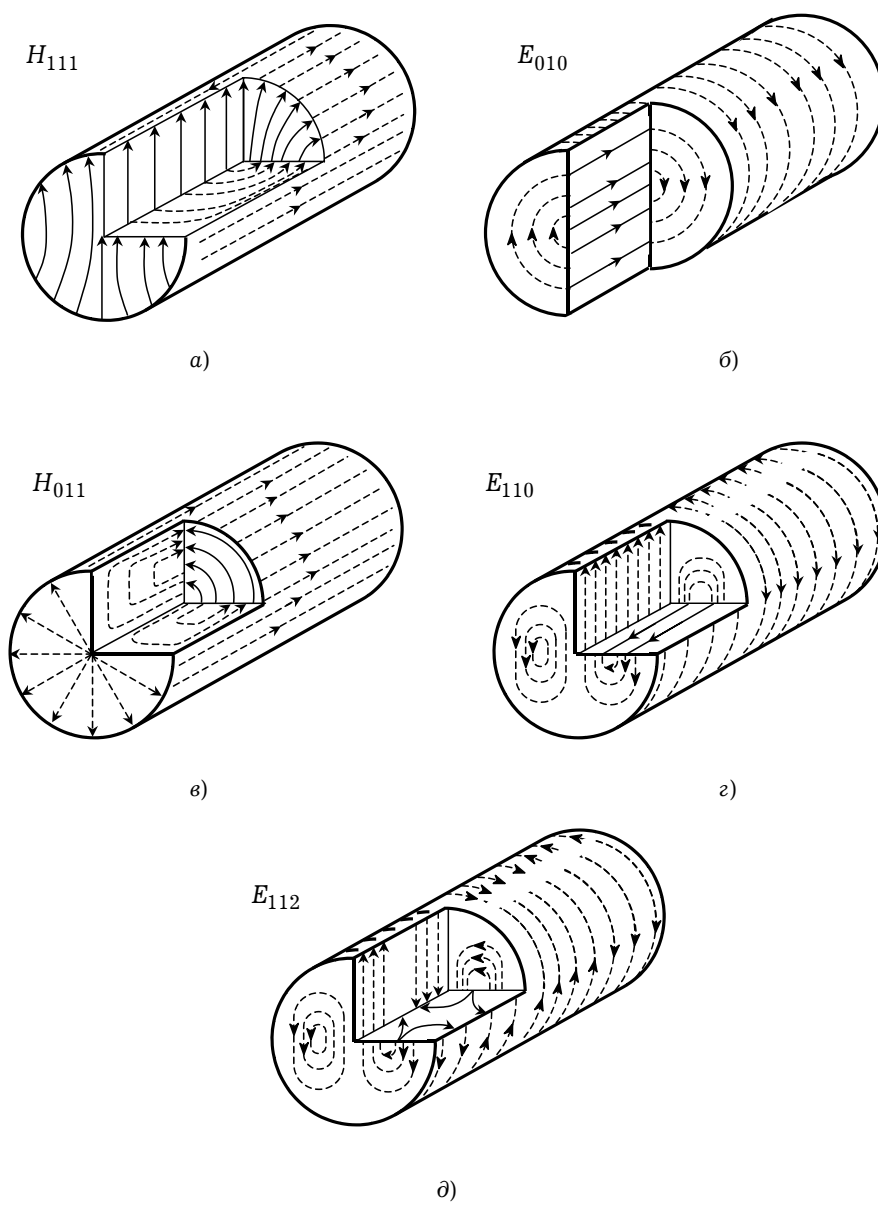


Рис. 5.6

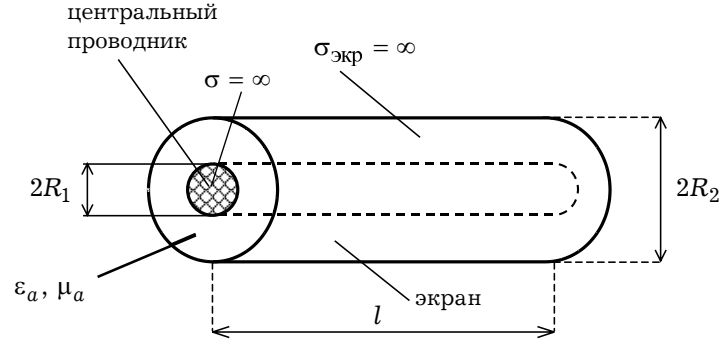


Рис. 5.7

Запишем выражения для полей двух T -волн, бегущих в противоположных направлениях (см. параграф 4.7.1):

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{\rho}_0 \frac{Z I_0}{2\pi\rho} e^{-i\gamma z}, & \vec{H}_1 &= \vec{\varphi}_0 \frac{I_0}{2\pi\rho} e^{-i\gamma z}; \\ \vec{E}_2 &= \vec{\rho}_0 \frac{Z I_0}{2\pi\rho} e^{i\gamma z}, & \vec{H}_2 &= \vec{\varphi}_0 \frac{I_0}{2\pi\rho} e^{i\gamma z},\end{aligned}\quad (5.7.1)$$

где $\vec{\rho}_0, \vec{\varphi}_0$ — единичные орты цилиндрической системы координат; I_0 — комплексная амплитуда тока, протекающего по внутреннему проводнику; Z — характеристическое сопротивление среды-заполнителя (в случае вакуумного заполнения $Z = Z_0$), γ — постоянная распространения T -волны. Из условия образования стоячей волны находим: $\gamma = p\pi/l$, $p = 1, 2, 3, \dots$

Найдём суперпозицию полей двух волн, описываемых выражениями (5.7.1), обеспечивающую выполнение граничных условий на торцевых плоскостях:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\rho, \varphi) &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\vec{\rho}_0 A \frac{iZ}{\rho} \sin(p\pi z/l), \\ \vec{H}(\rho, \varphi) &= \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \vec{\varphi}_0 A \frac{1}{\rho} \cos(p\pi z/l),\end{aligned}\quad (5.7.2)$$

где $A = I_0/(2\pi)$ — амплитуда T -колебания, зависящая от величины тока I_0 , протекающего по внутреннему проводнику коаксиального резонатора.

Из выражений (5.7.2) следует, что T -колебания описываются единственным целочисленным индексом p , поэтому для классификации T -колебаний резонатора используется обозначение T_p . Индекс p определяет число длин полуволн, укладывающихся на длине резонатора l .

Собственные частоты и длины волн T_p -колебаний определяются формулами:

$$\omega_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{p\pi}{l}, \quad \lambda_p = \frac{2l}{p}. \quad (5.7.3)$$

где λ_p — длина волны в свободном пространстве с параметрами ϵ_0, μ_0 , соответствующая резонансной частоте колебания T_p коаксиального резонатора, заполненного средой с параметрами ϵ_a, μ_a .

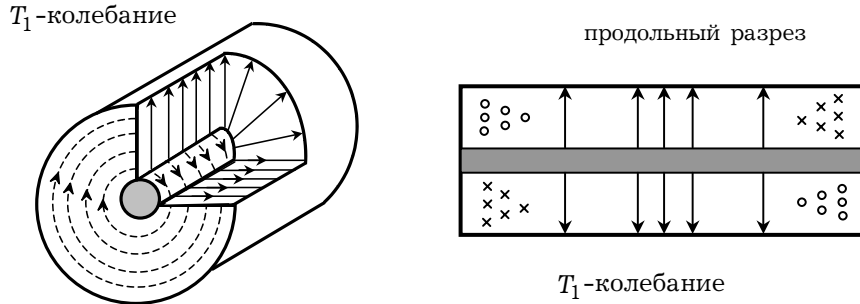


Рис. 5.8

Основным колебанием в коаксиальном резонаторе является T_1 -колебание с собственной частотой

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{l\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Как следует из (5.7.3), спектр T_p -колебаний коаксиального резонатора является эквидистантным с «частотным расстоянием» между соседними типами равным

$$\omega_p - \omega_{p-1} = \frac{\pi c}{l\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (5.7.4)$$

Из выражения (5.7.4) видно, что при увеличении длины резонатора l спектр колебаний сгущается.

На рис. 5.8 приведена структура поля T_1 -колебания. При построении структур полей T_p -колебаний необходимо вдоль оси OZ изобразить структуру поля T_1 -колебания p раз, изменяя при переходе от одной полуволны к другой направление силовых линий поля. Из рис. 5.8 видно, что силовые линии электрического поля T_1 -колебания являются прямыми линиями, исходящими из внутреннего проводника и входящие во внешний. Силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические по отношению к внутреннему проводнику окружности.

Следует отметить, что в коаксиальном резонаторе могут существовать и высшие типы колебаний типа E_{nmp} , H_{nmp} . Процесс определения собственных функций и собственных значений для высших типов колебаний коаксиального резонатора аналогичен изложенному в разделе 5.6 при рассмотрении круглого полого резонатора.

5.7.2. Е-колебания коаксиального резонатора. Формулировка краевой задачи для E -колебаний имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z &= 0 \\ \text{при } R_1 < \rho < R_2, \quad 0 < \phi < 2\pi; \\ E_z &= 0 \quad \text{при } \rho = R_1, R_2 \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0 \quad \text{при } z = 0, l. \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

При записи решений уравнения Гельмгольца необходимо учесть, что в данном случае точка $\rho = 0$ выпадает из области определения поля, поэтому в решениях необходимо учитывать цилиндрические функции как 1-го рода, так и 2-го рода. При этом решение краевой задачи (5.7.5) может быть записано следующим образом:

$$E_{z n m p} = E_{0 n m p} \{ A J_n(\alpha_{nm} \rho) + B Y_n(\alpha_{nm} \rho) \} \Phi_n(\varphi) \cos(\chi_z z), \quad (5.7.6)$$

где $E_{0 n m p}$ — амплитуда колебания; $\chi_z = \pi p / l$; ($p = 0, 1, 2, \dots$); A и B — неизвестные постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий при $\rho = R_{1,2}$; вид функции $\Phi_n(\varphi)$ приведён в параграфе 5.6; значения α_{nm} являются корнями уравнения:

$$J_n(\alpha R_1) Y_n(\alpha R_2) - J_n(\alpha R_2) Y_n(\alpha R_1) = 0, \quad (5.7.7)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, 3, \dots$ (m — номер корня уравнения).

Уравнение (5.7.7) получается из условия нетривиальности решений системы двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A и B , образующейся из граничных условий при $\rho = R_{1,2}$ после подстановки в них решения (5.7.6).

Собственные значения краевой задачи (5.7.5) определяются из соотношений:

$$k_{n m p}^2 = \alpha_{nm}^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2. \quad (5.7.8)$$

В результате спектр собственных E -колебаний коаксиального резонатора образуют колебания $E_{n m p}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, 3, \dots$; $p = 0, 1, 2, \dots$).

Собственные частоты и длины волн $E_{n m p}$ -колебаний коаксиального резонатора определяются следующими формулами:

$$\omega_{n m p}^E = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{\alpha_{nm}^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}, \quad \lambda_{n m p}^E = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_{nm}^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}}, \quad (5.7.9)$$

где $\lambda_{n m p}^E$ — длина волн в свободном пространстве с параметрами ϵ_0, μ_0 , соответствующая резонансной частоте $\omega_{n m p}^E$ колебания $E_{n m p}$ коаксиального резонатора, заполненного средой с параметрами ϵ_a, μ_a .

5.7.3. Н-колебания коаксиального резонатора. Формулировка краевой задачи в этом случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z &= 0 \\ \text{при } R_1 < \rho < R_2, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ \frac{\partial H_z}{\partial \rho} &= 0 \quad \text{при } \rho = R_1, R_2 \\ H_z &= 0 \quad \text{при } z = 0, l. \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

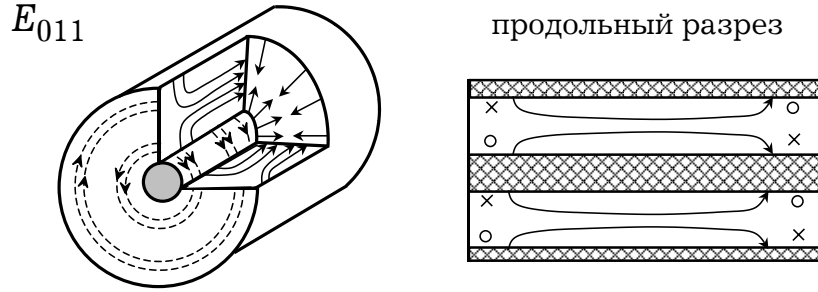


Рис. 5.9

Решения данной краевой задачи записываются в виде:

$$H_{z nmp} = H_{0 nmp} \{ A J_n(\eta_{nm} \rho) + B Y_n(\eta_{nm} \rho) \} \Phi(\varphi) \sin(\chi_z z), \quad (5.7.11)$$

где $H_{0 nmp}$ — амплитуда колебания; $\chi_z = \pi p / l$; ($p = 1, 2, \dots$); A и B — неизвестные постоянные коэффициенты; значения η_{nm} являются корнями уравнения:

$$J'_n(\eta R_1) Y'_n(\eta R_2) - J'_n(\eta R_2) Y'_n(\eta R_1) = 0, \quad (5.7.12)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, 3, \dots$ (m — номер корня уравнения).

Уравнение (5.7.12) получается из условия нетривиальности решений системы двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A и B , получаемой из граничных условий при $\rho = R_{1,2}$ после подстановки в них решения (5.7.11).

Собственные значения краевой задачи (5.7.10) определяются из соотношения:

$$k_{nmp}^2 = \eta_{nm}^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2.$$

В результате спектр собственных H -колебаний коаксиального резонатора образуют колебания H_{nmp} ($n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, 3, \dots$; $p = 1, 2, 3, \dots$).

Собственные частоты и длины волн H_{nmp} -колебаний коаксиального резонатора определяются формулами:

$$\omega_{nmp}^H = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{\eta_{nm}^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2},$$

$$\lambda_{nmp}^H = \frac{2\pi}{\sqrt{\eta_{nm}^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}},$$

по смыслу совпадающими с (5.7.9).

Отметим, что собственные частоты E_{nmp} и H_{nmp} колебаний коаксиального резонатора при одних и тех же целочисленных индексах не совпадают.

На рис. 5.9 приведена структура электромагнитного поля для E_{011} -колебания. Структуру H_{111} -колебания несложно нарисовать, используя рис. 4.16.

Перестройка круглых и коаксиальных резонаторов осуществляется изменением их продольного размера l , то есть перемещением контактного или бесконтактного плунжера.

5.8(*). Диэлектрические резонаторы

5.8.1. Классификация диэлектрических резонаторов СВЧ. Все используемые в настоящее время диэлектрические резонаторы СВЧ могут быть разделены на два класса — *открытые* и *металлодиэлектрические*.

Открытые диэлектрические резонаторы (ОДР). Принцип работы открытых диэлектрических резонаторов основан на объёмном резонансном эффекте внутри применяемых диэлектрических элементов. Физической основой работы данного класса резонаторов является явление полного внутреннего отражения на границе раздела диэлектрических сред. На настоящий момент подробно изучены два подкласса ОДР — резонаторы, использующие низшие типы электромагнитных колебаний, и резонаторы, работающие в режиме азимутальных колебаний высокого порядка.

В открытых диэлектрических резонаторах отсутствуют какие-либо экранирующие металлические элементы, и поэтому вокруг резонатора будет существовать небольшое электромагнитное поле. Недостатком ОДР является то, что на параметры резонатора оказывают влияние различные элементы, находящиеся вблизи ОДР.

Металлодиэлектрические резонаторы (МДР). Для экранировки электромагнитного поля открытого резонатора, устраняющей влияние внешних элементов СВЧ, вблизи ОДР располагают металлические поверхности. Такой класс диэлектрических резонаторов получил название металлодиэлектрических. В их состав обязательно входят два или более диэлектрических и металлических элементов. Самым простым примером МДР является круглый экранированный резонатор, частично заполненный диэлектрической средой. Если диэлектрический элемент МДР занимает всю внутреннюю полость резонансного объёма, такой резонатор называется *закрытым (ЗДР)*. Отметим тот факт, что при заполнении закрытого полого резонатора диэлектрической однородной средой его размеры при заданной частоте уменьшаются в $\sqrt{\epsilon}$ раз (ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость заполнителя) [Л.5.3].

К МДР относятся и *частично-экранированные диэлектрические резонаторы (ЧЭДР)*. В них диэлектрический элемент не полностью экранирован металлическими поверхностями. Принцип действия данного класса диэлектрических резонаторов основывается на явлении полного внутреннего отражения от границ раздела «диэлектрик–воздух» и «металл–диэлектрик».

К МДР следует отнести также *волноводно-диэлектрические резонаторы (ВДР)*. Их принципиальное отличие от обычных резонаторов СВЧ состоит в том, что резонансные явления в них обусловлены совокупностью волновых процессов в волноводе и диэлектрическом элементе. В качестве последнего обычно используется

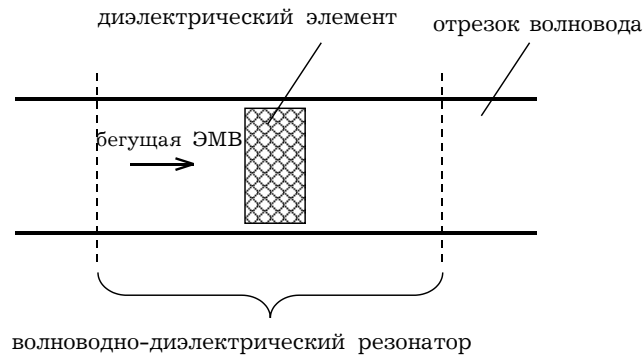


Рис. 5.10

слой диэлектрика с невысокой диэлектрической проницаемостью ($\epsilon < 20$), который сам по себе не проявляет резонансных свойств в том диапазоне частот, в котором работает ВДР, содержащий его. Схематично структура ВДР изображена на рис. 5.10. Влияние диэлектрического элемента сводится к деформации структуры электромагнитного поля, которая имеет место в волноводе при его отсутствии.

Существует два вида ВДР: резонаторы, использующие регулярные волноводы, работающие в одномодовом режиме распространения электромагнитной волны, и резонаторы на запердельных волноводах. В первом случае внесение в волновод диэлектрического элемента приводит к перераспределению электрического и магнитного полей основной волны; во втором случае — диэлектрическая вставка приводит к тому, что на некотором участке волновода нарушается запердельный режим работы и образуется локальный резонансный объём.

5.8.2. Диэлектрические резонаторы, работающие на низших типах колебаний (ДР НК). При создании таких резонаторов обычно используются диэлектрики с большим значением относительной диэлектрической проницаемости ($\epsilon \sim 40 \div 80$). При таких значениях ϵ электрические и магнитные поля колебаний в основном сосредоточены внутри диэлектрического элемента и во внешней области очень быстро затухают и становятся ничтожно малыми на расстоянии порядка длины волны. Поэтому резонанс возникает непосредственно внутри объёма диэлектрика. Благодаря большим значениям диэлектрической проницаемости размеры ДР НК значительно меньше, чем у полых закрытых резонаторов. Так, например, при $\epsilon = 80$ объём резонатора уменьшается почти в 500 раз.

Основные типы ДР НК представлены на рис. 5.11. ДР НК могут быть как открытыми (а-б), так и экранированными (в-з). В первом случае ДР НК состоит только из диэлектрического элемента, а во втором случае он помещается в пространство, ограниченное металлическими плоскостями или поверхностями. Самыми распространёнными типами ДР НК являются цилиндрические (рис. 5.11а) и прямоугольные (рис. 5.11б) резонаторы.

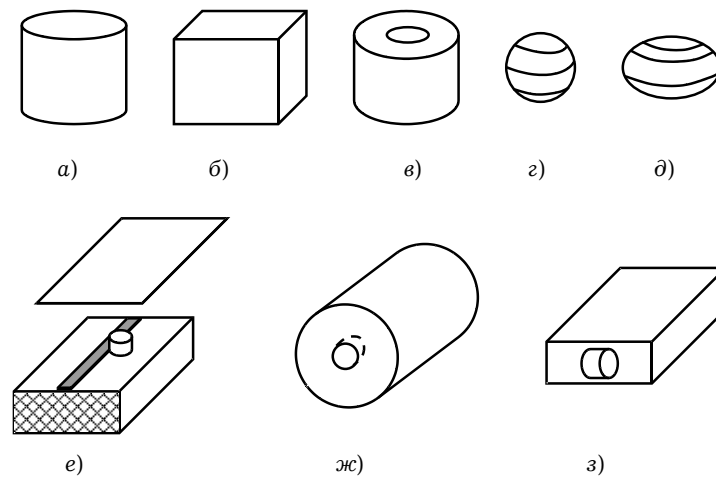


Рис. 5.11

К низшим типам колебаний цилиндрического открытого резонатора относятся колебания H_{01p} (индекс p — число полуволн, укладываемых на длине резонатора; первые два индекса указывают на число вариаций поля в азимутальном и радиальном направлениях). Силовые линии электрического и магнитного полей колебаний H_{01p} цилиндрического открытого резонатора приведены на рис. 5.12 (a — поперечное сечение; $б$ — продольное сечение), и по структуре они напоминают поле витка с током.

Цилиндрические и прямоугольные резонаторы имеют существенный недостаток — сгущённый спектр колебаний. Разрежённый спектр собственных колебаний имеют кольцевые открытые резонаторы (рис. 5.11в).

Открытые резонаторы в виде шара (рис. 5.11г) и эллипсоида (рис. 5.11д) являются сложными в изготовлении и представляют интерес только с теоретической точки зрения как колебательные системы, в которых возможно одновременное возбуждение двух или трёх колебаний различной поляризации с одинаковой собственной частотой.

Резонаторы с диэлектрическим элементом могут помещаться в экранированную микрополосковую линию (рис. 5.11е), круглый (рис. 5.11ж) или прямоугольный (рис. 5.11з) волноводы. Наличие металлических поверхностей приводит к смещению собственных частот диэлектрического резонатора. Смещение резонансной частоты происходит по-разному для H и E -колебаний. У H -колебаний с приближением резонатора к металлической поверхности их собственная частота увеличивается, у E -колебаний — уменьшается.

5.8.3. Диэлектрические резонаторы, работающие на азимутальных высших типах колебаний (ДР АК). Диэлектрические резонаторы, работающие на высших азимутальных типах колебаний создаются из материалов с достаточно малым значением относительной диэлектрической проницаемости ($\epsilon \sim 2 \div 20$). На настоящее время

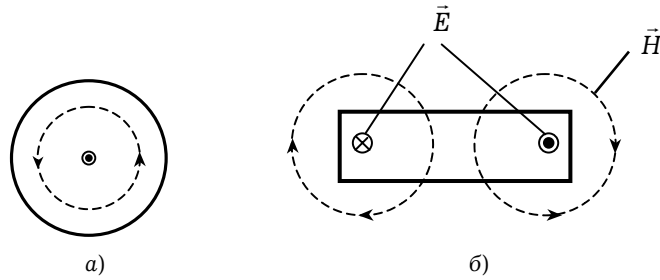


Рис. 5.12



Рис. 5.13

наиболее распространёнными являются ДР АК в виде кольца (рис. 5.13а) или сплошного диска (рис. 5.13б).

Рассмотрим особенности ДР АК. В резонаторах данного класса возможно существование значительного числа колебаний, различающихся между собой числом вариаций поля вдоль азимутального направления (то есть целочисленным индексом n). Известно, что излучение во внешнее пространство ДР АК будет минимальным, если в нём существует значительное число колебаний с различными вариациями вдоль азимутального угла. Слабое излучение колебаний с большими значениями азимутального числа n объясняется тем, что они формируются волнами, распространяющимися внутри диэлектрика и падающими на боковую криволинейную грань резонатора под очень малыми углами. В этом случае коэффициент отражения волн от границы раздела «диэлектрик-воздух» близок к единице (явление полного внутреннего отражения). В литературе часто связывают колебания ДР АК с так называемыми волнами «шепчущей галереи» [Л.5.3].

Распределение поля вдоль азимутального направления описывается соотношением:

$$\Phi_n(\varphi) = C \cos n\varphi + D \sin n\varphi, \quad (5.8.1)$$

где C , D — неопределённые постоянные, из которого следует, что любое поле с фиксированным распределением вдоль радиального направления может иметь как синусоидальное, так и косинусоидальное распределение по азимуту, в связи с чем можно говорить о двух вырожденных колебаниях. Более того, поскольку $\sin n\varphi = \cos(n\varphi - \pi/2)$, то одно поле переходит в другое при повороте резонатора вокруг оси на угол 90° . Так как в соотношении (5.8.1) присутствует линейная комби-

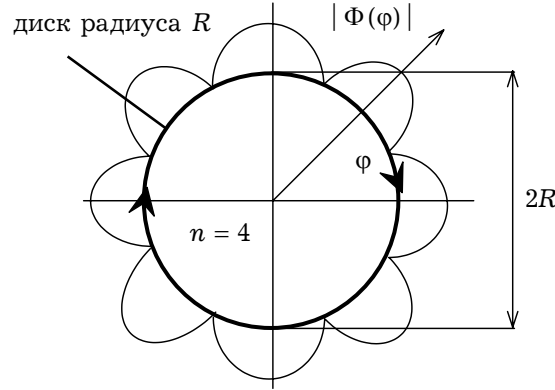


Рис. 5.14

нация гармонических функций с коэффициентами C и D , то вместо (5.8.1) можно записать:

$$\begin{aligned}\Phi_n(\varphi) &= C \cos n\varphi + D \sin n\varphi = \Phi_0 \cos(n\varphi - \psi), \\ \Phi_0 &= \sqrt{C^2 + D^2}, \quad \psi = \arctg(D/C).\end{aligned}\quad (5.8.2)$$

Из (5.8.2) следует, что распределение поля в азимутальном направлении является косинусоидальным.

Применим приведённые выше рассуждения к анализу ДР АК в виде сплошного диска (рис. 5.13б). Как уже отмечалось, каждому собственному колебанию с индексом n соответствуют два распределения поля в азимутальном направлении. Одно из которых является синусоидальным и описывается функцией

$$\Phi_n^{(s)}(\varphi) = \sin n\varphi, \quad (5.8.3)$$

а другое — косинусоидальным:

$$\Phi_n^{(c)}(\varphi) = \cos n\varphi. \quad (5.8.4)$$

Очевидно, что азимутальные распределения полей (5.8.3) и (5.8.4) сдвинуты друг относительно друга на четверть периода колебания. На рис. 5.14 приведено распределение $|\Phi_n(\varphi)|$ в полярной системе координат для азимутального колебания с $n = 4$. По характерному виду азимутальной зависимости поля ДР АК иногда называют *ДР с лепестковыми колебаниями*.

Диэлектрический диск является азимутально-симметричной конструкцией. Поэтому колебания с азимутальным индексом n , распределения полей которых по азимуту описываются функциями (5.8.3) и (5.8.4), обладают одинаковыми собственными частотами и добротностями:

$$\omega_{nmp}^s = \omega_{nmp}^c, \quad Q_{nmp}^s = Q_{nmp}^c.$$

При возбуждении ДР АК в виде диска через открытый конец волновода или коаксиальный зонд, поднесённый к диску вдоль его геометрической оси, в резонаторе возбуждается только одно распределение $\Phi_c(\varphi)$ или $\Phi_s(\varphi)$ при фиксированном

азимутальном индексе n . Если же возбуждение ДР АК осуществляется через распределённую связь с диэлектрическим волноводом, обладающим высокой направленностью, в этом случае возникают оба вырожденных колебания, сдвинутые по фазе на 90° , в результате чего в сумме образуется волна

$$\Phi_{\text{волн}}(\varphi) = \cos n\varphi \pm i \sin n\varphi = e^{\pm i n\varphi}, \quad (5.8.5)$$

бегущая вокруг диска вдоль или против часовой стрелки. Многократное наложение таких волн создаёт интерференционный эффект, в результате которого на резонансной частоте $\omega = \omega_{nmp}$, $n = N$ ($N \in \mathbb{Z}$) суммарная амплитуда резко возрастает. Такой резонансный режим получил название *резонанса в режиме бегущей волны*.

В результате можно сделать следующие выводы относительно распределения полей в ДР АК:

1. Азимутальные распределения полей колебаний ДР АК имеют характер стоячих волн.
2. Распределение поля вдоль оси резонатора OZ имеет такой же характер, как у поверхностной волны в плоском диэлектрическом волноводе.
3. Радиальные распределения полей колебаний описываются функциями Бесселя во внутренней области и функциями Ханкеля 2-го рода во внешней области.

5.8.4. Волноводно-диэлектрические резонаторы (ВДР). К данному классу диэлектрических резонаторов относятся колебательные системы, одновременно содержащие волноводные участки с металлическими поверхностями и диэлектрические элементы с $\varepsilon \sim 2 \div 20$. При этом диэлектрический элемент представляет собой вставку внутри закрытого волновода, которая может занимать как всё его поперечное сечение целиком, так и некоторую его часть.

Существует два типа ВДР: с распространяющейся электромагнитной волной и на основе заперённого волновода. На рис. 5.15 показаны ВДР на основе круглого (а) и прямоугольного (б) волноводов с распространяющейся волной основного типа. На рис. 5.15 цифрой 1 обозначен волновод, 2 — диэлектрическая вставка. При полном заполнении поперечного сечения волновода трудно добиться высокой добротности колебательной системы, так как существуют значительные потери в стенках волновода. Поэтому предпочтительнее использование волноводов с частичным диэлектрическим заполнением поперечного сечения (рис. 5.16).

Остановимся на особенностях ВДР на основе прямоугольного волновода с диэлектрической вставкой, полностью заполняющей его по высоте и частично по ширине (рис. 5.16б). Низшими типами колебаний в такой структуре являются H_{10p} , H_{20p} (p — индекс, показывающий число полуволн, укладывающихся на длине диэлектрического элемента).

Колебания H_{10p} характеризуются невысокой добротностью, что связано с потерями в металлических стенках волновода, вызванных тем, что резонанс обусловлен частичным отражением электромагнитных волн от границ раздела «диэлектрик–воздух» и полным отражением от проводящих поверхностей. Более добротными оказываются колебания H_{20p} , возбуждаемые при распространении

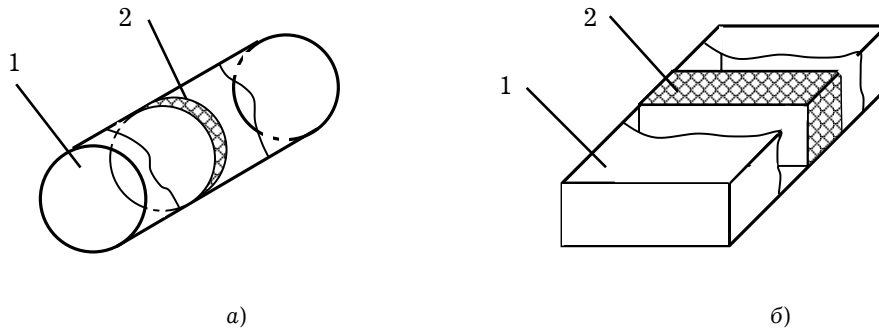


Рис. 5.15

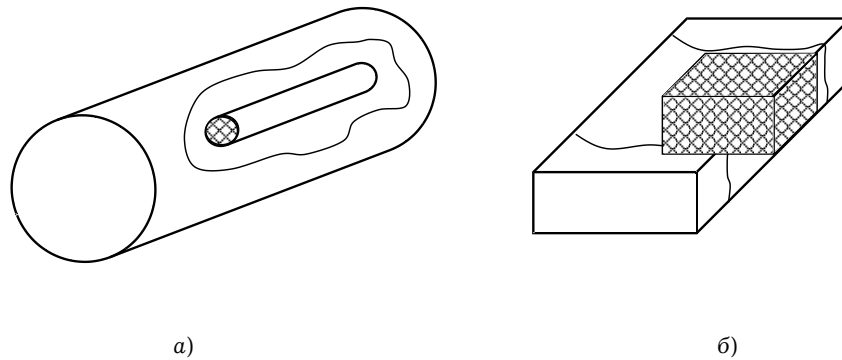


Рис. 5.16

волн H_{10} и H_{20} на участке волновода с диэлектрической вставкой. В этом случае резонанс обусловлен отражением волны H_{20} от запердельных для неё, прилегающих к диэлектрической вставке, участков волновода (в котором возможно распространение только волны H_{10}). Особенность возникновения колебаний H_{20p} в том, что их возбуждение возможно только в случае, когда диэлектрический элемент располагается несимметрично относительно центра волновода (рис. 5.16б).

Резонатор на основе круглого волновода с цилиндрической диэлектрической вставкой вдоль его оси показан на рис. 5.16а. Такой резонатор возбуждается волной E_{01} круглого волновода. При определённом выборе радиуса диэлектрической вставки продольная составляющая вектора напряжённости электрического поля обращается в нуль на границе «диэлектрик-воздух», и структура поля вне диэлектрического цилиндра становится похожей на структуру поля T -волны в коаксиальной линии передачи. В этом случае потери становятся минимальными и добротность резонатора резко увеличивается.

Другим типом ВДР является резонатор, создаваемый на основе запердельного волновода путём помещения внутрь него диэлектрической вставки. Параметры диэлектрической вставки выбираются таким образом, чтобы внутри неё в

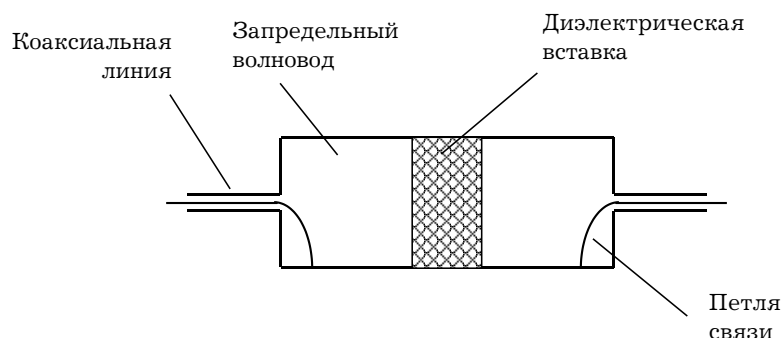


Рис. 5.17

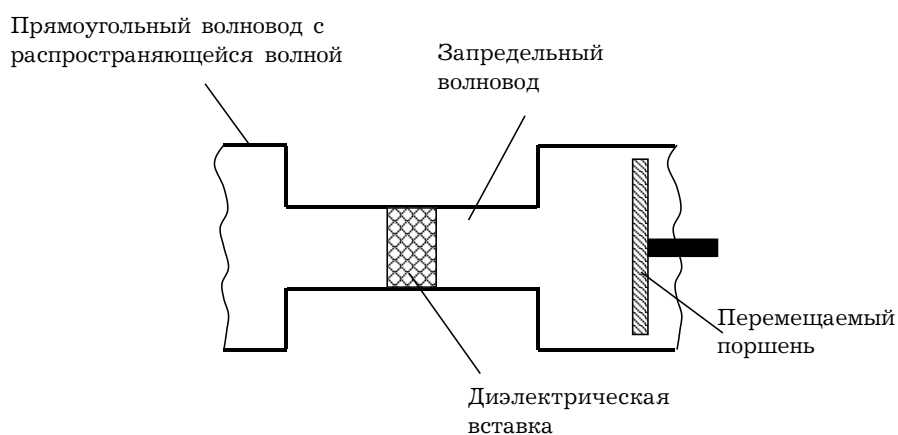


Рис. 5.18

волноводе могла распространяться волна низшего типа. Эта волна будет отражаться от границ «диэлектрик-запердельный волновод», так как волновод для неё является запердельным. При наложении двух волн в диэлектрической вставке, отражённых от противоположных участков запердельного волновода, будет образовываться стоячая волна.

ВДР на основе запердельного волновода обычно представляет собой отрезок прямоугольного запердельного волновода с диэлектрической неоднородностью в виде параллелепипеда или цилиндра. Возбуждение указанных диэлектрических структур осуществляется через отрезки запердельных волноводов, подключенных к коаксиальным линиям (рис. 5.17).

На практике часто используются ВДР, в которых возможна механическая перестройка резонансных частот. ВДР на круглом волноводе с распространяющейся волной (рис. 5.16а) позволяет проводить такую перестройку частоты колебаний путём изменения глубины погружения диэлектрического стержня в цилиндрический резонатор на отрезке круглого волновода. При увеличении зазора между торцевой поверхностью диэлектрического стержня и стенкой резонатора резонансная частота увеличивается.

Перестройка частоты колебаний может осуществляться и в ВДР на основе запердельного волновода (рис. 5.18). Для этого с одной из сторон запердельного волновода подключается короткозамыкающий плунжер, перемещение которого приводит к изменению резонансной частоты на несколько процентов.

В современных ВДР перестройка частоты в более широком диапазоне достигается за счёт замены диэлектрических вставок на ферритовые. Такие резонаторы получили название *волноводно-ферритовых резонаторов*.

Раздел написан на основе [Л.5.3].

Глава

6

Квазиоптические линии и резонаторы

6.1(*). Открытая линзовая линия (математический аппарат)	271
6.2(*). Собственные волны линзовой линии	275
6.3(*). Зеркальная линия	277
6.4(*). Открытые резонаторы. Основные свойства	280
6.5(*). Элементы теории открытых резонаторов с вогнутыми зеркалами	282
6.6(*). Открытый резонатор с цилиндрическими зеркалами эллиптического профиля	284
6.7(*). Открытые резонаторы с двугранными отражателями	288

) Символом «» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 6(*). Квазиоптические линии и резонаторы

На волнах короче одного-двух миллиметров рассмотренные в главе 4 направляющие структуры с металлическим экраном становятся практически неприменимыми. Омические потери на этих частотах достигают столь больших значений, что волна почти полностью затухает на расстоянии нескольких десятков сантиметров. Кроме того, само изготовление волноводов и волноводных узлов становится технологически исключительно сложным в связи с тем, что обеспечение одномодового режима требует использования волноводов с размерами поперечного сечения порядка длины волны, а резонаторов с такими размерами, при которых добротность оказывается столь малой, что они (резонаторы), практически теряя свои резонансные свойства, становятся трудно изготовимыми. Указанные причины приводят к необходимости использования в миллиметровом и субмиллиметровом (квазиоптическом) диапазонах функциональных узлов принципиально нового конструктивного исполнения. В частности, в качестве направляющих структур используются линзовые и зеркальные линии, в качестве колебательных — открытые резонаторы различных модификаций [Л6.1].

Линзовые линии состоят из периодической последовательности расположенных вдоль общей оси на больших расстояниях друг от друга длиннофокусных диэлектрических линз (рис. 6.1). Каждая линза фокусирует падающий на нее пучок электромагнитных волн и направляет его к следующей линзе. При удалении от линзы сфокусированный пучок сначала сужается, а затем расширяется и уже расходящийся падает на следующую линзу, которая фокусирует его. Таким образом, при переходе от одной линзы к другой картина повторяется.

Потери энергии в линзовой линии объясняются двумя факторами. Во-первых, часть энергии излучается в открытое пространство за счет неидеальности фокусировки, отражения на неоднородностях материала линз, краевых эффектов и т. д. (радиационные потери), во-вторых, имеют место тепловые потери из-за того, что тангенс угла диэлектрических потерь материала линз отличен от нуля.

Зеркальные линии образуются эквидистантно расположенными зеркалами, последовательно отражающими и фокусирующими пучки электромагнитных волн (рис. 6.2). Каждое зеркало является фазовым корректором, исправляющим фронт падающей на него волны. Последовательная корректировка зеркалами пучка электромагнитных волн аналогична действию диэлектрических фазовых корректоров линзовой линии. Неслучайно математическое описание зеркальных линий совпадает с математическим описанием линзовых линий [Л6.2].

Открытые резонаторы, используемые в квазиоптике в качестве колебательных систем, образуются зеркалами, расположенными, как правило, строго симметрично друг относительно друга (рис. 6.3). Зеркала различных профилей представляют собой хорошо отполированные металлические высокопроводящие поверхности, фокусирующие при отражении от них пучки электромагнитных волн. Встречные электромагнитные волны, отраженные от зеркал, образуют в пространстве между зеркалами поле стоячей волны.

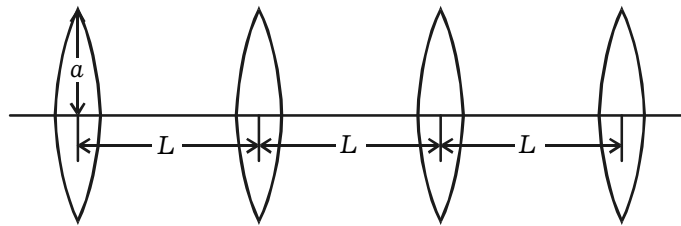


Рис. 6.1

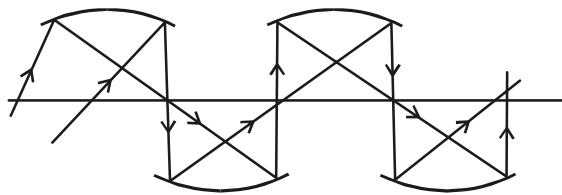


Рис. 6.2

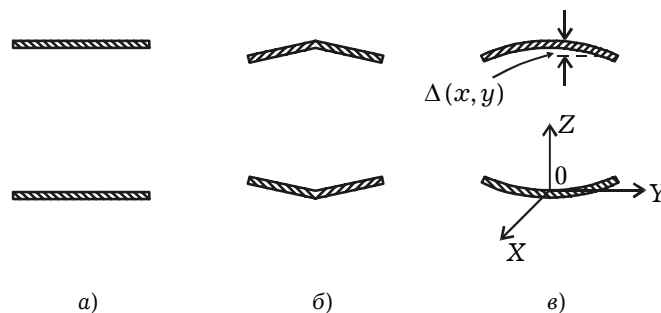


Рис. 6.3

6.1(*). Открытая линзовая линия (математический аппарат)

При рассмотрении любых квазиоптических систем предполагается выполнение двух условий:

$$k_0 a \gg 1, L/a \gg 1, \quad (6.1.1)$$

где a — линейный размер фазового корректора (в случае линзовой линии — радиус линзы), L — расстояние между фазовыми корректорами (расстояние между линзами), $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ — постоянная распространения плоской волны в свободном пространстве.

В линзовой линии, несмотря на ее периодичность, в виду того, что $L \gg \lambda$ и отражение от линз мало, резонансные явления можно не учитывать. Толщина линз является функцией поперечных координат, которая, вообще говоря, может быть любой, но обеспечивающей фокусировку лучей.

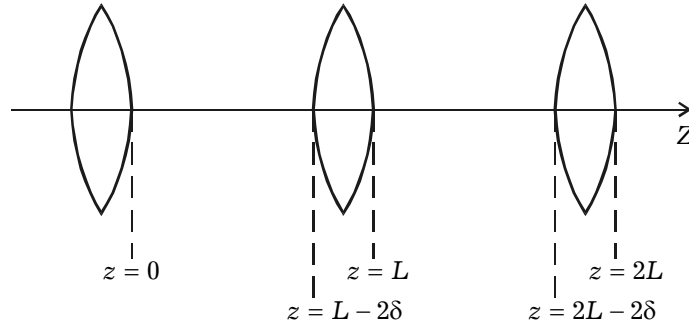


Рис. 6.4

Рассмотрим линзовую линию, состоящую из периодической последовательности линз толщиной 2δ , расположенных на расстоянии L друг от друга, рис. 6.4. Отождествляя каждый луч линзовой линии с плоской электромагнитной волной, полагаем, что любая компонента последней удовлетворяет уравнению Гельмгольца [Л6.2]:

$$\Delta U + k_0^2 U = 0, \quad (6.1.2)$$

где под U понимаем компоненты полей плоских волн, образующих собственные волны линзовой линии.

Граничные условия на поверхностях линз записываем в виде:

$$U(x, y, nL) = U(x, y, nL - 2\delta) \exp\{-i\psi(x, y)\}, \quad (6.1.3)$$

$$U(x, y, L) = \chi U(x, y, 0), \quad (6.1.4)$$

где n — номер линзы, $\psi(x, y)$ — набег фазы в толщине линзы, χ — так называемый *радиационный множитель*, характеризующий потери на излучение в пространстве между двумя соседними линзами.

Обозначив оператор Гельмгольца как $L = \Delta + k_0^2$, запишем формулу Грина:

$$\int_V (ULg - gLU) dV = \oint_S \left(U \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \right) d\vec{S}, \quad (6.1.5)$$

где V — пространство справа от плоскости $z = 0$ (рис. 6.5); S включает в себя плоскость $z = 0$ и поверхность, удаленную в бесконечность, то есть S — поверхность, ограничивающая объем V ; \vec{n} — нормаль к этой поверхности; U — решение уравнения (6.1.2); $g(\vec{r}, \vec{r}_0)$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta g + k_0^2 g = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (6.1.6)$$

и обращающаяся в нуль в плоскости $z = 0$; \vec{r}_0 — произвольная точка внутри V .

Поскольку интегрирование в левой части (6.1.5) производится по всем точкам \vec{r}_0 , с учетом (6.1.2) и (6.1.6) из уравнения (6.1.5) получаем:

$$U(\vec{r}) = \oint_S \left(U \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \right) d\vec{S}. \quad (6.1.7)$$

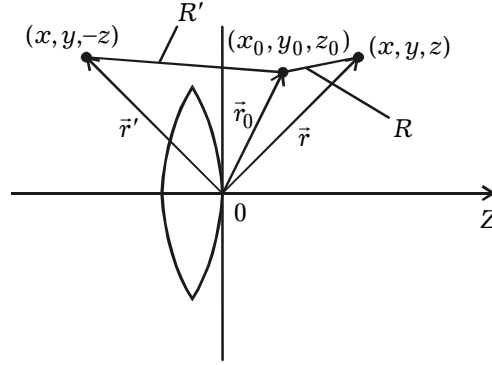


Рис. 6.5

С учетом того, что $g(z_0 = 0) = 0$ и $U \sim 1/r$, $\partial g / \partial n \sim 1/r^2$ при $r \rightarrow \infty$, формулу (6.1.7) переписываем в виде

$$U(\vec{r}) = \int_{S(z_0=0)} U(x_0, y_0, 0) \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} d\vec{S}. \quad (6.1.8)$$

В этом случае радиус-вектор \vec{r}_0 лежит в плоскости $z = 0$ (рис. 6.6).

Функция Грина, удовлетворяющая уравнению (6.1.6) и нулевому граничному условию при $z_0 = 0$, имеет вид

$$g(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\exp\{-ik_0 R\}}{R} - \frac{\exp\{-ik_0 R'\}}{R'} \right), \quad (6.1.9)$$

$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$, $R' = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (-z)^2}$, (x, y, z) — координаты произвольной точки в пространстве справа от плоскости $z = 0$; $(x_0, y_0, 0)$ — координаты произвольной точки в плоскости $z = 0$ (точки интегрирования) (рис. 6.5); радиус-вектор \vec{R}' является зеркальным отображением радиус-вектора \vec{R} относительно плоскости $z = 0$.

Дифференцирование функции (6.1.9) по нормали к плоскости $z_0 = 0$ приводит к выражению

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial z} = & -\frac{ik}{4\pi} \left(\frac{z}{R^2} \exp\{-ik_0 R\} + \frac{z}{RR'} \exp\{-ik_0 R'\} \right) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \left[\exp\{-ik_0 R\} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) - \exp\{-ik_0 R'\} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R'} \right) \right], \end{aligned}$$

в котором вторым слагаемым, пропорциональным $1/r^2$, в точках, достаточно удаленных от плоскости $z = 0$, можно пренебречь. В этом случае с учетом того, что $R' = R$, выражение (6.1.8) переписываем в виде

$$U(x, y, z) = \frac{ik_0}{2\pi} \int_{S(z_0=0)} U(x_0, y_0, z_0) \frac{z}{R^2} \exp\{-ik_0 R\} dx_0 dy_0. \quad (6.1.10)$$

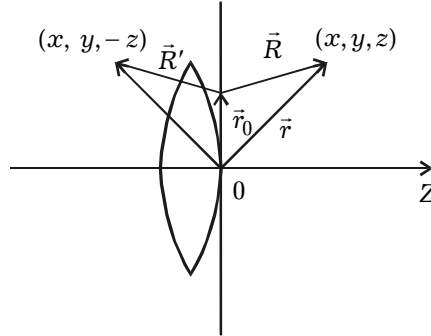


Рис. 6.6

Для точек, в которых $z \gg x, x_0, y, y_0$, можно записать

$$R \approx z \left[1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z^2} \right].$$

Тогда из (6.1.10) получаем значение поля в точках, удаленных от плоскости первой линзы $z = 0$ и расположенных вблизи оси направляющей системы, то есть соответствующих области концентрации поля основных мод линзовой линии:

$$U(x, y, z) = \frac{ik_0}{2\pi z} \exp\{-ik_0 z\} \times \int_{S(z_0=0)} U(x_0, y_0, 0) \exp\left\{-\frac{ik_0}{2z} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0. \quad (6.1.11)$$

Используя граничное условие (6.1.3), из (6.1.11) получаем выражение для поля в плоскости второй линзы $z = L$:

$$U(x, y, L) = \frac{ik_0}{2\pi L} \exp\{-i[k_0 L + \psi(x, y)]\} \times \int_{S(z_0=0)} U(x_0, y_0, 0) \exp\left\{-\frac{ik_0}{2L} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0. \quad (6.1.12)$$

Подставляя выражение (6.1.12) в граничное условие (6.1.4), получаем интегральное уравнение относительно поля в плоскости первой линзы:

$$\chi U(x, y, 0) = \frac{ik_0}{2\pi L} \exp\{-i[k_0 L + \psi(x, y)]\} \times \int_{S(z_0=0)} U(x_0, y_0, 0) \exp\left\{-\frac{ik_0}{2L} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0. \quad (6.1.13)$$

Уравнение (6.1.13) — однородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода [Л6.3–Л6.5].

При выводе уравнения (6.1.13) было использовано приближенное выражение (6.1.11) для поля в точках, достаточно удаленных от первой линзы. Однако, в силу второго условия (6.1.1) оно с высокой точностью определяет поле в плоскости

второй линзы, что позволяет считать вывод уравнения (6.1.13) строгим. Из этого уравнения находится функция распределения поля $U(x, y, 0)$ в плоскости первой линзы. Подстановка этой функции в точную формулу (6.1.8) дает строгое выражение для определения поля собственной волны линзовой линии в произвольной точке.

Решение уравнения (6.1.13) зависит от вида функции $\psi(x, y)$, описывающей фазовую коррекцию, осуществляемую линзой. Вид этой функции определяется профилем линзы. Аналитическую запись решения уравнения (6.1.13) удастся получить лишь в отдельных частных случаях. Однако численное решение этого интегрального уравнения в принципе возможно при любом профиле линз и корректно описывает поля аксиальных мод направляющей структуры.

6.2(*). Собственные волны линзовой линии

Решения уравнения (6.1.13) U_n (собственные функции) и соответствующие им собственные значения χ_n описывают поля собственных волн линзовой линии. Если фокусирующая сила линз достаточно велика, то ширина пучка лучей, образующих направляемое электромагнитное поле, оказывается малой (много меньше размера линз). В этом случае в (6.1.8) и (6.1.13) интегрирование можно проводить по всей плоскости $z = 0$.

Рассмотрим наиболее простой частный случай: линзовая линия составлена из бесконечных двумерных квадратичных фазовых корректоров, у которых

$$\psi(x) = C - \alpha \frac{k_0}{L} x^2. \quad (6.2.1)$$

Функция $\psi(x)$ — набег фазы при прохождении линзы. Полагается, что поле в любой точке за линзой зависит только от поля в точке плоскости перед линзой, имеющей те же поперечные координаты, то есть обе эти точки лежат на одной прямой, параллельной оптической оси системы. В этом случае функция ψ определяет оптическую длину пути между плоскостями $z = L - 2\delta$ и $z = L$, то есть

$$\psi(x) = \omega \sqrt{\mu_0} \int_{L-2\delta}^L \sqrt{\varepsilon(x, z)} dz.$$

Параметр α в (6.2.1) характеризует фокусирующие свойства линзовой линии и определяется как

$$\alpha = \frac{L}{2F}, \quad (6.2.2)$$

где F — фокусное расстояние линз.

В двумерном случае уравнение (6.1.13), очевидно, должно иметь решения $U_n \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Убывающие решения существуют не при всех значениях α , определяемых формулой (6.2.2), а лишь при

$$0 < \alpha < 2. \quad (6.2.3)$$

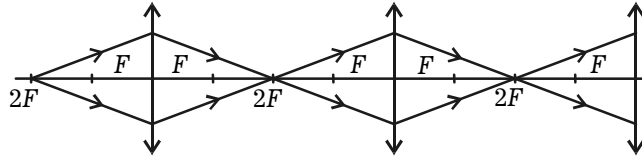


Рис. 6.7

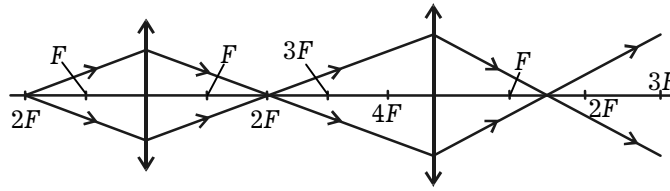


Рис. 6.8

Условие (6.2.3) легко объясняется с позиции геометрической оптики. Как следует из (6.2.2), при $\alpha = 2$ линия еще формирует устойчивый пучок электромагнитных волн (рис. 6.7), но это предельное расстояние между линзами. При дальнейшем увеличении L пучок при переходе от одной линзы к другой начинает расфокусироваться (рис. 6.8) становится неустойчивым, поле уже не убывает при $x \rightarrow \infty$, возникает излучение из направляющей структуры. Другой предельный случай $\alpha = 0$ соответствует плоским линзам, не выполняющим фазовую коррекцию и не осуществляющим фокусировку лучей. Ширина пучка электромагнитных волн в такой линии не может быть меньше размера отверстия в диафрагме, через которое возбуждается направляющая структура. Поле не концентрируется вблизи оси линии. Отрицательные значения α соответствуют рассеивающим линзам, которые не могут образовывать направляющую структуру.

В случае двумерных фазовых корректоров, описываемых функцией (6.2.1), при $\alpha = 1$ (линия с конфокальными линзами) удастся [Л6.2] получить аналитическое решение уравнения (6.1.13). Оно имеет вид

$$U_n(x) = \mathcal{H}_n\left(\sqrt{\frac{k_0}{L}}x\right) \exp\left\{-\frac{k_0 x^2}{2L}\right\} \exp\left\{-\frac{i}{2}\left(C - \frac{k_0}{L}x^2\right)\right\}, \quad (6.2.4)$$

где

$$\mathcal{H}_n\left(\sqrt{\frac{k_0}{L}}x\right) = (-1)^n \exp\left\{\frac{k_0}{L}x^2\right\} \frac{d^n}{dx^n} \left(\exp\left\{-\frac{k_0}{L}x^2\right\} \right) -$$

полином Эрмита [Л6.7, Л6.8].

Из (6.2.4) видно, что поля собственных волн линзовой линии убывают в поперечном направлении: $U_n \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, причем тем быстрее, чем меньше номер n . На рис. 6.9 качественно изображены зависимости полей первых 3-х собственных волн линзовой линии от координаты x . Из рисунка видно, что нулевая собственная

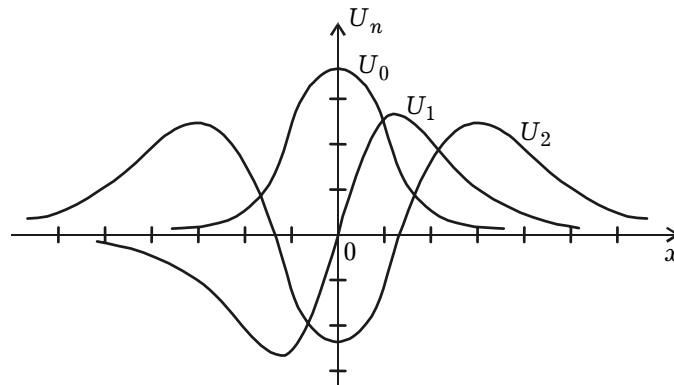


Рис. 6.9

функция даёт гауссово распределение поля по координате x . Осциллирующий множитель в (6.2.4) вносит некоторую поправку к гауссову распределению, увеличивая крутизну спада поля при удалении от оптической оси системы.

Конфокальные линзовые линии получили наиболее широкое распространение, так как они обеспечивают максимальную концентрацию поля — минимальную ширину пучков лучей, образующих поля собственных волн. Ширина пучка в конфокальной линзовой линии находится в пределах:

$$h \in \left[\sqrt{\frac{L}{2k_0}}, \sqrt{\frac{L}{k_0}} \right].$$

Ширина пучка в конфокальной линзовой линии зависит от номера собственной волны (каждой волне ставится в соответствие свой пучок). Чем выше номер n , тем шире пучок, тем больше радиационные потери. Потери определяются при этом не абсолютным значением ширины пучка, а величиной $q = h/a$ (a — радиус линзы).

6.3(*). Зеркальная линия

Рассмотрим зеркальную линию, образованную бесконечными цилиндрическими зеркалами, расположенными на одинаковых расстояниях L друг от друга (рис. 6.10). Поперечную координату произвольной точки на первом зеркале обозначим как x_0 . Функция от этой координаты:

$$\Delta(x_0) = C - \frac{x_0^2}{2r(x_0)}, \quad (6.3.1)$$

где $r(x_0)$ — радиус кривизны зеркала в точке x_0 , C — максимальное значение его прогиба, описывает профиль зеркала. Тогда координата z_0 произвольной точки на первом зеркале определится как

$$z_0 = \Delta(x_0).$$

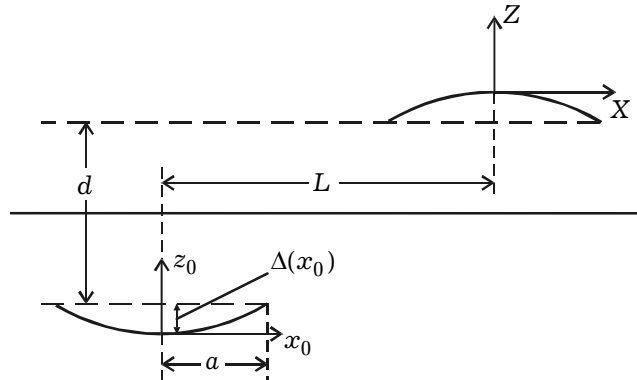


Рис. 6.10

Координаты произвольной точки пространства, в частности, на втором зеркале обозначим как x, z . Решаем двумерную задачу: считаем поле независимым от координаты y . Предполагаем, что на каждое зеркало падает пучок лучей под углом скольжения θ , то есть при расчете фазового набегу внутри профиля зеркала так же, как и при прохождении лучей внутри линз, расхождение лучей в пучке не учитываем, полагая лучи параллельными. Разность хода лучей 1 и 2, приходящих в раскрыв зеркала и отраженных от него, записываем как

$$\Delta S = S_2 - S_1 \quad (6.3.2)$$

и вычисляем по аналогии с плоско-параллельным диэлектрическим слоем, у которого в данном случае показатель преломления $n = 1$ (рис 6.11). В (6.3.2) S_1 — длина отрезка BC, S_2 — суммарная длина отрезков АО и ОС (рис 6.11). Согласно рисунку имеем

$$S_1 = 2\Delta \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}, \quad S_2 = \frac{2\Delta}{\sin \theta}.$$

После подстановки этих выражений в (6.3.2) получаем

$$\Delta S = 2\Delta \sin \theta.$$

Тогда набег фазы внутри профиля зеркала при произвольном значении координаты x_0 (первое зеркало) вычислится как

$$\psi(x_0) = 2k_0 \Delta(x_0) \sin \theta, \quad (6.3.3)$$

где $k_0 = \omega / c$, $\Delta(x_0)$ определяется соотношением (6.3.1).

Поле волны, падающей на второе зеркало, через поле в апертуре первого зеркала вычисляется по формуле (6.1.8), в которой функция Грина должна обращаться в нуль на первом зеркале. В качестве функции $U(x_0, z_0)$ в указанной формуле подставляется поле волны, отраженной от первого зеркала.

Интеграл (6.1.8) дает поле волны, падающей на второе зеркало, то есть поле, которое было бы в раскрыве этого зеркала в его отсутствии.

Уравнение относительно полей собственных волн зеркальной линии составляется по той же схеме, что и в случае линзовой линии. Однако расстояние между

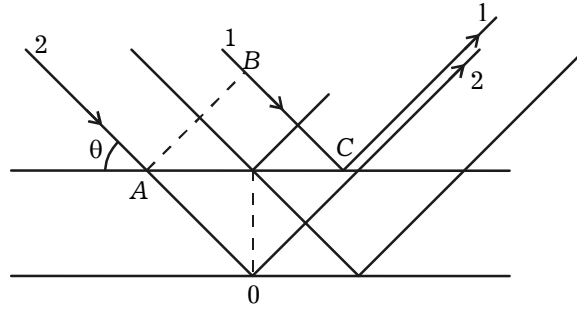


Рис. 6.11

точками в апертурах первой и второй линз при этом необходимо вычислять по формуле

$$r = \sqrt{(x_0 - x + L)^2 + (z_0 - z)^2}, \quad (6.3.4)$$

где в данном случае (x, z) — координаты произвольной точки на втором зеркале.

Поскольку (6.3.4) подставляется в качестве R в функцию Грина (6.1.9), необходимо записать величину

$$\frac{dr}{dn} = -\frac{dr}{dz} \approx \frac{d}{r_0},$$

где d — расстояние между плоскостями, в которых расположены зеркала (рис. 6.10), r_0 — расстояние между центральными точками (в плоскости $y = \text{const}$) зеркал:

$$r_0 = \sqrt{L^2 + d^2}.$$

С учетом повторяемости полей, отраженных от двух последовательно расположенных зеркал, и радиационных потерь в пространстве между этими зеркалами, то есть фактически с учетом граничных условий (6.1.3), (6.1.4) получаем интегральное уравнение [Л6.2] относительно поля, отраженного от первого зеркала:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{ik_0}{2\pi r_0}} \exp\{-i[k_0 r_0 + \psi(x)]\} \sin \theta \times \\ & \times \int_{-a}^a U(x_0) \exp\left\{\frac{-ik_0}{2r_0}(x_0 - x)^2 \sin^2 \theta - ik_0(x - x_0) \cos \theta\right\} dx_0 = \chi U(x). \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

При этом набег фазы $\psi(x)$, возникающий при распространении поля от поверхности зеркала до плоскости его раскрытия, аналогичен набегу фазы в толще линзы.

Определив из (6.3.5) поле, отраженное от первого зеркала, по формуле (6.1.8) можем найти поле в произвольной точке зеркальной линии. Присутствие линейного члена в экспоненте ядра уравнения (6.3.5) говорит о том, что функция $U(x)$ не является медленной функцией, скорость изменения которой, как в линзовой линии, определяется линейным размером a фазового корректора и величиной $\sqrt{r_0/k_0}$. Вдоль направления распространения (в данном случае вдоль оси x) она изменяется быстро с периодом $2\pi/k_0$. В плоскости апертуры первого зеркала это быстрое изменение описывается множителем $\exp\{-ik_0 x_0 \cos \theta\}$.

Сделав замену переменных $\bar{x}_0 = x_0 \sin \theta$; $\bar{x} = x \sin \theta$, можем уравнение (6.3.5) привести к уравнению относительно новой функции вида $\bar{U}(x) = U(\bar{x}) \exp \{i k_0 \bar{x}_0 \cos \theta\}$, полностью совпадающему с уравнением линзовой линии (двумерной) с линейным размером корректоров $\bar{a} = a \sin \theta$. Этот результат означает, что независимо от того, производится ли фазовая коррекция пучка электромагнитных волн в плоскости, перпендикулярной оптической оси системы, как в линзовой линии, или в плоскости, ориентированной вдоль общего направления распространения, как в зеркальной линии, форма распределения поля собственной волны определяется шириной электромагнитного пучка $2\bar{a}$, расстоянием между фазовыми корректорами, функцией $\psi(\bar{x})$ и описывается функциями (6.2.4), как в двумерной линзовой линии. Распределение амплитуды поля на поверхности зеркала при этом полностью совпадает с распределением амплитуды поля в средней плоскости линзы.

6.4(*). Открытые резонаторы. Основные свойства

Объемные резонаторы, используемые в качестве колебательных систем сантиметрового диапазона, при переходе в миллиметровый и тем более в субмиллиметровый диапазоны оказываются неприменимыми. Дело в том, что спектр резонансных частот замкнутой (трехмерной) колебательной системы описывается формулой Рэлея-Джинса, согласно которой число колебаний ΔN в интервале частот $\Delta \omega$ определяется как

$$\Delta N = \frac{V}{2\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta \omega, \quad (6.4.1)$$

где V — объем резонатора, c — скорость света.

Из формулы (6.4.1) видно, что при увеличении частоты происходит сгущение спектра колебательной системы, что приводит к потере ее резонансных свойств. Единственный путь к сохранению последних — уменьшение объема V колебательной системы. Однако, поскольку с ростом частоты сгущение спектра колебаний происходит быстро, указанная мера оказывается малоэффективной, а порой и неприемлемой по двум причинам. Первая заключается в том, что с уменьшением объема падает добротность колебательной системы, вторая — резонаторы становятся сверхминиатюрными, технологически трудноизготавливаемыми и недопускающими дополнительных конструктивных включений, связанных с их (резонаторов) функциональным назначением.

Указанные соображения заставили искать колебательные системы, не подчиняющиеся формуле Рэлея-Джинса. Отправным моментом явилась математическая модель одномерной колебательной системы, для которой формула, аналогичная (6.4.1), выглядит следующим образом:

$$\Delta N = \frac{2L}{\pi c} \Delta \omega, \quad (6.4.2)$$

где L — расстояние между двумя бесконечными параллельными идеально проводящими плоскостями.

Как видно из формулы (6.4.2), число колебаний одномерной колебательной системы в интервале $\Delta\omega$ не зависит от частоты. Приближенным эквивалентом одномерной колебательной системы является резонатор, образованный двумя плоскими, параллельными зеркалами (рис 6.3а). В таком резонаторе сгущение спектра с ростом частоты не происходит. Поле в нем, согласно концепции Бриллюэна, можно представить как поле двух параллельных пучков лучей преобразующихся при отражении от зеркал друг в друга. Каждое колебание в таком резонаторе образуется своими пучками лучей (плоскими волнами), падающих под фиксированным (для данного колебания) углом на зеркала колебательной системы. Чем меньше угол падения, тем добротнее колебание, тем меньше его радиационные потери. В результате за счет увеличения радиационных потерь колебаний с высокими индексами происходит их дискриминация, что приводит к разрежению спектра резонансных частот колебательной системы.

Резонатор с вогнутыми зеркалами (рис. 6.3в), можно представить как часть объемного цилиндрического резонатора, каждое колебание которого можно разложить на плоские волны (волны Бриллюэна) и представить в виде наложения пучков лучей. Пучки, соответствующие различным типам колебаний, падают на зеркала под различными углами, поэтому у них, как правило, разные радиационные потери: чем меньше угол падения, тем меньше излучение. Разрежение спектра достигается тем, что для большинства колебаний угол падения недостаточно мал, и они излучаются, в то время, как колебания с малым углом падения претерпевают большое количество переотражений и имеют высокую добротность. Таким образом, благодаря излучению спектр собственных колебаний оказывается разреженным.

Не во всех, однако, открытых системах (в отличие от объемных резонаторов) могут существовать слабозатухающие колебания. Если, например, плоские зеркала, образующие резонатор, несколько не параллельны, то потери на излучение оказываются настолько большими, что все резонансные свойства теряются. Поэтому открытыми резонаторами следует называть лишь такие системы, которые имеют достаточно добротные собственные колебания, сопровождающиеся частичным излучением в свободное пространство.

Добротные колебания в открытых резонаторах могут быть реализованы благодаря одному из трех физических явлений [Л6.1]:

1. Отражение от краев зеркал, которое наиболее существенно в открытых резонаторах, образованными плоскими параллельными зеркалами, расстояние между которыми велико по сравнению с длиной волны. Колебание формируется за счет отражений от краев зеркал направляемой волны.

2. Образование каустических поверхностей, обуславливающих запирание внутри резонатора, образованного вогнутыми зеркалами, части колебаний, каустические поверхности которых наиболее близки к оси резонатора, и излучение всех прочих колебаний.

3. Полное внутреннее отражение, проявляющееся в колебательных системах, где оптически более плотная среда окружена средой менее плотной. Это так назы-

ваемые открытые диэлектрические резонаторы, получившие широкое распространение не только в квазиоптическом и оптическом диапазонах, но и на СВЧ.

Во многих открытых колебательных системах добротные колебания образуются сразу за счет двух или даже всех трех перечисленных явлений, но, как правило, одно из них является доминирующим. Выделение главного фактора, обеспечивающего существование добротных колебаний, позволяет [Л6.1] составить наглядное представление о физике колебательного процесса в данной системе и сформулировать исходные положения для построения теории открытых резонаторов.

6.5(*). Элементы теории открытых резонаторов с вогнутыми зеркалами

Колебательный процесс в открытом резонаторе с вогнутыми зеркалами во многом аналогичен процессу образования пучка электромагнитных волн в линзовой линии. В линзовой линии пучок после каждого фазового корректора попадает на следующий, в резонаторе — после каждого отражения возвращается к противоположно расположенному зеркалу, отражается от него и т.д. Поле в резонаторе образуется двумя встречными пучками. Если их поперечный размер мал по сравнению с размером зеркал, то есть применимо приближение бесконечных корректоров, то каждый пучок симметричен относительно оси резонатора. Если фокусирующее действие зеркал недостаточно, то пучки оказываются несимметричными и захватывают площадь, выходящую за предел апертуры зеркал. В этом случае колебания сопровождаются значительным излучением и становятся малодобротными.

Математически открытый резонатор с вогнутыми зеркалами можно описать тем же интегральным уравнением Фредгольма второго рода, что и линзовую линию. Фазовая коррекция в резонаторе осуществляется зеркалом и зависит от его формы (профиля):

$$\psi(x, y) = C - 2k_0 \Delta(x, y), \quad (6.5.1)$$

где $\Delta(x, y)$ — прогиб зеркала (рис. 6.3в); $k_0 \Delta(x, y)$ — набег фазы, возникающий при прохождении электромагнитным полем этого прогиба; x, y — поперечные координаты. В (6.5.1) удвоенный набег фазы потому, что волна дважды проходит прогиб зеркала. В данном случае набег фазы — разность фаз падающей волны на входе в прогиб зеркала и отраженной от зеркала волны, пришедшей в ту же точку.

Для резонатора со сферическими зеркалами:

$$\psi(x, y) = C - \alpha \frac{k_0 r^2}{L}, \quad (6.5.2)$$

где $\alpha = L/r_0$, $r_0 = 2F$, F — фокусное расстояние, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, L — расстояние между центрами зеркал.

Параметр α определяют фокусирующие свойства зеркал. Значение $\alpha = 0$ соответствует плоским зеркалам, $\alpha = 1$ — конфокальному резонатору, $\alpha = 2$ —

концентрическому резонатору, в котором центры кривизны зеркал совпадают. При введенных обозначениях r_0 — радиус кривизны зеркал. Зеркала фокусируют пучок лучей при условии

$$L/2 < \alpha < \infty. \quad (6.5.3)$$

При этом параметр α должен находиться в пределах:

$$0 < \alpha < 2. \quad (6.5.4)$$

Условия фокусировки (6.5.3), (6.5.4) аналогичны условию (6.2.3) устойчивости пучка линзовой линии. При одинаковых функциях коррекции (6.5.2) открытый резонатор и линзовая линия описываются одними и теми же собственными функциями и собственными значениями, так что, например, результаты решения двумерной задачи для линзовой линии могут быть перенесены на открытый резонатор, образованный двумя бесконечными цилиндрическими зеркалами. Так же, как и в теории линзовых линий, аналитические выражения для собственных функций удастся получить лишь в случае конфокального резонатора. При этом модуль собственного значения χ_n интегрального уравнения определяет радиационные потери, которые вместе с потерями, связанными с неидеальностью зеркал, и диэлектрическими потерями в среде характеризуют добротность резонатора.

В открытом резонаторе, как в любой резонансной системе, резонанс имеет место при определенных частотах ω_n , которые должны быть такими, чтобы фаза поля, уходящего от зеркала, после двукратного прохождения им пространства между зеркалами повторялась с точностью до $2\pi\nu$, где $\nu = 0, 1, 2, \dots$. Это условие, называемое *балансом фаз*, приводит [Л6.2] к уравнению для определения резонансных частот собственных колебаний открытого резонатора:

$$\frac{\omega_n L}{c} = \pi \left(l + \gamma \frac{m + q}{2} \right), \quad (6.5.5)$$

где l — число полуволн, укладывающихся по оси Oz (рис. 6.3в) между зеркалами, m и q — число полуволновых осцилляций вдоль осей x и y , γ — множитель, зависящий от функции фазовой коррекции (6.5.1). Для конфокального резонатора, описываемого функцией (6.5.2), $\gamma = 1$.

Поскольку обычно $l \gg m, q$, резонансная частота с достаточной точностью может быть найдена из соотношения:

$$\omega_n L = \pi l c.$$

Каждому значению l в общем случае соответствует бесчисленное множество колебаний, имеющих различные m и q . Важнейшей особенностью открытых резонаторов является большое различие в затуханиях колебаний с большими и малыми индексами m и q . С ростом m и q быстро увеличиваются радиационные потери.

Колебания в конфокальном резонаторе неустойчивы по отношению к такому изменению зеркал, при котором радиус кривизны одного из них уменьшается, другого — увеличивается. Это связано с вырождением типов колебаний в конфокальном резонаторе [Л6.2]. Согласно (6.5.5) одна и та же частота может

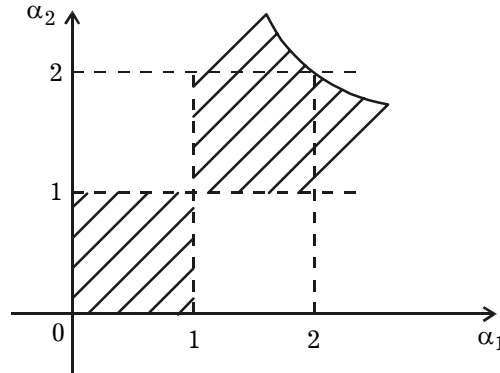


Рис. 6.12

соответствовать различным m и q , что особенно проявляется при небольших изменениях параметров зеркал, в результате которых поле перестает концентрироваться вблизи оси резонатора. В реальных системах вырождение снимается за счет того, что колебания с большими m и q имеют более высокие радиационные потери.

Если функции фазовой коррекции зеркал резонатора имеют вид

$$\psi_{1,2} = C - \alpha_{1,2} \frac{k_0}{L} x^2, \quad (6.5.6)$$

где $\alpha_{1,2} = L/r_{0_{1,2}}$, $r_{0_{1,2}}$ — радиусы кривизны зеркал, то область устойчивости колебаний такого резонатора определяется из условия:

$$1 > (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) > 0. \quad (6.5.7)$$

На рис. 6.12 эта область заштрихована. Зеркала, параметры которых обеспечивают фазовую коррекцию (6.5.6) и находятся в области, определяемой неравенством (6.5.7), называются *фокусирующими*. Точка, соответствующая конфокальным зеркалам, лежит на границе заштрихованных областей, и даже малое различие в значениях r_{0_1} и r_{0_2} может вывести резонатор в область неустойчивости.

6.6(*). Открытый резонатор с цилиндрическими зеркалами эллиптического профиля

Ознакомимся с элементами теории открытых резонаторов, не учитывающей дифракционные явления на краях зеркал. Рассмотрим [Л6.1] резонатор, зеркала которого вписываются в поверхность эллиптического цилиндра (рис. 6.13). Полагаем их бесконечными вдоль оси OY , а поле независимым от этой координаты. Таким образом, имеем краевую двумерную задачу относительно компоненты P_y^e вектора Герца, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца, нулевому граничному условию на идеально проводящих зеркалах и стремящейся к нулю с приближением к открытому пространству.

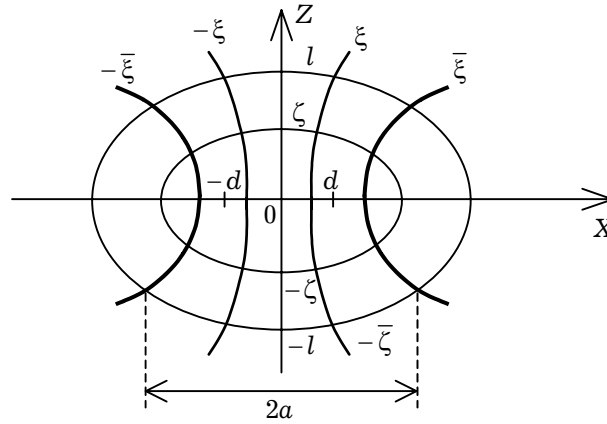


Рис. 6.13

Поскольку поле в резонаторе не зависит от координаты y , которую в данном случае можно рассматривать как продольную, его можно описывать потенциальной функцией $\psi(x, z)$, удовлетворяющей уравнению:

$$\Delta\psi + k_0^2\psi = 0, \quad (6.6.1)$$

в котором $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$; $\psi \sim P_y^e$.

Для того, чтобы облегчить удовлетворение граничного условия на поверхности зеркал

$$\psi(x, z)|_S = 0,$$

введем эллиптическую систему координат, связанную с декартовой соотношениями:

$$x = d \operatorname{ch}\zeta \sin \xi, \quad z = d \operatorname{sh}\zeta \cos \xi, \quad (6.6.2)$$

где $2d$ — расстояние между фокусами эллипса (рис. 6.13); ξ и ζ — эллиптические координаты, изменяющиеся в пределах

$$-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < \zeta < \infty.$$

Координатные линии $\xi = \text{const}$ на плоскости (x, z) представляют собой конфокальные гиперболы. Угол между асимптотой к такой гиперболе и осью OZ — значение угловой эллиптической координаты. Координатные линии $\zeta = \text{const}$ на плоскости (x, z) представляют собой конфокальные эллипсы. Эллиптическая координата ζ называется радиальной потому, что в пределе при $d \rightarrow 0$ она переходит в радиальную цилиндрическую координату.

Поверхностям зеркал соответствуют координаты:

$$-\bar{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}, \quad \zeta = \pm \bar{\zeta}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Расстояние между центрами зеркал: $L = 2l = 2d \operatorname{sh}\bar{\zeta}$. Ширина зеркал, исходя из (6.6.2) есть $2a = 2d \operatorname{ch}\bar{\zeta} \sin \bar{\xi}$.

В эллиптических координатах уравнение (6.6.1) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \gamma^2 (\operatorname{ch}^2 \zeta - \sin^2 \xi) \psi = 0, \quad (6.6.3)$$

где $\gamma = kd$; $\psi = \psi(\xi, \zeta)$.

Уравнение (6.6.3) — уравнение эллиптического типа. Строгое решение его приводит к угловым и модифицированным функциям Маттье, однако, с учетом специфики задачи это уравнение можно приближенно преобразовать к параболическому и получить аналитические решения последнего, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

Решение уравнения (6.6.3) ищем в виде [Л6.1]:

$$\psi = W(\xi, \zeta) \exp \{ i \gamma \operatorname{sh} \zeta \} - (-1)^q W(\xi, -\zeta) \exp \{ -i \gamma \operatorname{sh} \zeta \}. \quad (6.6.4)$$

Множитель $\exp \{ \pm i \gamma \operatorname{sh} \zeta \}$ — быстроменяющаяся по ζ часть решения; амплитуда $W(\xi, \zeta)$ — медленноменяющаяся. При $q = 1, 3, 5 \dots$ имеем четную по ζ функцию $\psi(\zeta)$, при $q = 2, 4, 6 \dots$ — нечетную; q — число полуволен, укладывающихся между зеркалами.

Подставив первое слагаемое из (6.6.4) в уравнение (6.6.3), получаем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + 2i \gamma \operatorname{ch} \zeta \frac{\partial W}{\partial \zeta} + (i \gamma \operatorname{sh} \zeta - \gamma^2 \sin^2 \xi) W = 0. \quad (6.6.5)$$

Поскольку каждое из слагаемых в (6.6.4) удовлетворяет уравнению (6.6.3), подстановка второго слагаемого в это уравнение также приводит к (6.6.5).

В резонаторе основные (низшие) колебания «запираются» в центральной области, расстояние между фокусами эллиптического цилиндра велико, длина волны $\lambda \ll d$. Поэтому можно считать выполненными условия

$$\gamma \gg 1, \quad \sin^2 \xi \ll 1. \quad (6.6.6)$$

При выполнении второго условия из (6.6.6) радиус кривизны зеркал в рассматриваемой области можно считать постоянным:

$$\eta_0 = d \frac{\operatorname{ch}^2 \bar{\zeta}}{\operatorname{sh} \bar{\zeta}}.$$

Используя условия (6.6.6) и, кроме того, учитывая, что функция $W(\xi, \zeta)$ медленно меняется по ζ , уравнение (6.6.5) приводим к виду

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2i \gamma \operatorname{ch} \zeta \frac{\partial W}{\partial \zeta} + (i \gamma \operatorname{sh} \zeta - \gamma^2 \xi^2) W = 0. \quad (6.6.7)$$

Это уже уравнение параболического типа.

Сделав замену переменных:

$$\tau = \sqrt{2\gamma} \xi, \quad \sigma = \operatorname{arcsin} \operatorname{th} \zeta$$

и записав решение уравнения (6.6.7) в виде

$$W(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \tau}} \varphi(\tau, \sigma),$$

преобразуем это уравнение к виду [Л6.1]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + i \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - \frac{\tau^2}{4} \varphi = 0. \quad (6.6.8)$$

Разделив в (6.6.8) переменные, получаем два уравнения:

$$T'' - \left(\frac{\tau^2}{4} + \alpha \right) T = 0, \quad \Gamma' - i\alpha \Gamma = 0, \quad (6.6.9)$$

где $T = T(\tau)$, $\Gamma = \Gamma(\sigma)$.

Постоянную разделения α в уравнениях (6.6.9) нужно выбрать таким образом, чтобы выполнялось граничное условие

$$\psi \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty$$

или $T \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Взяв $\alpha = -(n+1/2)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, решение первого уравнения (6.6.9) получаем в виде *функций параболического цилиндра*:

$$T_n(\tau) = D_n(\tau) = (-1)^n e^{\frac{\tau^2}{4}} \frac{d^n}{d\tau^n} \left(e^{-\frac{\tau^2}{2}} \right). \quad (6.6.10)$$

Тогда общее решение уравнения (6.6.8) запишется как

$$\varphi_n(\tau, \sigma) = D_n(\tau) e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma}. \quad (6.6.11)$$

Таким образом, собственные функции краевой задачи, образуемой уравнением (6.6.8) и граничным условием $\varphi \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, имеют вид (6.6.11).

В силу ограниченности размеров зеркал функции (6.6.10) дают правильное представление о распределении поля по координате ξ только для колебаний с малыми номерами n , имеющих быстроспадающее по указанной координате поле. На практике именно эти колебания представляют основной интерес, ибо только они «запираются» внутри резонатора и имеют высокую добротность.

Зависимости полей колебаний с малыми индексами n от поперечной координаты ξ качественно имеют такой же характер, как соответствующие зависимости для линзовой линии, изображенные на рис. 6.9.

Подставив постоянную разделения в первое уравнение (6.6.9), имеем:

$$T'' + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{\tau^2}{4} \right) T = 0. \quad (6.6.12)$$

Обозначив $\tau_n = 2\sqrt{n+1/2}$, переписываем уравнение (6.6.12) в виде

$$T'' + \frac{\tau_n^2 - \tau^2}{4} T = 0. \quad (6.6.13)$$

При $|\tau| < \tau_n$ уравнение (6.6.13) имеет осциллирующее решение, при $|\tau| > \tau_n$ — экспоненциально затухающее. Таким образом, поля собственных колебаний оказываются сконцентрированными в области $-\tau_n < \tau < \tau_n$.

Соотношения $\xi_n = \tau_n / \sqrt{2\gamma}$ являются уравнениями каустических поверхностей (каустик), внутри которых запираются колебания, удовлетворяющие условию

$$-\bar{\xi} < \xi_n < \bar{\xi}. \quad (6.6.14)$$

С учетом записи решения уравнения (6.6.8) в виде (6.6.11) фаза поля на нижнем зеркале будет

$$\varphi_1 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \arcsin \operatorname{th} \bar{\zeta},$$

на верхнем

$$\varphi_2 = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \arcsin \operatorname{th} \bar{\zeta}.$$

Фаза поля, пришедшего с верхнего зеркала на нижнее, есть

$$\varphi = kL - \left(n + \frac{1}{2}\right) \arcsin \operatorname{th} \bar{\zeta}.$$

Тогда из условия резонанса (баланса фаз)

$$\varphi - \varphi_1 = \pi q; \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

получаем

$$kL = \pi q + (2n + 1) \arcsin \operatorname{th} \bar{\zeta}. \quad (6.6.15)$$

Уравнение (6.6.15) является уравнением для определения резонансных частот рассматриваемого резонатора. Оно, естественно, справедливо лишь для колебаний, удовлетворяющих условию (6.6.14). Но поскольку только эти колебания могут быть высокочастотными, именно к ним применимо понятие резонансной частоты.

При написании этого параграфа использован материал работы [Л6.1].

6.7(*). Открытые резонаторы с двугранными отражателями

Резонатор с двугранными отражателями, плоскости которых расположены под очень малым углом (рис. 6.14), по своим свойствам и характеристикам близок к конфокальному. Такой резонатор характеризуется очень малыми дифракционными потерями и сравнительно малочувствителен к перекосам отражателей. Что касается простоты конструкции, то, уступая в удобстве использования сферическому резонатору в оптическом диапазоне, в диапазоне СВЧ он, несомненно, более удобен. Если сферический открытый резонатор характеризуется радиусом кривизны зеркал, то открытый резонатор, образованный двугранными отражателями, характеризуется углом между гранями. При этом резонатор с двугранными отражателями стабилен при условии, что ширина граней достаточно велика.

Поперечное сечение рассматриваемого резонатора схематически изображено на рис. 6.15. Отражатели АВ и DE, ВС и EF расположены под малым углом α относительно друг друга. Угол α обычно составляет $10^{-3} \div 10^{-5}$ радиан у резонаторов оптического диапазона и порядка 10^{-3} радиан у СВЧ резонаторов [Л6.6].

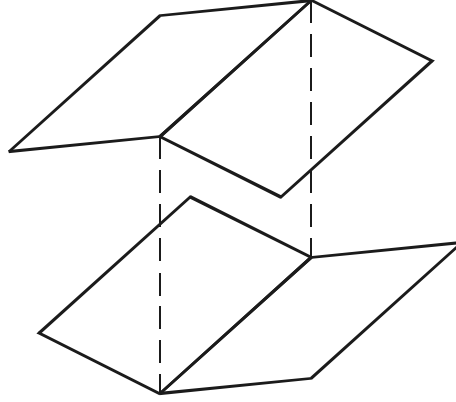


Рис. 6.14

Будем полагать, что максимальное расстояние между зеркалами $d = q\lambda / 2$, где q — большое положительное число. Обычно $q \sim 10^5 \div 10^7$ у резонаторов оптического диапазона и $q \sim 10^2$ у СВЧ резонаторов.

Впишем левую и правую половины резонатора в цилиндрические системы координат с осями в точках P и Q (рис. 6.15). В случае двумерной задачи (когда полагаем, что поле не зависит от продольной координаты z) относительно продольной компоненты вектора Герца имеем уравнение Гельмгольца

$$\Delta \Pi_z^e + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \Pi_z^e = 0, \quad (6.7.1)$$

которое в цилиндрической системе координат записывается как

$$\frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial \varphi^2} + k^2 \Pi_z^e = 0, \quad (6.7.2)$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$, ϵ_a и μ_a — параметры среды между зеркалами резонатора.

Отсчитывая угловую координату φ в левой половине резонатора от нижней грани, граничные условия, при которых решаем уравнения (6.7.1), (6.7.2), записываем в виде

$$\Pi_z^e(\varphi = 0, \alpha) = 0. \quad (6.7.3)$$

В двумерной задаче продольная компонента вектора Герца, относительно которой записаны уравнения (6.7.1), (6.7.2), тождественно совпадает с мембранной функцией ψ^e , которая при граничных условиях (6.7.3) имеет вид:

$$\psi^e(\rho, \varphi) = A J_\nu(k\rho) \sin \nu \varphi, \quad (6.7.4)$$

где $J_\nu(k\rho)$ — функция Бесселя; $\nu = q\pi / \alpha$.

Порядок величины ν очень большой: у резонаторов оптического диапазона $\nu \sim 10^8 \div 10^{13}$, у СВЧ резонаторов $\nu \sim 10^5$. Значение $k\rho$ также велико: $k\rho \approx kd / \alpha$. Поскольку $k = 2\pi / \lambda$, $d = q\lambda / 2$, $\alpha = q\pi / \nu$, имеем $k\rho \sim \nu$.

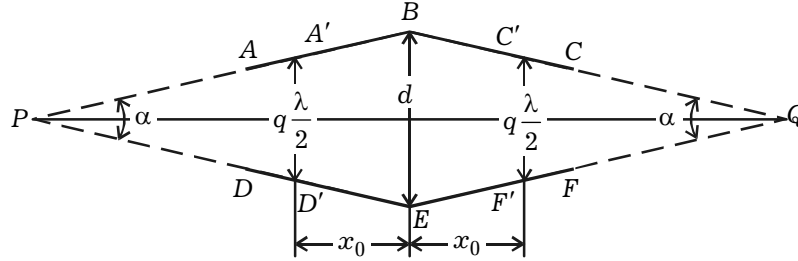


Рис. 6.15

В этом случае, используя асимптотические представления функций Бесселя при больших $k\rho$ и ν [Л6.7], можем записать:

$$J_\nu(k\rho) \approx \left(\frac{2}{\pi \nu \operatorname{tg} \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\nu (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) - \frac{\pi}{4} \right] \quad (6.7.5)$$

при $k\rho > \nu$, где $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{(k\rho/\nu)^2 - 1}$.

Выражение для мембранной функции, описывающей поле в правой половине резонатора, имеет вид, аналогичный (6.7.4). При сшивании полей на границе между выделенными областями в силу условия $\alpha \ll 1$ кривизной поверхности $\rho = d/\alpha$ будем пренебрегать, полагая, что ввиду симметрии резонансной системы на этой поверхности существует либо пучность, либо узел поля, запертого между каустическими поверхностями, расположенными в критических сечениях структур, образованных отражателями АВ, DE и ВС, EF, соответственно. В этом случае сшивание полей в плоскости симметрии колебательной системы происходит автоматически и в этой плоскости устанавливается режим стоячей волны. Условием установления этого режима, как следует из (6.7.5), является [Л6.6] равенство:

$$\nu (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) - \frac{\pi}{4} = m\pi, \quad (6.7.6)$$

где $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{(kd/\nu\alpha)^2 - 1}$; $m = 0, 1, 2, \dots$.

Из уравнения (6.7.6) находятся резонансные частоты. Число m определяет номер колебания и равно числу узлов поля по поперечной координате.

Как видно из (6.7.5), координаты критических сечений рассматриваемой структуры, соответствующих каустическим поверхностям, определяются из условия

$$\frac{k\rho}{\nu} = 1, \quad (6.7.7)$$

которое с учетом выше приведенных выражений для k и α приводит к значению координаты критического сечения:

$$\rho = q \frac{\lambda}{2}. \quad (6.7.8)$$

С учетом (6.7.8) расстояние от плоскости симметрии до критического сечения определяется как

$$x_0 = \frac{1}{\alpha} \left(d - q \frac{\lambda}{2} \right). \quad (6.7.9)$$

Отсчитывая поперечную координату от критического сечения, определим ее соотношением

$$x = \rho_0 - \rho,$$

где ρ_0 — радиальная координата критического сечения. Тогда для области между плоскостью симметрии и критическим сечением ($x < 0$) имеем [Л6.6]:

$$J_v(k\rho) = \frac{\cos \left[\frac{8\pi}{3} \left(\alpha |x|^3 / (q\lambda^3) \right)^{1/2} - \frac{\pi}{4} \right]}{\pi (q|x|/\alpha\lambda)^{1/4}}. \quad (6.7.10)$$

Исходя из выражения (6.7.10) условие резонанса запишем как

$$\frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha |x_0|^3}{q\lambda^3} \right)^{1/2} - \frac{\pi}{4} = \frac{m\pi}{2}. \quad (6.7.11)$$

Подставляя в (6.7.11) значение x_0 , записанное в виде (6.7.9), получаем

$$8\sqrt[3]{\frac{\left(d - q \frac{\lambda}{2} \right)^3}{q^3 \lambda^3}} = \frac{3\alpha(2m+1)}{4q}.$$

Это выражение преобразуем к виду

$$1 - \frac{q\lambda}{2d} = \frac{q\lambda}{d} \left(\frac{1}{8} \right)^{2/3} \left[\frac{3\alpha(2m+1)}{4q} \right]^{2/3}. \quad (6.7.12)$$

С учетом того, что $q\lambda/2 \approx d$, из (6.7.12) получаем соотношение, определяющее резонансные частоты рассматриваемого резонатора:

$$\lambda = \frac{2d}{q} \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{3\alpha(2m+1)}{4q} \right]^{2/3} \right). \quad (6.7.13)$$

Как видно из (6.7.13), резонансная длина волны даже для основного колебания ($m = 0$) немного меньше $2d/q$.

Подставив (6.7.13) в (6.7.9), получим выражение для определения координат критических сечений мод рассматриваемого резонатора:

$$x_0 = \frac{d}{2} \left(\frac{3(m+1)}{4} \right)^{2/3} (q^2 \alpha)^{-1/3}. \quad (6.7.14)$$

Как следует из (6.7.14), расстояния между каустиками колебаний с номерами $m < 10$ малы и составляют $(10^8 \div 10^{13})d$ у оптических резонаторов и порядка $10^{-1}d$ у резонаторов СВЧ.

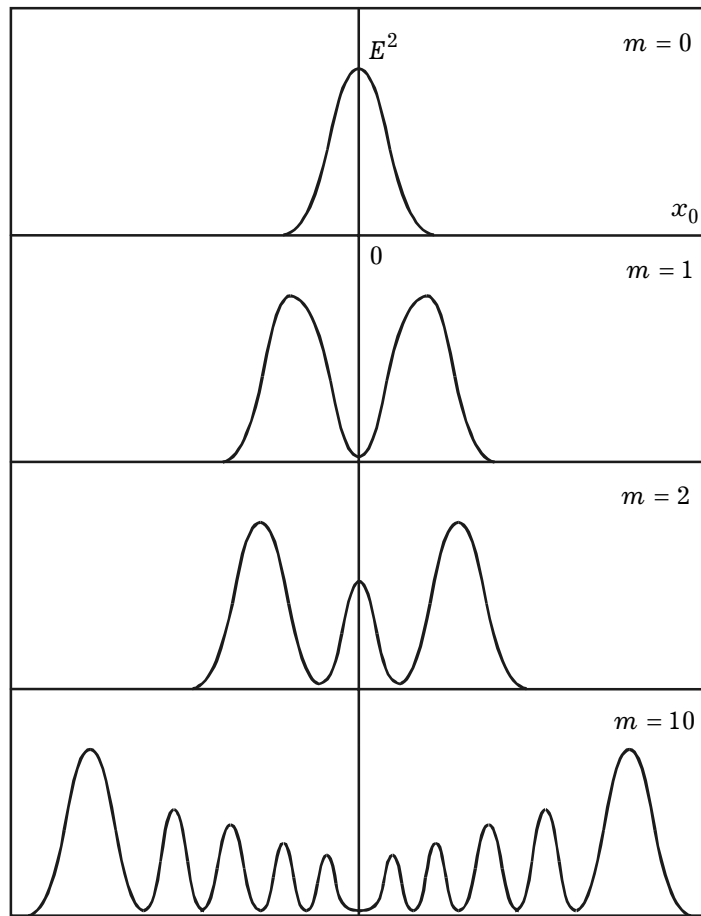


Рис. 6.16

С учетом того, что при $x > 0$ справедливо [Л6.6, Л6.7] асимптотическое выражение

$$J_v(x) = \frac{1}{2\pi} (qx/\alpha\lambda)^{-1/4} \exp \left[-\frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha x^3}{q\lambda^3} \right)^{1/2} \right],$$

можно утверждать, что вне области, ограниченной каустиками, поле экспоненциально убывает по поперечной координате. В силу быстрого убывания поля рассмотренный подход к определению характеристик резонатора, не учитывающий конечности поперечных размеров отражателей, можно считать правомерным, по крайней мере, для колебаний с номерами $m < 10$. Если поперечные размеры отражателей превышают значение x_0 , дифракционные потери резонатора будут малы.

На рис. 6.16 показаны распределения интенсивностей колебаний по поперечной координате, отсчитываемой от плоскости симметрии, взятые из [Л6.6]. Как

видно из рисунка, с ростом номера m колебаний их интенсивность вблизи критических сечений, определяемых из условия (6.7.7), увеличивается, что говорит о росте их дифракционных потерь.

В проведенном рассмотрении делалось предположение о том, что кривизной поверхностей фронтов полей, сшиваемых в плоскости симметрии резонатора, можно пренебречь. Чтобы это предположение было справедливым, должно [Л6.6] выполняться условие $\alpha \ll \sqrt{6/q}$, которым тем самым устанавливается граница применимости описанного подхода. Указанное условие будет выполнено, если у резонатора оптического диапазона $\alpha < 10^{-3}$, а у СВЧ резонатора $\alpha < 10^{-1}$.

На практике трудно обеспечить условие абсолютной симметрии резонатора: как правило, углы α_1 и α_2 в точках P и Q несколько отличаются друг от друга. В этом случае нельзя пользоваться решением (6.7.4) в обеих частях резонатора. При $\alpha_1 \neq \alpha_2$, согласно (6.7.8), следует полагать

$$v_1 = \frac{q\pi}{\alpha_1}, \quad v_2 = \frac{q\pi}{\alpha_2}.$$

В этом случае средней плоскости резонатора не будут соответствовать узлы или пучности полей колебаний. Единственное условие, которое должно выполняться в этой плоскости, заключается в равенстве полей двух половинок резонатора. Условие резонанса (6.7.6) перепишется в виде

$$\begin{aligned} v_1(\operatorname{tg} \alpha_1 - \alpha_1) - \frac{\pi}{4} &= m_1 \frac{\pi}{2} + \delta, \\ v_2(\operatorname{tg} \alpha_2 - \alpha_2) - \frac{\pi}{4} &= m_2 \frac{\pi}{2} - \delta, \end{aligned} \quad (6.7.15)$$

где m_1 и m_2 — близкие по величине числа, δ — малая величина.

Положив $m_1 + m_2 = 2m$ и сложив уравнения (6.7.15), получим

$$v_1(\operatorname{tg} \alpha_1 - \alpha_1) + v_2(\operatorname{tg} \alpha_2 - \alpha_2) = (2m + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (6.7.16)$$

Условие (6.7.16), в котором $\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \sqrt{(kd / v_{1,2} \alpha_{1,2})^2 - 1}$, является условием резонанса. Различие углов $\alpha_{1,2}$ сказывается на смещении распределения поля в сторону от средней плоскости резонатора, так что максимум поля оказывается с той стороны от средней плоскости, с которой угол α меньше.

При написании этого параграфа использован материал работы [Л6.6].

Глава

7

Излучение электромагнитных волн

7.1. Источники излучения электромагнитных волн. Вибратор Герца	295
7.2. Расчёт электромагнитных полей, создаваемых заданными электрически- ми и магнитными токами в однородной изотропной среде	297
7.3. Электрические и магнитные волны в безграничной среде	305
7.4. Расчёт электромагнитных полей излучающих систем в дальней, проме- жуточной и ближней областях	309
7.5. Излучение электромагнитных волн элементарными излучателями	313
7.6(*). Применение принципа суперпозиции к расчёту электромагнитных полей излучающих систем	325
7.7(*). Антенна из двух одинаковых линейных излучателей	331
7.8(*). Самосогласованная постановка задачи расчёта полей излучающих систем. Диполь Герца	333

) Символом «» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 7. Излучение электромагнитных волн

7.1. Источники излучения электромагнитных волн. Вибратор Герца

Ранее было установлено, что уравнения Максвелла допускают существование решений, описывающих свободное электромагнитное поле (вдали от источников), представляющее собой суперпозицию электромагнитных волн, распространяющихся в вакууме со скоростью света, описываемых запаздывающими и опережающими потенциалами. Таким образом, любая система зарядов и токов вне себя создаёт электромагнитные волны, которые можно трактовать как поле *излучения*. Ниже показывается, как самые общие рассуждения об излучении электромагнитных волн приводят к простейшей конструкции антенны — «техническому» излучателю.

Вводя векторы поляризации $\vec{\mathcal{P}}$ и намагниченности \vec{M} , имеем:

$$R = -\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{J} = \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{M}. \quad (7.1.1)$$

Действительно, с учётом уравнений состояния сред:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

записываем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E}) &= R - \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}} = R + R_{\text{связ}}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \operatorname{rot} \vec{H} + \operatorname{rot} \vec{M} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_{\text{мол}}, \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

где $R_{\text{связ}}$ — плотность объёмных связанных зарядов; $\vec{J}_{\text{мол}}$ — плотность молекулярных токов, создающих вектор индукции в магнитной среде.

Из уравнений (7.1.2) имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{J}_{\text{связ}} &= -\frac{\partial R_{\text{связ}}}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} \right), \\ \vec{J}_{\text{связ}} &= \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t}, \quad \vec{J}_{\text{мол}} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{M}, \end{aligned}$$

откуда следуют соотношения (7.1.1). Таким образом, в (7.1.1) R — объёмная плотность связанных зарядов; \vec{J} — плотность токов, наводимых в среде приложенными к ней электрическими и магнитными полями.

Следует учесть, что подстановки

$$\vec{\mathcal{P}} \Rightarrow \vec{\mathcal{P}} - \operatorname{rot} \vec{a}, \quad \vec{M} \Rightarrow \vec{M} - \nabla b + \frac{\partial \vec{a}}{\partial t}, \quad (7.1.3)$$

где \vec{a} и b — произвольные вектор и скаляр, не меняют источников R и \vec{J} и полей, ими порождаемых.

С использованием калибровки Лоренца

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{A}} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

электродинамические потенциалы Φ и $\vec{\mathcal{A}}$, создаваемые указанными токами, определяются из уравнений:

$$\square \vec{\mathcal{A}} = -\mu_a \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} - \operatorname{rot} \vec{M}, \quad \square \Phi = \frac{1}{\varepsilon_a} \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}. \quad (7.1.4)$$

Вводя электрический $\vec{\pi}$ и магнитный $\vec{\pi}^m$ векторы Герца

$$\Phi = -\operatorname{div} \vec{\pi}, \quad \vec{\mathcal{A}} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + \mu_a \operatorname{rot} \vec{\pi}^m, \quad (7.1.5)$$

от уравнений (7.1.4) переходим к уравнениям:

$$\square \vec{\pi} = -\frac{\vec{\mathcal{P}}}{\varepsilon_a}, \quad \square \vec{\pi}^m = -\frac{\vec{M}}{\mu_a}. \quad (7.1.6)$$

Записывая запаздывающие решения этих уравнений как соответствующие физической постановке задачи, имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\pi}(t, \vec{r}) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_a} \int_V \vec{\mathcal{P}} \left(t - \frac{|\vec{Z}|}{v}, \vec{r}' \right) \frac{dV}{|\vec{Z}|}, \\ \vec{\pi}^m(t, \vec{r}) &= \frac{1}{4\pi \mu_a} \int_V \vec{M} \left(t - \frac{|\vec{Z}|}{v}, \vec{r}' \right) \frac{dV}{|\vec{Z}|}, \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

где $|\vec{Z}| = |\vec{r} - \vec{r}'|$; интегрирование в (7.1.7) производится по объёму V , содержащему векторы $\vec{\mathcal{P}}$ и \vec{M} .

Получив решения уравнений в виде (7.1.7), по формулам (7.1.5) нетрудно найти потенциалы $\vec{\mathcal{A}}$ и Φ , а затем и векторы $\vec{\mathcal{E}}$ и \vec{H} :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\pi} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\pi}}{\partial t^2} - \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{\pi}^m, \\ \vec{H} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\pi}^m - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\pi}^m}{\partial t^2} + \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{\pi}. \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

Таким образом, изменяющиеся во времени векторы поляризации $\vec{\mathcal{P}}(t)$ и намагниченности $\vec{M}(t)$ среды неизбежно создают в окружающем пространстве (в том числе и вне источников) распространяющиеся электромагнитные волны, электрическое и магнитное поля которых определяются по формулам (7.1.8). Напомним, что в макроскопической электродинамике под векторами $\vec{\pi}$ и $\vec{\pi}^m$ понимаются усреднённые во времени (по периоду колебаний процесса) дипольные и магнитные моменты поляризованных молекул.

Ниже рассмотрим электромагнитное поле, создаваемое изменяющимся во времени дипольным моментом $\vec{p}(t)$. В качестве такого переменного электрического диполя может служить, например, поляризованная молекула с переменным расстоянием $l(t)$ между её разделёнными зарядами. Для диполя, помещённого в начало координат, имеем

$$\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon_a^{-1} \vec{p}(t) \delta(\vec{r}), \quad \vec{M} = 0,$$



Рис. 7.1

и из (7.1.7) следует, что

$$\vec{\pi} = \frac{1}{4\pi r \epsilon_a} \vec{p}(t - r/c), \quad \vec{\pi}^m = 0.$$

Электромагнитное поле определяется по формулам (7.1.8).

Вышеприведённые рассуждения о неизбежности излучения переменным электрическим диполем приводят к конструкции (техническому решению) простейшей антенны — излучателя электромагнитных волн. Это так называемый *вибратор Герца* — тонкий проводник длиной l с заряженными металлическими шарами на концах (рис. 7.1). Шары создают ёмкость, которая позволяет получить постоянную амплитуду тока вдоль проводника. Если к зазору проводника подключить генератор СВЧ, то заряды на концах вибратора будут изменяться во времени, в результате чего получается технически созданный изменяющийся во времени дипольный момент $\vec{p}(t)$, создающий в свободном пространстве электромагнитное поле (7.1.8).

7.2. Расчёт электромагнитных полей, создаваемых заданными электрическими и магнитными токами в однородной изотропной среде

Ниже рассматривается внешняя задача анализа излучающей системы (антенны), которая сводится к определению электромагнитного поля излучения в любой точке пространства по известному распределению токов (электрических и магнитных).

7.2.1. Уравнения Максвелла с магнитными токами. В теории возбуждения электромагнитных волн обычно используют следующую систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^e, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{J}^m, \quad (7.2.1)$$

где \vec{H} , \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} — мгновенные значения векторов, \vec{J}^e , \vec{J}^m — мгновенные значения векторов объёмной плотности электрического и магнитного токов.

Следствием закона сохранения заряда являются уравнения непрерывности:

$$\text{div } \vec{J}^e + \frac{\partial R^e}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \vec{J}^m + \frac{\partial R^m}{\partial t} = 0, \quad (7.2.2)$$

где R^e , R^m — мгновенные значения объёмной плотности электрического и магнитного зарядов.

Так как

$$\text{div rot } \vec{F} = 0,$$

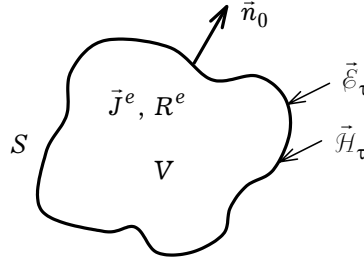


Рис. 7.2

где \vec{F} — любой вектор, из (7.2.1) получаем уравнения:

$$\operatorname{div} \vec{D} = R^e, \quad \operatorname{div} \vec{B} = R^m. \quad (7.2.3)$$

Таким образом, уравнения (7.2.2) и (7.2.3) являются следствием уравнений (7.2.1).

В уравнения Максвелла (7.2.1) введены (ввиду существования их аналогов) магнитные токи и заряды. С их помощью, как будет показано ниже, упрощается решение многих задач теории антенн. Остановимся на обосновании формального введения магнитных токов и зарядов.

Пусть задана поверхность S , ограничивающая некоторый объём V , в котором заданы электрические токи и заряды (рис. 7.2). Очевидно, что источники в объёме V на его поверхности S возбуждают некоторые тангенциальные составляющие $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$. Известно, что мгновенное значение поверхностной плотности электрического тока определяется как

$$\vec{\eta}^e = [\vec{n}_0, \vec{H}], \quad (7.2.4)$$

где \vec{n}_0 — нормаль к поверхности S , направленная из объёма V . По аналогии можно ввести и мгновенное значение поверхностной плотности магнитного тока:

$$\vec{\eta}^m = -[\vec{n}_0, \vec{E}]. \quad (7.2.5)$$

Знак « $-$ » появился в (7.2.5) в связи со знаком « $-$ » перед \vec{J}^m в правой части второго уравнения Максвелла из (7.2.1).

Связь между объёмными и поверхностными плотностями токов следующая:

$$\vec{J}^{e,m} = \vec{\eta}^{e,m}(u_1, u_2) \delta(n - n'), \quad (7.2.6)$$

где $\vec{\eta}^{e,m}$ заданы на поверхности S как функции координат u_1, u_2 ; n — нормальная координата (по отношению к поверхности S), принимающая значение n' на поверхности S ; $\delta(n - n')$ — одномерная дельта-функция Дирака.

Два векторных уравнения (7.2.1) связывают между собой шесть векторов. Поэтому эта система является неполной и к ней необходимо добавить ещё четыре уравнения.

Для изотропной среды имеет место соотношение: $\vec{J} = \vec{J}_{\text{пр}} + \vec{J}^{\text{ст}}$; $\vec{J}_{\text{пр}}$ — ток проводимости; $\vec{J}^{\text{ст}}$ — сторонний ток. Поэтому законы Ома в дифференциальной форме записываются как

$$\vec{J}^e = \sigma^e (\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}}), \quad \vec{J}^m = \sigma^m (\vec{H} + \vec{H}^{\text{ст}}). \quad (7.2.7)$$

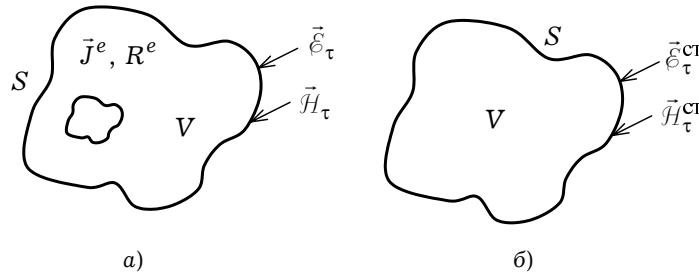


Рис. 7.3

Векторы индукции и напряжённости полей связаны соотношениями:

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (7.2.8)$$

В (7.2.7) σ^e, σ^m — удельные электрическая и магнитная проводимости; $\vec{E}^{st}, \vec{H}^{st}$ — напряжённости сторонних (заданных) электрического и магнитного полей. В (7.2.8) ϵ_a, μ_a — абсолютные значения проницаемостей.

Под *сторонними полями* в электродинамике понимают:

- поля, создаваемые электродвижущими и магнитодвижущими силами неэлектромагнитного происхождения (химическими, диффузионными и др.);
- поля, создаваемые некоторой частью системы, принимаемой за источник и не рассматриваемой детально.

При анализе реальных излучающих систем выделение некоторой их части в качестве области источников часто оказывается необходимым для упрощения решения задачи. В процессе решения $\vec{E}^{st}, \vec{H}^{st}$ считаются заданными. В качестве примера можно обратиться к следующей задаче. Пусть требуется определить электромагнитное поле в любой точке пространства от сторонних источников \vec{J}^e, \vec{R}^e (рис. 7.3а). Выделим область V , ограниченную поверхностью S , в которой расположены все сторонние источники (рис. 7.3а), и определим $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$ на поверхности S , которые в дальнейшем будем считать сторонними. В результате можно поставить другую электродинамическую задачу: определить электромагнитное поле вне объёма V по заданным $\vec{E}_\tau^{st}, \vec{H}_\tau^{st}$ на его поверхности S (рис. 7.3б). В соответствии с формулами (7.2.4) и (7.2.5) при этом заданными считаются и $\vec{\eta}^{e,st}, \vec{\eta}^{m,st}$. Указанная выше процедура перехода от одной краевой задачи электродинамики к другой часто существенно упрощает расчёт полей. Упрощение объясняется, по крайней мере, двумя обстоятельствами. Во-первых, учитывая физические и геометрические особенности задачи, можно выбрать простую поверхность S . Во-вторых, иногда $\vec{E}_\tau^{st}, \vec{H}_\tau^{st}$ можно определить приближённо, исходя, опять же, из физических и геометрических особенностей задачи.

Подстановка соотношений (7.2.7), (7.2.8) в (7.2.1) приводит к системе уравнений Максвелла, записываемой в виде:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma^e \vec{E} + \vec{J}^{e,st}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \sigma^m \vec{H} - \vec{J}^{m,st}, \\ \text{div } \epsilon_a \vec{E} &= R^e, \quad \text{div } \mu_a \vec{H} = R^m. \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

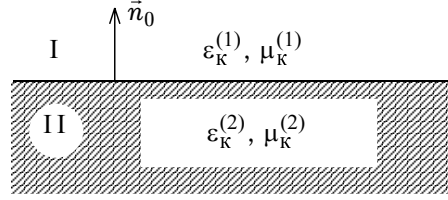


Рис. 7.4

7.2.2. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд поля. Граничные условия. В дальнейшем будем рассматривать гармонические во времени колебания. В соответствии с методом комплексных амплитуд запишем:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}], & \vec{H}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}], \\ \vec{J}^{e, \text{CT}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{j}^{e, \text{CT}}(\vec{r})e^{i\omega t}], & R^{e, \text{CT}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\rho^{e, \text{CT}}(\vec{r})e^{i\omega t}], \\ \vec{J}^{m, \text{CT}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{j}^{m, \text{CT}}(\vec{r})e^{i\omega t}], & R^{m, \text{CT}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\rho^{m, \text{CT}}(\vec{r})e^{i\omega t}],\end{aligned}\quad (7.2.10)$$

где $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$; $\vec{j}^{e, m}$, $\rho^{e, m}$ — комплексные амплитуды соответствующих векторов.

Для получения уравнений Максвелла относительно комплексных амплитуд, введенных соотношениями (7.2.10), в (7.2.9) необходимо сделать замену $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$. Тогда

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon_a \vec{E} + \sigma^e \vec{E} + \vec{j}^{e, \text{CT}}, \quad (7.2.11)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_a \vec{H} - \sigma^m \vec{H} - \vec{j}^{m, \text{CT}},$$

$$\text{div } \epsilon_a \vec{E} = \rho^e, \quad \text{div } \mu_a \vec{H} = \rho^m, \quad (7.2.12)$$

где ρ^e , ρ^m — комплексные амплитуды суммарных плотностей зарядов. Таким образом, электромагнитные поля, гармонические во времени, описываются уравнениями (7.2.11), (7.2.12).

Уравнения Максвелла (7.2.11) можно переписать в более простом виде:

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon_0 \epsilon_k \vec{E} + \vec{j}^{e, \text{CT}}, \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_0 \mu_k \vec{H} - \vec{j}^{m, \text{CT}}, \quad (7.2.13)$$

где $\epsilon_k = \epsilon - i\sigma^e/(\omega\epsilon_0)$ — комплексная диэлектрическая проницаемость среды, $\mu_k = \mu - i\sigma^m/(\omega\mu_0)$ — комплексная магнитная проницаемость среды.

В заключении раздела запишем граничные условия для векторов \vec{E} и \vec{H} при наличии на границе раздела поверхностных токов и зарядов (рис. 7.4):

$$[\vec{n}_0, \vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)}] = -\vec{\eta}^m, \quad [\vec{n}_0, \vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}] = \vec{\eta}^e, \quad (7.2.14)$$

$$\epsilon_0 (\epsilon_k^{(1)} \vec{E}^{(1)} - \epsilon_k^{(2)} \vec{E}^{(2)}) \vec{n}_0 = \xi^e, \quad \mu_0 (\mu_k^{(1)} \vec{H}^{(1)} - \mu_k^{(2)} \vec{H}^{(2)}) \vec{n}_0 = \xi^m, \quad (7.2.15)$$

где $\vec{\eta}^e$, $\vec{\eta}^m$ — комплексные амплитуды поверхностных плотностей электрического и магнитного токов; ξ^e , ξ^m — комплексные амплитуды поверхностных плотностей электрического и магнитного зарядов. Заметим, что под поверхностными токами и зарядами в уравнениях (7.2.14) и (7.2.15) понимаются как сторонние токи и заряды, так и заряды, возбуждённые электромагнитным полем.

На поверхности идеального электрического проводника граничные условия принимают более простую форму ($\vec{E}^{(2)} = \vec{H}^{(2)} = 0$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left(\vec{n}_0, \varepsilon_k^{(1)} \vec{E}^{(1)} \right) &= \xi^e, & [\vec{n}_0, \vec{E}^{(1)}] &= 0, \\ \left(\vec{n}_0, \mu_k^{(1)} \vec{H}^{(1)} \right) &= 0, & [\vec{n}_0, \vec{H}^{(1)}] &= \eta^e, \end{aligned} \quad (7.2.16)$$

то есть на идеальном металле магнитные токи и заряды не существуют.

Соответственно, на идеальном магнитном проводнике отсутствуют электрические токи и заряды:

$$\begin{aligned} \left(\vec{n}_0, \varepsilon_k^{(1)} \vec{E}^{(1)} \right) &= 0, & [\vec{n}_0, \vec{E}^{(1)}] &= -\eta^m, \\ \mu_0 \left(\vec{n}_0, \mu_k^{(1)} \vec{H}^{(1)} \right) &= \xi^m, & [\vec{n}_0, \vec{H}^{(1)}] &= 0. \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

Краевые задачи для областей, ограниченных идеальными проводящими (электрическими или магнитными) поверхностями, ставятся при граничных условиях (7.2.16) или (7.2.17) соответственно.

7.2.3. Уравнения Гельмгольца и электродинамические потенциалы. В уравнениях (7.2.11) одновременно входят векторы \vec{E} и \vec{H} . Целесообразно перейти к уравнениям, в которые входят либо только вектор \vec{E} , либо только \vec{H} .

Производя в уравнениях (7.2.13) взаимную подстановку, в случае однородной среды получаем:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} &= k^2 \vec{E} - i\omega\mu_0\mu_k \vec{j}^{e, \text{ст}} - \text{rot } \vec{j}^{m, \text{ст}}, \\ \text{rot rot } \vec{H} &= k^2 \vec{H} - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_k \vec{j}^{m, \text{ст}} + \text{rot } \vec{j}^{e, \text{ст}}, \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

где $k = k_0 \sqrt{\varepsilon_k \mu_k}$ — волновое число среды.

С учётом векторного тождества

$$\text{rot rot } \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \nabla^2 \vec{F}$$

и с учётом равенств (7.2.12), уравнения (7.2.18) сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} &= -\vec{M}^e, \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} &= -\vec{M}^m, \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{M}^e &= -i\omega\mu_0\mu_k \vec{j}^{e, \text{ст}} + \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_k} \text{grad div } \vec{j}^{e, \text{ст}} - \text{rot } \vec{j}^{m, \text{ст}}, \\ \vec{M}^m &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_k \vec{j}^{m, \text{ст}} + \frac{1}{i\omega\mu_0\mu_k} \text{grad div } \vec{j}^{m, \text{ст}} + \text{rot } \vec{j}^{e, \text{ст}}. \end{aligned} \quad (7.2.20)$$

Уравнения (7.2.19) — неоднородные уравнения Гельмгольца. Они являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. $\vec{M}^{e, m}$ в (7.2.20) — функции источников поля.

Для тех точек пространства, в которых источники отсутствуют, неоднородные уравнения (7.2.19) переходят в однородные:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0. \quad (7.2.21)$$

Неудобство уравнений (7.2.19) заключается в сложности выражений в их правых частях. Поэтому в теории антенн обычно вводят два новых вектора (электродинамические векторные потенциалы) \vec{A}^e, \vec{A}^m с помощью соотношений^{*)}:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -i\omega\mu_0\mu_k\vec{A}^e + \frac{1}{i\omega\epsilon_0\epsilon_k} \text{grad div } \vec{A}^e - \text{rot } \vec{A}^m, \\ \vec{H} &= -i\omega\epsilon_0\epsilon_k\vec{A}^m + \frac{1}{i\omega\mu_0\mu_k} \text{grad div } \vec{A}^m + \text{rot } \vec{A}^e.\end{aligned}\quad (7.2.22)$$

После подстановки (7.2.22) в уравнения (7.2.19) имеем

$$\begin{aligned}\Delta\vec{A}^e + k^2\vec{A}^e &= -\vec{j}^{e,\text{CT}}, \\ \Delta\vec{A}^m + k^2\vec{A}^m &= -\vec{j}^{m,\text{CT}}.\end{aligned}\quad (7.2.23)$$

Уравнения (7.2.23) проще, чем (7.2.19). Поэтому в дальнейшем будем иметь дело с этими уравнениями. Найдя из них векторные потенциалы, затем по формулам (7.2.22) определим поля \vec{E} и \vec{H} .

7.2.4. Решение векторного уравнения Гельмгольца. Функции Грина. Пусть в некотором объеме V заданы распределения объемных плотностей сторонних электрических $\vec{j}^{e,\text{CT}}$ и магнитных $\vec{j}^{m,\text{CT}}$ токов. Определим векторные потенциалы \vec{A}^e, \vec{A}^m . Будем исходить из уравнений (7.2.23). Поскольку оба уравнения с формальной точки зрения одинаковые, будем рассматривать уравнение

$$\Delta\vec{A} + k^2\vec{A} = -\vec{j}^{\text{CT}}, \quad (7.2.24)$$

где под \vec{A} будем понимать либо \vec{A}^e , либо \vec{A}^m .

Запишем (7.2.24) в декартовой системе координат, в которой

$$\vec{A} = A_x\vec{x}_0 + A_y\vec{y}_0 + A_z\vec{z}_0, \quad \vec{j}^{\text{CT}} = j_x\vec{x}_0 + j_y\vec{y}_0 + j_z\vec{z}_0,$$

где $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ — единичные векторы. Для любой компоненты A_i вектора \vec{A} ($i = x, y, z$) имеем уравнение:

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2} + k^2 A_i = -j_i^{\text{CT}}. \quad (7.2.25)$$

Для решения (7.2.25) воспользуемся методом разделения переменных. Представим рассматриваемую компоненту векторного потенциала в виде:

$$A_i(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (7.2.26)$$

Функции, входящие в (7.2.26), заданы на бесконечном интервале, поэтому их можно представить в виде интегралов Фурье. Например, для $X(x)$ имеем:

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\chi_1) e^{-i\chi_1 x} d\chi_1, \quad (7.2.27)$$

где $g_1(\chi_1)$ — спектральная плотность. Выражение (7.2.27) можно трактовать как бесконечный набор плоских однородных волн, распространяющихся вдоль и про-

^{*)} В разделе 2.3 были введены векторный и скалярный электродинамические потенциалы \vec{A} и Φ . В теории антенн исторически рассматриваются векторные электродинамические потенциалы \vec{A}^e и \vec{A}^m , которые существенно облегчают процедуру решения внешних краевых задач [Л7.1]

тив оси OX с фазовыми скоростями $v_\phi = \omega / \chi_1$, где величина χ_1 играет роль волнового числа. Аналогично

$$Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\chi_2) e^{-i\chi_2 y} d\chi_2,$$

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_3(\chi_3) e^{-i\chi_3 z} d\chi_3.$$

Подставив эти разложения в (7.2.26), получим:

$$A_i(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\chi_1, \chi_2, \chi_3) e^{-i\chi_1 x - i\chi_2 y - i\chi_3 z} d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3, \quad (7.2.28)$$

где $g(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = g_1(\chi_1)g_2(\chi_2)g_3(\chi_3)$ — неизвестная спектральная плотность.

С учётом (7.2.28) уравнение Гельмгольца (7.2.25) будет иметь вид:

$$-j_i^{\text{CT}}(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 - \chi_1^2 - \chi_2^2 - \chi_3^2) \times$$

$$\times g(\chi_1, \chi_2, \chi_3) e^{-i\chi_1 x - i\chi_2 y - i\chi_3 z} d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3. \quad (7.2.29)$$

Для определения спектральной плотности $g(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ умножим (7.2.29) на $\exp(i\chi'_1 x + i\chi'_2 y + i\chi'_3 z) / (2\pi)^3$, где $\chi'_1, \chi'_2, \chi'_3$ — фиксированные пока значения χ_1, χ_2, χ_3 , и проинтегрируем (7.2.29) по всему бесконечному пространству:

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j_i^{\text{CT}}(x, y, z) e^{i\chi'_1 x + i\chi'_2 y + i\chi'_3 z} dx dy dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 - \chi_1^2 - \chi_2^2 - \chi_3^2) g(\chi_1, \chi_2, \chi_3) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\chi'_1 - \chi_1)x + i(\chi'_2 - \chi_2)y + i(\chi'_3 - \chi_3)z} \times \right.$$

$$\left. \times dx dy dz \right] d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\chi'_1 - \chi_1)x} dx = \delta(\chi'_1 - \chi_1), \quad (7.2.30)$$

где $\delta(\chi'_1 - \chi_1)$ — дельта-функция Дирака, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\chi'_1 - \chi_1) d\chi_1 = 1. \quad (7.2.31)$$

С учётом этого имеем

$$(k^2 - \chi_1'^2 - \chi_2'^2 - \chi_3'^2) g(\chi'_1, \chi'_2, \chi'_3) =$$

$$= -\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j_i^{\text{CT}} e^{i\chi'_1 x + i\chi'_2 y + i\chi'_3 z} dx dy dz.$$

Полагая волновое число $\chi(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ произвольным и обозначая точки источников как x', y', z' , а точки наблюдения (точки, в которых вычисляется поле) как x, y, z , последнее уравнение переписываем в виде:

$$\begin{aligned} (k^2 - \chi_1^2 - \chi_2^2 - \chi_3^2) g(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = \\ = -\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint_V j_i^{\text{CT}}(x', y', z') e^{i\chi_1 x' + i\chi_2 y' + i\chi_3 z'} dx' dy' dz'. \end{aligned} \quad (7.2.32)$$

Здесь интегрирование производится только по тем точкам пространства, где имеются токи (объём V). Подставив (7.2.32) в (7.2.28) и меняя порядок интегрирования, имеем

$$A_i(x, y, z) = \int_V j_i^{\text{CT}}(x', y', z') G(x, y, z; x', y', z') dx' dy' dz', \quad (7.2.33)$$

где

$$\begin{aligned} G(x, y, z; x', y', z') = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi_1(x-x') - i\chi_2(y-y') - i\chi_3(z-z')}}{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 - k^2} d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3 \quad \text{—} \end{aligned} \quad (7.2.34)$$

функция Грина для свободного пространства.

Выражение (7.2.33) справедливо для всех составляющих A_i ($i = x, y, z$). Поэтому в векторном виде оно имеет вид:

$$\vec{A}(p) = \int_V \vec{j}^{\text{CT}}(q) G(p, q) dV, \quad (7.2.35)$$

где через $p(x, y, z)$ обозначена точка наблюдения поля, а через $q(x', y', z')$ — точка источников поля.

По аналогии могут быть решены и уравнения (7.2.19):

$$\vec{E}(p) = \int_V \vec{M}^e(q) G(p, q) dV, \quad (7.2.36)$$

$$\vec{H}(p) = \int_V \vec{M}^m(q) G(p, q) dV, \quad (7.2.37)$$

где $G(p, q)$ также имеет вид (7.2.34).

Формулы (7.2.35)–(7.2.37) с соответствующей записью функций Грина справедливы для любой системы координат. Функция Грина (7.2.34) может быть представлена в различных формах. Наиболее часто используется выражение

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-i\gamma R}}{R}, \quad (7.2.38)$$

где R — расстояние между точками p и q ; γ — постоянная распространения.

В декартовой системе координат

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Известны два представления функции Грина в цилиндрической системе координат [Л7.1]:

$$G = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi')} \int_{\chi=0}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\chi^2-k^2}|z-z'|} J_n(\chi\rho) J_n(\chi\rho')}{\sqrt{\chi^2-k^2}} \chi d\chi,$$

и

$$G = \frac{1}{8\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi')} \int_{h=-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} g_n(h; \rho, \rho') dh,$$

где

$$g_n(h; \rho, \rho') = \begin{cases} H_n^{(2)}(v\rho') J_n(v\rho), & \rho < \rho' \\ H_n^{(2)}(v\rho) J_n(v\rho'), & \rho > \rho' \end{cases},$$

$$v = -i\sqrt{h^2 - k^2},$$

χ и h имеют смысл поперечного и продольного волновых чисел.

7.3. Электрические и магнитные волны в безграничной среде

В предыдущем разделе была решена внешняя задача излучения: по известным распределениям сторонних электрического $\vec{j}^{e,ст}$ и магнитного $\vec{j}^{m,ст}$ токов были получены соотношения для \vec{E} и \vec{H} в любой точке. В частности, для векторных потенциалов справедливы следующие интегральные соотношения:

$$\vec{A}^e(p) = \int_V \vec{j}^{e,ст}(q) G(p, q) dV, \quad \vec{A}^m(p) = \int_V \vec{j}^{m,ст}(q) G(p, q) dV, \quad (7.3.1)$$

где $p(x, y, z)$ — точка наблюдения поля, $q(x', y', z')$ — точка источников поля.

Цель настоящего раздела — получить в явном виде выражения в различных системах координат для электромагнитного поля в свободном пространстве (области без источников), возбуждаемого расположенными источниками $\vec{j}^{e,ст}$, $\vec{j}^{m,ст}$ в некоторой области V . Будем полагать, что нам известны электродинамические потенциалы \vec{A}^e и \vec{A}^m . Необходимо записать в компактной форме выражения для \vec{E} и \vec{H} .

7.3.1. Электрические и магнитные волны в декартовой системе координат. Запишем уравнения Максвелла для комплексных амплитуд в области без источников в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega\mu_0\mu_k H_x, & \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon_k E_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega\mu_0\mu_k H_y, & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon_k\varepsilon_0 E_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -i\omega\mu_0\mu_k H_z, & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= i\omega\varepsilon_k\varepsilon_0 E_z. \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

В дальнейшем будем рассматривать электромагнитное поле, распространяющееся вдоль оси OZ : $\vec{E} \sim \exp(-i\gamma z)$, $\vec{H} \sim \exp(-i\gamma z)$, где γ — постоянная распространения; ϵ_k, μ_k — комплексные проницаемости среды.

Разрешая уравнения (7.3.2) относительно поперечных компонент, получаем:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\gamma}{\chi^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\omega\mu_0\mu_k}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), & H_x &= -\frac{i\gamma}{\chi^2} \left(-\frac{\omega\epsilon_0\epsilon_k}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \\ E_y &= -\frac{i\gamma}{\chi^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\omega\mu_0\mu_k}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), & H_y &= -\frac{i\gamma}{\chi^2} \left(\frac{\omega\epsilon_0\epsilon_k}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

где $\chi^2 = k^2 \epsilon_k \mu_k - \gamma^2$.

Таким образом, соотношения (7.3.3) говорят о том, что электромагнитное поле задаётся только двумя независимыми составляющими (E_z, H_z). Остальные составляющие можно выразить через них по формулам (7.3.3).

Во многих случаях для свободного пространства удобным оказывается представление электромагнитного поля в виде так называемых *электрических* и *магнитных волн*.

Для волны Е-типа (ТМ) $H_z = 0$. Их обычно называют *поперечно-магнитными* (ТМ), или *электрическими волнами*. Для них соотношения (7.3.3) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\gamma}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, & E_y &= -\frac{i\gamma}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_x &= \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_k}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, & H_y &= -\frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_k}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Для волны Н-типа (ТЕ) $E_z = 0$. Это *поперечно-электрические* (ТЕ), или *магнитные волны*. Для них из (7.3.3) вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\omega\mu_0\mu_k}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, & E_y &= \frac{i\omega\mu_0\mu_k}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ H_x &= -\frac{i\gamma}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y &= -\frac{i\gamma}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Если поле не меняется вдоль оси OZ , то из формул (7.3.4) и (7.3.5) следует, что оно распадается на два независимых $\{H_x, H_y, E_z\}$ и $\{E_x, E_y, H_z\}$.

В общем случае при гармонической зависимости поле можно искать как суперпозицию полей волн Е- и Н-типов.

7.3.2. Электрические и магнитные волны в цилиндрической системе координат.

Дано A_i в декартовой системе координат. Надо перейти к выражениям для электродинамических потенциалов в цилиндрической (ρ, φ, z) системе координат. Можно просто воспользоваться выражением (7.2.33) и подставить в него выражение для функции Грина, записанное в цилиндрической системе координат. Однако такая процедура является достаточно громоздкой.

Ниже будем считать известными выражения для электродинамических потенциалов в декартовой системе координат. Опишем процедуру перехода от A_x, A_y, A_z к A_ρ, A_φ, A_z . В целях максимальной общности рассмотрим переход от декартовой системы координат к произвольной криволинейной ортогональной системе для произвольного вектора \vec{F} . Запишем \vec{F} в двух системах координат:

$$\vec{F} = F_x \vec{x}_0 + F_y \vec{y}_0 + F_z \vec{z}_0, \quad \vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3, \quad (7.3.6)$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — единичные векторы криволинейной ортогональной системы координат. Из (7.3.6) следует, что

$$\begin{aligned} F_1 &= F_x(\vec{x}_0, \vec{e}_1) + F_y(\vec{y}_0, \vec{e}_1) + F_z(\vec{z}_0, \vec{e}_1), \\ F_2 &= F_x(\vec{x}_0, \vec{e}_2) + F_y(\vec{y}_0, \vec{e}_2) + F_z(\vec{z}_0, \vec{e}_2), \\ F_3 &= F_x(\vec{x}_0, \vec{e}_3) + F_y(\vec{y}_0, \vec{e}_3) + F_z(\vec{z}_0, \vec{e}_3). \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

В (7.3.7) скалярные произведения (\vec{e}_i, \vec{e}_j) есть направляющие косинусы. Для их определения может быть использована связь

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \vec{x}_0 + \frac{\partial y}{\partial u_i} \vec{y}_0 + \frac{\partial z}{\partial u_i} \vec{z}_0 \right), \quad (7.3.8)$$

где u_1, u_2, u_3 — криволинейные ортогональные координаты, h_i — коэффициенты Ламе.

Из (7.3.8) следует, что

$$(\vec{x}_0, \vec{e}_i) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial x}{\partial u_i}, \quad (\vec{y}_0, \vec{e}_i) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial y}{\partial u_i}, \quad (\vec{z}_0, \vec{e}_i) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial z}{\partial u_i}. \quad (7.3.9)$$

Рассмотрим конкретный случай — цилиндрическую систему координат. Для неё: $u_1 = \rho$, $u_2 = \varphi$, $u_3 = z$, $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$. Связь между прямоугольными и цилиндрическими координатами следующая:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Определим направляющие косинусы в этой системе координат. Очевидно, что

$$\begin{aligned} (\vec{x}_0, \vec{e}_\rho) &= \cos \varphi, & (\vec{x}_0, \vec{e}_\varphi) &= -\sin \varphi, & (\vec{x}_0, \vec{e}_z) &= 0, \\ (\vec{y}_0, \vec{e}_\rho) &= \sin \varphi, & (\vec{y}_0, \vec{e}_\varphi) &= \cos \varphi, & (\vec{y}_0, \vec{e}_z) &= 0, \\ (\vec{z}_0, \vec{e}_\rho) &= 0, & (\vec{z}_0, \vec{e}_\varphi) &= 0, & (\vec{z}_0, \vec{e}_z) &= 1. \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

Запишем выражения для составляющих \vec{A} в цилиндрической системе координат через A_x, A_y, A_z :

$$A_\rho = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi, \quad A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi, \quad A_z = A_z. \quad (7.3.11)$$

Аналогично можно записать для $\vec{j}^{\text{ст}}$:

$$\begin{aligned} j_\rho^{\text{ст}} &= j_x^{\text{ст}} \cos \varphi + j_y^{\text{ст}} \sin \varphi, \\ j_\varphi^{\text{ст}} &= -j_x^{\text{ст}} \sin \varphi + j_y^{\text{ст}} \cos \varphi, \quad j_z^{\text{ст}} = j_z^{\text{ст}}. \end{aligned} \quad (7.3.11a)$$

Если ток $\vec{j}^{\text{ст}}$ записан в декартовой системе координат, то проще найти сначала A_x, A_y, A_z , а затем по формулам (7.3.11) перейти в цилиндрическую систему координат.

Если ток $\vec{j}^{\text{ст}}$ проще записать в цилиндрической системе координат, то лучше исходить из j_ρ, j_ϕ, j_z . Из (7.3.11), (7.3.11a) и (7.2.33) следует, что

$$\begin{aligned} A_\rho^{e,m}(p) &= \int_V [j_\rho^{e,m\text{ст}} \cos(\phi - \phi') + j_\phi^{e,m\text{ст}} \sin(\phi - \phi')] G(p, q) dV', \\ A_\phi^{e,m}(p) &= \int_V [j_\phi^{e,m\text{ст}} \cos(\phi - \phi') - j_\rho^{e,m\text{ст}} \sin(\phi - \phi')] G(p, q) dV', \\ A_z^{e,m}(p) &= \int_V j_z^{e,m\text{ст}} G(p, q) dV'. \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

В выражениях (7.3.12) поле определяется в точке наблюдения $p(\rho, \phi, z)$, а интегрирование производится по точкам источников $q(\rho', \phi', z')$.

Из (7.2.22) следуют выражения:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0\epsilon_k} \left[k^2 A_z^e + \frac{\partial^2 A_z^e}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\rho^e}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_\phi^e}{\partial \phi \partial z} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi^m) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho^m}{\partial \phi}, \\ H_z &= \frac{1}{i\omega\mu_0\mu_k} \left[k^2 A_z^m + \frac{\partial^2 A_z^m}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\rho^m}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_\phi^m}{\partial \phi \partial z} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi^e) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho^e}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

Остальные составляющие электромагнитного поля можно определить с помощью уравнений Максвелла.

7.3.3. Электрические и магнитные волны в сферической системе координат. В сферической системе координат $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \phi$; $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\phi = r \sin \theta$. Формулы перехода от декартовой системы координат к сферической следующие:

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (7.3.14)$$

С использованием общих формул (7.3.7) нетрудно записать соотношения между A_r, A_θ, A_ϕ и A_x, A_y, A_z :

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \cos \phi \sin \theta + A_y \sin \phi \sin \theta + A_z \cos \theta, \\ A_\theta &= A_x \cos \phi \cos \theta + A_y \sin \phi \cos \theta - A_z \sin \theta, \\ A_\phi &= -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi. \end{aligned} \quad (7.3.15)$$

Аналогичные соотношения можно записать и для $\vec{j}^{\text{ст}}$. Если известна запись тока $\vec{j}^{\text{ст}}$ в сферической системе координат, то при расчёте электромагнитного поля проще исходить из других формул:

$$\begin{aligned} A_r^{e,m}(p) &= \int_V F^{e,m}(p, q) G(p, q) dV', \\ A_\theta^{e,m}(p) &= \int_V \frac{\partial F^{e,m}(p, q)}{\partial \theta} G(p, q) dV', \\ A_\phi^{e,m}(p) &= \int_V \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F^{e,m}(p, q)}{\partial \phi} G(p, q) dV', \end{aligned} \quad (7.3.16)$$

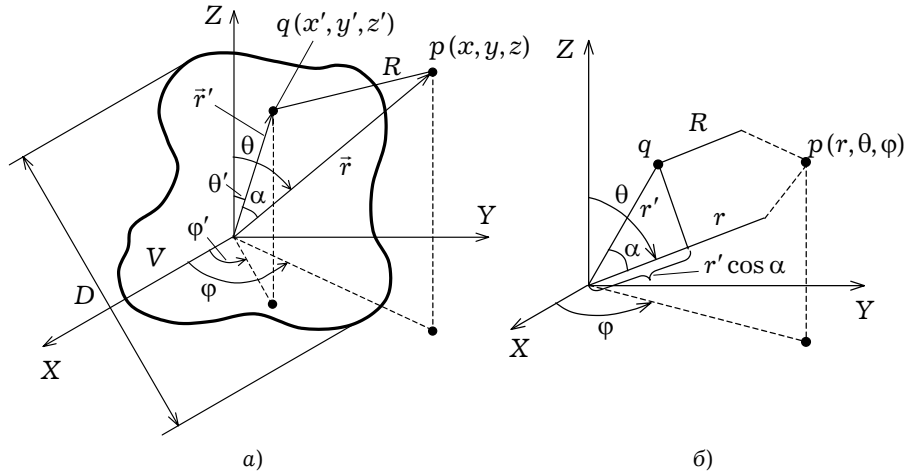


Рис. 7.5

где

$$F^{e,m}(p, q) = \left[j_r^{\text{ст}, e, m} \cos \beta + j_\theta^{\text{ст}, e, m} \frac{\partial (\cos \beta)}{\partial \theta'} + j_\phi^{\text{ст}, e, m} \frac{1}{\sin \theta'} \frac{\partial (\cos \beta)}{\partial \phi'} \right],$$

$$\cos \beta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi').$$

Интегрирование в (7.3.16) производится по точкам $q(r', \theta', \phi')$; $p(r, \theta, \phi)$ — точка наблюдения. Выражения для \vec{E} и \vec{H} в сферической системе координат записываются с помощью (7.2.22).

7.4. Расчёт электромагнитных полей излучающих систем в дальней, промежуточной и ближней областях

Как было показано выше, векторные потенциалы электромагнитного поля, создаваемые известными электрическим и магнитным токами \vec{j}^e, \vec{j}^m в объёме V в произвольной точке наблюдения $p(x, y, z)$, определяются выражениями

$$\vec{A}^{e,m}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{j}^{e,m}(x', y', z') \frac{e^{-ikR}}{R} dV', \quad (7.4.1)$$

где $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ — расстояние между точками наблюдения $p(x, y, z)$ и интегрирования $q(x', y', z')$. Векторы \vec{E} и \vec{H} для любой точки пространства определяются через векторные электродинамические потенциалы формулами (7.2.22). Соотношения (7.2.22) и (7.4.1) являются строгими и применимы при любых взаимных расположениях точек источников и точек наблюдения. Однако с помощью их, как правило, не удаётся получить простые замкнутые (аналитические) выражения даже для сравнительно простых излучающих систем. Поэтому приходится прибегать к упрощающим предположениям, связанным с разбиением пространства на *дальнюю, промежуточную и ближнюю* области.

Введём сферическую систему координат $\{r, \theta, \phi\}$, центр которой помещён внутри излучающей системы (объём V на рис. 7.5а). Пусть точки $q(x', y', z')$ и $p(x, y, z)$ изображают соответственно текущую точку интегрирования внутри излучающей системы и точку наблюдения в окружающей однородной среде. Расстояние R , входящее в формулу (7.4.1), в сферической системе координат записывается как

$$R = (r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \alpha)^{1/2}, \quad (7.4.2)$$

где r — расстояние от начала координат до точки p ; r' — расстояние от начала координат до точки q , α — угол между векторами \vec{r} и \vec{r}' (рис. 7.5а).

Если $r > D$, где D — максимальный линейный размер излучающей зоны, то $r > r'$ (точка наблюдения находится вне объёма с излучающими токами) и расстояние R между точками $p(r, \theta, \phi)$ и $q(r', \theta', \phi')$ можно приближённо представить в виде ряда по степеням r'/r :

$$R = r \left[1 - \frac{r'}{r} \cos \alpha + \frac{(r')^2}{2r^2} (1 - \cos^2 \alpha) + \frac{(r')^3}{2r^3} \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) + \dots \right]. \quad (7.4.3)$$

Для упрощения расчётов электромагнитных полей в теории антенн выделяют три области: дальнюю, промежуточную и ближнюю зоны.

7.4.1. Дальняя зона. Её часто называют *зоной Фраунгофера*. Для неё полагают $r \gg D$, а следовательно и $r \gg r'$. В этом случае формулу (7.4.1) принято записывать в следующем асимптотическом виде:

$$\vec{A}_{\infty}^{e,m}(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \int_V \vec{j}^{e,m}(x', y', z') e^{ikr' \cos \alpha} dV', \quad (7.4.4)$$

где нижний индекс « ∞ » показывает, что это выражение справедливо при $r \rightarrow \infty$. При выводе формулы (7.4.4) делаются два упрощения. Во первых, в знаменателе подынтегрального выражения (7.4.1) приближённо полагается $R \approx r$ и множитель $1/r$ выводится из-под знака интеграла. Во вторых, в показателе экспоненты под интегралом в (7.4.1) полагается $R \approx r - r' \cos \alpha$, то есть в разложении (7.4.3) учитываются только первые два слагаемые. Учёт второго слагаемого в (7.4.3) при замене R на приближённое выражение в показателе экспоненты объясняется тем, что отбрасываемые члены должны быть малы по сравнению с величиной 2π (периодом экспоненты с мнимым показателем). Таким образом, второе упрощение означает, что лучи, проведённые в точку наблюдения p дальней зоны из начала координат и из текущей точки интегрирования q , считаются параллельными (рис. 7.5б). Дополнительное слагаемое $r' \cos \alpha$ в записи R носит название *разности хода лучей*. Оно учитывает запаздывание сферических волн, приходящих в точку наблюдения от двух точечных источников, расположенных в начале координат и в точке $q(r', \theta', \phi')$. В явном виде разность хода лучей можно записать следующим образом:

$$r' \cos \alpha = x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta. \quad (7.4.5)$$

Уточним границу применимости формулы (7.4.4), то есть найдём внутреннюю границу дальней зоны. Основное упрощение, которое было сделано, заключается в отбрасывании третьего слагаемого в (7.4.3) при записи показателя экспоненты под интегралом. Возникающая при этом фазовая ошибка оказывается приближённо равной $k(r')^2 \sin^2 \alpha / (2r)$. Так как максимальное значение $r'_{\max} \approx D/2$, то наибольшая фазовая ошибка может быть $\Delta\varphi_{\max} = k D^2 / (8r)$. Обычно полагают $\Delta\varphi_{\max} = \pi/8$, и тогда нижняя (внутренняя) граница дальней зоны определяется как

$$r \geq \frac{2D^2}{\lambda}. \quad (7.4.6)$$

При увеличении размера излучающей системы D граница дальней зоны быстро отодвигается. Например, при $D/\lambda = 10$ дальняя зона начинается с расстояния $r > 200\lambda$, а при $D/\lambda = 100$ началу дальней зоны соответствует $r > 20000\lambda$. При частоте $f = 10$ ГГц ($\lambda = 3$ см) эти расстояния соответственно равны 6 м и 600 м.

Для перехода от векторных потенциалов $\vec{A}_{\infty}^{e,m}$, определяемых формулами (7.4.4), к векторам полей \vec{E} и \vec{H} в дальней зоне необходимо подставить (7.4.4) в выражения (7.2.22). После достаточно громоздких преобразований и отбрасывания членов, имеющих радиальную зависимость $1/r^3$ и $1/r^2$, то есть несущественных в дальней зоне, получаем [Л7.5]:

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= -ik[Z_K A_{\infty\theta}^e + A_{\infty\varphi}^m], & H_{\varphi} &= E_{\theta} / Z_K, \\ E_{\varphi} &= -ik[Z_K A_{\infty\varphi}^e - A_{\infty\theta}^m], & H_{\theta} &= -E_{\varphi} / Z_K, \\ E_r &= H_r = 0. \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

На практике вычисления электродинамических потенциалов удобно производить в декартовой системе координат ($i = x, y, z$):

$$\begin{aligned} A_{\infty,i}^{e,m} &= \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \int_V j_i^{e,m}(x', y', z') \times \\ &\times \exp[ik(x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi + z' \cos \theta)] dx' dy' dz', \end{aligned}$$

а затем переходить к сферическим координатам с помощью соотношений (7.3.15).

Поскольку на практике наибольший интерес представляет поле в дальней зоне, перечислим его основные свойства в этой области:

1. Электромагнитное поле от любой антенны в дальней зоне имеет *поперечный характер*: составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} в направлении распространения отсутствуют ($E_r = H_r = 0$).

2. Поле в окрестности любой точки наблюдения в дальней зоне носит *характер плоской электромагнитной волны*, то есть компоненты E_{θ} и H_{φ} , а также E_{φ} и H_{θ} , находятся в фазе и их отношение, как следует из (7.4.7), равно характеристическому сопротивлению среды:

$$E_{\theta} / H_{\varphi} = Z_K, \quad E_{\varphi} / H_{\theta} = -Z_K. \quad (7.4.8)$$

3. Зависимость поля от расстояния r имеет *вид расходящейся сферической волны* $\exp(-ikr)/r$. Однако поверхности равных фаз для каждой компоненты поля в общем случае не являются сферами, так как E_{θ} и E_{φ} — комплексные функции, зависящие от углов φ, θ , а начало координат выбрано произвольно.

4. Пространственные распределения составляющих \vec{E} в дальней зоне не зависят от расстояния r и описываются функциями угловых координат:

$$F_\theta(\theta, \varphi) = \frac{E_\theta(\theta, \varphi)}{|E_{\theta \max}(\theta_1, \varphi_1)|}, \quad F_\varphi(\theta, \varphi) = \frac{E_\varphi(\theta, \varphi)}{|E_{\varphi \max}(\theta_2, \varphi_2)|}, \quad (7.4.9)$$

где θ_1, φ_1 и θ_2, φ_2 — углы максимального излучения для соответствующих компонентов. Функции F_θ и F_φ называют *нормированными характеристиками направленности по полю* для соответствующих составляющих, а их графические изображения — *нормированными диаграммами направленности по напряжённости*.

5. Среднее по периоду значение плотности потока мощности $\langle \vec{S} \rangle$ в дальней зоне связано с комплексным вектором Умова–Пойнтинга \vec{S}_k известным соотношением

$$\langle \vec{S} \rangle = \text{Re } \vec{S}_k = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] = \vec{r}_0 \text{Re} [(E_\theta H_\varphi^* - E_\varphi H_\theta^*)/2]. \quad (7.4.10)$$

В силу (7.4.7), (7.4.8)

$$\langle \vec{S} \rangle = \vec{r}_0 \frac{|E_\theta(\theta, \varphi)|^2 + |E_\varphi(\theta, \varphi)|^2}{2Z_k} = \vec{r}_0 \frac{|\vec{E}(\theta, \varphi)|^2}{2Z_k}. \quad (7.4.11)$$

Из (7.4.11) следует, что вектор $\langle \vec{S} \rangle$ в дальней зоне направлен радиально. Мнимая часть среднего значения плотности потока мощности равна нулю.

Функция угловых координат:

$$F^2(\theta, \varphi) = \frac{\langle \vec{S} \rangle_r}{\langle \vec{S}(\theta_0, \varphi_0) \rangle_{r \max}}, \quad (7.4.12)$$

где $\langle \vec{S} \rangle_{r \max}$ — r -составляющая модуля вектора $\langle \vec{S} \rangle_r$ в направлении максимального излучения, задаваемого углами θ_0, φ_0 , — называется *нормированной характеристикой направленности по мощности*, а её график — *нормированной диаграммой направленности по мощности*.

7.4.2. Промежуточная область (зона Френеля). При расчёте полей антенн в промежуточной области используются следующие приближения:

1. Как и в случае дальней зоны, R в знаменателе подынтегрального выражения (7.4.1) принимается приближённо равным r ($R \approx r$) и выносится из-под знака интеграла.

2. В показателе экспоненты подынтегральной функции в (7.4.1) в соответствии (7.4.3) принимается

$$R \approx r - r' \cos \alpha + (r')^2 \sin^2 \alpha / (2r),$$

что соответствует отбрасыванию в степенном ряду (7.4.3) членов $(r'/r)^n$ выше второй степени.

Таким образом, в промежуточной области векторные потенциалы вычисляются по формуле

$$\vec{A}_\Phi^{e,m}(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \int_V \vec{j}^{e,m}(x', y', z') e^{ik[r' \cos \alpha - r'^2 \sin^2 \alpha / (2r)]} dV'.$$

3. При выполнении операций пространственного дифференцирования в формулах (7.2.22) отбрасываются все члены, имеющие радиальные зависимости $1/r^2$ и $1/r^3$, аналогично тому, как это делалось при вычислении полей дальней зоны. Следовательно, компоненты векторов полей \vec{E} и \vec{H} в промежуточной области могут быть найдены по формулам (7.4.7) с заменой в них

$$\vec{A}_{\infty}^{e,m} \rightarrow \vec{A}_{\phi}^{e,m}.$$

Анализ использованных приближений зоны Френеля приводит к тому, что расстояние r , на котором они выполняются, должно находиться в пределах:

$$\frac{D}{4} + \frac{D}{2} \left(\frac{D}{\lambda} \right)^{1/3} \leq r \leq \frac{2D^2}{\lambda}. \quad (7.4.13)$$

Величина $D/4$ в левой части неравенства (7.4.10) учитывает амплитудную ошибку, возникающую в связи с заменой $1/R$ на $1/r$.

При $D = 10\lambda$ промежуточная зона определяется как $13.5\lambda \leq r \leq 200\lambda$, а при $D = 100\lambda$: $250\lambda \leq r \leq 20000\lambda$. Более строгое рассмотрение допущений, сделанных при расчёте полей в дальней и промежуточной зонах, показывает, что границы этих областей зависят не только от расстояния r , но и от углов наблюдения θ , ϕ , а также от геометрии излучающей системы и характера распределения сторонних токов.

7.4.3. Ближняя зона. В ближней зоне электромагнитное поле имеет как поперечные, так и продольные составляющие; зависимость от расстояния r носит нерегулярный характер. При этом необходимо исходить из строгой формулы для электродинамического потенциала (7.4.1).

Поле в ближней зоне имеет квазистатический характер. В силу выполнения условия: $r \ll \lambda$ можно пренебрегать запаздыванием. В результате пространственные распределения электрического и магнитного полей, создаваемых, например, каким-то источником с электрическим моментом \vec{p} , совпадают соответственно с полем статического электрического диполя и с полем постоянного линейного тока.

Необходимость знания поля в ближней зоне связана с расчётом входного сопротивления антенн, эффектов взаимной связи между близко расположенными антеннами (проблема электромагнитной совместимости), влияния поля на обслуживающий персонал.

7.5. Излучение электромагнитных волн элементарными излучателями

Любую излучающую систему можно рассматривать как совокупность множества элементарных излучателей. Это позволяет воспользоваться принципом суперпозиции и определить поле антенны как геометрическую сумму полей элементарных излучателей. Поля самих элементарных излучателей находятся по заданному распределению тока с помощью решения уравнений Максвелла. При их решении обычно полагают, что ток не меняется вдоль длины элементарного излучателя. К элементарным излучателям относятся: элементарный электрический вибратор (диполь Герца), элементарная рамка с током (магнитный диполь), элементарная щель в металлическом экране и излучатель Гюйгенса.

7.5.1. Элементарный электрический вибратор (диполь Герца). Диполь Герца представляет собой тонкий проводник длиной l с шарами на концах. Шары создают ёмкость, которая позволяет получить постоянную амплитуду тока вдоль проводника.

Вычислим поле электрического диполя в неограниченном пространстве. Поместим диполь в начало сферической системы координат и ориентируем его вдоль оси OZ (рис.7.6). Объёмное распределение плотности тока в диполе представим в виде

$$j_z^e(x', y', z') = I_z^e l \delta(x') \delta(y') \delta(z'), \quad j_x^e = j_y^e = 0, \quad (7.5.1)$$

где $I_z^e l$ — момент тока диполя, $\delta(\alpha)$ — дельта-функция Дирака.

Подставив (7.5.1) в первую формулу (7.3.1), найдём составляющие векторного электрического потенциала в декартовой системе координат:

$$A_z^e = \frac{I_z^e l e^{-ikr}}{4\pi r}, \quad A_x^e = A_y^e = 0, \quad (7.5.2)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Воспользовавшись формулами связи между выражениями для электродинамического потенциала в декартовой и сферической системах координат (7.3.15) и выражением (7.5.2), запишем:

$$A_r^e = \frac{I_z^e l}{4\pi} \cos \theta \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad A_\theta^e = -\frac{I_z^e l}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad A_\phi^e = 0. \quad (7.5.3)$$

Далее, используя выражения (7.2.22) в сферической системе координат, после подстановки в них (7.5.3) найдём составляющие электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{I_z^e l}{4\pi} \sin \theta \left[\frac{e^{-ikr}}{r^2} + ik \frac{e^{-ikr}}{r} \right], \\ E_r &= \frac{I_z^e l}{2\pi i \omega \epsilon_0 \epsilon_k} \cos \theta \left[\frac{e^{-ikr}}{r^3} + ik \frac{e^{-ikr}}{r^2} \right], \\ E_\theta &= \frac{I_z^e l}{4\pi i \omega \epsilon_0 \epsilon_k} \sin \theta \left[\frac{e^{-ikr}}{r^3} + ik \frac{e^{-ikr}}{r^2} - k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \right], \\ H_r &= H_\theta = E_\phi = 0. \end{aligned} \quad (7.5.4)$$

Рассмотрим электромагнитное поле диполя в различных зонах пространства.

1. *Ближняя зона.* Для ближней зоны $kr \ll 1$, то есть расстояние от диполя до точек наблюдения в длинах волн (для среды без потерь) много меньше единицы $r/\lambda \ll 1$. При этом можно положить $e^{-ikr} \approx 1$, то есть пренебречь запаздыванием поля. Тогда выражения (7.5.4) примут вид:

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{I_z^e l}{4\pi r^2} \sin \theta, \quad E_r = \frac{I_z^e l}{2\pi i \omega \epsilon_0 \epsilon_k r^3} \cos \theta, \\ E_\theta &= \frac{I_z^e l}{4\pi i \omega \epsilon_0 \epsilon_k r^3} \sin \theta. \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

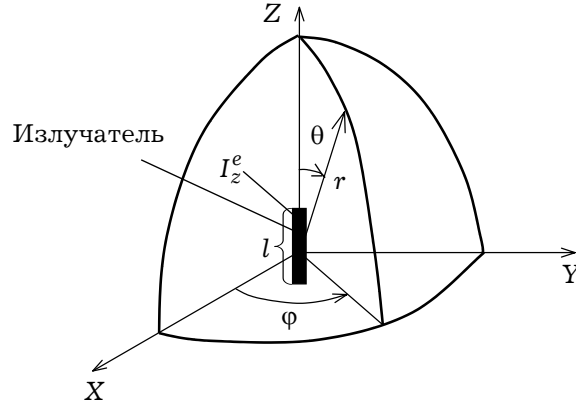


Рис. 7.6

Из (7.5.5) следует, что электрическое и магнитное поля сдвинуты по фазе на 90° , причём электрическое поле отстаёт по фазе от магнитного поля.

Комплексный вектор Умова–Пойнтинга носит реактивный (мнимый) характер. Это означает, что в одну четверть периода энергия отдаётся источником окружающему пространству, в другую четверть периода эта энергия возвращается к источнику, то есть энергия ближнего поля находится в колебательном состоянии. Таким образом, выражения (7.5.5) определяют квазистационарные поля. Выражение для H_ϕ фактически является формулой Био–Савара для элементарного линейного тока. Формулы для напряжённости электрического поля совпадают с законом Кулона для двух разноимённых электрических зарядов одинаковой величины. Ближняя зона называется *областью реактивного ближнего поля*.

2. *Дальняя зона.* Для дальней зоны $kr \gg 1$. Из (7.5.4) следует

$$E_\theta = \frac{i I_z^e l k^2}{4\pi r \omega \epsilon_0 \epsilon_k} \sin \theta e^{-ikr}, \quad H_\phi = \frac{i I_z^e l k}{4\pi r} \sin \theta e^{-ikr}. \quad (7.5.6)$$

Из (7.5.6) видно, что в дальней зоне электрическое и магнитное поля находятся в фазе. Электромагнитное поле в дальней зоне является поперечным.

Среднее значение вектора плотности потока мощности в дальней зоне записывается как

$$\langle \vec{S} \rangle = \text{Re} \vec{S}_k = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] = \vec{r}_0 \frac{|I_z^e|^2 l^2 k^3}{32\pi^2 \omega \epsilon_0 \epsilon_k r^2} \sin^2 \theta, \quad (7.5.7)$$

и он (поток) ориентирован в направлении возрастания r , то есть энергия вибратора излучается в окружающее пространство.

Мощность излучения P_Σ диполя находится интегрированием составляющей вектора $\langle \vec{S} \rangle_r$ по поверхности сферы радиуса r :

$$P_\Sigma = \int_S \langle \vec{S} \rangle_r dS = \frac{|I_z^e|^2 l^2 k^3}{32\pi^2 \omega \epsilon_0 \epsilon_k} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = |I_z^e|^2 \frac{R_\Sigma}{2}, \quad (7.5.8)$$

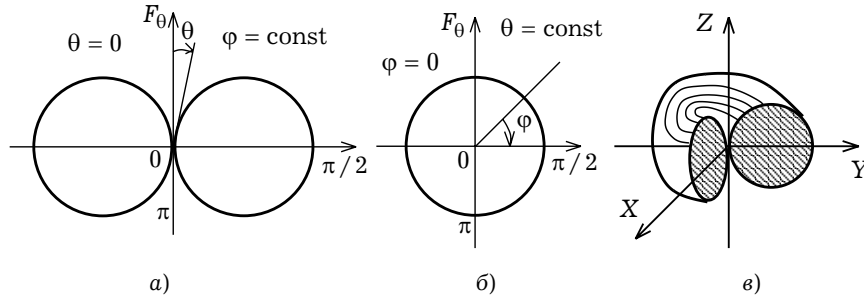


Рис. 7.7

где $R_{\Sigma} = 2\pi Z_{\kappa} l^2 / (3\lambda^2)$ — сопротивление излучения диполя. Формула (7.5.8) определяет полную мощность излучения диполя в среднем за период.

Угловые распределения составляющих поля \vec{E} при $r = \text{const}$ в дальней зоне не зависят от r и могут быть описаны с помощью функций ($E_{\varphi} = 0$):

$$F_{\theta}(\theta, \varphi) = \frac{E_{\theta}(\theta, \varphi)}{|E_{\theta \max}(\theta_1, \varphi_1)|}, \quad F_{\varphi}(\theta, \varphi) = 0, \quad (7.5.9)$$

где θ_1, φ_1 — углы максимального излучения компоненты.

Из (7.5.6) и (7.5.9) следует, что

$$F_{\theta}(\theta, \varphi) = \sin \theta.$$

Это объёмная функция двух переменных $\{\theta, \varphi\}$.

Для анализа диаграммы направленности обычно вводят две плоскости: меридиональную ($\varphi = 0$) и азимутальную ($\theta = \pi/2$). В меридиональной плоскости функция

$$F_{\theta}(\theta, \varphi = \text{const}) = \sin \theta \quad (7.5.9a)$$

представляет собой две касательные окружности, центры которых лежат на прямой, перпендикулярной оси вибратора, и проходят через его середину (рис. 7.7a). В азимутальной плоскости напряжённость электрического поля не зависит от угла φ :

$$F_{\theta}(\theta = \pi/2, \varphi) = 1, \quad (7.5.9b)$$

то есть диаграмма направленности представляет собой окружность с центром на середине вибратора (рис. 7.7б). Пространственное изображение диаграммы направленности элементарного электрического вибратора дано на рис. 7.7в.

7.5.2. Элементарный магнитный излучатель. Физическую модель элементарного магнитного вибратора (рис. 7.8a) можно получить, если взять стержень из материала с магнитной проницаемостью значительно больше магнитной проницаемости окружающей среды, например, из феррита. В качестве возбуждающего устройства можно использовать петлю, обтекаемую током проводимости. Постоянство вектора магнитной индукции вдоль стержня обеспечивается с помощью шаров на его концах, выполненных из магнитного материала ($\mu \neq 1$).

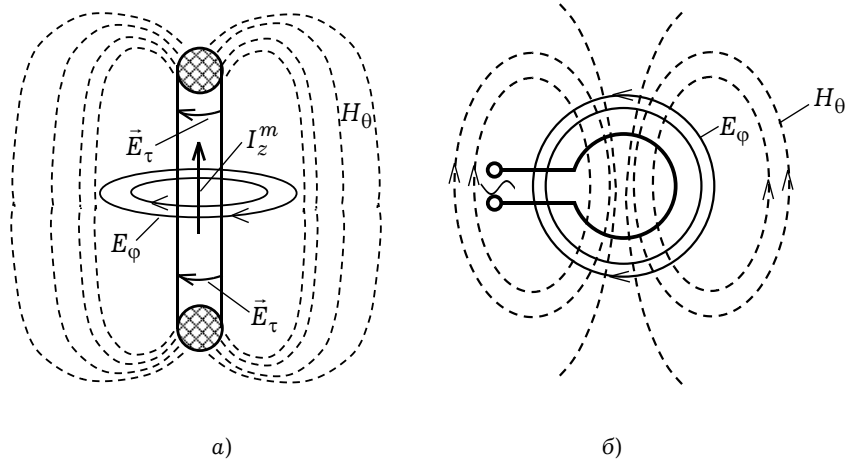


Рис. 7.8

Определим поле элементарного магнитного диполя в неограниченном пространстве, поместив его в начало сферической системы координат и ориентируя его вдоль оси OZ , как на рис. 7.6. Объёмное распределение плотности магнитного тока представим в виде:

$$j_z^m(x, y, z) = I_z^m l \delta(x) \delta(y) \delta(z), \quad j_x^m = j_y^m = 0, \quad (7.5.10)$$

где l — длина магнитного излучателя, I_z^m — амплитуда магнитного тока, представляющая собой произведение модуля тангенциальной составляющей напряжённости электрического поля на поверхности вибратора $|\vec{E}_\tau|$ на периметр его поперечного сечения.

Поле излучения, создаваемое элементарным магнитным излучателем, можно найти с помощью формул (7.4.1) и (7.2.22). Но поскольку задача об элементарном электрическом излучателе уже решена, поле аналогичного магнитного излучателя проще всего найти, воспользовавшись *принципом двойственности*. Если в записи поля излучения электрического вибратора (7.5.4) сделать замену:

$$\varepsilon_0 \varepsilon_k \leftrightarrow -\mu_0 \mu_k, \quad \vec{E} \rightarrow \vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow -\vec{E}, \quad I_z^e \rightarrow -I_z^m, \quad (7.5.11)$$

получим выражения для составляющих электромагнитного поля элементарного магнитного излучателя

$$\begin{aligned} E_\phi &= -\frac{I_z^m l}{4\pi} \sin \theta \left[\frac{e^{-ikr}}{r^2} + ik \frac{e^{-ikr}}{r} \right], \\ H_r &= \frac{I_z^m l}{2\pi i \omega \mu_0 \mu_k} \cos \theta \left[\frac{e^{-ikr}}{r^3} + ik \frac{e^{-ikr}}{r^2} \right], \\ H_\theta &= \frac{I_z^m l}{4\pi i \omega \mu_0 \mu_k} \sin \theta \left[\frac{e^{-ikr}}{r^3} + ik \frac{e^{-ikr}}{r^2} - k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \right]. \end{aligned} \quad (7.5.12)$$

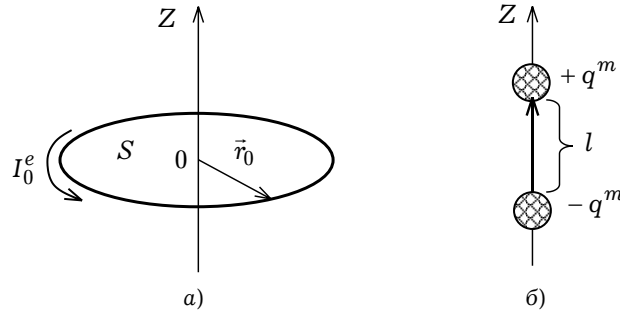


Рис. 7.9

Поле элементарного магнитного излучателя в дальней зоне (зоне излучения) определяется формулами:

$$\begin{aligned} E_\phi &= \frac{-i I_z^m l k}{4\pi r} \sin \theta e^{-ikr}, \\ H_\theta &= \frac{i I_z^m l k^2}{4\pi r \omega \mu_0 \mu_k} \sin \theta e^{-ikr}, \\ E_r &= E_\theta = H_r = H_\phi = 0. \end{aligned} \quad (7.5.13)$$

Соответственно, нормированные характеристики направленности в дальней зоне описываются с помощью соотношений вида (7.5.9):

$$F_\phi(\theta, \phi = 0) = \sin \theta, \quad F_\phi(\theta = \pi/2, \phi) = 1, \quad (7.5.14)$$

что говорит о том, что формы диаграмм направленности элементарных электрического и магнитного вибраторов одинаковы. Мощность излучения, в соответствии с формулами (7.5.7) и (7.5.8), определяется выражением

$$P_\Sigma = \frac{(kl)^2}{12\pi Z_k} |I_z^m|^2, \quad (7.5.15)$$

Поскольку магнитный ток I_z^m имеет размерность напряжения, то излучаемую мощность удобно определять через проводимость излучения G_Σ :

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} G_\Sigma |I_z^m|^2, \quad (7.5.16)$$

где

$$G_\Sigma = \frac{1}{6\pi Z_k} (kl)^2. \quad (7.5.17)$$

7.5.3. Элементарная рамка. Свойства элементарного магнитного вибратора реализуются в элементарной электрической рамке (петле тока). Элементарная рамка (рис. 7.8б) создаёт электромагнитное поле, линии магнитной составляющей которого расположены перпендикулярно плоскости рамки, а линии электрического поля

лежат в указанной плоскости или параллельны ей. Замкнутому контуру (рис. 7.9а), по которому протекает высокочастотный электрический ток с амплитудой I_0^e , можно сопоставить эквивалентный магнитный диполь (рис. 7.9б) с магнитным моментом

$$\vec{m} = \vec{z}_0 \mu_0 \mu_K I_0^e S, \quad (7.5.18)$$

где S — площадь рамки. С другой стороны, магнитный момент для эквивалентного магнитного диполя (рис. 7.9б) определяется следующим образом:

$$\vec{m} = q^m l \vec{z}_0, \quad (7.5.19)$$

где q^m — магнитный заряд на концах вибратора.

Формулу (7.5.18) можно использовать на больших расстояниях r для малых рамок:

$$d_0 \ll \lambda, \quad r \gg d_0, \quad (7.5.20)$$

где d_0 — максимальный размер рамки.

Установим связь между магнитным зарядом q^m и комплексной амплитудой фиктивного стороннего магнитного тока I_z^m . Будем понимать под элементом фиктивного магнитного тока — тонкий цилиндр с поперечным сечением S длиной l по оси OZ (рис. 7.9б), по которому протекает ток с комплексной амплитудой I_z^m . Таким образом, $I_z^m = j_z^m S$ и $\vec{j}_z^m = \vec{z}_0 j^m$.

Из закона сохранения магнитного заряда имеем

$$\frac{d j_z^m}{dz} = -i\omega \rho^m. \quad (7.5.21)$$

Умножив левую и правую части (7.5.21) на $S \Delta z$, получим

$$\Delta I_z^m = -i\omega \Delta q^m,$$

где $\Delta I_z^m = (dI_z^m / dz) \Delta z$, $\Delta q^m = \rho^m S \Delta z = \rho^m \Delta V$ — магнитный заряд в объёме $\Delta V = S \Delta z$. Из (7.5.21) видно, что как на отрезке l , так и вне его $\Delta I_z^m = 0$. Изменение тока от нуля до максимального значения и наоборот происходит только на концах отрезка l , то есть на этих концах, можно считать, сосредоточены колеблющиеся магнитные заряды с комплексными амплитудами:

$$q^m = \pm i I_z^m l / \omega. \quad (7.5.22)$$

Подставив (7.5.22) в (7.5.18) комплексную амплитуду магнитного момента элементарного магнитного диполя определим как

$$\vec{m} = -i \frac{I_z^m l}{\omega} \vec{z}_0 = q^m l \vec{z}_0, \quad (7.5.23)$$

где

$$I_z^m l = i\omega \mu_0 \mu_K I_0^e S. \quad (7.5.24)$$

Таким образом, свойства элементарной рамки с током можно описать соотношениями (7.5.12)–(7.5.14), в которые необходимо подставить (7.5.24). Вместо формул (7.5.13) для электромагнитного поля элементарной рамки с магнитным моментом (7.5.23) в

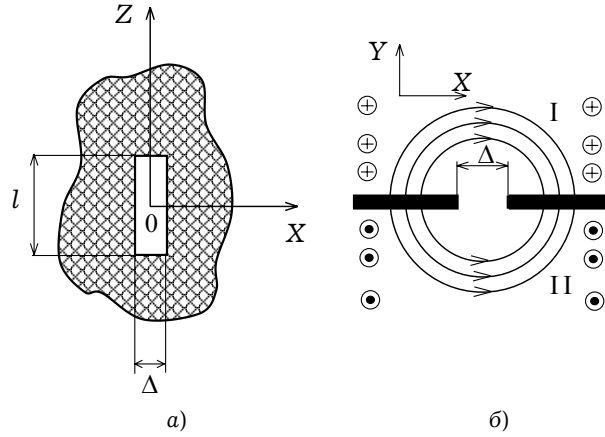


Рис. 7.10

дальней зоне (7.5.19) имеем

$$E_{\varphi} = \frac{\omega \mu_0 \mu_k I_0^e S k}{4\pi r} \sin \theta e^{-ikr},$$

$$H_{\theta} = -\frac{I_0^e S k^2}{4\pi r} \sin \theta e^{-ikr},$$
(7.5.25)

где I_0^e — амплитуда высокочастотного тока в рамке.

7.5.4. Элементарный щелевой вибратор (ЭЩВ). Свойства элементарной излучающей щели (рис. 7.10) также достаточно просто описываются с помощью соотношений, полученных для элементарного магнитного вибратора. Элементарный щелевой вибратор можно представить как бесконечно тонкую металлическую пластину неограниченных размеров, в которой прорезана щель длиной l и шириной Δ , причём

$$\Delta \ll l \ll \lambda. \quad (7.5.26)$$

Электромагнитное поле ЭЩВ по своей структуре напоминает поле элементарного магнитного вибратора, с тем отличием, что линии электрического поля в первом полупространстве направлены навстречу линиям \vec{E} во втором полупространстве (рис. 7.10б), но это различие несущественно так как оба полупространства независимы.

В соответствии с определением поверхностной плотности магнитного тока

$$\vec{\eta}^m = -[\vec{n}_0 \times \vec{E}] = -[\vec{y}_0 \times \vec{E}]$$

получаем:

$$\vec{\eta}^m = E_x \vec{z}_0. \quad (7.5.27)$$

Следовательно, магнитный ток в щели вычисляется как

$$I_z^m = 2E_x \Delta = 2U, \quad (7.5.28)$$

где U — напряжение между краями щели; множитель 2 в (7.5.28) учитывает специфику поля на рис. 7.10б.

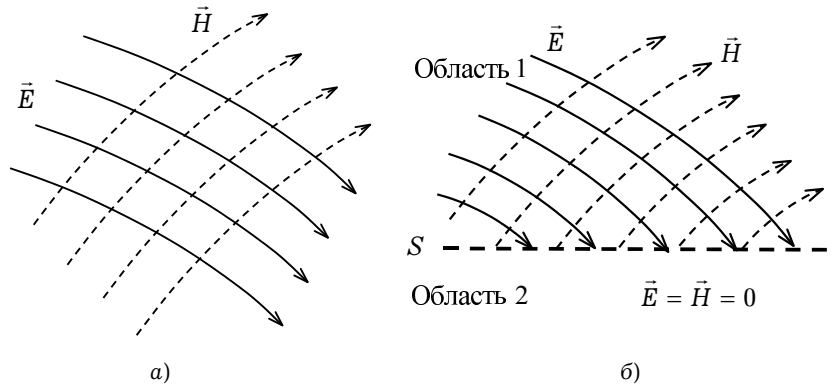


Рис. 7.11

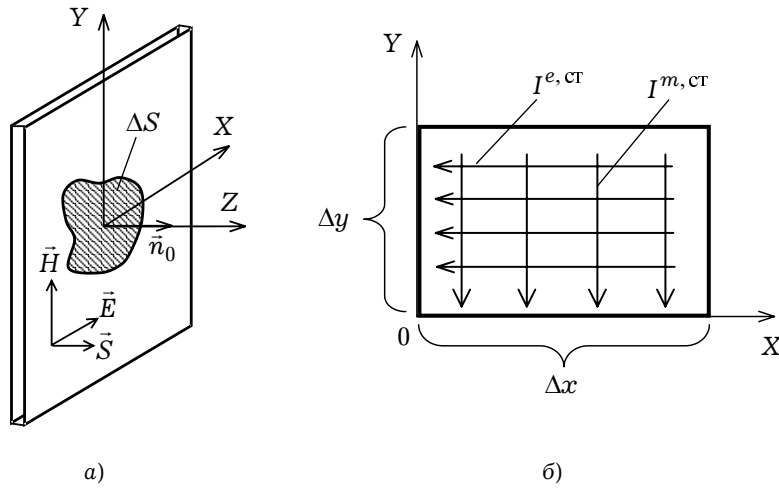


Рис. 7.12

Таким образом, для элементарного щелевого вибратора справедливы соотношения (7.5.12)-(7.5.17), в которых под магнитным током I_z^m необходимо понимать магнитный ток, плотность которого определяется выражениями (7.5.27), а величина — выражением (7.5.28). В частности, для мощности излучения ЭЩВ справедлива формула (7.5.15). Если выразить эту же мощность через проводимость излучения G_Σ :

$$P_\Sigma = 0.5 G_\Sigma U^2, \quad (7.5.29)$$

то

$$G_\Sigma = \frac{2}{3\pi Z_K} (kl)^2 = \frac{8\pi}{3Z_K} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (7.5.30)$$

Для свободного пространства $Z_k = Z_0 = 120\pi$. Тогда проводимость излучения, входящая в (7.5.29), (7.5.30) запишется как

$$G_\Sigma = \frac{1}{45} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (7.5.31)$$

7.5.5. Элементарный излучатель Гюйгенса. При определении поля излучения иногда бывает удобно вместо действительных источников рассматривать так называемые *эквивалентные источники*. Именно так делалось выше, когда анализировался элемент фиктивного магнитного тока для определения поля излучения, создаваемого кольцевым сторонним током. Особенно важную роль играет представление эквивалентных поверхностных источников. Рассмотрим некоторое электромагнитное поле \vec{E} , \vec{H} ; характеризующие его электрические и магнитные силовые линии изображены на рис. 7.11а. Пусть это же поле существует только в области 1 и отсутствует в области 2 (рис. 7.11б). Какие условия надо поставить на разделяющей границе S (штриховая линия), чтобы их действие оказалось эквивалентным ликвидации поля в области 2?

Ясно, что при переходе через поверхность S все компоненты векторов поля должны зануляться. Разрывы компонент \vec{D}_n и \vec{H}_τ , как известно, соответствуют существованию поверхностных электрических зарядов ξ^e и поверхностного электрического тока $\vec{\eta}^e$. Поскольку поле отсутствует в области 2, на поверхности S должны выполняться условия

$$\xi^e = \epsilon_0 (\epsilon_k \vec{E}^s, \vec{n}_0), \quad \vec{\eta}^e = [\vec{n}_0, \vec{H}^s], \quad (7.5.32)$$

где \vec{E}^s, \vec{H}^s — поля на поверхности S .

Разрывы составляющих \vec{B}_n и \vec{E}_τ соответствуют существованию поверхностных магнитных зарядов с плотностью ξ^m и поверхностного магнитного тока с плотностью $\vec{\eta}^m$:

$$\xi^m = \mu_0 (\mu_k \vec{H}^s, \vec{n}_0), \quad \vec{\eta}^m = -[\vec{n}_0, \vec{E}^s]. \quad (7.5.33)$$

Следовательно, первоначальное поле \vec{E} , \vec{H} будет существовать в области 1 вплоть до границы S (без продолжения в область 2), если на поверхности S распределены электрические и магнитные заряды и токи, связанные с полем на этой поверхности соотношениями (7.5.32) и (7.5.33).

Таким образом, поле в объёме можно рассматривать как результат излучения источников, распределённых на некоторой поверхности, причём для определения источников достаточно знать поле на поверхности, *т.е. полное поле в некотором объёме можно восстановить на основании информации о его состоянии на поверхности, ограничивающей этот объём*. С таким утверждением связан принцип Гюйгенса.

Принцип Гюйгенса: *каждую точку фронта некоторой скалярной волны можно принять за источник локальной сферической волны; новое положение фронта может быть найдено в результате учёта действия всех локальных волн, то есть при помощи условных поверхностных источников*. В широком смысле под принципом Гюйгенса можно понимать введение вторичных (эквивалентных) источников на

фронте распространяющейся волны. Таким образом, малые элементы поверхности S с заданным распределением поля могут фигурировать как элементарные излучатели. Это так называемые *элементы Гюйгенса*, которые можно выделять в принципе на самых различных поверхностях при расчёте различных полей.

Рассмотрим простейший элемент Гюйгенса в виде элементарной площадки ΔS на плоскости $z = 0$, параллельной фронту плоской однородной волны (рис. 7.12а). Распространение волны вдоль оси OZ можно трактовать как результат излучения всей совокупности таких элементов, распределённых в плоскости $z = 0$. При заданной поляризации плоской волны (см. рис. 7.12а) плотности эквивалентных сторонних поверхностных токов (элементы Гюйгенса) выражаются следующим образом:

$$\eta^{e,ct} = [\vec{z}_0, \vec{H}^s] = -\vec{x}_0 H_y^s, \quad \eta^{m,ct} = [\vec{E}^s, \vec{z}_0] = -\vec{y}_0 E^s. \quad (7.5.34)$$

Элементарный излучатель Гюйгенса представим как элемент фронта плоской волны, магнитное поле которого $\mathcal{H}_y^s = H_0 \exp(i\omega t)$ (H_0 — значение поля при $x = y = z = 0$) можно заменить эквивалентным электрическим током $I_x^e = -H_0 \Delta y$, а электрическое поле $\mathcal{E}_x^s = E_0 \exp(i\omega t)$ (E_0 — значение поля при $x = y = z = 0$) — эквивалентным магнитным током $I_y^m = -E_0 \Delta x$. Поле, создаваемое таким элементом, равно сумме полей, создаваемых расположенными перпендикулярно друг другу элементарными электрическим и магнитным диполями с объёмными плотностями:

$$\begin{aligned} \vec{j}^{e,ct} &= -\vec{x}_0 I_x^e \delta(x) \delta(y) \delta(z), \\ \vec{j}^{m,ct} &= -\vec{y}_0 I_y^m E_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z), \end{aligned} \quad (7.5.35)$$

соответствующими эквивалентным поверхностным токам (7.5.34). Подставив (7.5.35) в формулы (7.3.1) для векторных электродинамических потенциалов, находим

$$\begin{aligned} A_x^e &= -\frac{H_0 \Delta S e^{-ikr}}{4\pi r}, \\ A_y^m &= -\frac{E_0 \Delta S e^{-ikr}}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (7.5.36)$$

В сферической системе координат в соответствии с формулами (7.3.15) имеем

$$\begin{aligned} A_r^e &= A_x^e \cos \varphi \sin \theta, \quad A_r^m = A_y^m \sin \varphi \sin \theta, \\ A_\theta^e &= A_x^e \cos \varphi \cos \theta, \quad A_\theta^m = A_y^m \sin \varphi \cos \theta, \\ A_\varphi^e &= -A_x^e \sin \varphi, \quad A_\varphi^m = A_y^m \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7.5.37)$$

Подставляя (7.5.37) в выражения (7.2.22) найдём в сферической системе координат составляющие электрического и магнитного полей в дальней зоне, возбуждаемые электрическим диполем ($\vec{A}^m = 0$):

$$\begin{aligned} \vec{E}^e &= \frac{ik Z_k H_0 \Delta S}{4\pi r} (\cos \theta \cos \varphi \vec{\theta}_0 - \sin \varphi \vec{\phi}_0) e^{-ikr}, \\ \vec{H}^e &= \frac{ik H_0 \Delta S}{4\pi r} (\sin \varphi \vec{\theta}_0 + \cos \theta \cos \varphi \vec{\phi}_0) e^{-ikr}. \end{aligned} \quad (7.5.38)$$

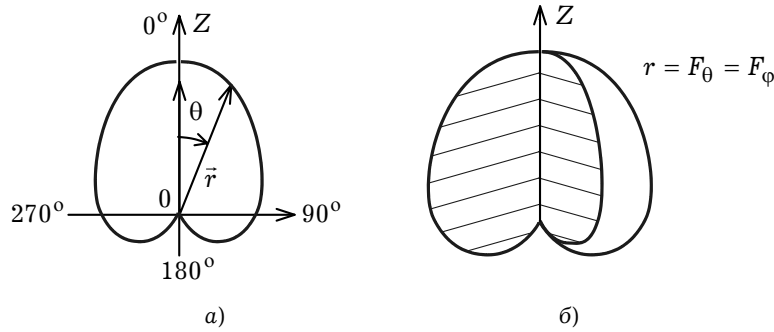


Рис. 7.13

Аналогично определяем электромагнитное поле в дальней зоне, создаваемое элементарным магнитным током ($\vec{A}^e = 0$):

$$\begin{aligned}\vec{E}^m &= \frac{ik E_0 \Delta S}{4\pi r} (\cos \varphi \vec{\theta}_0 - \cos \theta \sin \varphi \vec{\phi}_0) e^{-ikr}, \\ \vec{H}^m &= \frac{ik H_0 \Delta S}{4\pi r} (\cos \theta \sin \varphi \vec{\theta}_0 + \cos \varphi \vec{\phi}_0) e^{-ikr}.\end{aligned}\quad (7.5.39)$$

Чтобы получить поле излучения элемента Гюйгенса в дальней зоне, необходимо векторно сложить (7.5.38) и (7.5.39). С учётом того, что $E_0 = Z_K H_0$:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}^e + \vec{E}^m = \frac{ik E_0 \Delta S}{4\pi r} (1 + \cos \theta)(\cos \varphi \vec{\theta}_0 - \sin \varphi \vec{\phi}_0) e^{-ikr}, \\ \vec{H} &= \vec{H}^e + \vec{H}^m = \frac{ik E_0 \Delta S}{4\pi Z_K r} (1 + \cos \theta)(\sin \varphi \vec{\theta}_0 + \cos \varphi \vec{\phi}_0) e^{-ikr}.\end{aligned}\quad (7.5.40)$$

Определив поле излучения элемента Гюйгенса (7.5.40), можно вычислить среднее значение вектора Умова–Пойнтинга:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] = \vec{r}_0 \frac{k^2 (E_0)^2 \Delta S^2}{32\pi^2 Z_K} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{4}. \quad (7.5.41)$$

Следовательно, нормированная характеристика направленности по мощности представляется функцией:

$$F^2(\theta, \varphi) = \frac{\langle \vec{S} \rangle_r}{\langle \vec{S}(\theta_0, \varphi_0) \rangle_{r_{\max}}} = \frac{(1 + \cos \theta)^2}{4}. \quad (7.5.42)$$

Нормированные характеристики направленности по напряжённости выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}F_\theta(\theta, \varphi) &= \frac{E_\theta(\theta, \varphi)}{|E_{\theta \max}(\theta_1, \varphi_1)|} = \frac{1 + \cos \theta}{2}, \\ F_\varphi(\theta, \varphi) &= \frac{E_\varphi(\theta, \varphi)}{|E_{\varphi \max}(\theta_2, \varphi_2)|} = \frac{1 + \cos \theta}{2}.\end{aligned}\quad (7.5.43)$$

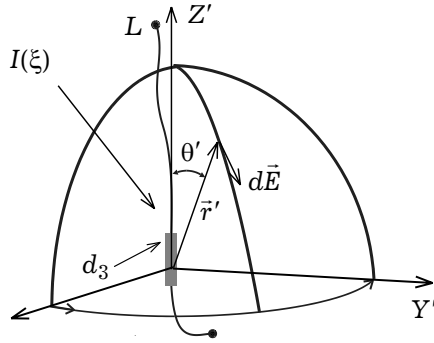


Рис. 7.14

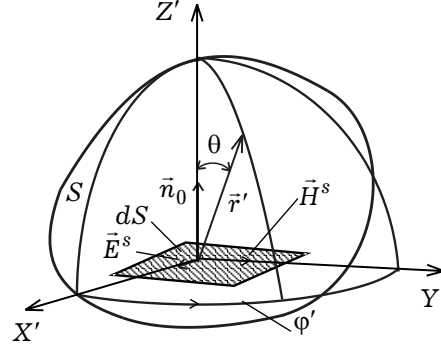


Рис. 7.15

Диаграмма направленности в произвольной меридиональной плоскости $\varphi = \text{const}$, определяемая формулами (7.5.41), (7.5.42) и (7.5.43), представляет собой кардииду (рис. 7.13а); объемная диаграмма направленности — её тело вращения (рис. 7.13б). Таким образом, элемент Гюйгенса максимально излучает в направлении оси OZ ; в обратном направлении ($\theta = \pi$) излучение отсутствует.

7.6(*). Применение принципа суперпозиции к расчёту электромагнитных полей излучающих систем

Свойства антенн обычно принято изучать в передающем режиме, поскольку характеристики антенны в приёмном режиме могут быть определены с помощью принципа взаимности.

7.6.1. Тонкий криволинейный проволочный вибратор. Рассмотрим тонкий криволинейный проволочный вибратор. Ввиду линейности уравнений Максвелла можно разбить проволочную антенну длиной l на элементарные участки $d\xi$, каждый из которых при малой толщине провода можно рассматривать как *элементарный электрический вибратор* (ЭЭВ). Результирующее поле находится путём суммирования всех элементарных полей с учётом их поляризаций, амплитуд и фаз. Введём локальную сферическую систему координат $\{r', \theta', \varphi'\}$, связанную с элементом $d\xi$ и декартовой системой координат $\{x', y', z'\}$, у которой ось OZ' совпадает с осью элементарного вибратора (рис. 7.14).

В соответствии с (7.5.6) для ЭЭВ

$$d\vec{E} = \vec{\theta}_0' i \frac{Z_k I(\xi) d\xi}{2\lambda r'} \sin \theta' \exp(-ikr'), \quad (7.6.1)$$

где ξ — линейная координата, отсчитываемая вдоль провода, $I(\xi)$ — комплексная амплитуда тока в выделенном элементе, $d\xi$ — длина ЭЭВ.

Выражение (7.6.1) справедливо для дальней зоны при $r' \gg \lambda$. Напряжённость магнитного поля от ЭЭВ:

$$d\vec{H} = \frac{1}{Z_k} [\vec{r}'_0 \times d\vec{E}], \quad (7.6.2)$$

где \vec{r}'_0 — орт сферической локальной системы координат.

Результирующее поле всего проволочного вибратора определяется путём геометрического суммирования (интегрирования) полей всех ЭЭВ:

$$\vec{E} = \int_L d\vec{E}, \quad \vec{H} = \int_L d\vec{H}. \quad (7.6.3)$$

Заметим, что результирующее магнитное поле \vec{H} в (7.6.3) можно найти по формуле (7.6.2), но для этого точка наблюдения должна находиться в области дальней зоны, определяемой размерами всей антенны.

7.6.2. Длинная криволинейная узкая щель в металлическом экране. Щель разбивается на элементарные магнитные вибраторы (ЭМВ). Напряжённость электрического поля ЭМВ в локальной системе координат, вводимой, как и для ЭЭВ на рис. 7.14, имеет в дальней зоне вид:

$$d\vec{E} = -\vec{\phi}'_0 i \frac{I^m(\xi) d\xi}{2\lambda r'} \sin \theta' \exp(-ikr'), \quad (7.6.4)$$

где $I^m(\xi)$ — комплексная амплитуда магнитного тока в выделенном элементе. Далее по формулам (7.6.2) и (7.6.3) вычисляется электромагнитное поле от узкой щели в металлическом экране в дальней зоне.

7.6.3. Апертурная антенна. Обычно из каких-либо априорных соображений известно распределение поля вблизи антенны; тогда применяется принцип эквивалентности, согласно которому излучение реальных электрических токов заменяется излучением эквивалентных поверхностных электрических и магнитных токов, распределённых в точках воображаемой произвольной поверхности S , окружающей антенну. Поверхностные плотности этих токов вводятся следующим образом:

$$\vec{\eta}^e = [\vec{n}_0 \times \vec{H}^s], \quad \vec{\eta}^m = [\vec{E}^s \times \vec{n}_0], \quad (7.6.5)$$

где \vec{n}_0 — единичная нормаль к поверхности S (внешняя по отношению к области, занятой антенной); \vec{E}^s , \vec{H}^s — поля на поверхности S . Поверхность S разбивают на элементарные площадки dS и рассматривают каждую площадку как совокупность элементарных излучателей: электрического и магнитного. Обычно учитывают токи только на части замкнутой поверхности S , где они наиболее существенны, причём эту часть поверхности выбирают совпадающей с фронтом волны, излучаемой антенной.

В данном случае каждую элементарную площадку можно рассматривать как элемент волнового фронта — элемент Гюйгенса, электрическое поле которого в локальной системе координат r', θ', ϕ' , связанной с декартовой системой x', y', z' (ось OZ' которой совпадает с внешней нормалью \vec{n}_0) (см. рис. 7.15), при $r' \ll \lambda$ можно представить в виде

$$d\vec{E} = \vec{\theta}'_0 dE_{\theta'} + \vec{\phi}'_0 dE_{\phi'}. \quad (7.6.6)$$

Следовательно, при выполнении условий $\vec{H}^s \uparrow\uparrow \vec{y}_0$, $\vec{E}^s \uparrow\uparrow \vec{x}_0$ поверхностные токи имеют направления: $\vec{\eta}^e \uparrow\downarrow \vec{x}_0$, $\vec{\eta}^m \uparrow\downarrow \vec{y}_0$.

Результирующее электрическое поле вычисляется как

$$\vec{E} = \int_S d\vec{E}. \quad (7.6.7)$$

В формуле (7.6.7) $d\vec{E}$ — электрическое поле, создаваемое элементом Гюйгенса и определяемое формулой (7.6.6).

7.6.4. Система идентичных излучателей. Пусть дана система произвольных идентичных излучателей, распределённых в пространстве по определённому закону, и известно поле излучения одного элемента.

В сферической системе координат r_n, θ_n, φ_n , связанной с излучающим элементом с индексом n , электрическое поле в дальней зоне этого элемента имеет в общем случае компоненты $E_\theta^{(n)}, E_\varphi^{(n)}$:

$$\vec{E}_n = \vec{\theta}_0 E_\theta^{(n)} + \vec{\varphi}_0 E_\varphi^{(n)}. \quad (7.6.8)$$

Причём по аналогии с (7.6.1) каждая компонента независимо от физической природы излучателей может быть представлена в виде

$$E_\theta^{(n)} = a_\theta I_n F_\theta^{(0)}(\theta_n, \varphi_n) \exp(-ikr_n)/r_n, \quad (7.6.9)$$

$$E_\varphi^{(n)} = a_\varphi I_n F_\varphi^{(0)}(\theta_n, \varphi_n) \exp(-ikr_n)/r_n, \quad (7.6.10)$$

где a_θ, a_φ — амплитудные множители, определяемые типом излучателя, I_n — ток в n -ом излучателе, $F_\theta^{(0)}(\theta_n, \varphi_n), F_\varphi^{(0)}(\theta_n, \varphi_n)$ — характеристики направленно-сти излучающего элемента по соответствующей компоненте поля. В общем случае F_θ, F_φ — комплексные функции, определяющие угловые зависимости не только амплитуды, но и фазы излучённого поля.

Если закон распределения тока по излучающим элементам известен (известны I_n) и эффект взаимной связи не искажает структуру поля каждого из излучателей, то результирующее поле находится как геометрическая сумма полей:

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^N \vec{E}_n, \quad (7.6.11)$$

где N — число излучателей в системе.

7.6.5. Система из дискретных излучателей, одинаково ориентированных в пространстве. Формулы, записанные выше (7.6.8)-(7.6.11) для расчёта результирующего поля, на первый взгляд просты, но при произвольном положении точки наблюдения простые замкнутые выражения получить не удаётся. Проблема заключается в том, что поле каждого излучающего элемента известно в своей собственной системе координат, связанной с самим излучателем. Для нахождения результирующего поля необходимо ввести единую систему координат и выразить в ней поля всех элементов.

Ниже рассмотрим систему из дискретных излучателей, одинаково ориентированных в пространстве, то есть любой излучающий элемент может быть со-

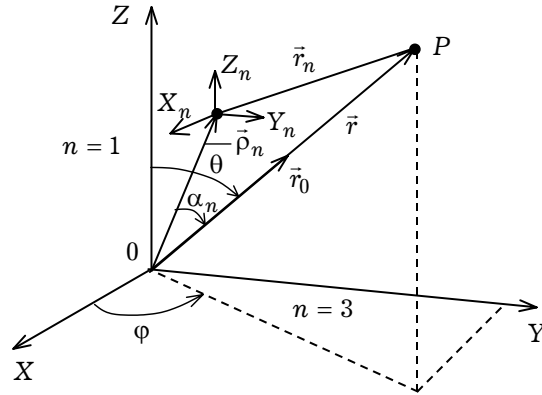


Рис. 7.16

вмещён в пространстве с другим путём только параллельного перемещения без вращения. Введём общую декартову систему координат $\{x, y, z\}$, центр которой расположен внутри излучающей системы. Выделим произвольный элемент с номером n (рис. 7.16), находящийся на расстоянии ρ_n от начала общей системы координат. Координаты x_n, y_n, z_n ориентируем параллельно соответствующим осям системы координат $\{x, y, z\}$. Введём также общую сферическую систему координат $\{r, \theta, \varphi\}$. В локальной системе координат каждая составляющая поля излучения имеет вид

$$E^{(n)} = a I_n F^{(0)}(\theta, \varphi) \exp(-ikr_n) / r_n, \quad (7.6.12)$$

где нижние индексы у « θ » и « φ » опустим. Выразим координаты r_n, θ_n, φ_n через r, θ, φ . Так как расстояние r_n до точки наблюдения P есть

$$r_n = \sqrt{r^2 - \rho_n^2 - 2r\rho_n \cos \alpha_n}, \quad (7.6.13)$$

где α_n — угол между ортом \vec{r}_0 ($\vec{r}_0 \uparrow \vec{r}$) и вектором

$$\vec{\rho}_n = \vec{x}_0 x_n + \vec{y}_0 y_n + \vec{z}_0 z_n,$$

то для дальней зоны из (7.6.13) получаем:

$$r_n \approx r - \rho_n \cos \alpha_n. \quad (7.6.14)$$

Соотношение (7.6.12) упрощается:

$$E^{(n)} = \frac{a}{r} I_n F^{(0)}(\theta, \varphi) \exp(-ikr) \exp(ik\rho_n \cos \alpha_n). \quad (7.6.15)$$

В (7.6.12) мы положим $\theta = \theta_n$, $\varphi = \varphi_n$, так как для дальней зоны лучи, проведённые из начала общей системы координат и из точки расположения излучаемого элемента, можно считать параллельными:

$$\theta_n = \theta, \quad \varphi_n = \varphi. \quad (7.6.16)$$

Разность хода $\Delta r_n = \rho_n \cos \alpha_n$ может быть вычислена как проекция вектора $\vec{\rho}_n = \vec{x}_0 x_n + \vec{y}_0 y_n + \vec{z}_0 z_n$ на орт \vec{r}_0 , для которого справедливо представление

$$\vec{r}_0 = \vec{x}_0 \sin \theta \cos \varphi + \vec{y}_0 \sin \theta \sin \varphi + \vec{z}_0 \cos \theta. \quad (7.6.17)$$

Следовательно,

$$\Delta r_n = \rho_n \cos \alpha_n = x_n \sin \theta \cos \varphi + y_n \sin \theta \sin \varphi + z_n \cos \theta, \quad (7.6.18)$$

при этом каждую компоненту результирующего поля с учётом (7.6.13)–(7.6.18) можно вычислить как

$$E = \frac{a}{r} F^{(0)}(\theta, \varphi) \exp(-ikr) \times \sum_{n=1}^N I_n \exp[ik(x_n \sin \theta \cos \varphi + y_n \sin \theta \sin \varphi + z_n \cos \theta)]. \quad (7.6.19)$$

Из (7.6.19) следует, что характеристика направленности всей системы может быть представлена как

$$F(\theta, \varphi) = F^{(0)}(\theta, \varphi) \sum_{n=1}^N I_n \exp[ik \rho_n \cos \alpha_n] = F^{(0)}(\theta, \varphi) F^{(c)}(\theta, \varphi), \quad (7.6.20)$$

где $F^{(0)}$ — комплексная характеристика направленности излучающего элемента, $F^{(c)}$ — множитель системы.

В качестве примера применения (7.6.19) рассмотрим проволочную антенну длиной L , ориентированную вдоль оси OZ с известным законом распределения тока $I(z)$. В этом случае

$$\Delta r = z \cos \theta.$$

В результате, если начало координат помещено в середину антенны, имеем:

$$E_\theta = i \frac{Z_k}{2r\lambda} \sin \theta \exp(-ikr) \int_{-L/2}^{L/2} I(z) \exp(ikz \cos \theta) dz. \quad (7.6.21)$$

Результирующая характеристика направленности, соответствующая (7.6.21), определяется, как и (7.6.19), в виде произведения $F^{(0)} F^{(c)}$, причём характеристика направленности излучающего элемента $F^{(0)} = \sin \theta$, а множитель системы $F^{(c)}$ имеет вид:

$$F^{(c)}(\theta, \varphi) = \int_{-L/2}^{L/2} I(z) \exp(ikz \cos \theta) dz. \quad (7.6.22)$$

Исследуем случай, когда в антенне возбуждена гармоническая стоячая волна тока с плотностью

$$I = I_0 \sin \left[\pi N \left(\frac{z}{L} + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (7.6.23)$$

где N — некоторое целое число, определяющее тип возбуждения антенны. Особый интерес представляет случай, когда $k_0 = \omega / c = \pi N / L$. В этом случае N представляет собой число полуволн тока, укладывающихся на длине антенны.

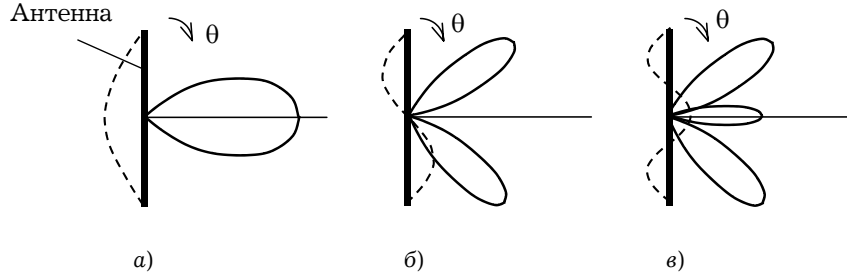


Рис. 7.17

Подставляя (7.6.23) в (7.6.21) и проводя интегрирование при $k \equiv k_0$ (антенна находится в свободном пространстве), получаем

$$E_\theta = \frac{Z_0}{2\lambda r} \frac{2\pi N}{L} I_0 \sin \theta e^{-i(k_0 r - \pi N/2)} \times \frac{\sin[\pi N/2 - k_0 L \cos \theta/2]}{(\pi N/L)^2 - k_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (7.6.24)$$

В дальнейшем будем рассматривать случай резонансного излучения, когда $k_0 = \pi N/L$ и выражение (7.6.24) принимает более простой вид:

$$E_\theta = \frac{Z_0}{4\lambda r} \frac{2\pi N}{L} I_0 \sin \theta e^{-i(k_0 r - \pi N/2)} \frac{\sin[\pi N \sin^2(\theta/2)]}{\sin \theta}. \quad (7.6.25)$$

Из (7.6.25) следует, что минимумы излучения $\theta_{\min}^{(m)}$ определяются из условия $\sin[\pi N \sin^2(\theta/2)] = 0$, откуда

$$\theta_{\min}^{(m)} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{m}{N}}, \quad m = 0, 1, \dots, N,$$

то есть число минимумов равно $N+1$, а число максимумов совпадает с N (равно числу полуволн, укладывающихся на длине антенны). Качественные угловые распределения диаграммы направленности для $N = 1, 2, 3$ приведены на рис. 7.17.

Если N — велико ($N \gg 1$), то первый максимум излучения приходится на угол $\theta_{\max}^{(1)} \approx \sqrt{N}$. В этом случае

$$\frac{\sin[\pi N \sin^2(\theta/2)]}{\sin \theta} \approx \sqrt{\frac{N}{2}}.$$

Для центрального максимума (если $N = 2n+1$): $\theta = \pi/2$, то есть

$$\frac{\sin[\pi N \sin^2(\theta/2)]}{\sin \theta} \approx \pm 1.$$

Поэтому интенсивность (мощность) первого бокового лепестка излучения антенны больше интенсивности центрального лепестка в $N/2$ раз, то есть в основном излучение идёт в направлении проводника антенны, который играет роль линии передачи.

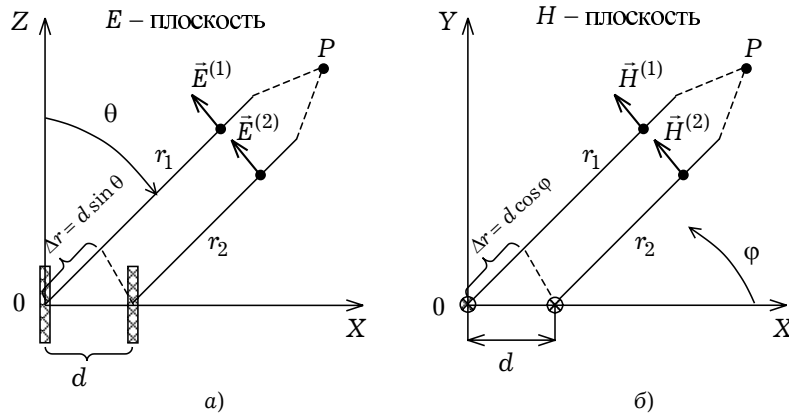


Рис. 7.18

7.7(*). Антенна из двух одинаковых линейных излучателей

Определим характеристику направленности двух одинаково ориентированных линейных излучателей, расположенных параллельно оси OZ на расстоянии d друг от друга (рис. 7.18). Обозначим напряжённость электрического поля, создаваемого в точке наблюдения P (в дальней зоне) первым вибратором, через $E_{\theta}^{(1)}$. В дальней зоне при достаточно малом d влиянием разности расстояний $\Delta r = d \sin \theta$ на амплитуду поля можно пренебречь, поэтому напряжённость электрического поля $E_{\theta}^{(2)}$ от второго излучателя в точке P равна:

$$E_{\theta}^{(2)} = E_{\theta}^{(1)} K e^{-ikd \sin \theta \cos \varphi} e^{i\psi}, \quad (7.7.1)$$

где K — отношение амплитуд токов в излучателях, ψ — временной фазовый сдвиг между токами в вибраторах, $kd \sin \theta \cos \varphi$ — пространственный сдвиг фаз полей из-за разности расстояний.

Суммарное электрическое поле в точке P определяется в силу (7.7.1) как сумма:

$$E_{\theta} = E_{\theta}^{(1)} + E_{\theta}^{(2)} = E_{\theta}^{(1)} [1 + K e^{i(\psi - kd \sin \theta \cos \varphi)}], \quad (7.7.2)$$

причём амплитуда напряжённости суммарного поля будет:

$$E_{\theta} = E_{\theta}^{(1)} \sqrt{1 + K^2 + 2K \cos(\psi - kd \sin \theta \cos \varphi)}. \quad (7.7.3)$$

Из формулы (7.7.2) следует, что характеристика направленности в меридиональной плоскости XOZ ($\varphi = 0$, плоскость E на рис. 7.18a) определяется выражением

$$F_{\theta}(\theta, \varphi) = F_{\theta}^{(0)}(\theta, \varphi) F_{\theta}^{(c)}(\theta, \varphi), \quad (7.7.4)$$

где, в соответствии с (7.7.3):

$$F_{\theta}^{(c)}(\theta, \varphi) = \sqrt{1 + K^2 + 2K \cos(\psi - kd \sin \theta \cos \varphi)} \quad (7.7.5)$$

множитель системы, $F_{\theta}^{(0)}(\theta, \varphi)$ — характеристика направленности одного линейного излучателя.

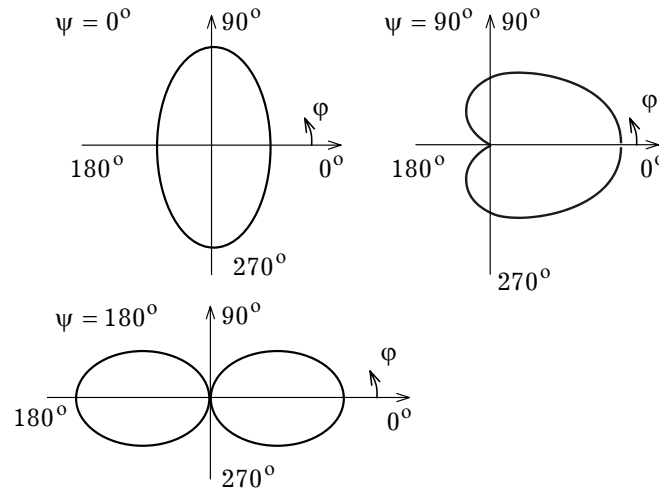


Рис. 7.19

Множитель системы $F_{\theta}^{(c)}(\theta, \varphi)$ из двух излучателей зависит от расстояния между ними, отношения амплитуд токов в излучателях K и сдвига фаз токов Ψ .

В азимутальной плоскости YOX ($\theta = \pi/2$, плоскость H на рис. 7.18б), одиночные прямолинейные излучатели при их ориентации вдоль оси OZ направленностью не обладают, то есть $F_{\theta}^{(0)}(\theta = \pi/2, \varphi) = 1$. Следовательно, характеристика направленности двух излучателей в этой плоскости определяется выражением (7.7.5) с заменой $\sin \theta$ на $\cos \varphi$.

На рис. 7.19 приведены качественные диаграммы направленности в плоскости H для двух излучателей, находящихся на расстоянии $d = \lambda/4$ между собой, при условии равенства амплитуд возбуждающих токов: $K = 1$. В случае однонаправленного излучения ($\Psi = \pm \pi/2$) множитель системы при $\theta = \pi/2$ определяется выражением:

$$F^c(\varphi) = \cos\left(\pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \cos \varphi\right), \quad (7.7.6)$$

описывающим кардиоиду. При $\Psi = \pi/2$ напряжённость поля излучения в направлении $\varphi = 0^\circ$ удваивается по сравнению с полем излучения одиночного вибратора, а в направлении $\varphi = 180^\circ$ она равна нулю. При $\Psi = -\pi/2$ напряжённость поля излучения удваивается в направлении $\varphi = 180^\circ$ и равна нулю при $\varphi = 0^\circ$. Здесь можно заметить, что напряжённость поля излучения усиливается в направлении вибратора с отстающей фазой возбуждающего тока.

Вибратор, усиливающий излучение в сторону другого вибратора, называется *рефлектором*; вибратор, ослабляющий излучение в сторону другого вибратора и усиливающий излучение в противоположном направлении, называется *директором*. Так как обеспечение определённого сдвига фаз между токами, питающими излучатели, достаточно сложная техническая задача, линейные излучатели, выполняющие роль рефлекторов или директоров, обычно не содержат источни-

ков питания, то есть являются *пассивными*. Они возбуждаются электромагнитным полем питаемого (активного) вибратора. Нужных сдвигов фаз между токами вибраторов добиваются подбором их длины и расстояния между ними. Однако, в конструкциях с пассивными вибраторами не удаётся получить равенства амплитуд токов в линейных вибраторах и обеспечить полную однонаправленность.

7.8(*). Самосогласованная постановка задач расчёта полей излучающих систем. Диполь Герца

Ранее был описан общепринятый в научной и учебной литературе алгоритм расчёта электромагнитных полей по заданным источникам, основанный на формулах (7.2.35) – (7.2.37). Этот алгоритм не применим для расчёта электромагнитного поля в ближних зонах излучающих систем, так как отсутствует предельный переход формул (7.2.35) – (7.2.37) при стремлении точки наблюдения $p(x, y, z)$ к точкам источника $q(x', y', z')$. Более того, как было показано в разделе 7.2, на поверхности S , ограничивающей объём V , в котором содержатся источники, можно ввести по формулам (7.2.4) и (7.2.5) поверхностные плотности электрического и магнитного тока, определённые через тангенциальные составляющие \vec{E} и \vec{H} . Поэтому при предельном переходе при $p \rightarrow q_S$, где q_S — точки источников на поверхности S , соотношения (7.2.36) и (7.2.37) должны переходить в тангенциальные составляющие \vec{E} , \vec{H} . Очевидно, что с помощью функций Грина типа (7.2.38) такой предельный переход осуществить нельзя. Поэтому описанный выше алгоритм расчёта электромагнитных полей по заданным источникам будем называть *несамосогласованным* (в том смысле, что поля \vec{E} и \vec{H} не согласованы с источниками). Поэтому существует разрыв между тангенциальным магнитным полем (поверхностной плотностью тока) на поверхности излучающей структуры и электромагнитным полем вблизи этой поверхности.

Поясним сказанное на простейшем примере электрического вибратора.

7.8.1. Тонкопроволочное приближение электрического вибратора. Обычно в электродинамике используют так называемую тонкопроволочную физическую модель электрического вибратора: два бесконечно тонких идеально проводящих провода длиной l каждый. Провода расположены как показано на рис. 7.20, образуя зазор шириной $2b$, к которому подключён генератор высокой частоты. Принципиальным моментом такой физической модели является пренебрежение толщиной металлических проводов.

На первом этапе, так называемой внутренней задачи анализа, ищется распределение тока по вибратору [Л7.7-Л7.9]. Продольный ток I_z на электрическом вибраторе (рис. 7.20) вводят на воображаемом металлическом цилиндре радиуса a (в действительности толщиной проводов пренебрегают) как $I_z = 2\pi a \eta_z$, где $I_z = H_\phi$ — продольная поверхностная плотность тока на вибраторе, причём ток в зазоре считается непрерывным.

Распределение тока находится либо из интегрального уравнения Поклингтона, либо из интегрального уравнения Халлена [Л7.7-Л7.9]. С математической точки

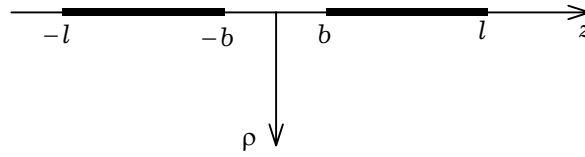


Рис. 7.20

зрения интегральные уравнения Поклингтона и Халлена являются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода, нахождение решений которых является некорректно поставленной математической задачей [Л7.10]. Математическая некорректность связана и с несамосогласованной физической моделью электрического вибратора: металл и ток проводимости I_z разнесены в пространстве (на бесконечно тонком проводнике нельзя задать тангенциальное магнитное поле H_ϕ).

Общепринятый подход расчета ЭМП электрического вибратора (рис. 7.20) основан на определении z -составляющей векторного электродинамического потенциала для электрического тока A_z^e , определяемой через z -составляющую тока на вибраторе $I_z(z) = 2\pi a \eta_z(z)$ (η_z — составляющая поверхностной плотности тока на вибраторе, a — радиус вибратора) [Л7.7-Л7.9]:

$$A_z^e(\rho, z) = \int_{-l}^l I_z(z') G(\rho, z - z') dz', \quad (7.8.1)$$

где

$$G(\rho, z - z') = \frac{1}{4\pi R} e^{-ikR}, \quad (7.8.2)$$

$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$; — расстояние между точкой наблюдения $P(\rho, z)$ и точкой источника $Q(0, z')$, расположенной на вибраторе; $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} / c$; ϵ, μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, окружающей вибратор; c — скорость света; $2l$ — длина вибратора. Функция Грина (7.8.2) соответствует физической модели электрического вибратора в виде бесконечно тонкой идеально проводящей нити конечной длины.

Физически $G(\rho, z - z')$ — функция Грина свободного пространства от точечного источника, помещенного в точку $(\rho = 0, z = z')$, т.е. на линию $\rho = 0$. Незвестное распределение тока $I_z(z)$ по вибратору обычно определяется либо из интегрального уравнения Поклингтона, либо из интегрального уравнения Халлена. Зная функцию $I_z(z)$, путем обычного дифференцирования выражения (7.8.1) по координатам ρ и z [Л7.11] несложно получить выражения для составляющих ЭМП излучения вибратора в любой точке пространства. Полученные таким образом численные значения полей \vec{E} и \vec{H} в ближней зоне электрического вибратора, по крайней мере, по двум причинам должны проверяться на достоверность. Во-первых, определение неизвестного тока $I_z(z)$ по вибратору из интегральных уравнений Поклингтона и Халлена (интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода) приводит к некорректно поставленной задаче [Л7.10]. Во-вторых, использование при расчетах

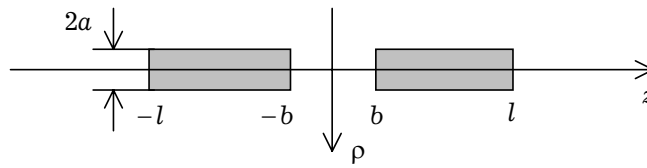


Рис. 7.21

поля функции Грина (7.8.2) приводит к несамосогласованной постановке задачи, так как электрический ток и поверхность, на которой тангенциальное электрическое поле обращается в ноль, разнесены в пространстве и в этом случае отсутствует предельный переход от поля в ближней зоне к полю (току) на поверхности вибратора.

В [Л7.12–Л7.15] разработан метод сингулярных интегральных уравнений (СИУ), который задачу расчета тока по электрическому вибратору сводит к решению СИУ, что дает возможность математически корректно подойти к определению распределения поверхностной плотности тока на вибраторе. Расчет ЭМП в ближней зоне электрического вибратора основан на сингулярном интегральном представлении (СИП) ЭМП через поверхностную плотность тока η_z на вибраторе [Л7.16]. При этом используется другая физическая модель электрического вибратора в виде двух бесконечно тонких идеально проводящих полых трубок общей длиной $2l$ и радиуса a , между которыми включен генератор СВЧ [Л7.17, Л7.18]. Полученное СИП ЭМП позволяет вычислять его в любой точке пространства посредством интегрирования продольной составляющей поверхностной плотности тока по вибратору. Одно из важных достоинств полученных соотношений состоит в том, что на поверхности вибратора СИП переходит в СИУ [Л7.19–Л7.20] для определения на ней неизвестного распределения поверхностного тока. Этим распределением затем можно воспользоваться для нахождения ЭМП излучения вибратора в любой точке пространства. Впервые, по-видимому, метод СИП электромагнитного поля был предложен для решения внутренних задач о собственных волнах экранированных полосково-щелевых структур СВЧ [Л7.21].

7.8.2. Самосогласованная физическая модель электрического вибратора [Л7.14].

Будем использовать трубчатую модель электрического вибратора в виде двух бесконечно тонких идеально проводящих цилиндрических трубок общей длиной $2l$ и радиуса a . Трубки расположены, как показано на рис. 7.21, образуя зазор, к которому подключен генератор высокой частоты. Будем использовать следующие предположения:

1. Считается, что стороннее поле E_z^{cm} в зазоре ($z \in [-b, b]$) не зависит от координаты φ . Поэтому в цилиндрической системе координат система уравнений Максвелла, описывающая электромагнитное поле излучения электрического вибратора, распадается на две независимые системы относительно составляющих E_ρ, E_z, H_φ и H_ρ, H_z, E_φ [Л7.11]. Очевидно, что при рассмотрении поля излучения электрического вибратора необходимо исходить из системы, описывающей поведение составляющих E_ρ, E_z, H_φ .

2. Трубки предполагаются бесконечно тонкими и идеально проводящими, так что на их внешней поверхности существует только продольная составляющая поверхностной плотности электрического тока $\eta_z^e = H_\phi$.

3. Поверхностная плотность электрического тока η_z^e на внешних поверхностях трубки и поверхностная плотность магнитного тока η_z^m в зазоре вибратора при $\rho = a$ заменяется некоторой поверхностной плотностью электрического тока η_z , непрерывной в области зазора (вследствие подключения к нему генератора) и обращающейся в ноль на концах вибратора.

4. Касательная составляющая комплексной амплитуды электрического поля $E_z(z)$ на вибраторе обращается в ноль всюду ($\rho = a, |z| \leq l$), кроме области зазора длиной $2b$ (рис. 7.21), где она приравняется некоторой возбуждающей функции $E_z^{\text{CT}}(z)$.

Здесь важно отметить, что модель трубчатого вибратора справедлива для любых размеров радиуса a трубок. Единственное ограничение: стороннее поле возбуждения в зазоре не должно зависеть от координаты ϕ . Общепринятая модель тонкопроволочного вибратора в виде бесконечно тонкой идеально проводящей нити конечной длины может использоваться только при условии $a \ll \lambda$. Кроме того, модель тонкопроволочного вибратора не является самосогласованной. Для определения ЭМП в ближней зоне необходимо принципиально учитывать толщину вибратора: на идеально проводящей бесконечно тонкой нити нельзя ввести поле H_ϕ , связанное с поверхностной плотностью тока в соответствии с граничными электродинамическими условиями. Поэтому в такой модели происходит «отрыв» ЭМП от тока проводимости на вибраторе. В литературе существуют работы [Л7.22], ставящие под сомнение существование напряженностей электрического и магнитного полей, непосредственно связанных с существованием тока проводимости на вибраторе.

7.8.3. Сингулярное интегральное представление электромагнитного поля. В [Л7.16–Л7.20] впервые получены СИП для составляющих ЭМП электрического вибратора, определяющие поле в любой точке пространства через функции

$$I_z(z) = 2\pi a \eta_z(z), \quad J_z(z) = \frac{dI_z(z)}{dz}, \quad (7.8.3)$$

определенные на внешней поверхности вибратора при $\rho = a$. В работе будем использовать СИП для составляющих ЭМП в более удобном виде — записанные относительно безразмерных переменных [Л7.20]:

$$E_z(\bar{\rho}, t) = \frac{Z}{8\pi^2 i a k a} \int_{-1}^1 J_z(t') \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\bar{h}\bar{l}(t-t')} \left(\text{sign}(\bar{h}) \frac{i}{\sqrt{\bar{\rho}}} e^{-(\bar{\rho}-1)\text{sign}(\bar{\rho}-1)|\bar{h}|} - \right. \right. \\ \left. \left. -\pi \begin{cases} \frac{\bar{v}^2}{\bar{h}} J_0(-i\bar{v}) H_0^{(2)}(-i\bar{\rho}\bar{v}) & \bar{\rho} \geq 1 \\ \frac{\bar{v}^2}{\bar{h}} J_0(-i\bar{\rho}\bar{v}) H_0^{(2)}(-i\bar{v}) & \bar{\rho} < 1 \end{cases} d\bar{h} - \frac{2}{\bar{l}\sqrt{\bar{\rho}}} \frac{t-t'}{\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{l}} - \frac{1}{\bar{l}}\right)^2 + (t-t')^2} \right] dt',$$

$$\begin{aligned}
E_{\rho}(\bar{\rho}, t) = & \frac{Z}{8\pi^2 i a k a} \int_{-1}^1 J_z(t') \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\bar{h}\bar{l}(t-t')} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\rho}}} e^{-(\bar{\rho}-1)\text{sign}(\bar{\rho}-1)|\bar{h}|} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \pi \begin{cases} \bar{v} J_0(-i\bar{v}) H_1^{(2)}(-i\bar{\rho}\bar{v}) & \bar{\rho} \geq 1 \\ \bar{v} J_1(-i\bar{\rho}\bar{v}) H_0^{(2)}(-i\bar{v}) & \bar{\rho} < 1 \end{cases} d\bar{h} - \frac{2}{\bar{l}\sqrt{\bar{\rho}}} \frac{\frac{\bar{\rho}}{\bar{l}} - \frac{1}{\bar{l}}}{\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{l}} - \frac{1}{\bar{l}}\right)^2 + (t-t')^2} \right] dt', \quad (7.8.4) \\
H_{\varphi}(\bar{\rho}, t) = & -\frac{\bar{l}}{8\pi^2 a} \int_{-1}^1 I_z(t') \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\bar{h}\bar{l}(t-t')} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\rho}}} e^{-(\bar{\rho}-1)\text{sign}(\bar{\rho}-1)|\bar{h}|} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \pi \begin{cases} \bar{v} J_0(-i\bar{v}) H_1^{(2)}(-i\bar{\rho}\bar{v}) & \bar{\rho} \geq 1 \\ \bar{v} J_1(-i\bar{\rho}\bar{v}) H_0^{(2)}(-i\bar{v}) & \bar{\rho} < 1 \end{cases} d\bar{h} - \frac{2}{\bar{l}\sqrt{\bar{\rho}}} \frac{\frac{\bar{\rho}}{\bar{l}} - \frac{1}{\bar{l}}}{\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{l}} - \frac{1}{\bar{l}}\right)^2 + (t-t')^2} \right] dt',
\end{aligned}$$

где

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

В СИП (7.8.4) $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка n ($n = 0, 1$). В этих соотношениях введены следующие безразмерные переменные: $\bar{\rho} = \rho/a$, $t = z/l$, $t' = z'/l$, $\bar{h} = ha$, $\bar{v} = \sqrt{\bar{h}^2 - ka^2}$; W_c — характеристическое сопротивление среды.

7.8.4. Сингулярное интегральное уравнение. В выражениях (7.8.4) под интегралом стоят $I_z(t)$ и $J_z(t)$, которые представляют собой функции тока и производной тока (по нормированной координате t) на вибраторе соответственно. Изначально они неизвестны. Для того, что бы их найти, необходимо получить СИУ относительно производной тока, которое находится из представлений (7.8.4) посредством подстановки в них граничных условий.

Возьмем выражение для E_z из (7.8.4) и подставим в него граничное условие на поверхности вибратора $\rho = a$:

$$E_z = \begin{cases} 0 & \text{при } z \in [-l, l_0 - b] \cup [l_0 + b, l], \\ -E_z^{\text{CT}} & \text{при } z \in [l_0 - b, l_0 + b], \end{cases} \quad (7.8.5)$$

где E_z^{CT} — z -составляющая стороннего электрического поля в зазоре вибратора. Ее можно представить в виде [Л7.14]:

$$E_z^{\text{CT}}(t) = \frac{1}{2b} U_{\varepsilon}(t),$$

где $\varepsilon(t)$ — профиль напряжения в зазоре, U — величина питающего напряжения.

В результате получаем СИУ относительно $J_z(t)$ ($t \in [-1, 1]$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{J_z(t')}{t-t'} dt' &= \frac{4\pi i l k a}{Z} E_z^{\text{CT}}(t) + \\ &+ \frac{l/a}{2\pi} \int_{-1}^1 J_z(t') \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{l}{a}\bar{h}(t-t')} \right. \\ &\left. \left(i \operatorname{sign}(\bar{h}) - \pi \frac{\bar{v}^2}{\bar{h}} J_0(-i\bar{v}) H_0^{(2)}(-i\bar{v}) \right) d\bar{h} \right] dt'. \end{aligned} \quad (7.8.6)$$

Будем использовать профиль напряжения в зазоре в виде:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{b}{l} \\ 1 - \left(\frac{t}{b/l} \right)^2, & |t| \leq \frac{b}{l}. \end{cases}$$

В этом случае интеграл

$$Int(t) = \int_{(l_0-b)/l}^{(l_0+b)/l} \frac{\sqrt{1-t'^2}}{t'-t} \varepsilon(t') dt',$$

возникающий при обращении интеграла типа Коши (7.8.6) [7.14] можно найти в аналитическом виде [14]:

$$\begin{aligned} Int(t) &= \frac{1}{(b/l)^2} \left(\arcsin(b/l) \left(2t^3 - 2t(b/l)^2 - t \right) + \sqrt{1-t^2} \left((b/l)^2 - t^2 \right) \times \right. \\ &\times \left(\operatorname{arcth} \left(\frac{tb/l-1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-(b/l)^2}} \right) + \operatorname{arcth} \left(\frac{tb/l+1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-(b/l)^2}} \right) \right) - \\ &\left. - tb/l\sqrt{1-(b/l)^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, алгоритм вычисления ЭМП электрического вибратора следующий:

1. Из СИУ (7.8.6), которое получается из СИП (7.8.4) и граничного условия (7.8.5), находится функция $J_z(t)$ (а, следовательно и $I_z(t)$), определенная на внешней поверхности трубчатого вибратора.

2. Зная функции $J_z(t)$ и $I_z(t)$, по формулам (7.8.4) определяется ЭМП в любой точке пространства, окружающей электрический вибратор.

Еще раз подчеркнем, что СИП (7.8.4) справедливы для любой точки пространства, в том числе и для дальней зоны.

В разделе 14.13 проведён анализ ЭМП полуволнового электрического вибратора в ближней и промежуточной зонах, поскольку в научной литературе отсутствует анализ трансформации ЭМП непосредственно с электрического вибратора в пространство. Такой анализ возможен только в рамках самосогласованных физической и математической моделей электрического вибратора. Что касается ЭМП в дальней зоне, то оно хорошо описано в научной литературе (см., например, [7.7]).

7.8.5. Диполь Герца. В общепринятой теории антенн под диполем Герца понимают бесконечно тонкий идеально проводящий проводник конечной длины $2l$, с шарами на концах, содержащими разные по знаку заряды. Шары создают ёмкость, которая позволяет получить постоянную амплитуду тока вдоль проводника.

Такая физическая модель диполя Герца неприменима для расчетов ЭМП в его ближней зоне. Во-первых, при расчетах ЭМП поперечным размером диполя Герца пренебрегают, что можно делать только для дальней зоны. Поэтому ЭМП в точке расположения диполя обращается в бесконечность. Для описания характеристик диполя вводят момент тока диполя как произведение тока по бесконечно тонкому проводнику на длину (в силу обращения ЭМП в бесконечность в месте расположения диполя). Момент тока диполя изначально не связан с напряженностями \vec{E} и \vec{H} ЭМП. Однако он входит в конечные формулы для \vec{E} и \vec{H} . Для такой физической модели диполя Герца напряженности \vec{E} и \vec{H} оказываются не связанными с током проводимости (зарядами) на диполе. Поэтому в [Л7.22] делается вывод о том, что напряженности \vec{E} и \vec{H} , реально не связанные с зарядами на проводнике, являются лишь удобным математическим аппаратом для описания физики наблюдаемого дистанционного взаимодействия тел (объектов) в дальней зоне. Подобные утверждения были у академиков И.Е. Тамма и Р.Ф. Авраменко.

По мнению Харченко К.П., «электромагнитная волна» — это поток реальных фотонов заряда. Основной причиной, из-за которой возникает сомнение в справедливости теории Максвелла, является отсутствие предельного перехода от тока на металле к полю в ближней зоне.

Ниже рассмотрим самосогласованную физическую модель диполя Герца (элементарного вибратора) в виде бесконечно тонкой идеально проводящей цилиндрической трубки длиной $2l$ и радиусом a . Будем считать, что по сравнению с длиной волны λ , его размеры пренебрежимо малы:

$$a, l \ll \lambda. \quad (7.8.7)$$

Таким образом, под самосогласованной физической моделью диполя Герца (элементарным электрическим вибратором) будем понимать трубчатую модель электрического вибратора без зазора с дополнительными условиями (7.8.7).

Распределение тока на элементарном вибраторе возьмем в виде:

$$I_z(z) = I_0[H(z+l) - H(z-l)], \quad (7.8.8)$$

где

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

— функция Хевисайда, I_0 — амплитуда тока на диполе Герца. Тогда производная

тока $J_z(z) = dI_z(z)/dz$ будет иметь вид:

$$J_z(z) = I_0[\delta(z+l) - \delta(z-l)], \quad (7.8.9)$$

где $\delta(x)$ — дельта функции.

Электромагнитное поле диполя Герца определялось из формул (7.8.4) с учетом (7.8.8) и (7.8.9). Численные расчеты произведены при следующих геометрических размерах: $l/\lambda = 0.25 \times 10^{-3}$, $a/\lambda = 0.25 \times 10^{-5}$, т.е. условия (7.8.7) выполнены. Амплитуда тока: $I_0 = 5.68 \times 10^{-3}$ А.

На рис. 7.22 приведены в сферической системе координат распределения комплексных величин $F_\theta = (r/\lambda)aE_\theta$, $F_r = (r/\lambda)aE_r$, $F_\phi = (r/\lambda)aH_\phi$ от координаты θ при различных нормированных расстояниях r/λ от центра диполя. Очевидно, что верхняя граница промежуточной зоны диполя при таких размерах антенны определяется как $r/\lambda = 0.5 \times 10^{-3}$. На графиках приведены распределения F_θ, F_r, F_ϕ на максимальном расстоянии от диполя $r/\lambda = 0.3$, что соответствует дальней зоне. Как показали расчеты, при дальнейшем увеличении r происходит незначительное увеличение амплитуды поля (качественный характер поля не изменяется), которое заканчивается при $r = 1.5\lambda \div 2.0\lambda$.

В отличие от полуволнового вибратора (см. раздел 14.13), у диполя Герца имеются несколько интересных особенностей. Во-первых, у диполя вплоть до $r = 50 \times 10^{-3}\lambda$ наблюдаются только мнимые составляющие электрического поля (E_θ и E_r) и реальная составляющая магнитного поля (H_ϕ), т.е. поля E_θ и H_ϕ сдвинуты на 90° . Далее начинают проявляться реальные части электрических полей и мнимая часть магнитного поля; фазы полей начинают изменяться. Поля становятся синфазными примерно при $r = 0.6\lambda$. Дальняя зона для электрического диполя (условие $(|E_\theta|_{\max}/|E_r|_{\max}) > 10$) наступает на расстоянии $r/\lambda \geq 3.2$.

Ближняя зона элементарного диполя (и по-видимому любой антенны) представляет собой открытый резонатор, который концентрирует электромагнитную энергию. Установлено, что в промежуточной зоне электромагнитное поле не является чисто поперечной волной: существует составляющая E_z (сравните с разделом 7.4.2).

Таким образом, предложенная самосогласованная физическая модель диполя Герца позволила построить новую математическую модель, устраняющую разрыв между током на металле и ЭМП в ближней зоне. При этом деление пространства излучения антенны на ближнюю, промежуточную и дальнюю зону является нецелесообразным.

На основе самосогласованного метода, включающего в себя СИП (7.8.4) ЭМП и СИУ (7.8.6), проведен электродинамический анализ ЭМП диполя Герца непосредственно с поверхности вибратора до дальней зоны. При этом в работе была использована самосогласованная физическая модель диполя Герца в виде идеально проводящей бесконечно тонкой трубки конечной длины, по которой протекает постоянный ток (7.8.8).

Выявлены особенности поведения ЭМП в ближней и промежуточной зонах. В частности установлено, что в промежуточной зоне, в отличие от общепринятого мнения, электромагнитное поле не является чисто поперечным. Сделан вывод о нецелесообразности деления пространства на ближнюю и промежуточные зоны. Чисто поперечным ЭМП становится только на расстояниях $r \geq 2\lambda$.

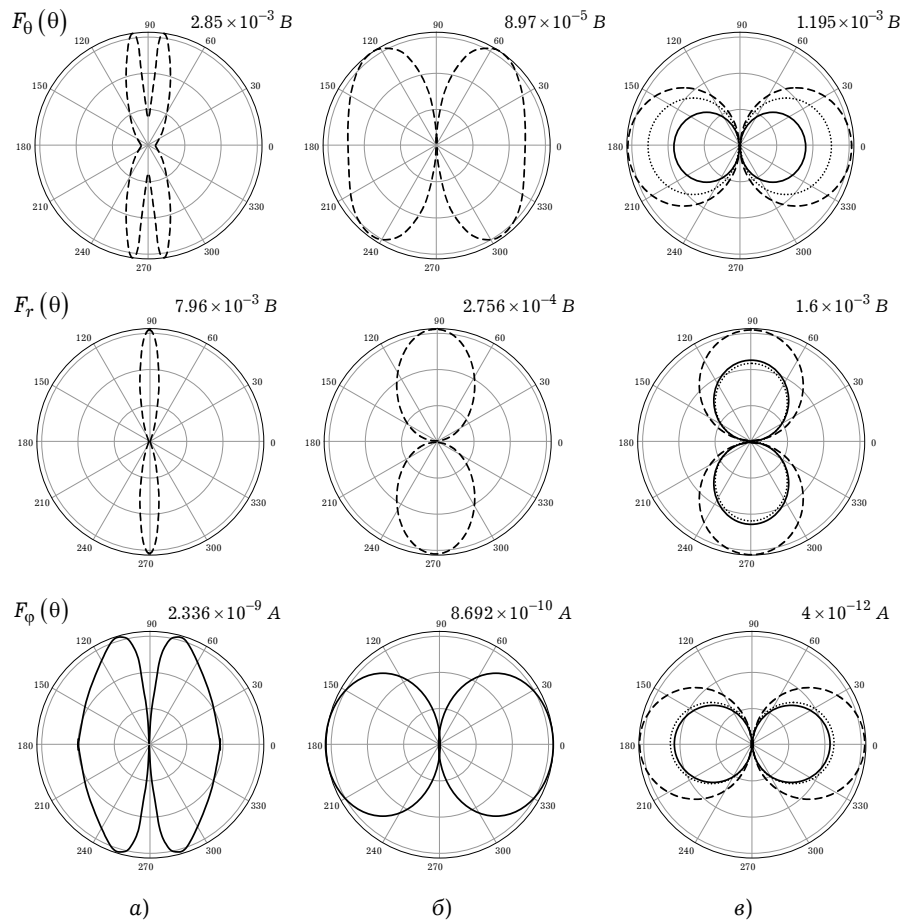


Рис. 7.22 — Распределение величин F_θ, F_r, F_ϕ для диполя Герца в сферической системе координат от координаты θ на различных нормированных расстояниях r/λ от центра диполя: а) $r/\lambda = 0.3 \times 10^{-3}$, б) $r/\lambda = 0.4 \times 10^{-3}$, в) $r/\lambda = 300 \times 10^{-3}$ (сплошные линии — $\text{Re}\{F(\theta)\}$; точками — $\text{Im}\{F(\theta)\}$; штриховые линии — $|F(\theta)|$)

Основным достоинством самосогласованного метода является то, что в отличие от традиционного алгоритма на основе функции Грина (7.8.2) имеется возможность установить непрерывную трансформацию структуры ЭМП непосредственно с поверхности диполя Герца до дальней зоны. Поэтому введенная самосогласованная физическая модель диполя Герца совместно с самосогласованным методом позволила построить новую теорию, согласно которой ЭМП в любой точке пространства подчиняется уравнениям Максвелла и не имеет особенностей.

Глава

8

Возбуждение волноводов и резонаторов

8.1. Ортогональность собственных функций краевых задач для экранированных волноводов	343
8.2. Ортогональность собственных волн в волноводах	344
8.3. Возбуждение волн в волноводах.....	350
8.4(*). Ортогональность собственных колебаний объемных резонаторов	355
8.5(*). Возбуждение колебаний в объемных экранированных резонаторах	357
8.6(*). Возбуждение волн в рупорах	360
8.7(*). О возбуждении колебаний, описываемых соленоидальными функциями	365
8.8(*). О возбуждении открытых направляющих структур	366

^{*)} Символом «*» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 8. Возбуждение волноводов и резонаторов

Свободные волны волноводов и свободные колебания резонаторов — это возможные поля в этих структурах при отсутствии внешних источников энергии. В реальных ситуациях электромагнитные поля в объемных резонаторах и направляющих структурах бывают вынужденными, возбуждаемыми конкретными источниками, играющими роль антенн. Вынужденные поля, таким образом, выступают как следствие действия источников. При определенных условиях (при слабой связи электродинамической структуры с источником энергии) вынужденные поля могут быть по своему строению близки к свободным полям соответствующих типов, однако амплитуды их вполне конкретны и определяются мощностью и параметрами источников. В общем случае вынужденные поля конструируются математически как суперпозиции свободных полей, то есть представляются в виде разложений по полям собственных волн и собственных колебаний, которые обладают свойством ортогональности, поскольку описываются решениями однородных краевых задач.

8.1. Ортогональность собственных функций краевых задач для экранированных волноводов

Поля собственных волн однородно заполненного регулярного экранированного волновода, в принципе любого поперечного сечения (рис. 8.1), описываются решениями краевых задач на уравнении Гельмгольца

$$\nabla^2 u + \chi^2 u = 0, \quad (8.1.1)$$

с граничными условиями вида

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0 \Big|_L, \quad (8.1.2)$$

где L — контур поперечного сечения внутренней идеально проводящей поверхности экрана, \vec{n} — нормаль к ней; под u можно понимать потенциальные (мембранные) функции; χ — поперечное волновое число.

В случае волн электрического типа, когда в (8.1.1) $u = \Psi^e$, в (8.1.2) $\alpha = 0$; в случае волн магнитного типа, когда $u = \Psi^m$, в (8.1.2) $\beta = 0$.

Не нарушая общности рассуждений, можно положить $\alpha = 1$ и записать тождество

$$v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = v \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \beta u \right) - u \left(\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} + \beta v \right), \quad (8.1.3)$$

где v — также решение краевой задачи (8.1.1), (8.1.2).

Используя формулу Грина

$$\int_S (v \Delta u - u \Delta v) dS = \oint_L \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) d\vec{l}, \quad (8.1.4)$$

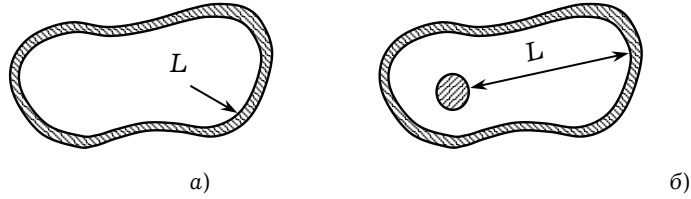


Рис. 8.1

с учетом (8.1.3) получаем

$$\int_S (v \Delta u - u \Delta v) dS = \oint_L \left[v \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \beta u \right) - u \left(\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} + \beta v \right) \right] dl, \quad (8.1.5)$$

где S — площадь поперечного сечения волновода, ограниченная контуром L .

Если $u = u_m$, $v = v_k$ — собственные функции краевой задачи (8.1.1), (8.1.2), то уравнение (8.1.5) можно переписать в виде

$$(\chi_k^2 - \chi_m^2) \int_S u_m u_k dS = \oint_L \left[v \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \beta u \right) - u \left(\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} + \beta v \right) \right] d\vec{l}, \quad (8.1.6)$$

где χ_k^2 и χ_m^2 — собственные значения краевой задачи.

В силу граничного условия (8.1.2) правая часть (8.1.6) равна нулю, в результате чего имеем

$$(\chi_k^2 - \chi_m^2) \int_S u_m u_k dS = 0,$$

отсюда следует, что

$$\int_S u_m u_k dS = N \delta_{mk} = \begin{cases} 0, & m \neq k; \\ N, & m = k, \end{cases} \quad (8.1.7)$$

где δ_{mk} — символ Кронекера. При этом собственные функции могут быть ортонормированы таким образом, что $N = 1$.

Условие (8.1.7) называется условием ортогональности собственных функций краевой задачи для однородного волновода с идеально проводящей внутренней поверхностью. Оно используется при решении различных дифракционных задач, в частности, задач о стыковке направляющих структур различных поперечных сечений.

8.2. Ортогональность собственных волн в волноводах

Рассмотрим волновод, понимая под последним любую направляющую структуру, электромагнитное поле в которой ограничено экраном (рис. 8.2). Если внутренняя поверхность S экрана идеально проводящая, на ней выполняется граничное условие

$$[\vec{n}, \vec{E}]|_S = 0, \quad (8.2.1)$$

где \vec{n} — нормаль к поверхности S . Если внутренняя поверхность экрана имеет конечную проводимость, поле проникает за ее пределы на глубину порядка толщины

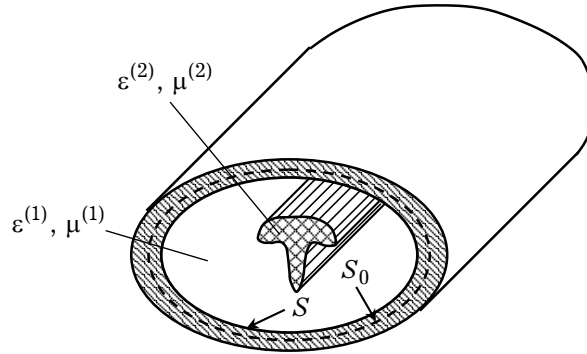


Рис. 8.2

скин-слоя δ . При этом на поверхности S_0 внутри экрана, расположенной на глубине, значительно превышающей толщину скин-слоя, можно полагать выполненным условие

$$\vec{E} = \vec{H} \Big|_{S_0} = 0, \quad (8.2.2)$$

говорящее о том, что электромагнитное поле не выходит за пределы поверхности S_0 (рис. 8.2).

Будем считать волновод бесконечным и регулярным по оси OZ . Последнее означает, что его параметры (заполнение, конфигурация и размеры поперечного сечения) не зависят от продольной координаты. В этом случае решения однородной системы уравнений Максвелла имеют продольную зависимость вида

$$\vec{E}; \vec{H} \sim e^{\pm i\gamma z}, \quad (8.2.3)$$

где $\gamma = \omega/v_\phi$ — продольное волновое число, и описывают собственные волны рассматриваемой направляющей структуры, образующие дискретный спектр.

Продольное волновое число в (8.2.3) при наличии потерь (внутренняя поверхность экрана не идеально проводящая; ϵ и μ среды, заполняющей волновод, комплексные величины) является комплексной величиной. Приписывая каждой собственной волне указанного дискретного спектра номер n , ее продольное волновое число будем обозначать как γ_n . При этом прямым волнам (распространяющимся вдоль оси OZ) будут соответствовать индексы n и $\text{Im}(\gamma_n) < 0$, обратным волнам (распространяющимся навстречу оси OZ) будут соответствовать индексы $-n$ и $\text{Im}(\gamma_{-n}) > 0$.

Общее решение краевых задач на однородных уравнениях Максвелла с граничными условиями (8.2.1) или (8.2.2) можно представить в виде

$$\vec{E} = \sum_n (C_n \vec{E}_n + C_{-n} \vec{E}_{-n}), \quad \vec{H} = \sum_n (C_n \vec{H}_n + C_{-n} \vec{H}_{-n}), \quad (8.2.4)$$

то есть бесконечными суммами полей собственных волн с произвольными, не связанными между собой коэффициентами C_n и C_{-n} . Связь между этими коэффициентами возникает либо при представлении в виде (8.2.4) решения краевых

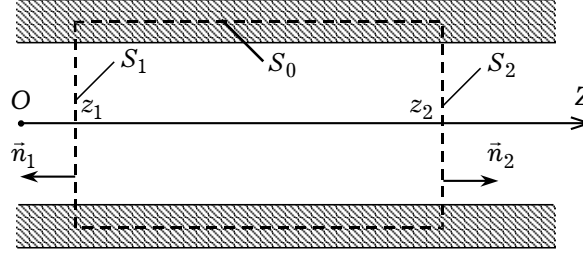


Рис. 8.3

задач на неоднородной системе уравнений Максвелла (то есть фактически при решении задачи о возбуждении), либо в том случае, когда нарушается регулярность волновода и решается задача дифракции. Запись (8.2.4) соответствует представлению поля в направляющей структуре в виде бесконечных наборов полей прямых и обратных собственных волн, описываемых решениями однородных краевых задач. Индекс n в этой записи объединяет группу индексов, используемых при классификации волн в направляющих структурах. При продольной зависимости поля (8.2.3) волновые числа волн с индексами n и $-n$ связаны соотношением $\gamma_{-n} = -\gamma_n$.

Поля любых двух собственных волн из наборов (8.2.4) согласно лемме Лоренца связаны уравнением

$$\oint_S ([\vec{E}_n \vec{H}_{n'}] - [\vec{E}_{n'} \vec{H}_n]) d\vec{S} = 0, \quad (8.2.5)$$

где $S = S_1 + S_2 + S_0$ — поверхность, ограничивающая поле в участке волновода, заключенном между сечениями S_1 и S_2 (рис. 8.3). На поверхности S_0 выполняется граничное условие (8.2.2). Если внутренняя поверхность волновода идеально проводящая, то с S_0 в (8.2.5) отождествляется эта поверхность с граничным условием на ней (8.2.1).

Поскольку подинтегральные функции в (8.2.5) могут быть представлены в виде

$$[\vec{E}_n \vec{H}_{n'}] d\vec{S} = [d\vec{S} \vec{E}_n] \vec{H}_{n'} = \vec{E}_{n\tau} \vec{H}_{n'} d\vec{S},$$

$$[\vec{E}_{n'} \vec{H}_n] d\vec{S} = [d\vec{S} \vec{E}_{n'}] \vec{H}_n = \vec{E}_{n'\tau} \vec{H}_n d\vec{S}$$

при любом варианте граничного условия на экранирующей поверхности волновода интеграл по поверхности S_0 в (8.2.5) равен нулю. В результате имеем

$$\int_{S_1 + S_2} ([\vec{E}_n \vec{H}_{n'}] - [\vec{E}_{n'} \vec{H}_n]) d\vec{S} = 0$$

или

$$\int_{S_1} ([\vec{E}_n \vec{H}_{n'}] - [\vec{E}_{n'} \vec{H}_n]) d\vec{S} = \int_{S_2} ([\vec{E}_n \vec{H}_{n'}] - [\vec{E}_{n'} \vec{H}_n]) d\vec{S}. \quad (8.2.6)$$

Поскольку сечения $S_{1,2}$ были выбраны произвольно, можно утверждать, что интеграл

$$I_{n,n'} = \int_{S_p} ([\vec{E}_n \vec{H}_{n'}] - [\vec{E}_{n'} \vec{H}_n]) d\vec{S}, \quad (8.2.7)$$

исходя из (8.2.6), не зависит от продольной координаты z , то есть имеет одно и то же значение в любом поперечном сечении S_p рассматриваемого волновода.

При продольной зависимости поля (8.2.3) интеграл (8.2.7) можно представить в виде

$$I_{n,n'} = I_{n,n'}(0) e^{-i(\gamma_n + \gamma_{n'})z}. \quad (8.2.8)$$

Запись (8.2.8) соответствует подстановке в (8.2.7) полей прямых волн.

Из (8.2.8) следует, что интеграл $I_{n,n'}$ не будет зависеть от z только при выполнении одного из двух условий

$$I_{n,n'} \equiv 0 \quad \text{либо} \quad \gamma_{n'} = -\gamma_n. \quad (8.2.9)$$

Равенство $\gamma_{n'} = -\gamma_n$ при отсутствии вырождения выполняется лишь в случае $n' = -n$.

Независимость интеграла (8.2.7) от продольной координаты z с учетом (8.2.9) приводит к условию ортогональности собственных волн волновода:

$$\int_{S_p} ([\vec{E}_n \vec{H}_{n'}] - [\vec{E}_{n'} \vec{H}_n]) d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{при } n' \neq -n, \\ N_n & \text{при } n' = -n. \end{cases} \quad (8.2.10)$$

Из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = i\omega\epsilon_a \vec{E}$$

следует, что компоненты электромагнитных полей прямой и обратной собственных волн в любой ортогональной системе координат $\{q_1, q_2, q_3\}$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} E_{-nq_1} &= \pm E_{nq_1}, & E_{-nq_2} &= \pm E_{nq_2}, & E_{-nq_3} &= \mp E_{nq_3}, \\ H_{-nq_1} &= \mp H_{nq_1}, & H_{-nq_2} &= \mp H_{nq_2}, & H_{-nq_3} &= \pm H_{nq_3}, \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

получаемыми с учетом того, что для прямой волны $\partial/\partial z = -i\gamma_n$, для обратной $\partial/\partial z = i\gamma_n$.

Соотношения (8.2.11) позволяют уравнение

$$\int_{S_p} ([\vec{E}_n \vec{H}_{-n'}] - [\vec{E}_{-n'} \vec{H}_n]) d\vec{S} = 0,$$

являющееся частным вариантом (8.2.10), переписать в виде

$$\int_{S_p} ([\vec{E}_n \vec{H}_{n'}] + [\vec{E}_{n'} \vec{H}_n]) d\vec{S} = 0 \quad (8.2.12)$$

при $n' \neq n$.

Объединяя соотношения (8.2.10) и (8.2.12), получаем запись условия ортогональности собственных волн в виде

$$\int_{S_p} [\vec{E}_n \vec{H}_{n'}] d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{при } n' \neq n, \\ N_n & \text{при } n' = n, \end{cases} \quad (8.2.13)$$

где величина N_n называется нормой n -й собственной волны волновода.

В волноводах с идеально проводящими стенками, заполненных средой без потерь (ϵ и μ действительные величины), когда потенциальные функции $\Psi^{e,m}$, входящие в запись векторов Герца

$$\Pi_z^{e,m} = \Psi^{e,m}(q_1, q_2) e^{\pm i\gamma q_3},$$

(q_1, q_2, q_3 — обобщённые координаты) являются действительными функциями поперечных координат, справедливы соотношения

$$H_{nq_1} = \eta_n(z) H_{nq_1}^*, \quad H_{nq_2} = \eta_n(z) H_{nq_2}^*, \quad (8.2.14)$$

где $\eta_n(z)$ — функция продольной координаты, соответствующая n -й собственной волне волновода.

При выполнении равенств (8.2.14) условие ортогональности можно переписать в виде

$$\int_{S_p} [\vec{E}_n \vec{H}_{n'}^*] d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{при } n' \neq n, \\ N_n & \text{при } n' = n. \end{cases} \quad (8.2.15)$$

В (8.2.15) норма N_n имеет вполне определенный физический смысл: $(1/2) \operatorname{Re} \{N_n\}$ — средний за период поток мощности, переносимой n -й собственной волной через поперечное сечение волновода.

Условие ортогональности в форме (8.2.15) указывает на то, что собственные волны в направляющих структурах без диссипации энергии являются не связанными между собой, ибо их взаимные потоки мощности, как следует из (8.2.15) равны нулю. Запись условия ортогональности собственных волн в виде (8.2.15) иногда называется энергетической.

Вычислим комплексную мощность, переносимую суммарным полем

$$\vec{E} = \sum_n C_n \vec{E}_n, \quad \vec{H} = \sum_{n'} C_{n'} \vec{E}_{n'}$$

в волноводе без диссипации энергии.

Получаем выражение

$$\begin{aligned} \int_{S_p} [\vec{E} \vec{H}^*] d\vec{S} &= \sum_n \sum_{n'} C_n C_{n'} \int_{S_p} [\vec{E}_n \vec{H}_{n'}^*] d\vec{S} = \\ &= \sum_n |C_n|^2 \int_{S_p} [\vec{E}_n \vec{H}_n^*] d\vec{S}, \end{aligned} \quad (8.2.16)$$

из которого следует, что мощность, переносимая суммой волн через поперечное сечение волновода, равна сумме мощностей, переносимых каждой волной. Поскольку формула для вычисления общего потока мощности получилась в виде (8.2.16) благодаря тому, что все интегралы с $n' \neq n$ обратились в нуль, можно сказать, что условие ортогональности (8.2.15) физически отражает факт независимости мощностей, переносимых различными собственными волнами.

Условие ортогональности собственных волн играет основополагающую роль при решении задач дифракции для экранированных направляющих структур. Общий подход к решению таких задач рассмотрим на примере стыка двух регулярных волноводов с различными поперечными сечениями (рис. 8.4).

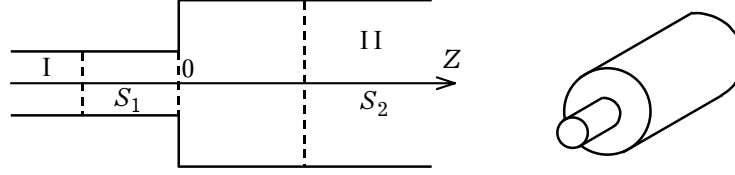


Рис. 8.4

Поля собственных волн стыкуемых волноводов обозначим как $\vec{E}_n^{(1)}$, $\vec{H}_n^{(1)}$ и $\vec{E}_n^{(2)}$, $\vec{H}_n^{(2)}$ соответственно. Стык может возбуждаться со стороны любого волновода как одной волной, так и, в общем случае, их произвольной суперпозицией.

В плоскости $z = 0$ должны выполняться условия непрерывности тангенциальных компонент поля

$$\vec{E}_\tau^{(2)} = \vec{E}_\tau^{(1)}, \quad \vec{H}_\tau^{(2)} = \vec{H}_\tau^{(1)}. \quad (8.2.17)$$

Первое из них в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\vec{E}_\tau^{(2)} = \begin{cases} \vec{E}_\tau^{(2)} & \text{при } q_{1,2} \in S_1, \\ 0 & \text{при } q_{1,2} \in S_2 - S_1, \end{cases} \quad (8.2.18)$$

где $q_{1,2}$ — обобщенные поперечные координаты; $S_{1,2}$ — площади поперечных сечений соответствующих волноводов (рис. 8.4).

Перепишем первое граничное условие (8.2.17) в виде

$$[\vec{n} \vec{E}^{(2)}] = [\vec{n} \vec{E}^{(1)}], \quad (8.2.19)$$

где \vec{n} — нормаль к плоскости $z = 0$.

Умножим равенство (8.2.19) скалярно на $\vec{H}_n^{(2)}$ и проинтегрируем в соответствии с (8.2.18) по поперечным сечениям волноводов:

$$\int_{S_2} [\vec{n} \vec{E}^{(2)}] \vec{H}_n^{(2)} dS = \int_{S_1} [\vec{n} \vec{E}^{(1)}] \vec{H}_n^{(2)} dS. \quad (8.2.20)$$

Сделав соответствующие перестановки, переписываем (8.2.20) в виде

$$\int_{S_2} [\vec{E}^{(2)} \vec{H}_n^{(2)}] d\vec{S} = \int_{S_1} [\vec{E}^{(1)} \vec{H}_n^{(2)}] d\vec{S}. \quad (8.2.21)$$

С учетом того, что

$$\vec{E}^{(1)} = \sum_n C_n^{(1)} \vec{E}_n^{(1)}, \quad \vec{E}^{(2)} = \sum_k C_k^{(2)} \vec{E}_k^{(2)}, \quad (8.2.22)$$

уравнение (8.2.21) переписываем в виде

$$\sum_n C_n^{(1)} \int_{S_1} [\vec{E}_n^{(1)} \vec{H}_k^{(2)}] d\vec{S} = C_k^{(2)} \int_{S_2} [\vec{E}_k^{(2)} \vec{H}_k^{(2)}] d\vec{S}. \quad (8.2.23)$$

В (8.2.23) благодаря использованию условия ортогональности собственных волн второго волновода в правой части из всей суммы осталось лишь одно слагаемое.

Второе граничное условие (8.2.17) переписываем в виде

$$[\vec{n} \vec{H}^{(2)}] = [\vec{n} \vec{H}^{(1)}].$$

Умножая его на $\vec{E}_n^{(1)}$ скалярно и интегрируя по поперечному сечению первого волновода (именно в пределах этого сечения согласуются магнитные поля волноводов), получаем

$$\int_{S_1} [\vec{n} \vec{H}^{(2)}] \vec{E}_n^{(1)} dS = \int_{S_1} [\vec{n} \vec{H}^{(2)}] \vec{E}_n^{(1)} dS.$$

Делая соответствующие перестановки в подынтегральных выражениях, приходим к уравнению

$$\int_{S_1} [\vec{E}_n^{(1)} \vec{H}^{(2)}] d\vec{S} = \int_{S_1} [\vec{E}_n^{(1)} \vec{H}^{(1)}] d\vec{S},$$

которое с учетом того, что

$$\vec{H}^{(1)} = \sum_n C_n^{(1)} \vec{H}_n^{(1)}, \quad \vec{H}^{(2)} = \sum_k C_k^{(2)} \vec{H}_k^{(2)}, \quad (8.2.24)$$

переписываем в виде

$$\sum_k C_k^{(2)} \int_{S_1} [\vec{E}_n^{(1)} \vec{H}_k^{(2)}] d\vec{S} = C_n^{(1)} \int_{S_1} [\vec{E}_n^{(1)} \vec{H}_n^{(1)}] d\vec{S}. \quad (8.2.25)$$

Уравнения (8.2.23), (8.2.25) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_n^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$. Система неоднородная и, в общем случае, бесконечная. Неоднородность объясняется тем, что стык волноводов возбуждается ограниченным спектром волн с заданными амплитудами. Система бесконечная потому, что на стыке, вообще говоря, возбуждается весь спектр отраженных волн волновода, со стороны которого происходит возбуждение стыка, и весь спектр прошедших волн волновода, в который передается энергия. В общем случае n и k в (8.2.22) и (8.2.24) могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

8.3. Возбуждение волн в волноводах

При рассмотрении задачи о возбуждении волн в волноводе обратимся к рис. 8.3. Предположим, что все источники поля находятся в выделенном участке волновода $z \in [z_1, z_2]$. Полагая волновод бесконечным по оси OZ , поле справа от источников записываем как сумму полей прямых собственных волн (волн, распространяющихся вдоль оси OZ):

$$\vec{E} = \sum_n C_n \vec{E}_n, \quad \vec{H} = \sum_n C_n \vec{H}_n, \quad (8.3.1)$$

поле слева от источников — как сумму полей обратных собственных волн (волн, распространяющихся навстречу оси OZ):

$$\vec{E} = \sum_n C_{-n} \vec{E}_{-n}, \quad \vec{H} = \sum_n C_{-n} \vec{H}_{-n}. \quad (8.3.2)$$

В записи леммы Лоренца

$$\begin{aligned} \oint_S ([\vec{E}_1 \vec{H}_2] - [\vec{E}_2 \vec{H}_1]) d\vec{S} = \\ = \int_V (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1) dV, \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

где $S = S_1 + S_2 + S_0$, сечения $S_{1,2}$ находятся за пределами области источников; $j_{1,2}^{e,m}$ — объемные плотности электрического и магнитного токов.

В (8.3.3) в качестве поля \vec{E}_1, \vec{H}_1 возьмем искомое поле возбуждения \vec{E}, \vec{H} , в качестве поля \vec{E}_2, \vec{H}_2 будем брать поля собственных волн волновода, входящие в разложения: (8.3.1), (8.3.2). Таким образом, поле \vec{E}, \vec{H} в области источников удовлетворяет неоднородным уравнениям Максвелла; поля $\vec{E}_{\pm n}, \vec{H}_{\pm n}$ — решения однородной краевой задачи.

Так как \vec{E}_2, \vec{H}_2 в (8.3.3) — поля собственных волн, $\vec{j}_2^e = \vec{j}_2^m = 0$. В результате уравнение (8.3.3) переписется в виде

$$\begin{aligned} \oint_S ([\vec{E} \vec{H}_{-n}] - [\vec{E}_{-n} \vec{H}]) d\vec{S} = \int_V (\vec{j}^e \vec{E}_{-n} - \vec{j}^m \vec{H}_{-n}) dV, \\ \oint_S ([\vec{E} \vec{H}_n] - [\vec{E}_n \vec{H}]) d\vec{S} = \int_V (\vec{j}^e \vec{E}_n - \vec{j}^m \vec{H}_n) dV, \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

где $\vec{j}^{e,m}$ — источники, создающие поле \vec{E}, \vec{H} .

Интегралы по поверхности S_0 обращаются в нуль, поскольку это либо идеально проводящая внутренняя поверхность, либо поверхность, расположенная на достаточной глубине в стенках волновода. Поэтому все интегрирование в (8.3.4) сводится к интегрированию по поперечным сечениям $S_{1,2}$. При этом в сечении S_1 поле представляется разложениями (8.3.2), в сечении S_2 — разложениями (8.3.1).

С использованием условия ортогональности (8.2.10) получаем

$$\begin{aligned} \int_{S_1} ([\vec{E} \vec{H}_{-n}] - [\vec{E}_{-n} \vec{H}]) d\vec{S} &= \sum_n C_{-n} I_{-n,-n} = 0, \\ \int_{S_2} ([\vec{E} \vec{H}_{-n}] - [\vec{E}_{-n} \vec{H}]) d\vec{S} &= \sum_n C_n I_{n,-n} = C_n N_n, \\ \int_{S_1} ([\vec{E} \vec{H}_n] - [\vec{E}_n \vec{H}]) d\vec{S} &= \sum_n C_{-n} I_{n,-n} = C_{-n} N_n, \\ \int_{S_2} ([\vec{E} \vec{H}_n] - [\vec{E}_n \vec{H}]) d\vec{S} &= \sum_n C_n I_{n,n} = 0. \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

Из (8.3.4) и (8.3.5) получаем следующие выражения

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{N_n} \int_V (\vec{j}^e \vec{E}_{-n} - \vec{j}^m \vec{H}_{-n}) dV, \\ C_{-n} &= \frac{1}{N_n} \int_V (\vec{j}^e \vec{E}_n - \vec{j}^m \vec{H}_n) dV \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

для коэффициентов разложений (8.3.1) и (8.3.2), в которых интегрирование производится по объему источников, создающих поле \vec{E} , \vec{H} . Зная эти коэффициенты, можем рассчитать поле возбуждения слева и справа от источников, однако соотношения (8.3.1), (8.3.2) и (8.3.6) не позволяют определить поле в области $z \in [z_1, z_2]$, занятой источниками. Для нахождения поля в произвольной точке z указанной области будем мысленно из Δz окрестности этой точки удалять токи $\vec{j}^{e,m}$. Тогда в слое Δz , свободном от источников, будут справедливы формулы (8.3.6) и представления полей (8.3.1), (8.3.2).

С учетом этого источники, расположенные слева от выделенного слоя Δz , при $\Delta z \rightarrow 0$ создадут в сечении z поле, представляемое разложением (8.3.1) с коэффициентами, определяемыми как

$$C_n = \frac{1}{N_n} \int_{z_1}^z (\vec{j}^e \vec{E}_{-n} - \vec{j}^m \vec{H}_{-n}) dV. \quad (8.3.7)$$

Источники, расположенные справа от слоя Δz , создадут при $\Delta z \rightarrow 0$ в сечении z поле, представляемое разложением (8.3.2) с коэффициентами

$$C_{-n} = \frac{1}{N_n} \int_z^{z_2} (\vec{j}^e \vec{E}_n - \vec{j}^m \vec{H}_n) dV. \quad (8.3.8)$$

Пределы в интегралах (8.3.7), (8.3.8) показывают, что интегрирование производится по всему объему источников, заключенному между соответствующими сечениями волновода.

Необходимо заметить, что определяя указанным образом поле в сечении z , мы не учитываем возникающих при этом разрывов на слое Δz электрического и магнитного токов. В результате этих разрывов на границах слоя возникают поверхностные заряды $\xi^{e,m}$. Изменяющиеся во времени с частотой ω поверхностные заряды создают эквивалентные токи

$$j_{\text{см}}^e = i\omega\xi^e, \quad j_{\text{см}}^m = i\omega\xi^m,$$

которые, являясь токами смещения, создают соответствующие поля

$$\vec{E}_\xi = -\frac{i}{\epsilon_a \omega} \vec{j}_{\text{см}}^e, \quad \vec{H}_\xi = -\frac{i}{\mu_a \omega} \vec{j}_{\text{см}}^m. \quad (8.3.9)$$

Результирующее поле в сечении z будет суперпозицией полей, определяемых разложениями (8.2.4) с коэффициентами (8.3.7) и (8.3.8), и полей (8.3.9), создаваемых токами смещения. Поскольку в реальной ситуации разрывов электрического и магнитного токов в сечении z не происходит, поля (8.3.9) необходимо вычесть из полей, определяемых разложениями (8.2.4), поскольку последние учитывают вышеуказанные разрывы токов в сечении z . В результате

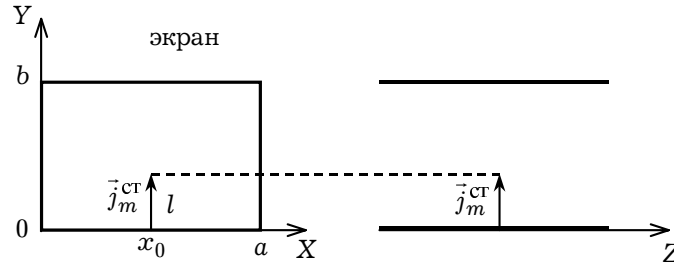


Рис. 8.5

имеем

$$\vec{E}(z) = \sum_n (C_n \vec{E}_n + C_{-n} \vec{E}_{-n}) + \frac{i}{\varepsilon_a \omega} \vec{j}_{\text{см}}^e,$$

$$\vec{H}(z) = \sum_n (C_n \vec{H}_n + C_{-n} \vec{H}_{-n}) + \frac{i}{\mu_a \omega} \vec{j}_{\text{см}}^m,$$

где коэффициенты C_n и C_{-n} вычисляются по формулам (8.3.7), (8.3.8), а аргумент z указывает на принадлежность поля произвольному сечению z из интервала $z \in [z_1, z_2]$.

Вне указанного интервала поля определяются разложениями (8.3.1) и (8.3.2) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (8.3.6). В качестве сторонних магнитных токов в этих формулах выступают различные рамочные вибраторы, щели и отверстия в стенках волновода.

В качестве примера рассмотрим задачу о возбуждении волн в прямоугольном волноводе источником в виде тонкого линейного тока (рис. 8.5), ориентированного вдоль оси OY с комплексной амплитудой

$$\vec{j}^e = I_0 \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \vec{e}_2, \quad (8.3.10)$$

где \vec{e}_2 — единичный вектор, направленный вдоль оси OY .

В общем случае такой источник возбуждает весь спектр Н- и Е-волн, описываемых, соответственно, магнитным и электрическим векторами Герца

$$\Pi_z^m = A \cos\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{\pm i\gamma z},$$

$$\Pi_z^e = B \sin\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{\pm i\gamma z}, \quad (8.3.11)$$

где знак «-» соответствует обратным волнам (\vec{E}_{-n} , \vec{H}_{-n}), знак «+» — прямым (\vec{E}_n , \vec{H}_n).

Амплитудные коэффициенты волн, возбуждаемых источником (8.3.10), вычисляем по формулам (8.3.6), которые в данном случае записываются в виде

$$C_n = C_{mn}^{E,H} = \frac{1}{N_n} \int_V \vec{j}^e \vec{E}_{-n} dV, \quad C_{-n} = C_{-(mn)}^{E,H} = \frac{1}{N_n} \int_V \vec{j}^e \vec{E}_n dV, \quad (8.3.12)$$

где

$$N_n = \int_S ([\vec{E}_n \vec{H}_{-n}] - [\vec{E}_{-n} \vec{H}_n]) d\vec{S}, \quad (8.3.13)$$

S — площадь поперечного сечения волновода; индексы E и H указывают на принадлежность коэффициента волне соответствующего типа.

Подставляя компоненты поля, выраженные через векторы Герца (8.3.11), по формулам:

$$\vec{E} = \text{grad div } \Pi_z^e + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \Pi_z^e, \quad \vec{H} = i\omega \varepsilon_a \text{rot } \Pi_z^e$$

для волн типа Е и

$$\vec{E} = -i\omega \mu_a \text{rot } \Pi_z^m, \quad \vec{H} = \text{grad div } \Pi_z^m + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \Pi_z^m$$

для волн типа Н в формулу (8.3.13), получаем:

$$\begin{aligned} N_n^H &= N_{mn}^H = \omega \mu_a \gamma \frac{ab}{4} \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right] A^2, \\ N_n^E &= N_{mn}^E = -\omega \varepsilon_a \gamma \frac{ab}{4} \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right] B^2. \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

Значения интегралов в (8.3.12) для Н- и Е-волн после подстановки в них плотности тока (8.3.10) и компоненты E_y , выраженной через соответствующий вектор Герца (8.3.11), записываем как

$$\begin{aligned} I_{\pm n}^H &= -i\omega \mu_a \frac{b}{a} \frac{m}{n} I_m^{\text{CT}} A \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_0\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} l\right) e^{\pm i\gamma z_0}, \\ I_{\pm n}^E &= \pm i\gamma I_m^{\text{CT}} B \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_0\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} l\right) e^{\pm i\gamma z_0}. \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

Подставляя (8.3.14) и (8.3.15) в формулу (8.3.12), получаем коэффициенты

$$\begin{aligned} C_{\pm(mn)}^H &= \frac{4\pi m l I_m^{\text{CT}} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_0\right) \sin\left(\frac{\pi n l}{b}\right)}{a^2 b \gamma \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 - \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right] \bar{A}} \frac{\pi n l}{b} e^{\pm i\gamma z_0}, \\ C_{\pm(mn)}^E &= \frac{4 I_m^{\text{CT}} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_0\right) \sin\left(\frac{\pi n l}{b}\right)}{\omega \varepsilon_a a b \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right] \bar{B}} e^{\pm i\gamma z_0}, \end{aligned} \quad (8.3.16)$$

входящие в представление поля возбуждения в области вне источников в виде (8.3.1), (8.3.2). В (8.3.16) обозначено: $\bar{A} = iA$, $\bar{B} = iB$, где A и B — амплитудные коэффициенты в (8.3.11). Как видно из (8.3.16), амплитуда возбуждаемой волны зависит от места расположения тока, его амплитуды и типа волны.

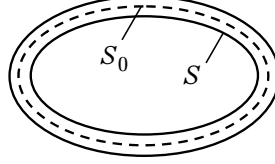


Рис. 8.6

8.4(*). Ортогональность собственных колебаний объемных резонаторов

Поля собственных колебаний объемов, ограниченных металлическими экранами (рис. 8.6), описываются решениями однородной краевой задачи на уравнениях Максвелла для комплексных амплитуд

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_a\vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = i\omega\varepsilon_a\vec{E} \quad (8.4.1)$$

с граничным условием

$$\vec{E}_\tau|_S = 0 \quad (8.4.2)$$

на поверхности S , ограничивающей резонансный объем V . При этом под поверхностью S в (8.4.2) понимается либо внутренняя поверхность экрана резонатора, если она идеально проводящая, либо поверхность S_0 в толще экрана, на которой за счет скин-эффекта поле практически равно нулю (рис. 8.6). В этом случае в нуль обращается все поле, а не только \vec{E}_τ .

Запишем для колебания \vec{E}_n, \vec{H}_n систему однородных уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{E}_n = -i\omega_n\mu_a\vec{H}_n, \quad (8.4.3)$$

$$\text{rot } \vec{H}_n = i\omega_n\varepsilon_a\vec{E}_n, \quad (8.4.4)$$

а для колебания $\vec{E}_{n'}, \vec{H}_{n'}$ систему, комплексно сопряженную (8.4.3), (8.4.4):

$$\text{rot } \vec{E}_{n'}^* = i\omega_{n'}^*\mu_a\vec{H}_{n'}^*, \quad (8.4.5)$$

$$\text{rot } \vec{H}_{n'}^* = -i\omega_{n'}^*\varepsilon_a\vec{E}_{n'}^*. \quad (8.4.6)$$

В выше приведенных уравнениях частоты собственных колебаний ω_n и $\omega_{n'}$ являются комплексными величинами, когда граничное условие (8.4.2) выполняется в толще экранирующей поверхности. В том случае, когда условие (8.4.2) соответствует идеально проводящей внутренней поверхности, частоты являются действительными величинами, и знак комплексной сопряженности над ними в уравнениях (8.4.5), (8.4.6) можно не ставить.

Уравнение (8.4.3) умножим скалярно на $\vec{H}_{n'}^*$, а уравнение (8.4.6) на \vec{E}_n и вычтем из первого второе. В результате получаем

$$\text{div} [\vec{E}_n \vec{H}_{n'}^*] = i\omega_{n'}^*\varepsilon_a\vec{E}_n\vec{E}_{n'}^* - i\omega_n\mu_a\vec{H}_n\vec{H}_{n'}^*. \quad (8.4.7)$$

Аналогичным образом уравнение (8.4.4) умножим на $\vec{E}_{n'}^*$, а (8.4.5) на \vec{H}_n и также вычтем из первого уравнения второе

$$\operatorname{div}[\vec{E}_{n'}^*, \vec{H}_n] = i\omega_{n'}^* \mu_a \vec{H}_n \vec{H}_{n'}^* - i\omega_n \varepsilon_a \vec{E}_n \vec{E}_{n'}^*. \quad (8.4.8)$$

Проинтегрируем уравнения (8.4.7), (8.4.8) по всему объему резонатора и с учётом теоремы Остроградского-Гаусса получим:

$$\begin{aligned} \oint_S [\vec{E}_n \vec{H}_{n'}^*] d\vec{S} &= i\omega_{n'}^* \int_V \varepsilon_a \vec{E}_n \vec{E}_{n'}^* dV - i\omega_n \int_V \mu_a \vec{H}_n \vec{H}_{n'}^* dV, \\ \oint_S [\vec{E}_{n'}^* \vec{H}_n] d\vec{S} &= i\omega_{n'}^* \int_V \mu_a \vec{H}_n \vec{H}_{n'}^* dV - i\omega_n \int_V \varepsilon_a \vec{E}_n \vec{E}_{n'}^* dV, \end{aligned} \quad (8.4.9)$$

где S — внутренняя поверхность экрана резонатора, если она идеально проводящая, и $S = S_0$ (рис. 8.6), если поле обращается в нуль в толще экрана.

В первом случае поверхностные интегралы в (8.4.9) обращаются в нуль ввиду того, что подинтегральные выражения пропорциональны \vec{E}_τ :

$$\begin{aligned} [\vec{E}_n \vec{H}_{n'}^*] d\vec{S} &= [\vec{n} \vec{E}_n] \vec{H}_{n'}^* dS, \\ [\vec{E}_{n'}^* \vec{H}_n] d\vec{S} &= [\vec{n} \vec{E}_{n'}^*] \vec{H}_n dS, \end{aligned}$$

во втором — ввиду того, что электромагнитное поле в толще экрана к поверхности S_0 спадает до нуля.

В результате получаем систему уравнений относительно частот ω_n и $\omega_{n'}^*$

$$\begin{aligned} \omega_{n'}^* \int_V \varepsilon_a \vec{E}_n \vec{E}_{n'}^* dV - \omega_n \int_V \mu_a \vec{H}_n \vec{H}_{n'}^* dV &= 0, \\ \omega_{n'}^* \int_V \mu_a \vec{H}_n \vec{H}_{n'}^* dV - \omega_n \int_V \varepsilon_a \vec{E}_n \vec{E}_{n'}^* dV &= 0, \end{aligned} \quad (8.4.10)$$

из которой следуют равенства

$$\begin{aligned} [\omega_n^2 - (\omega_{n'}^*)^2] \int_V \varepsilon_a \vec{E}_n \vec{E}_{n'}^* dV &= 0, \\ [\omega_n^2 - (\omega_{n'}^*)^2] \int_V \mu_a \vec{H}_n \vec{H}_{n'}^* dV &= 0, \end{aligned} \quad (8.4.11)$$

приводящие к условию ортогональности собственных колебаний резонатора

$$\int_V \varepsilon_a \vec{E}_n \vec{E}_{n'}^* dV = \begin{cases} \int_V \varepsilon_a |\vec{E}_n|^2 dV & \text{при } n' = n, \\ 0 & \text{при } n' \neq n, \end{cases} \quad (8.4.12)$$

$$\int_V \mu_a \vec{H}_n \vec{H}_{n'}^* dV = \begin{cases} \int_V \mu_a |\vec{H}_n|^2 dV & \text{при } n' = n, \\ 0 & \text{при } n' \neq n. \end{cases} \quad (8.4.13)$$

Условия ортогональности (8.4.12), (8.4.13) являются следствием равенств (8.4.11) при отсутствии вырождения, когда (при вырождении) различным колебаниям соответствуют одинаковые собственные частоты.

Из уравнений (8.4.10) следует, что при $n' = n$

$$\int_V \epsilon_a |\vec{E}_n|^2 dV = \int_V \mu_a |\vec{H}_n|^2 dV. \quad (8.4.14)$$

Соотношение (8.4.14) свидетельствует о равенстве в среднем за период запасенных в резонаторе энергий электрического и магнитных полей.

Условия ортогональности (8.4.12), (8.4.13) являются общими для всех электродинамически замкнутых резонансных объемов. При этом объемы могут иметь как однородное, так и неоднородное заполнение. Приведенные соотношения ортогональности собственных колебаний позволяют решать задачи о вынужденных колебаниях, то есть задачи возбуждения резонаторов заданными источниками.

8.5(*). Возбуждение колебаний в объемных экранированных резонаторах

В реальной ситуации резонаторы всегда связаны с источниками электромагнитной энергии. Колебания в резонаторах могут быть возбуждены сторонними источниками электрического и магнитного типов. В качестве первых выступают штыри, проводники с током различной конфигурации; в качестве вторых — отверстия в стенках, петлевые зонды, диафрагмы. Кроме того, резонаторы могут возбуждаться электронными потоками. Петлю связи, возбуждающую резонатор, можно трактовать двояко: и как сторонний электрический ток, и как эквивалентный источник магнитного типа. Щели и отверстия в стенках резонаторов в задачах о возбуждении обычно трактуются как поверхностные магнитные токи.

Таким образом, так или иначе задача о возбуждении резонатора каким-то внешним источником электромагнитной энергии сводится к введению в резонатор сторонних электрического \vec{j}^e или магнитного \vec{j}^m (или того и другого) токов. При введении сторонних токов резонатор предполагается изолированным от внешнего пространства электродинамически непроницаемой оболочкой. В задачах о возбуждении в резонаторах монохроматических электромагнитных колебаний производится интегрирование неоднородных уравнений Максвелла относительно комплексных амплитуд

$$\text{rot } \vec{E} = -\vec{j}^m - i\omega\mu_a\vec{H}, \quad (8.5.1)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}^e + i\omega\epsilon_a\vec{E}, \quad (8.5.2)$$

в которых сторонние источники \vec{j}^e и \vec{j}^m полагаются заданными. В (8.5.1), (8.5.2) ω — частота сторонних источников; \vec{E} и \vec{H} — поля, создаваемые этими источниками.

Запишем для собственного колебания с индексом n однородную систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E}_n = -i\omega_n\mu_a\vec{H}_n, \quad (8.5.3)$$

$$\text{rot } \vec{H}_n = i\omega_n\epsilon_a\vec{E}_n \quad (8.5.4)$$

и ей комплексно сопряженную

$$\operatorname{rot} \vec{E}_n^* = i \omega_n^* \mu_a \vec{H}_n^*, \quad (8.5.5)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}_n^* = -i \omega_n^* \varepsilon_a \vec{E}_n^*. \quad (8.5.6)$$

Комплексная сопряженность частоты подчеркивает тот факт, что в общем случае внутренняя поверхность оболочки, экранирующей резонансный объем, не является идеально проводящей, в результате чего собственные колебания, будучи затухающими, имеют комплексную частоту.

Умножим уравнение (8.5.1) скалярно на \vec{H}_n^* , а уравнение (8.5.6) на \vec{E} и вычтем из первого полученного уравнения второе:

$$\vec{H}_n^* \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}_n^* = -\vec{j}^m \vec{H}_n^* - i \omega \mu_a \vec{H} \vec{H}_n^* + i \omega_n^* \varepsilon_a \vec{E}_n^* \vec{E}. \quad (8.5.7)$$

Уравнение (8.5.5) умножим скалярно на \vec{H} , уравнение (8.5.2) — на \vec{E}_n^* и вычтем из первого полученного уравнения второе:

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}_n^* - \vec{E}_n^* \operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{j}^e \vec{E}_n^* + i \omega_n^* \mu_a \vec{H}_n^* \vec{H} - i \omega \varepsilon_a \vec{E} \vec{E}_n^*. \quad (8.5.8)$$

С использованием известных формул векторного анализа уравнения (8.5.7), (8.5.8) переписываем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}_n^*] &= -\vec{j}^m \vec{H}_n^* - i \omega \mu_a \vec{H} \vec{H}_n^* + i \omega_n^* \varepsilon_a \vec{E}_n^* \vec{E}, \\ \operatorname{div} [\vec{E}_n^* \vec{H}] &= -\vec{j}^e \vec{E}_n^* + i \omega_n^* \mu_a \vec{H}_n^* \vec{H} - i \omega \varepsilon_a \vec{E} \vec{E}_n^*. \end{aligned} \quad (8.5.9)$$

Проинтегрировав уравнения (8.5.9) по всему резонансному объему, с учётом теоремы Остроградского-Гаусса получим:

$$\begin{aligned} \oint_S [\vec{E} \vec{H}_n^*] d\vec{S} &= - \int_V \vec{j}^m \vec{H}_n^* dV - \\ &- i \omega \int_V \mu_a \vec{H} \vec{H}_n^* dV + i \omega_n^* \int_V \varepsilon_a \vec{E}_n^* \vec{E} dV, \\ \oint_S [\vec{E}_n^* \vec{H}] d\vec{S} &= - \int_V \vec{j}^e \vec{E}_n^* dV + \\ &+ i \omega_n^* \int_V \mu_a \vec{H}_n^* \vec{H} dV - i \omega \int_V \varepsilon_a \vec{E} \vec{E}_n^* dV. \end{aligned} \quad (8.5.10)$$

Если внутренняя поверхность экрана идеально проводящая, поверхностные интегралы в (8.5.10) зануляются в силу того, что

$$\begin{aligned} [\vec{E} \vec{H}_n^*] d\vec{S} &= [\vec{n} \vec{E}] \vec{H}_n^* dS = \vec{E}_\tau \vec{H}_n^* dS \Big|_S = 0, \\ [\vec{E}_n^* \vec{H}] d\vec{S} &= [\vec{n} \vec{E}_n^*] \vec{H} dS = \vec{E}_{n\tau} \vec{H} dS \Big|_S = 0. \end{aligned}$$

Если внутренняя поверхность имеет конечную проводимость, под S в (8.5.10) понимается поверхность S_0 (рис. 8.6), на которой электромагнитное поле обращается в нуль. При этом поверхностные интегралы в (8.5.10) также равны нулю. В результате получаем:

$$\begin{aligned} i \omega_n^* \int_V \varepsilon_a \vec{E}_n^* \vec{E} dV - i \omega \int_V \mu_a \vec{H} \vec{H}_n^* dV &= \int_V \vec{j}^m \vec{H}_n^* dV, \\ i \omega_n^* \int_V \mu_a \vec{H}_n^* \vec{H} dV - i \omega \int_V \varepsilon_a \vec{E} \vec{E}_n^* dV &= \int_V \vec{j}^e \vec{E}_n^* dV. \end{aligned} \quad (8.5.11)$$

Возбуждаемое в резонаторе поле представляем как сумму полей собственных колебаний:

$$\vec{E} = \sum_n C_n \vec{E}_n, \quad \vec{H} = \sum_n C_n \vec{H}_n, \quad (8.5.12)$$

удовлетворяющих уравнениям (8.5.3), (8.5.4). Подставляя разложения (8.5.12) в уравнения (8.5.11) с использованием условий ортогональности (8.4.12), (8.4.13) получаем:

$$\begin{aligned} i\omega_n^* C_n \int_V \epsilon_a |\vec{E}_n|^2 dV - i\omega C_n \int_V \mu_a |\vec{H}_n|^2 dV &= \int_V \vec{j}^m \vec{H}_n^* dV, \\ i\omega_n^* C_n \int_V \mu_a |\vec{H}_n|^2 dV - i\omega C_n \int_V \epsilon_a |\vec{E}_n|^2 dV &= \int_V \vec{j}^e \vec{E}_n^* dV. \end{aligned} \quad (8.5.13)$$

Умножая первое уравнение (8.5.13) на ω_n^* , второе на ω и складывая полученные уравнения, имеем:

$$\begin{aligned} i(\omega_n^*)^2 C_n \int_V \epsilon_a |\vec{E}_n|^2 dV - i\omega^2 C_n \int_V \epsilon_a |\vec{E}_n|^2 dV &= \\ = \omega \int_V \vec{j}^e \vec{E}_n^* dV + \omega_n^* \int_V \vec{j}^m \vec{H}_n^* dV, \end{aligned}$$

откуда

$$C_n = \frac{\omega \int_V \vec{j}^e \vec{E}_n^* dV + \omega_n^* \int_V \vec{j}^m \vec{H}_n^* dV}{i[(\omega_n^*)^2 - \omega^2] \int_V \epsilon_a |\vec{E}_n|^2 dV}. \quad (8.5.14)$$

Из выражения (8.5.14) видно, что величина амплитудных коэффициентов собственных колебаний, возбуждаемых в резонаторе, определяется амплитудами источников $\vec{j}^{e,m}$. При этом в случае идеальной проводимости внутренней поверхности резонатора совпадение частоты источника ω с одной из собственных частот резонансного объема, как и следовало ожидать, приводит к возбуждению соответствующего этой частоте собственного колебания с бесконечно большой амплитудой. Если внутренняя поверхность резонатора имеет конечную проводимость, собственные частоты являются комплексными величинами. В результате, как видно из (8.5.14), амплитуды собственных колебаний, возбуждаемых в резонаторе, в силу его конечной добротности всегда являются ограниченными величинами.

Таким образом, в соответствии с (8.5.12) сторонние источники любого типа возбуждают, в общем случае, в резонаторе весь спектр собственных колебаний, амплитуды которых определяются по формуле (8.5.14). При совпадении частоты стороннего источника с одной из собственных частот резонатора одно из собственных колебаний оказывается доминирующим.

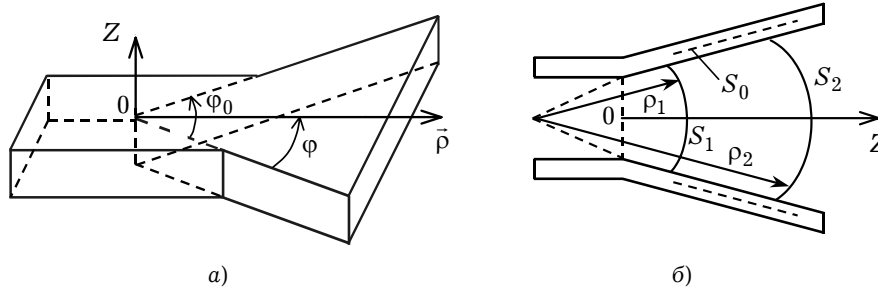


Рис. 8.7

8.6(*). Возбуждение волн в рупорах

Для создания направленного излучения в СВЧ диапазоне широко применяют рупорные антенны — рупоры, представляющие собой направляющую структуру с расширяющимся поперечным сечением вдоль ее направляющей оси. Помимо того, что рупоры по сравнению, например, с открытыми концами волноводов создают более направленное излучение, они, благодаря плавному уменьшению к плоскости раскрытия фазовой скорости электромагнитного поля, обеспечивают хорошее согласование с окружающим пространством. Рупоры, как правило, сочетаются с волноводами тех или иных сечений, то есть их возбуждение осуществляется со стороны регулярных волноводов. В качестве примера рассмотрим задачу о возбуждении секториального рупора прямоугольным волноводом.

Секториальный рупор расширяется лишь в одном поперечном измерении (рис. 8.7а), поэтому при постановке для него краевой электродинамической задачи целесообразно использовать цилиндрическую систему координат $\{\rho, \varphi, z\}$. Рассматривая секториальный рупор как нерегулярную вдоль оси ρ направляющую структуру, для области, ограниченной сечениями $S_{1,2}$ (рис. 8.7б), так же, как в разделе 8.2, исходя из леммы Лоренца, можно получить соотношение:

$$\oint_S \{[\vec{E}_n \vec{H}_{n'}] - [\vec{E}_{n'} \vec{H}_n]\} d\vec{S} = 0, \quad (8.6.1)$$

где $S = S_0 + S_1 + S_2$ (рис. 8.7б); S_0 — либо внутренняя поверхность рупора, если она идеально проводящая, либо поверхность в толще стенок, где поле в силу скин-эффекта практически равно нулю.

Из (8.6.1) следует равенство, подобное (8.2.6), на основании которого можно утверждать, что интеграл

$$I_{n,n'} = \int_{S_p} \{[\vec{E}_n \vec{H}_{n'}] - [\vec{E}_{n'} \vec{H}_n]\} d\vec{S} \quad (8.6.2)$$

не зависит от радиальной координаты, то есть имеет одно и то же значение в любом поперечном сечении S_p секториального волновода. Независимость интеграла (8.6.2) от координаты ρ приводит к условию ортогональности собственных волн секториального волновода, подобному (8.2.10).

Полагая отрезок секториального волновода идеально согласованным на концах, поле справа от источников записываем как сумму полей прямых собственных волн (волн, распространяющихся вдоль координаты ρ):

$$\vec{E} = \sum_n C_n \vec{E}_n, \quad \vec{H} = \sum_n C_n \vec{H}_n, \quad (8.6.3)$$

поле слева от источников — как сумму полей обратных собственных волн (волн, распространяющихся навстречу ρ):

$$\vec{E} = \sum_n C_{-n} \vec{E}_{-n}, \quad \vec{H} = \sum_n C_{-n} \vec{H}_{-n}. \quad (8.6.4)$$

Формулы для вычисления коэффициентов разложений (8.6.3), (8.6.4) получаются по методике, описанной в разделе 8.3, и совпадают с (8.3.6). Разложения (8.6.3), (8.6.4) с коэффициентами, вычисленными по указанным формулам, позволяют определять поля возбуждения в областях вне источников. Рассмотрим процедуру определения полей в области, занимаемой источниками.

Предположим, источники \vec{j}^e и \vec{j}^m находятся в области $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$ секториального рупора (рис. 8.7б). Для нахождения поля в произвольной точке ρ указанной области мысленно освободим $\Delta\rho$ окрестность этой точки от источников. Тогда в слое $\Delta\rho$, свободном от источников, будут справедливы формулы (8.3.6) и представления полей (8.6.3), (8.6.4).

С учетом этого источники, расположенные слева от выделенного слоя $\Delta\rho$, при $\Delta\rho \rightarrow 0$ создадут в сечении ρ поле, представляемое разложением (8.6.3) с коэффициентами, определяемыми как

$$C_n = \frac{1}{N_n} \int_{\rho_1}^{\rho} (\vec{j}^e \vec{E}_{-n} - \vec{j}^m \vec{H}_{-n}) dV. \quad (8.6.5)$$

Источники, расположенные справа от слоя $\Delta\rho$, создадут при $\Delta\rho \rightarrow 0$ в сечении ρ поле, представляемое разложением (8.6.4) с коэффициентами

$$C_{-n} = \frac{1}{N_n} \int_{\rho}^{\rho_2} (\vec{j}^e \vec{E}_n - \vec{j}^m \vec{H}_n) dV. \quad (8.6.6)$$

Определяя коэффициенты разложений таким образом, в представлениях полей (8.6.3), (8.6.4) не учитываем возникающих при этом на слое $\Delta\rho$ разрывов электрического и магнитных токов. В результате этих разрывов возникают токи смещения, создающие поля (8.3.9), дополняющие поля, представляемые разложениями (8.6.3), (8.6.4). Чтобы их скомпенсировать, поле в области источников записываем как

$$\begin{aligned} \vec{E}(\rho) &= \sum_n (C_n \vec{E}_n + C_{-n} \vec{E}_{-n}) + \frac{i}{\varepsilon_a \omega} \vec{j}_{\text{см}}^e, \\ \vec{H}(\rho) &= \sum_n (C_n \vec{H}_n + C_{-n} \vec{H}_{-n}) + \frac{i}{\mu_a \omega} \vec{j}_{\text{см}}^m, \end{aligned}$$

где коэффициенты C_n и C_{-n} вычисляются по формулам (8.6.5), (8.6.6), а аргумент ρ указывает на принадлежность поля произвольной поверхности $\rho = \text{const}$ в области $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$, занимаемой источниками. Вне указанного интервала поля определяются разложениями (8.6.3), (8.6.4) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (8.3.6).

Рупоры чаще всего возбуждаются полями открытых концов волноводов, с которыми эти рупоры сочленяются. В частности, секториальный рупор возбуждается прямоугольным волноводом (рис. 8.7а). В этом случае сторонние источники электромагнитного поля в рупоре расположены в плоскости $z = 0$ (рис. 8.7б) открытого конца волновода и приближенно вычисляются согласно принципу Гюйгенса-Френеля как

$$\vec{j}^e = [\vec{z}_0, \vec{H}], \quad \vec{j}^m = -[\vec{z}_0, \vec{E}], \quad (8.6.7)$$

где \vec{E} и \vec{H} — поля в раскрыве прямоугольного волновода.

При этом поля в рупоре представляются разложениями (8.6.3) с коэффициентами, вычисляемыми по формуле:

$$C_n = \frac{1}{N_n} \int_{S_1} (\vec{j}^e \vec{E}_{-n} - \vec{j}^m \vec{H}_{-n}) dS, \quad (8.6.8)$$

где токи $\vec{j}^{e,m}$ определяются выражениями (8.6.7), а поля \vec{E}_{-n} и \vec{H}_{-n} — поля собственных волн секториального волновода.

Нестрогость описанного подхода к расчету поля, возбуждаемого в рупоре заданными источниками, заключается в том, что не учитывается обратное влияние этого поля на поле в раскрыве волновода. При строгой постановке дифракционной задачи о возбуждении электромагнитного поля в рупоре поля в стыкуемых направляющих структурах представляются в виде

$$\vec{E}_b = \vec{E}_k + \sum_m A_{-m} \vec{E}_{-m}, \quad \vec{H}_b = \vec{H}_k + \sum_m A_{-m} \vec{H}_{-m} \quad (8.6.9)$$

в прямоугольном волноводе, возбуждающем рупор, и

$$\vec{E}_p = \sum_n C_n \vec{E}_n, \quad \vec{H}_p = \sum_n C_n \vec{H}_n \quad (8.6.10)$$

в секториальном волноводе, образующем рупор.

В (8.6.9) \vec{E}_k , \vec{H}_k — поле волны, падающей со стороны прямоугольного волновода (одна из волн прямоугольного волновода, входящая в спектр его собственных волн). В такой записи падающая волна имеет единичную амплитуду, $A_{-m} \vec{E}_{-m}$ и $A_{-m} \vec{H}_{-m}$ — поля отраженных от стыка собственных волн прямоугольного волновода. В (8.6.10) $C_n \vec{E}_n$ и $C_n \vec{H}_n$ — поля собственных волн секториального волновода, либо бесконечного, либо согласованного на конце. Амплитуды полей собственных волн в разложениях (8.6.9), (8.6.10) полагаются неизвестными.

На границе $z = 0$ записываются условия непрерывности тангенциальных компонент поля:

$$\vec{E}_{b\tau}(z=0) = \vec{E}_{p\tau}(z=0), \quad \vec{H}_{b\tau}(z=0) = \vec{H}_{p\tau}(z=0), \quad (8.6.11)$$

где $\vec{E}_{p\tau}(z=0) = \vec{E}_p(\rho, \varphi)$, $\vec{H}_{p\tau}(z=0) = \vec{H}_p(\rho, \varphi)$.

Подставляя поля в виде разложений (8.6.9), (8.6.10) в граничные условия (8.6.11), получаем систему функциональных уравнений, содержащих неизвестные коэффициенты указанных разложений. Поля $\vec{E}_{pt}, \vec{H}_{pt}$ в плоскости $z = 0$ раскладываются в ряды Фурье по полям собственных волн прямоугольного волновода. Использование условий ортогональности полей собственных волн в плоскости $z = 0$ поперечного сечения прямоугольного волновода позволяет перейти от системы функциональных уравнений к системе линейных неоднородных алгебраических уравнений бесконечно высокого порядка относительно коэффициентов разложения (8.6.9), (8.6.10). Указанные разложения дают поля, возбуждаемые полем \vec{E}_k, \vec{H}_k падающей волны в секториальном рупоре, согласованном на конце, и в прямоугольном волноводе.

Для того, чтобы решить тем или иным из описанных методов задачу о возбуждении секториального рупора, необходимо иметь полный набор его собственных волн. То есть решение задачи о возбуждении требует предварительного решения соответствующих краевых электродинамических задач для секториального волновода. Рассмотрим их.

Поля волн секториального волновода, вписанного в цилиндрическую систему координат (рис. 8.7), определяются продольными (направленными вдоль оси OZ) компонентами электрического и магнитного векторов Герца, комплексные амплитуды $\Pi_z^{e,m}$ которых удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_z^{e,m}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial \varphi^2} + \\ + \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial z^2} + \varepsilon_a \mu_a \omega^2 \Pi_z^{e,m} = 0, \end{aligned} \quad (8.6.12)$$

решаемому (в приближении идеальной проводимости стенок волновода) при граничном условии

$$\vec{E}_\tau|_S = 0, \quad (8.6.13)$$

где S — внутренняя поверхность секториального волновода.

С учетом соотношений

$$\vec{E} = \text{grad div } \vec{\Pi}^e + \varepsilon_a \mu_a \omega^2 \vec{\Pi}^e, \quad \vec{E} = -i\omega \mu_a \text{rot } \vec{\Pi}^m$$

из граничного условия (8.6.13) получаем граничные условия двух краевых задач:

$$\frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z}(z = 0, b) = 0, \quad \Pi_z^e(\varphi = 0, \varphi_0) = 0, \quad (8.6.14)$$

$$\Pi_z^m(z = 0, b) = 0, \quad \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial \varphi}(\varphi = 0, \varphi_0) = 0. \quad (8.6.15)$$

Краевая задача на уравнении (8.6.12) с граничными условиями (8.6.14) соответствует собственным волнам типа E , с граничными условиями (8.6.15) — волнам типа H секториального волновода. Такая классификация выбрана условно на том основании, что секториальный волновод можно рассматривать как отрезок цилиндрического волновода, ограниченный радиальными и торцевыми идеально проводящими плоскостями.

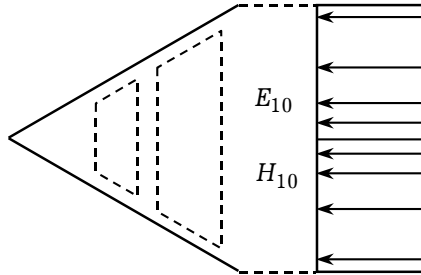


Рис. 8.8

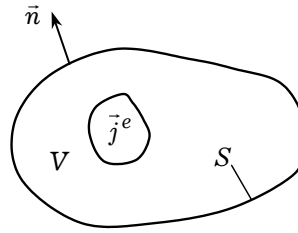


Рис. 8.9

Поскольку в радиальном направлении имеем бегущую волну, зависимость поля от координаты ρ должна описываться (у прямой в направлении ρ волны) функцией Ханкеля второго рода $H_v^{(2)}(\alpha\rho)$ как являющейся решением уравнения Бесселя, к которому приводит разделение переменных в уравнении (8.6.12). В результате решение краевой задачи для волн E_{mn} записывается как

$$\Pi_z^e = A H_v^{(2)}(\alpha\rho) \sin(v\varphi) \cos(\chi z), \quad (8.6.16)$$

соответственно для волн H_{mn} как

$$\Pi_z^m = B H_v^{(2)}(\alpha\rho) \cos(v\varphi) \sin(\chi z), \quad (8.6.17)$$

где величину $\alpha = \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - (\pi n / b)^2}$ следует рассматривать как продольное волновое число волны, распространяющееся в радиальном направлении; величины $v = \pi m / \varphi_0$ и $\chi = \pi n / b$ можно рассматривать как поперечные волновые числа; значения m и n определяют число вариаций поля по соответствующим координатам.

В решении (8.6.16): $m = 1, 2, 3, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$. В решении (8.6.17): $m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, 3, \dots$. При больших значениях $\alpha\rho$ радиальная зависимость решений (8.6.16), (8.6.17) имеет асимптотический вид

$$H_v^{(2)}(\alpha\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\rho}} e^{-i(\alpha\rho - v\pi/2 - \pi/4)},$$

показывающий, что при больших значениях $\alpha\rho$ волна, распространяющаяся в секториальном рупоре, имеет признаки цилиндрической.

Из записи электрического вектора Герца (8.6.16) видно, что волны E_{m0} секториального волновода по своей структуре подобны волнам H_{m0} прямоугольного волновода. Действительно, исходя из (8.6.16), имеем:

$$E_z = \omega^2 \epsilon_a \mu_a A H_v^{(2)}(\alpha\rho) \sin(v\varphi),$$

$$H_\varphi = -i\omega \epsilon_a \alpha A H_v^{(2)'}(\alpha\rho) \sin(v\varphi)$$

(штрих над функцией Ханкеля означает в данном случае дифференцирование по всему аргументу), то есть распределение электромагнитного поля в поперечном

сечении секториального волновода совпадает, например, при $m = 1$ с распределением поля волны H_{10} — основной волны прямоугольного волновода (рис. 8.8). Указанное подобие, как можно видеть из представлений (8.6.16), (8.6.17), распространяется на все волны секториального волновода. В результате в секториальном рупоре при возбуждении его прямоугольным волноводом доминирующей оказывается волна, по своей структуре соответствующая падающей на стык волне прямоугольного волновода. Для создания заданных электрически управляемых диаграмм направленности рупорных антенн практикуют и многоволновое возбуждение рупоров.

8.7(*). О возбуждении колебаний, описываемых соленоидальными функциями

Соленоидальными называют поля, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &\neq 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{aligned} \quad (8.7.1)$$

Рассмотрим задачу о возбуждении колебаний с соленоидальными полями. Будем при формулировке краевой задачи для электродинамически замкнутого объема V отталкиваться от системы уравнений Максвелла, записанной в виде:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}^e + i\omega\varepsilon_a \vec{E}, \quad (8.7.2)$$

где \vec{j}^e — сторонний источник, находящийся внутри объема V (рис. 8.9).

Для колебаний, поля которых удовлетворяют условиям (8.7.1), в случае однородной среды от уравнений (8.7.2) переходим к неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \vec{E} = i\omega\mu_a \vec{j}^e. \quad (8.7.3)$$

Рассмотрим совместно два уравнения Гельмгольца относительно векторной \vec{u}_1 и скалярной u_2 функций

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u}_1 + k^2 \vec{u}_1 &= \vec{f}_1, \\ \Delta u_2 + k^2 u_2 &= f_2, \end{aligned} \quad (8.7.4)$$

где $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$.

Первое уравнение (8.7.4) умножим на $(-u_2)$, второе на \vec{u}_1 ; полученные уравнения сложим. В результате имеем

$$\vec{u}_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta \vec{u}_1 = \vec{u}_1 f_2 - u_2 \vec{f}_1. \quad (8.7.5)$$

Используя формулу Грина

$$\int_V (\vec{u}_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta \vec{u}_1) dV = \oint_S \left(\vec{u}_1 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}} - u_2 \nabla \vec{u}_1 \right) d\vec{S},$$

где \vec{n} — нормаль к поверхности S , ограничивающей объем V (рис. 8.9), из

уравнения (8.7.5) получаем

$$\int_S \left(\bar{u}_1 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{n}} - u_2 \nabla \bar{u}_1 \right) d\bar{S} = \oint_V (\bar{u}_1 f_2 - u_2 \bar{f}_1) dV. \quad (8.7.6)$$

В качестве функции \bar{u}_1 возьмем решение уравнения (8.7.3), в качестве u_2 возьмем функцию Грина g , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta g + k^2 g = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (8.7.7)$$

и граничному условию

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \bar{n}} \right|_S = 0. \quad (8.7.8)$$

Тогда уравнение (8.7.6) запишется как

$$\begin{aligned} \oint_S \left(\vec{E} \frac{\partial g}{\partial \bar{n}} - g \nabla \vec{E} \right) d\bar{S} = \\ = \int_V \left[\vec{E} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) - g(\vec{r}, \vec{r}_0) (i\omega \mu_a \vec{j}^e) \right] dV. \end{aligned}$$

С учетом (8.7.1) и (8.7.8) полученное уравнение приобретает вид

$$\int_V \left[\vec{E} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) - g(\vec{r}, \vec{r}_0) (i\omega \mu_a \vec{j}^e) \right] dV = 0. \quad (8.7.9)$$

Используя свойство δ -функции, из уравнения (8.7.9) получаем

$$\vec{E}(\vec{r}) = i\omega \mu_a \int_V \vec{j}^e(\vec{r}_0) g(\vec{r}, \vec{r}_0) dV, \quad (8.7.10)$$

где под \vec{r} следует понимать радиус-вектор точки наблюдения, под \vec{r}_0 — радиус-вектор точки источника.

Формула (8.7.10) позволяет рассчитывать поля колебаний, удовлетворяющие условиям (8.7.1), возбуждаемых в замкнутом однородно заполненном объеме источником \vec{j}^e . При этом, естественно, необходимо знать для этого объема функцию Грина, удовлетворяющую условию (8.7.8).

Формула (8.7.10) может быть распространена на задачу о возбуждении колебаний заданными источниками в неограниченном пространстве. В этом случае получение уравнения (8.7.9) не требует выполнения условий (8.7.1) соленоидальности полей, а функция Грина имеет вид

$$g(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (8.7.11)$$

Формула (8.7.10) с функцией Грина (8.7.11) используется в приближенной теории антенн, когда поле излучения рассчитывается по заданным токам.

8.8(*). О возбуждении открытых направляющих структур

Задачи о возбуждении открытых направляющих структур, вообще говоря, не могут быть решены в рамках изложенной выше теории, в основе которой заложено

использование условий ортогональности либо собственных функций соответствующих краевых задач, либо полей собственных волн. Дело в том, что краевые задачи для открытых направляющих структур в общем случае не являются однородными. Их решение дает сумму волн, соответствующую дискретному спектру (поверхностные волны), и поле, представляемое интегралом по одному из волновых чисел, соответствующее непрерывному спектру. Непрерывный спектр включает в себя вытекающие и медленные несобственные волны, поля которых нарастают при удалении от направляющей структуры, что не позволяет их использовать при представлении поля возбуждения суммой волн с амплитудными коэффициентами, определяемыми из соответствующих условий ортогональности.

Применить к решению задач о возбуждении открытых направляющих структур вышеизложенную теорию можно лишь в случае, когда имеют место потери, в частности, например, когда направляющая структура находится в диссипативной среде. В этом случае комплексные волновые числа вышеуказанных вытекающих и медленных несобственных волн могут стать такими, что их поля будут экспоненциально убывать при удалении от направляющей структуры, что позволит их включить в дискретный спектр волн, формирующих поле возбуждения. Сохраняя свои основные свойства, эти волны в плане зависимости их полей от поперечных координат приобретают признак поверхностной волны. С точки зрения практики, как показывают результаты экспериментальных исследований, волны с экспоненциально нарастающим при удалении от направляющей структуры полем возбуждаются и их поля реально существуют вблизи источников.

Теорию возбуждения, использующую ортогональность волн, направляемых структурой, можно также применять при условии импедансности поверхности последней. Импедансные граничные условия на поверхности, являющиеся следствием её конечной проводимости, могут приводить к образованию дискретного спектра волн, имеющих поверхностный характер и соответствующих решениям однородной краевой задачи, то есть задачи на собственные функции и собственные значения.

Примерами открытых направляющих структур с импедансными поверхностями являются круглый диэлектрический волновод, покрытый тонкой резистивной пленкой, поддерживающий распространение как медленных, так и быстрых поверхностных волн, и металлический цилиндр с конечной проводимостью, способный направлять поверхностные волны, радиальная протяженность поля которых в диапазоне дециметровых-сантиметровых волн не превышает нескольких длин волн.

Вариантом формального применения принципов теории возбуждения, изложенных в настоящей главе, является использование математической модели, в которой открытая направляющая структура мысленно заключается в идеально проводящую трубу большого поперечного сечения. К такой структуре уже применима теория возбуждения волноводов, использующая условия ортогональности собственных волн. Собственные волны такой структуры при удалении экранирующей поверхности в бесконечность разбиваются на поверхностные, поля которых экспоненциально убывают в поперечном направлении и на которые экранирующая труба не оказывает заметного воздействия, и волны дискретного спектра, переходящего при удалении экранирующей поверхности в бесконечность в непрерывный спектр.

Глава

9

Дифракция электромагнитных волн

9.1. Физическая оптика (приближение Гюйгенса-Кирхгофа)	369
9.2. Дифракция Фраунгофера на отверстиях в непрозрачном экране	381
9.3. Дифракция Френеля на прямоугольном отверстии в экране	388
9.4(*). Интегральная формула Кирхгофа-Гельмгольца	392
9.5(*). Интегральные представления электрического и магнитного полей	399
9.6(*). Интегральные уравнения Фредгольма второго рода в задачах дифракции, получаемые с помощью формул Грина	403
9.7(*). Интегральные уравнения первого рода в задачах дифракции	408
9.8. Метод разделения переменных в теории дифракции плоских электромагнит- ных волн на телах с координатными границами	411

) Символом «» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 9. Дифракция электромагнитных волн

Термин «дифракция» дословно означает «отклонение». Явление дифракции А. Зоммерфельд определил как любое отклонение световых лучей от прямой линии, которое нельзя объяснить отражением или преломлением. В электродинамике в «широком» смысле слова под дифракцией принято понимать все явления, связанные с распространением электромагнитных полей, создаваемых когерентными источниками, при наличии препятствий независимо от величины их размеров. Источники бывают как первичные (реальные), так и вторичные (например, элемент Гюйгенса). Напомним, что под *когерентными источниками* поля излучения понимаются такие источники, для которых справедливы следующие два условия:

1. Частоты колебаний одинаковы.
2. Разность начальных фаз не зависит от времени.

Понятие о когерентных источниках весьма полезно при использовании принципа Гюйгенса-Френеля для решения задач дифракции электромагнитных волн на различных препятствиях. В частности, если первичный источник обладает фиксированной начальной фазой, то вторичные источники, образуемые заряженными частицами вещества и порождающие вторичные волны, с ним всегда когерентны и отличаются от первичного источника только фазой. В зависимости от соотношения между линейными размерами препятствия D и длиной волны λ дифракционные явления разделяют на три группы.

Первая группа явлений называется *дифракционным рассеянием* и соответствует случаю $\lambda \gg D$. Такие препятствия практически не оказывают влияния на распространение электромагнитных волн. При $\lambda \sim D$ (вторая группа явлений) имеет место *огибание препятствий* электромагнитной волной, которая частично заходит в область геометрической «тени». В этом случае препятствие оказывает сильное воздействие на характер распространения электромагнитной волны. Явление огибания электромагнитной волной препятствия при $\lambda \sim D$ называется дифракцией в «узком» смысле слова, или просто дифракцией. Третья группа явлений соответствует условию $\lambda \ll D$ и называется *геометрической оптикой (лучевым приближением)*. Формулировка закона распространения электромагнитных волн основывается на представлении распространения энергии электромагнитного поля вдоль линий, называемых *лучами*. Очевидно, что для электромагнитной волны любой фиксированной частоты можно в принципе подобрать соответствующие препятствия, на которых будут иметь место и *дифракционное рассеяние* ($\lambda \gg D$), и *дифракция* ($\lambda \sim D$), и *геометрическая оптика* ($\lambda \ll D$). Благодаря явлению дифракции электромагнитные волны могут попадать в область геометрической тени, огибать препятствия, стлаться вдоль поверхности, проникать через малые отверстия в экранах и т.д.

9.1. Физическая оптика (приближение Гюйгенса-Кирхгофа)

Метод решения дифракционных задач, основанный на приближении Гюйгенса-Кирхгофа называется *методом физической оптики*, который часто называют просто *приближением Гюйгенса-Кирхгофа*.

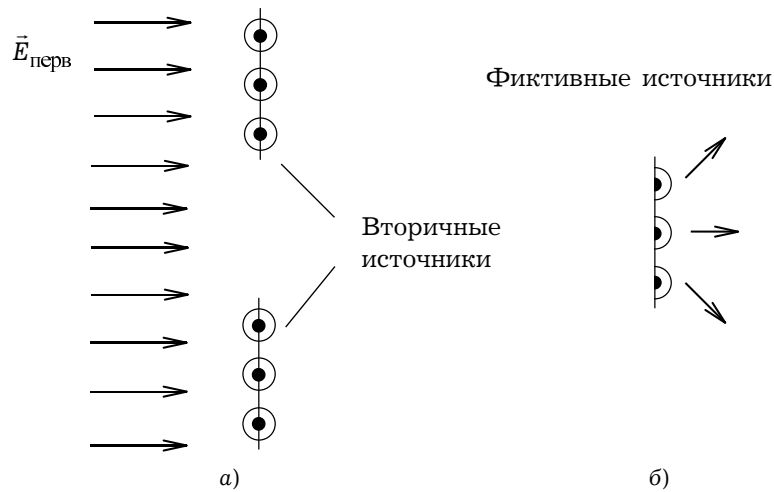


Рис. 9.1

9.1.1. Принцип Гюйгенса-Френеля в теории дифракции электромагнитных волн.

Рассмотрим приближённый метод исследования распространения электромагнитных волн при наличии препятствий с размерами соизмеримыми с длиной волны ($\lambda \sim D$). В основе метода лежит принцип Гюйгенса-Френеля, который был сформулирован Гюйгенсом в XIX веке на основе представлений об интерференции и позже дополненный Френелем введением диаграммы направленности излучения вторичных источников, учитывающей отсутствие обратного излучения.

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, в задаче о распространении волны при наличии препятствий нужно заменить реальный источник совокупностью фиктивных вторичных источников, которые должны быть когерентны с реальным источником и распределяться непрерывно по любой охватывающей его замкнутой поверхности. Тогда поле излучения в точке наблюдения можно представить как результирующее поле, возникающее из-за интерференции полей, излучаемых вторичными (фиктивными) источниками. Чаще всего в качестве замкнутой поверхности выбирают поверхность равных фаз (волновой фронт) или участки таких поверхностей. В этом случае фиктивные источники между собой заведомо когерентны, так что излучаемые ими волны способны интерферировать.

Принцип Гюйгенса-Френеля позволяет просто описать процесс распространения волны. Для этого нужно лишь построить огибающую фронтов сферических волн от вторичных источников. Эта огибающая есть волновой фронт реального источника в последующий момент времени. При этом предполагается, что фиктивные источники излучают вторичные волны лишь в направлении распространения первичной волны: отражённая волна отсутствует. Этим свойством, в частности, обладает элементарный участок фронта волны или *элемент Гюйгенса*.

Покажем, как может быть использован принцип Гюйгенса-Френеля на примере задачи дифракции электромагнитной волны на отверстии в металлическом плоском экране (рис. 9.1). Электромагнитное поле за экраном определяется в виде су-

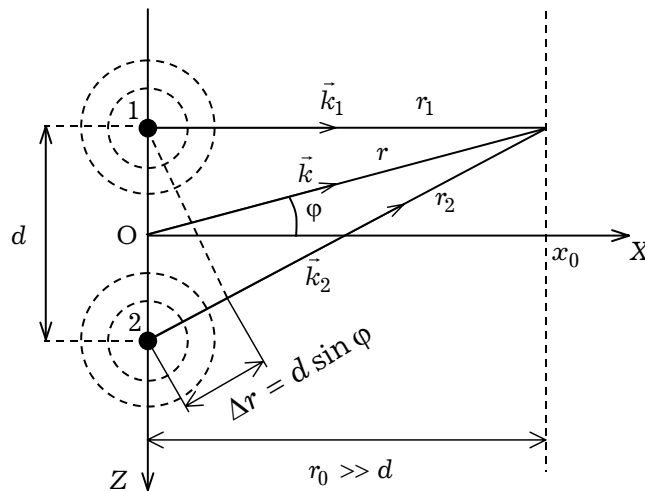


Рис. 9.2

перпозиции поля от первичного источника и полей от вторичных реальных источников на частях экрана, расположенных выше и ниже отверстия (рис. 9.1а), возникающих за счёт затекания токов за края отверстия и совпадает (с точностью до знака) с полем излучения фиктивных вторичных источников, расположенных в пределах отверстия (рис. 9.1б). При этом вдали от отверстия (в дальней зоне) поле излучения этих источников от наличия экрана практически не зависит. Таким образом, задача дифракции на отверстии сводится к расчёту поля излучения фиктивных вторичных источников, непрерывно распределённых по поверхности отверстия в экране (рис. 9.1б). Так как в области пространства за экраном отражённых волн нет, фазу вторичных фиктивных источников на отверстии следует выбирать отличающейся на $\pi/2$ от фаз соответствующих реальных источников.

9.1.2. Суперпозиция (интерференция) электромагнитных волн в дальней зоне от двух когерентных источников. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля, процесс распространения электромагнитных волн при наличии препятствий можно представить как результат интерференции полей от некоторых фиктивных когерентных вторичных источников (например, элементов Гюйгенса). Причём под *интерференцией* понимается явление сложения полей электромагнитных волн от когерентных источников, не удовлетворяющее принципу аддитивности их интенсивностей. Рассмотрим два неподвижных линейных гармонических источника, ориентированных против оси Y и удалённых друг от друга на расстояние d по оси Z (рис. 9.2). Задача является двумерной: вариации геометрии и полей вдоль оси Y отсутствуют. Кроме того, размерами источников в плоскости XOZ пренебрегаем, то есть считаем их точечными. При такой постановке задачи источники излучения представляют собой бесконечно протяжённые тонкие нити с равномерно распределёнными токами.

Для простоты положим, что амплитуды токов $\vec{J}^{(m)}$ обоих источников одинаковы, так что

$$\vec{J}^{(m)} = -\vec{y}_0 J_0 \cos(\omega t + \alpha_m), \quad m = 1, 2, \quad (9.1.1)$$

где J_0 и α_m — амплитуды и начальные фазы токов.

Источники (9.1.1) излучают цилиндрические электромагнитные волны, у которых сечения фронтов в плоскости XOZ имеют вид окружностей с центрами в точках 1 и 2. Векторы электрического поля этих волн всегда ориентированы вдоль вектора \vec{y}_0 , так что их амплитуды аддитивны: $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}^{(1)} + \vec{\mathcal{E}}^{(2)}$. Рассмотрим результирующее поле излучения вдали от источников (при $r_0 \gg \lambda, d$), когда цилиндрические волны от источников можно приближённо считать плоскими. Поэтому электрические поля в дальней от излучателей зоне можно представить как поле гармонических плоских волн ($m = 1, 2$):

$$\vec{\mathcal{E}}^{(m)}(\vec{r}, t) = \vec{y}_0 \mathcal{E}^{(m)} = \vec{y}_0 E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_m \vec{r}_m + \alpha_m), \quad (9.1.2)$$

где под $\mathcal{E}^{(m)}$ и $E^{(m)}$, соответственно, понимаются y -составляющие мгновенного значения и комплексной амплитуды электрического поля m -го источника.

Комплексную амплитуду результирующего электрического поля можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E &= E^{(1)} + E^{(2)} = E_0 (e^{i\psi_1} + e^{i\psi_2}) = \\ &= 2E_0 \exp[i(\psi_1 + \psi_2)/2] \cos\left[\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}\right], \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

где $\psi_m = \omega t - \vec{k}_m \vec{r}_m + \alpha_m$; $m = 1, 2$.

С учётом того, что для однородной изотропной среды $|\vec{k}_m| = k = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$, ($m = 1, 2$) и в дальней зоне $\vec{k}_m \uparrow \vec{r}_m$, $\vec{r}_1 \uparrow \vec{r}_2$, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} &= \omega t - \vec{k} \left(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \right) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha, \\ \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} &= \vec{k} \left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{2} \right) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{1}{2} k d \sin \varphi + \frac{\Delta \alpha}{2} \equiv \frac{\Delta \psi}{2}, \end{aligned}$$

причём

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \quad \Delta \alpha = \alpha_1 - \alpha_2,$$

$|\vec{r}| \approx r_0$ — расстояние от средней точки O между источниками (по оси OZ) до текущей точки на плоскости $X = \text{const}$, φ — угол между вектором \vec{k} и осью OX (рис. 9.2).

Окончательно мгновенное результирующее электрическое поле с учётом (9.1.3) можно записать в виде

$$\mathcal{E}(\vec{r}, t) = E(\varphi) \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha), \quad (9.1.4)$$

где

$$E(\varphi) = 2E_0 \cos\left(\frac{1}{2} k d \sin \varphi + \frac{\Delta \alpha}{2}\right),$$

причём для двух когерентных источников разность начальных фаз $\Delta \alpha = \text{const}$.

Таким образом, суперпозиция электромагнитных волн от двух когерентных источников есть плоская гармоническая бегущая волна с той же частотой ω , с тем же волновым вектором \vec{k} и с той же линейной поляризацией вдоль оси OY , что и волны от отдельных источников. Отличие результирующей электромагнитной волны от исходных составляющих волн состоит в том, что её амплитуда $E(\varphi)$, как видно из (9.1.4) зависит от постоянной разности хода этих волн $\Delta r = d \sin \varphi$, то есть от направления наблюдения. Другими словами, амплитуда результирующего поля промодулирована по углу φ .

Определим интенсивность результирующей волны. Напомним, что *интенсивность* I электромагнитной волны определяется как среднее значение модуля вектора Умова-Пойнтинга $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ по времени за интервал $2T'$ ($-T' \leq t \leq T'$), который велик по сравнению с периодом волны $T = 2\pi/\omega$, причём

$$\langle \vec{S} \rangle \approx \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} [\vec{E}, \vec{H}] dt \approx \frac{1}{2} \text{Re} \{ [\vec{E}, \vec{H}^*] \}. \quad (9.1.5)$$

С учётом (9.1.5) нетрудно записать выражение для интенсивности результирующей волны:

$$I = \langle \vec{S} \rangle = \frac{2E_0^2}{Z} \cos^2 \left(\frac{\Delta\psi}{2} \right), \quad (9.1.6)$$

где $\Delta\psi = kd \sin \varphi + \Delta\alpha$, $Z = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$ — импеданс среды.

Так как формулу (9.1.6) можно переписать в виде:

$$I = \frac{2}{Z} \left(\frac{E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2} + 2\sqrt{\frac{E_0^2}{2} \frac{E_0^2}{2}} \cos \Delta\psi \right), \quad (9.1.7)$$

можно сказать, что интенсивность когерентных волн при интерференции не подчиняется принципу аддитивности, то есть $I \neq 2I_0$, где I_0 — интенсивность волны от одного источника.

Для двух когерентных источников с разными интенсивностями I_1 и I_2 , результирующая интенсивность I определяется другой формулой:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\psi. \quad (9.1.8)$$

9.1.3. Дифракция плоской волны на одной широкой одномерной щели. Достоинство принципа Гюйгенса-Френеля состоит в том, что он позволяет производить сложный расчёт интерференции волн от реальных источников сводить к более простому расчёту интерференции от фиктивных вторичных источников, итог которого называют *дифракционной картиной*. Рассмотрим *дифракцию Фраунгофера*^{*)} плоской электромагнитной волны на широкой щели. Пусть в металлическом бесконечном экране, совпадающем с плоскостью YOZ , имеется бесконечная щель, ориентированная вдоль оси OY . Ширина щели вдоль оси Z равна d (рис. 9.3). Задачу будем считать двумерной: вариации геометрии структуры и полей вдоль

^{*)}Под дифракцией Фраунгофера понимаем дифракцию электромагнитной волны на препятствии, когда и источник, и точка наблюдения находятся от препятствия в дальних зонах

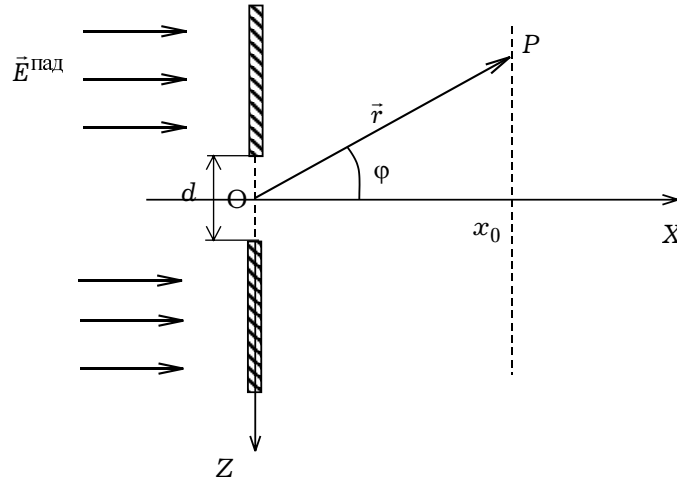


Рис. 9.3

оси OY отсутствуют. Соответственно, бесконечную вдоль оси OY щель, в дальнейшем будем называть *одномерной*, предполагая тем самым, что электромагнитное поле в щели будет изменяться только вдоль одной координаты z . На экран в направлении OX падает плоская гармоническая волна, линейно поляризованная вдоль оси OY . В качестве поверхности, на которой расположены фиктивные источники, имеющие форму линейных проводников, ориентированных вдоль оси OY , выберем часть плоскости $x = 0$, соответствующую щели. Очевидно, что фазы фиктивных источников в щели на поверхности $x = 0$ одинаковы, то есть эти источники когерентны.

Сначала предположим, что в щели находятся N точечных источников, расположенных на расстоянии d_z друг от друга. Полагая, что края щели также содержат точечные источники, записываем $d = (N - 1)d_z$. При рассмотрении поверхности щели с непрерывным распределением фиктивных источников необходимо осуществить следующий предельный переход:

$$N \rightarrow \infty, \quad d_z \rightarrow 0 \quad \text{при } d = \text{const}.$$

Разместим в щели N гармонических линейных фиктивных токов, ориентированных навстречу оси Y (см. о фазе фиктивных источников в щели в предыдущем примере):

$$\vec{J}^{(n)} = -J_0 \vec{y}_0 \cos(\omega t + \alpha_n); \quad n = \overline{1, N}, \quad (9.1.9)$$

где J_0 — амплитуда тока; для простоты предположим, что начальные фазы α_n всех фиктивных токов совпадают: $\alpha_n = \alpha$; расстояние между соседними источниками равно d_z .

Найдём результирующую электромагнитную волну, создаваемую такой системой излучателей в дальней зоне ($|\vec{r}| \gg \lambda$). Вклад i -го источника в электрическое поле в плоскости $x = x_0$, удалённой от системы фиктивных токов (9.1.9) ($x_0 \gg \lambda$, $x_0 \gg d$), имеет вид

$$\vec{E}^{(n)} = \varepsilon_0 \vec{y}_0 \cos(\omega t - kr_n + \alpha), \quad (9.1.10)$$

где r_n — расстояние от n -го источника до точки наблюдения P , находящейся в плоскости $x = x_0$ (рис. 9.3). При записи (9.1.10) мы предположили, что поляризация волны в дальней зоне совпадает с поляризацией линейного источника в щели.

Заменяя результирующее электрическое поле в дальней зоне его мгновенным комплексом, записываем:

$$\vec{\mathcal{E}} = \sum_{n=1}^N \vec{E}^{(n)} = E_0 \vec{y}_0 e^{i(\omega t + \alpha)} (e^{-ikr_1} + \dots + e^{-ikr_N}). \quad (9.1.11)$$

При этом расстояния от каждой соседней пары источников до фиксированной точки наблюдения, задаваемой углом φ , связаны соотношением:

$$r_{n+1} = r_n + d_z \sin \varphi; \quad n = \overline{1, N} \quad (9.1.12)$$

С помощью (9.1.12) выражение (9.1.11) упрощается:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{y}_0 E_0 e^{i(\omega t - kr_1 + \alpha)} S,$$

где

$$S = 1 + e^{-i\Delta\psi} + e^{-2i\Delta\psi} + \dots + e^{-(N-1)i\Delta\psi},$$

($\Delta\psi = kd_z \sin \varphi$) — сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \exp(-i\Delta\psi)$. Поэтому

$$S = e^{-i\frac{(N-1)}{2}\Delta\psi} \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)}. \quad (9.1.13)$$

Вводя расстояние $r = OP$ от точки наблюдения до середины системы источников:

$$r \approx r_1 + \frac{1}{2}(N-1)d_z \sin \varphi,$$

с учётом (9.1.13) получим выражение для результирующего электрического поля:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{y}_0 E_0 e^{i(\omega t - kr + \alpha)} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}kd_z \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd_z \sin \varphi\right)}. \quad (9.1.14)$$

Вещественная часть мгновенного комплекса (9.1.14) запишется как

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{y}_0 E(\varphi) \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (9.1.15)$$

где

$$E(\varphi) = E_0 \frac{\sin\left(\frac{N}{2}kd_z \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd_z \sin \varphi\right)} \quad (9.1.16)$$

— амплитуда результирующего электрического поля

Таким образом, суперпозиция электромагнитных волн от N когерентных источников в зоне Фраунгофера даёт гармоническую линейно поляризованную вдоль оси OY волну с амплитудой, зависящей от угла φ .

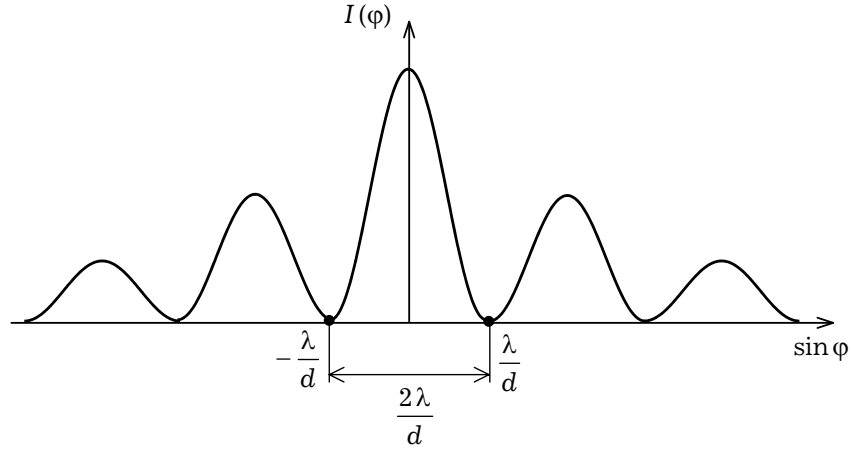


Рис. 9.4

Запишем выражение для интенсивности I результирующего электрического поля, которая определяется как модуль средней за период плотности потока мощности:

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{1}{2Z} |\vec{E}|^2, \quad (9.1.17)$$

где Z — импеданс открытого пространства.

С учётом (9.1.15), (9.1.16) и (9.1.17) формула для интенсивности результирующего излучения примет вид

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{N}{2} k d_z \sin \varphi \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} k d_z \sin \varphi \right)}, \quad (9.1.18)$$

где

$$I_0 = \frac{E_0^2}{2Z}.$$

Очевидно, что угол φ заключён в интервале $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, так как отражённая волна не рассматривается.

Переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, $d_z \rightarrow 0$ при $d = \text{const}$, получаем

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta\Phi}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta\Phi}{N} \right)},$$

где $\Delta\Phi = k d \sin \varphi \approx N k d_z \sin \varphi$.

Так как при $N \rightarrow \infty$ $\sin[\Delta\Phi/(2N)] \approx \Delta\Phi/(2N)$, окончательно выражение для интенсивности (9.1.18) принимает вид

$$I(\varphi) = I(0) \left[\frac{\sin(\Delta\Phi/2)}{\Delta\Phi/2} \right]^2, \quad (9.1.19)$$

где $I(0) = N^2 I_0 = N^2 E_0^2 / (2Z)$ — максимальное значение интенсивности.

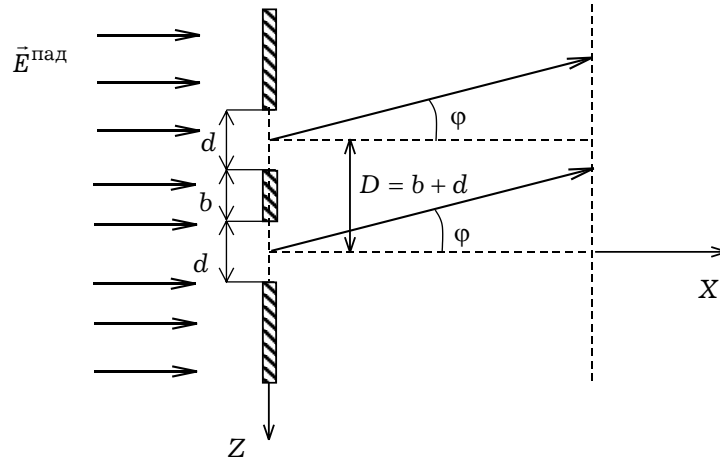


Рис. 9.5

Таким образом, поле излучения одномерной щели эквивалентно полю излучения одного фиктивного точечного источника, расположенного в её середине, амплитуда которого промодулирована по угловой координате:

$$\vec{E}(\varphi, r, t) = \vec{y}_0 E(\varphi) \cos(\omega t - kr), \quad (9.1.20)$$

где

$$E(\varphi) = E_0 \frac{\sin(\Delta\Phi/2)}{\Delta\Phi/2}.$$

График функции (9.1.19) имеет вид (рис. 9.4) чередующихся максимумов и минимумов с ярко выраженным центральным максимумом; полная ширина центрального максимума равна $2\lambda/d$.

9.1.4. Дифракция плоской волны на двух параллельных широких одномерных щелях. Рассмотрим дифракцию плоской гармонической электромагнитной волны на металлическом экране с двумя параллельными широкими одномерными щелями одинаковой ширины (рис.9.5). Пусть на такой экран падает плоская гармоническая волна, линейно поляризованная вдоль оси ОУ. Очевидно, что в этом случае прошедшая (за экраном) электромагнитная волна будет также линейно поляризованной вдоль оси ОУ, так как при таком расположении щелей в экране не нарушается ориентация вектора \vec{E} падающей волны.

Выбираем фиктивные источники в каждой щели так же, как и в предыдущем случае. Тогда поле излучения каждой щели можно представить как поле излучения точечного фиктивного источника (9.1.20), расположенного в середине щели. Таким образом, задача дифракции на двух параллельных одномерных щелях сводится к расчёту интерференции полей двух когерентных фиктивных источников, расположенных в серединах щелей, результирующую интенсивность излучения которых можно рассчитать по формуле (9.1.6). Следовательно,

интенсивность излучения в области за экраном с двумя щелями представляет собой результат интерференции полей двух точечных источников, учитывающий модуляцию по угловой координате:

$$I(\varphi) = I(0) \left[\frac{\sin(\Delta\Phi/2)}{(\Delta\Phi/2)} \right]^2 \cos^2(\Delta\Psi/2), \quad (9.1.21)$$

где

$$\Delta\Phi = kd \sin \varphi, \quad \Delta\Psi = kD \sin \varphi, \quad D = b + d. \quad (9.1.22)$$

Множитель $\cos^2(\Delta\Psi/2)$ в формуле (9.1.21) обуславливает более быстрое чередование максимумов и минимумов интенсивности по угловой координате φ , отвечающее интерференции двух точечных источников, расположенных в серединах щелей с угловым расстоянием между максимумами λ/D . Множитель $\left[\frac{\sin(\Delta\Phi/2)}{(\Delta\Phi/2)} \right]^2$ даёт форму модулированной функции, определяемую шириной щели. Полная угловая ширина центрального максимума равна $2\lambda/d$. Дифракционная картина от двух широких одномерных щелей показана на рис. 9.6.

9.1.5. Дифракция плоских волн на одномерных дифракционных решётках. Понятие о голографии. Дифракционной решёткой принято называть металлический экран с N параллельными щелями. Для широких щелей задача дифракции плоской волны на решётке (рис. 9.7) сводится к рассмотрению интерференции полей излучения N точечных фиктивных источников, расположенных в серединах каждой из щелей с учётом модуляции интенсивности по ширине щели. Результирующая интенсивность за экраном при нормальном падении волны (сравните с (9.1.18) и (9.1.19)) равна:

$$I(\varphi) = I(0) \left[\frac{\sin(\Delta\Phi/2)}{(\Delta\Phi/2)} \right]^2 \left[\frac{\sin(N\Delta\Psi/2)}{\sin(\Delta\Psi/2)} \right]^2, \quad (9.1.23)$$

где так же, как в (9.1.21): $\Delta\Phi = kd \sin \varphi$, $\Delta\Psi = kD \sin \varphi$, $D = b + d$.

Общий вид дифракционной картины (рис. 9.8) представляет собой результат интерференции полей излучения N точечных источников, «модулированной» дифракционной картиной поля излучения одной щели.

Положения главных максимумов определяются третьим сомножителем в (9.1.23) и при нормальном падении плоской волны находятся из уравнения:

$$D \sin \varphi = m \lambda, \quad (9.1.24)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Общее их число ограничено условием

$$m \leq \frac{D}{\lambda} = \frac{b+d}{\lambda}. \quad (9.1.25)$$

Если щели узкие ($b \gg d$), модуляция по ширине щели не проявляется, и всё распределение интенсивности определяется интерференцией полей излучения N точечных фиктивных источников.

Наибольший практический интерес представляет дифракционная решётка с $b = d$. При этом угловое расстояние между главными максимумами равно $\lambda/(2d)$, так что в пределах эффективной ширины огибающей помещаются только

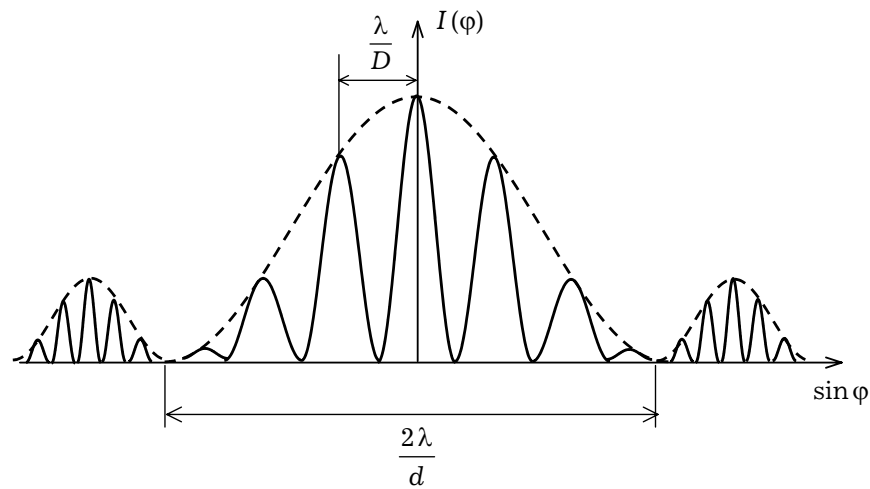


Рис. 9.6

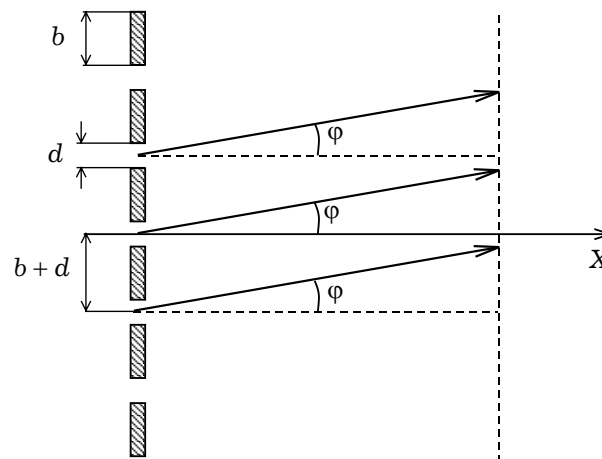


Рис. 9.7

три главных максимума с $m = 0, \pm 1$ (рис. 9.9). Остальные главные максимумы практически не наблюдаемы.

Заметим, что любая интерференционная картина, зафиксированная на фотопластинке, может в свою очередь играть роль дифракционной решётки, которая при пропускании через неё электромагнитной волны даст интерференционную картину. В качестве примера рассмотрим простейшую интерференционную картину от двух точечных источников. Если вместо экрана, на котором наблюдается интерференционная картина, взять фотопластинку, то на ней будет наблюдаться система периодически чередующихся относительно тёмных и светлых полос, интенсивность которых подчиняется закону (9.1.6). Можно считать, что ширина этих полос приблизительно одинакова и равна $d \sin \varphi$, то есть в результате образуется дифракционная решётка с $b = d$, где d — размер щели, b — расстояние между

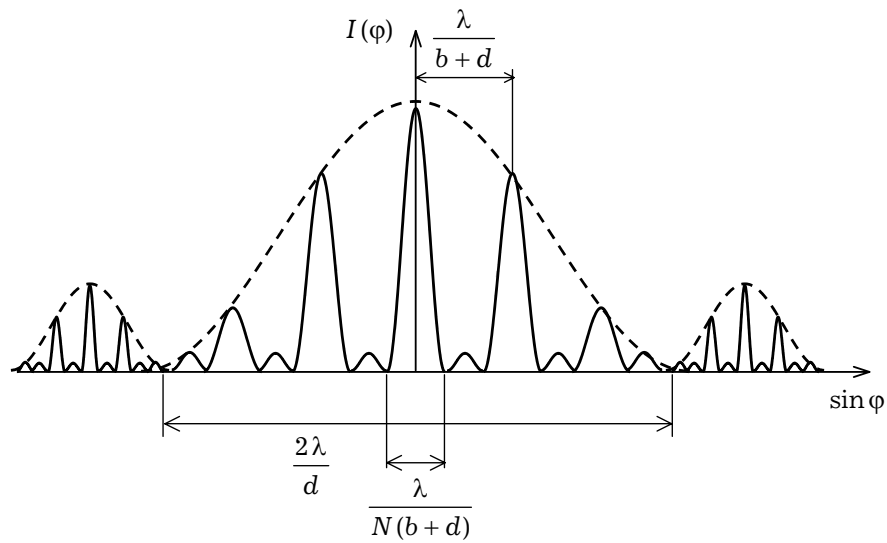


Рис. 9.8

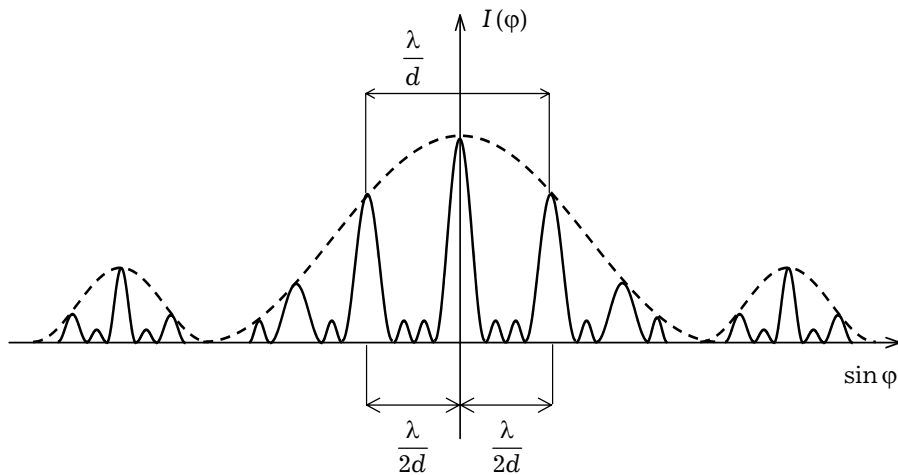


Рис. 9.9

щелями. На такой решётке при освещении её плоской волной возникает дифракционная картина, изображённая на рис. 9.9, с тремя главными максимумами, определяемыми из уравнения:

$$d \sin \varphi = m \lambda \quad \text{при } m = 0, \pm 1.$$

На основе вышеописанного явления разработан *метод голографии*. Идея голографии состоит в том, что всякая фотография интерференционной картины от двух когерентных источников — исходной (опорной) волны и волны, отражённой предметом (предметной), является *голограммой*, в которой полностью записаны амплитуды и фазы интерферирующих волн. Этим она отличается от фотографии волн

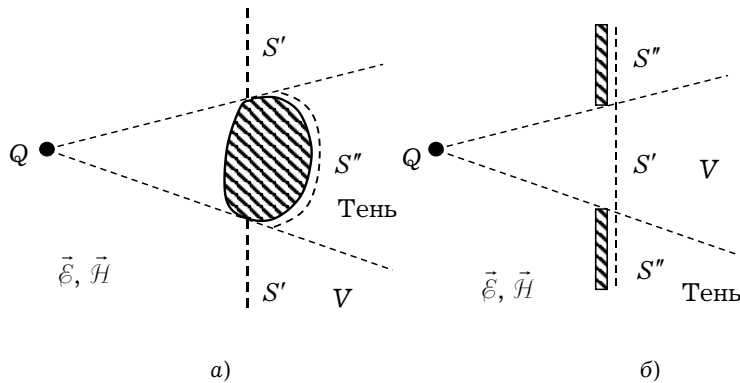


Рис. 9.10

от одного или нескольких некогерентных источников, на которых зафиксирована лишь интенсивность результирующей волны. Далее, используя голограмму (фотографию) как дифракционную решётку, и, освещая её только одной опорной волной, можно получить все характеристики предметной волны и в случае необходимости зафиксировать объект, от которого отразилась предметная волна.

9.2. Дифракция Фраунгофера на отверстиях в непрозрачном экране

9.2.1. Метод Гюйгенса-Кирхгофа. Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны на металлическом (непрозрачном) теле. С точки зрения геометрической оптики для падающей сферической волны такое тело просто создаёт область тени, как это показано на рис. 9.10а для случая ограниченного тела и на рис. 9.10б для экрана с отверстием. Построим поверхность S (штриховые линии на рис. 9.10), разделяющую пространство на две области. Поверхность S состоит из двух частей: $S = S' + S''$, причём поверхность S'' соответствует её металлизированной части. Если бы распределение поля на S было известно, то поле за препятствием (область V) можно было бы найти строго, исходя из принципа Гюйгенса, согласно которому каждую точку фронта волны можно принять за источник локальной сферической волны. Новое положение фронта может быть найдено при учёте всех локальных волн, создаваемых фиктивными поверхностными источниками. Но при постановке задачи дифракции известно только поле падающей волны \vec{E}_0, \vec{H}_0 .

В методе Гюйгенса-Кирхгофа для задания поля \vec{E}^S, \vec{H}^S на поверхности S делается следующее допущение, называемое *приближением Кирхгофа*:

$$\vec{E}^S = \begin{cases} \vec{E}_0 & \text{на } S', \\ 0 & \text{на } S'', \end{cases} \quad \vec{H}^S = \begin{cases} \vec{H}_0 & \text{на } S', \\ 0 & \text{на } S''. \end{cases} \quad (9.2.1)$$

Приближение (9.2.1) в определённой мере соответствует представлениям геометрической оптики: поле отсутствует в затенённой части S и не отличается от поля

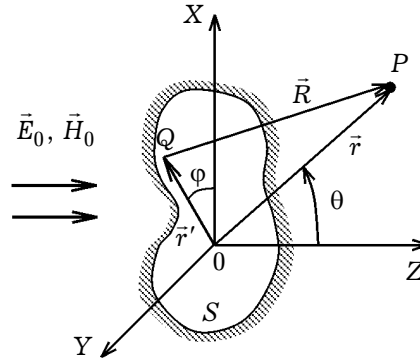


Рис. 9.11

падающей волны в освещённой. Однако это не геометрическая оптика, так как приближение (9.2.1) относится только к границе S и не распространяется на всю область V . Таким образом, приближение Кирхгофа есть способ задания эквивалентных источников на поверхности.

Зная поля на поверхности S , можно ввести на ней сторонние поверхностные электрические и магнитные токи:

$$\vec{n}_{\text{ст}}^{(e)} = [\vec{n}_0, \vec{H}^S], \quad \vec{n}_{\text{ст}}^{(m)} = [\vec{E}^S, \vec{n}_0], \quad (9.2.2)$$

где \vec{n}_0 — единичная нормаль к поверхности S , направленная внутрь объёма V . Таким образом, задача дифракции электромагнитной волны на металлизированном (непрозрачном) теле сведена к задаче возбуждения электромагнитного поля в области V сторонними электрическими и магнитными токами (9.2.2), распределёнными по поверхности S . Такая задача подробно рассмотрена в седьмой главе, где было показано, как с помощью соотношений (9.2.2), связывающих поверхностные токи с соответствующими полями, задача делается самосогласованной.

Вышеизложенный подход носит название метода Гюйгенса-Кирхгофа, который широко используется для приближённого расчёта апертурных антенн. В сущности он является эвристическим приёмом, позволяющим сложные электродинамические задачи решать аналитически.

9.2.2. Дифракция на отверстии в экране. Рассмотрим нормальное падение плоской однородной волны на идеально проводящий экран с отверстием S . Геометрия задачи и используемые при её решении декартова и совмещённая с ней сферическая система координат показаны на рис. 9.11. Падающую из левого полупространства ($z < 0$) электромагнитную волну зададим при помощи комплексных амплитуд электрического и магнитного полей:

$$\vec{E}_0 = \vec{x}_0 A e^{-ikz}, \quad \vec{H}_0 = \vec{y}_0 \frac{A}{Z} e^{-ikz}, \quad (9.2.3)$$

где A — амплитуда падающей волны.

Для определения поля дифракции \vec{E}, \vec{H} в правом полупространстве ($z > 0$) применим метод Гюйгенса-Кирхгофа. В соответствии с (9.2.1) и (9.2.3) на теневой стороне

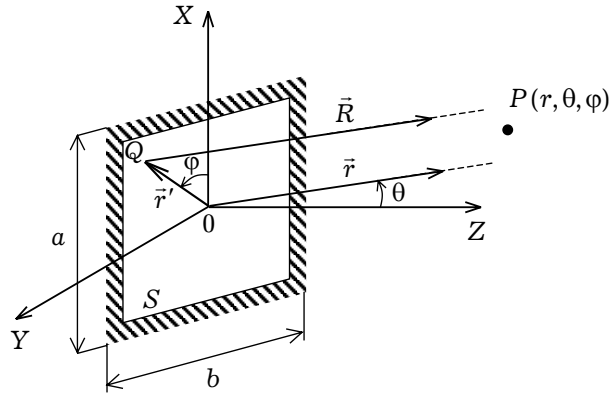


Рис. 9.12

экрана положим $\vec{E}^S = 0$, $\vec{H}^S = 0$, а на отверстии $\vec{E}^S = \vec{E}_0(z=0) = \vec{x}_0 A$, $\vec{H}^S = \vec{H}_0(z=0) = \vec{y}_0 A/Z$. В этом приближении достаточно малые элементы отверстия являются элементами Гюйгенса, создающими электромагнитное поле $d\vec{E}$, $d\vec{H}$ в дальней зоне (см. формулу (7.5.40)):

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= \frac{ikA}{4\pi r} e^{-ikr} (1 + \cos \theta_q) (\cos \varphi_q \vec{\theta}_{0q} - \sin \varphi_q \vec{\phi}_{0q}) dS, \\ d\vec{H} &= \frac{ikA}{4\pi Zr} e^{-ikr} (1 + \cos \theta_q) (\sin \varphi_q \vec{\theta}_{0q} + \cos \varphi_q \vec{\phi}_{0q}) dS, \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

где нижним индексом q обозначены угловые сферические координаты локальной системы координат с началом в точке O — центральной точке элемента Гюйгенса (рис. 9.11); радиальная координата этой системы есть \vec{r} .

Для учёта всех элементов Гюйгенса на отверстии необходимо выполнить соответствующее интегрирование по S . Таким образом, комплексная амплитуда напряжённости электрического поля с учётом (9.2.4) определяется как

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_S d\vec{E} = \frac{ikA}{4\pi} \times \\ &\times \iint_S \frac{e^{-ikR}}{R} (1 + \cos \theta_q) (\vec{\theta}_{0q} \cos \varphi_q - \vec{\phi}_{0q} \sin \varphi_q) dx' dy', \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

где $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

Рассмотрим в качестве излучающей площадки S прямоугольное отверстие с размерами a и b (рис. 9.12). Отверстие S из точки наблюдения P в дальней зоне видно под нулевым углом, то есть представляется точкой. В этом случае говорят о дифракции Фраунгофера. Поскольку в дальней зоне все точки отверстия (точки интегрирования Q) имеют одинаковые угловые координаты $\theta_q = \theta$, $\varphi_q = \varphi$, подынтегральная функция в (9.2.5) не зависит от координат x' и y' . Интегрирование в соотношении (9.2.5) производим по прямоугольнику $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-b/2 \leq y \leq b/2$.

В результате имеем:

$$\vec{E} = \frac{ikAabe^{-ikr}}{4\pi r} (\bar{\theta}_0 \cos \varphi - \bar{\varphi}_0 \sin \varphi) (1 + \cos \theta) \times \\ \times \frac{\sin\left(\frac{1}{2}ka \sin \theta \cos \varphi\right)}{\frac{1}{2}ka \sin \theta \cos \varphi} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kb \sin \theta \sin \varphi\right)}{\frac{1}{2}kb \sin \theta \sin \varphi}, \quad (9.2.6)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние до точки наблюдения.

Сферическая волна (9.2.6) является локально плоской, поэтому

$$\vec{H} = \frac{1}{Z} [\vec{r}_0, \vec{E}]. \quad (9.2.7)$$

В разделе 7.4.1 определена граница дальней зоны:

$$r \geq \frac{2D^2}{\lambda}, \quad (9.2.8)$$

где D — максимальный размер отверстия S : $D = \max\{a, b\}$.

Таким образом, формулы (9.2.6) и (9.2.7) определяют поле дифракции плоской электромагнитной волны на прямоугольном отверстии на расстояниях r от щели, удовлетворяющих условию (9.2.8), которое можно принять за критерий дифракции Фраунгофера.

Излучение из отверстия в дальней зоне удобно характеризовать нормированной функцией

$$F^2(\theta, \varphi) = \frac{\langle S_r(\theta, \varphi) \rangle}{\langle S_r(\theta, \varphi) \rangle_{\max}}, \quad (9.2.9)$$

где $\langle S_r(\theta, \varphi) \rangle$ — среднее по периоду значение плотности потока мощности, равное реальной части радиальной составляющей вектора Умова-Пойнтинга $\vec{S} = \text{Re}[\vec{E}, \vec{H}^*]/2$; $\langle S_r(\theta, \varphi) \rangle_{\max}$ — максимальное значение $\langle S_r(\theta, \varphi) \rangle$, соответствующее $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$. Функция $F^2(\theta, \varphi)$ в теории антенн называется *нормированной характеристикой направленности по мощности*.

С учётом того, что излучение максимально в направлении оси OZ , то есть $\langle S_r(\theta_0, \varphi_0) \rangle_{\max} = \langle S_r(0, \varphi_0) \rangle$, можно записать

$$F^2(\theta, \varphi) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2, \quad (9.2.10)$$

где

$$u = \frac{ka}{2} \sin \theta \cos \varphi, \quad v = \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \varphi.$$

Первый множитель в (9.2.10) зависит от θ и представляет собой характеристику направленности элемента Гюйгенса. Множители вида $F(\xi) = (\sin \xi / \xi)^2$ отображают эффект наложения локальных волн, создаваемых всеми элементами Гюйгенса на поверхности S , и называются *интерференционными множителями*.

Обычно анализируют излучение из отверстия в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. В E -плоскости рассматривают излучение из отверстия в зависимости от θ при $\varphi = 0$. В H -плоскости анализируется зависимость $F^2(\theta, \varphi)$ от θ

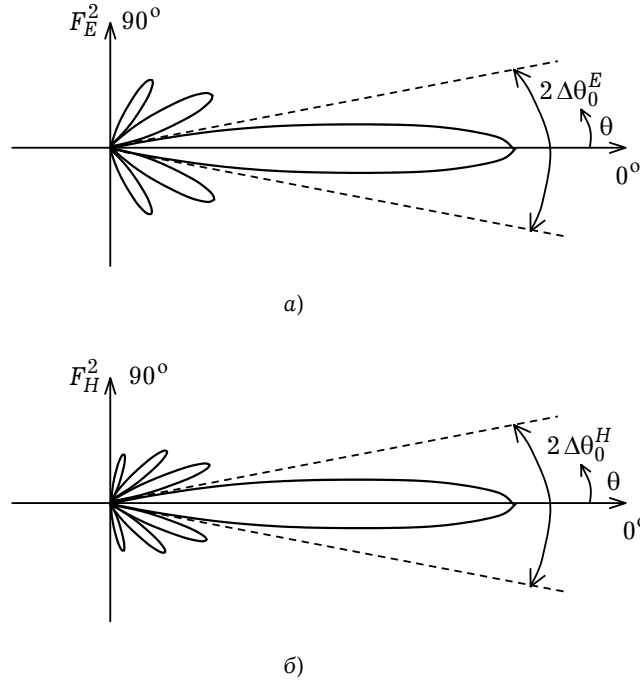


Рис. 9.13

при $\varphi = \pi/2$. Для этих плоскостей функция (9.2.10) становится более простой:

$$F_E^2(\theta) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left(\frac{\sin \xi^E}{\xi^E} \right)^2, \quad (9.2.11)$$

$$F_H^2(\theta) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left(\frac{\sin \xi^H}{\xi^H} \right)^2,$$

где

$$\xi^E = \frac{ka \sin \theta}{2}, \quad \xi^H = \frac{kb \sin \theta}{2}.$$

Так как в формулах (9.2.11) при малых θ можно пренебречь влиянием первого сомножителя, угловую ширину зоны максимального излучения определяют вторые сомножители. Ширина главного максимума при $\theta = 0$ определяется из условий:

$$\frac{ka}{2} \sin(\Delta\theta_0^E) = \pi, \quad \frac{kb}{2} \sin(\Delta\theta_0^H) = \pi, \quad (9.2.12)$$

где $\Delta\theta_0^E$, $\Delta\theta_0^H$ — угловые расстояния от центра области максимального излучения до ближайшего направления нулевого излучения в E - и H -плоскостях, соответственно. При этом ширина главного лепестка диаграммы направленности излучения (рис. 9.13), в соответствии с (9.2.12) в этих плоскостях определяется как $2\Delta\theta_0^E$ и $2\Delta\theta_0^H$. Так как $\Delta\theta_0^E \ll 1$, $\Delta\theta_0^H \ll 1$, можно записать:

$$2\Delta\theta_0^E = \frac{2\lambda}{a}, \quad 2\Delta\theta_0^H = \frac{2\lambda}{b}. \quad (9.2.13)$$

Таким образом, угловая ширина главного лепестка диаграммы направленности обратно пропорциональна размеру отверстия. На рис. 9.13 приведены качественные нормированные диаграммы направленности по мощности излучения прямоугольного отверстия в металлическом экране в E - и H -плоскостях, ширина главных лепестков которых определяется формулами (9.2.13).

9.2.3. Применение метода Гюйгенса-Кирхгофа к расчёту поверхностных антенн.

Под *поверхностной антенной* понимается антенна, излучение которой может быть описано как действие источников (обычно вторичных), распределённых по некоторой поверхности. К таким антеннам обычно относят рупорные и зеркальные антенны, поле излучения которых рассчитывается, как правило, с помощью метода Гюйгенса-Кирхгофа.

Рассмотренное выше излучение из отверстия в проводящем экране с позиций теории дифракции Фраунгофера может трактоваться и как излучение из отверстия в бесконечной идеально проводящей плоскости с равномерным по амплитуде синфазным распределением поверхностных источников. Это так называемая *идеальная поверхностная антенна*. Термин «идеальная» здесь употребляется как с точки зрения физической модели, так и с точки зрения идеального распределения поверхностных источников.

Средняя за период мощность излучения P_Σ такой идеальной поверхностной антенны площади S будет:

$$P_\Sigma = \int_S \langle S_r(\theta, \varphi) \rangle dS = \frac{A^2 ab}{2Z}. \quad (9.2.14)$$

Плотность среднего за период потока мощности $\langle S_r^0 \rangle$ при её равномерном (изотропном) излучении по всем направлениям вычисляется как

$$\langle S_r^0 \rangle = \frac{P_\Sigma}{4\pi r^2} = \frac{A^2 ab}{8\pi Z r^2}. \quad (9.2.15)$$

Определим плотность среднего за период потока мощности излучения из прямоугольного отверстия в направлении максимального излучения $\theta = 0$:

$$\langle S_r(\theta, \varphi) \rangle_{\max} = \langle S_r(0, \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}, \vec{H}^*] \Big|_{\theta=0}. \quad (9.2.16)$$

С учётом выражений для \vec{E} и \vec{H} (9.2.6), (9.2.7) и формул (9.2.14)-(9.2.16) имеем:

$$\langle S_r(\theta, \varphi) \rangle_{\max} = \frac{k^2 A^2 a^2 b^2}{8\pi^2 Z r^2}. \quad (9.2.17)$$

Определим отношение плотности среднего за период потока мощности из прямоугольного отверстия в направлении максимального излучения (9.2.17) к плотности среднего за период потока мощности изотропного излучателя (9.2.15):

$$D_{\max} = \frac{\langle S_r(0, \varphi) \rangle_{\max}}{\langle S_r^0 \rangle} = \frac{4\pi S}{\lambda^2}. \quad (9.2.18)$$

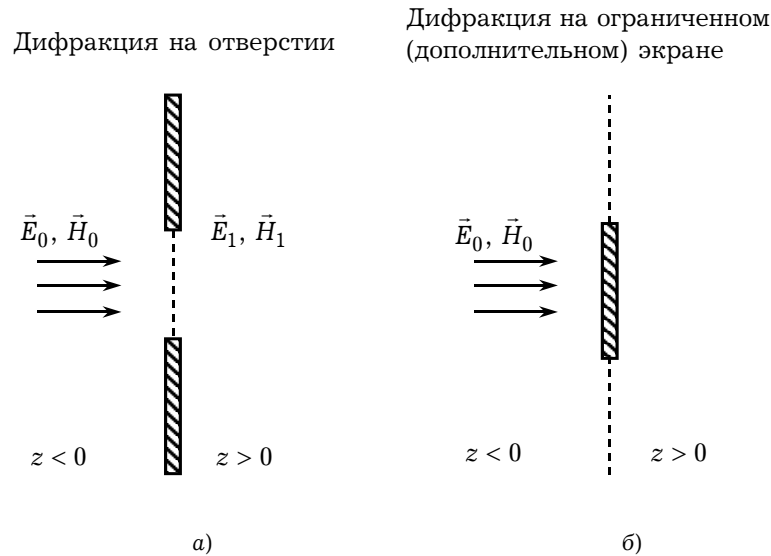


Рис. 9.14

Величина D_{\max} в теории антенн называется *коэффициентом направленного действия (КНД) антенны* (в данном случае прямоугольного отверстия в металлической плоскости) в направлении максимального излучения. Формула (9.2.18) в теории антенн применяется и для оценки произвольных поверхностных антенн; в этом случае под S понимается некоторая эффективная поверхность антенны.

Таким образом, на основе расчёта поля дифракции за произвольным отверстием S в металлическом экране методом Гюйгенса-Кирхгофа определяется поле излучения в дальней зоне (в частности, характеристика направленности) идеальной поверхностной антенны, образованной поверхностью S при равномерном по амплитуде её синфазном возбуждении.

9.2.4. Принцип Бабине. В теории дифракции большое значение имеет *принцип Бабине*, устанавливающий связь между распределением амплитуд и фаз волн, дифрагированных на *дополнительных экранах*. Дополнительными называются экраны, у которых отверстия одного точно совпадают с непрозрачными (металлизированными) частями другого. Например, отверстие радиуса a в непрозрачном экране и непрозрачный диск того же радиуса являются дополнительными.

Рассмотрим задачу дифракции плоской электромагнитной волны \vec{E}_0, \vec{H}_0 на отверстии в бесконечном экране (рис. 9.14а). Будем называть её первой задачей. Поле в правом полупространстве ($z > 0$) для первой задачи есть поле дифракции $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$ (верхний индекс «1» указывает на принадлежность к первой задаче): $\vec{E}_1 = \vec{E}^{(1)}, \vec{H}_1 = \vec{H}^{(1)}$. Именно это поле рассматривалось в разделах 9.2.1-9.2.3. Во второй задаче для дополнительного экрана — ограниченного экрана, показанного на рис. 9.14б, поле в правом полупространстве ($z > 0$) представляет собой суперпозицию поля падающей волны \vec{E}_0, \vec{H}_0 и поля дифракции $\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}$:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}^{(2)}, \quad \vec{H}_2 = \vec{H}_0 + \vec{H}^{(2)}.$$

Рассмотрим суперпозицию полей дифракции на двух дополнительных экранах

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}_0 + \vec{E}^{(2)}, \quad \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \vec{H}^{(1)} + \vec{H}_0 + \vec{H}^{(2)}. \quad (9.2.19)$$

Очевидно, что поле $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, $\vec{H}_1 + \vec{H}_2$ в приближении Кирхгофа создаётся элементами Гюйгенса первой и второй задач, то есть всем фронтом падающей волны \vec{E}_0 , \vec{H}_0 в плоскости $z = 0$. Это поле не отличается от \vec{E}_0 , \vec{H}_0 во всём полупространстве $z > 0$:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0, \quad \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \vec{H}_0. \quad (9.2.20)$$

Сопоставляя (9.2.19) и (9.2.20), получаем принцип Бабины для дополнительных экранов:

$$\vec{E}^{(2)} = -\vec{E}^{(1)}, \quad \vec{H}^{(2)} = -\vec{H}^{(1)}, \quad (9.2.21)$$

где $\vec{E}^{(1)}$, $\vec{H}^{(1)}$ — поле дифракции на отверстии в бесконечном экране, $\vec{E}^{(2)}$, $\vec{H}^{(2)}$ — поле дифракции на ограниченном (дополнительном) экране.

Таким образом, в приближении Кирхгофа поля дифракции на взаимно дополнительных экранах связаны соотношением (9.2.21). В рамках приближения Кирхгофа формулы (9.2.21) можно распространить и на дифракцию на телах конечных поперечных размеров.

9.3. Дифракция Френеля на прямоугольном отверстии в экране

Рассмотрим задачу дифракции плоской электромагнитной волны на прямоугольном отверстии в металлическом экране, когда условие дальней зоны (9.2.8) не выполняется. В частности, условие (9.2.8) можно нарушить, приближая точку наблюдения к экрану. Напряжённость электрического поля дифракции в любой точке наблюдения в приближении Кирхгофа в соответствии с (9.2.4) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E} = \int_S d\vec{E} = \frac{ikA}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} (1 + \cos \theta_q) \times \\ \times (\vec{\theta}_{0q} \cos \varphi_q - \varphi_{0q} \sin \varphi_q) \frac{e^{-ikR}}{R} dx' dy', \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

где R — расстояние между точкой наблюдения $P(x, y, z)$ и текущей точкой $Q(x', y', z')$ на отверстии; все остальные обозначения соответствуют обозначениям в формулах (9.2.4) и (9.2.5). При выполнении условия (9.2.8) $R \approx r$, где r — расстояние между точкой $P(x, y, z)$ и началом координат $x' = y' = z' = 0$, приходим к выражению (9.2.5).

Запишем формулу (9.3.1) для области Френеля (промежуточной области), для которой справедливы следующие упрощения (см. п. 7.3.2):

1. R в знаменателе подынтегрального выражения (9.3.1) принимается приближённо равным r ($R \approx r$) и выносится из-под знака интеграла.

2. В показателе экспоненты подынтегральной функции в (9.3.1) принимается

$$\begin{aligned} R &\approx \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \approx \\ &\approx z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}, \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

что соответствует отбрасыванию в разложении $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ по степеням $|\vec{r}'|/|\vec{r}|$ членов выше второй степени малости.

Кроме того, ограничиваясь областью относительно малых θ , полагаем $|\vec{r}| \approx z$, $\cos \theta_q = \cos \theta \approx 1$, так что $\bar{\theta}_{0q} \cos \varphi_q - \bar{\varphi}_{0q} \sin \varphi_q = \bar{x}_0$. Таким образом, с учётом (9.3.2) вместо (9.3.1) получаем:

$$\begin{aligned} \vec{E} = \bar{x}_0 \frac{i k A e^{-ikz}}{2\pi z} \times \\ \times \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left[-ik \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z} \right] dx' dy'. \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

С учётом известного интеграла

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \exp \left[-ik \frac{(t-t')^2}{2z} \right] dt' = -\sqrt{\frac{2z}{k}} \{ [C(t_2) - C(t_1)] - i[S(t_2) - S(t_1)] \},$$

где

$$C(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \cos(x^2) dx, \quad S(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \sin(x^2) dx \quad \text{— интегралы Френеля;}$$

$$t_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{2z}} (t \pm \alpha),$$

выражение (9.3.3) записывается следующим образом:

$$\vec{E}(x, y, z) = i \frac{\bar{x}_0}{2} A e^{-ikz} \Phi_x(x) \Phi_y(y), \quad (9.3.4)$$

где

$$\Phi_x(x) = [C(u_2) - C(u_1)] - i[S(u_2) - S(u_1)],$$

$$\Phi_y(y) = [C(v_2) - C(v_1)] - i[S(v_2) - S(v_1)],$$

$$u_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left(x \pm \frac{a}{2} \right), \quad v_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left(y \pm \frac{b}{2} \right).$$

На рис. 9.15 приведены графики интегралов Френеля с характерными для дифракции Френеля осцилляциями.

Аналогично (9.3.4) записывается формула и для напряжённости магнитного поля дифракции на прямоугольном отверстии в экране:

$$\vec{H}(x, y, z) = i \bar{y}_0 \frac{A}{2Z} e^{-ikz} \Phi_x(x) \Phi_y(y). \quad (9.3.5)$$

Найдём на плоскости экрана границы областей, окружающих точку $x' = x$ и $y' = y$, между которыми фаза подынтегральной функции в (9.3.3) изменяется на угол $\pi/2$:

$$\frac{\pi(x-x')^2}{\lambda z} + \frac{\pi(y-y')^2}{\lambda z} = m \frac{\pi}{2}; \quad m = \overline{1, \infty}$$

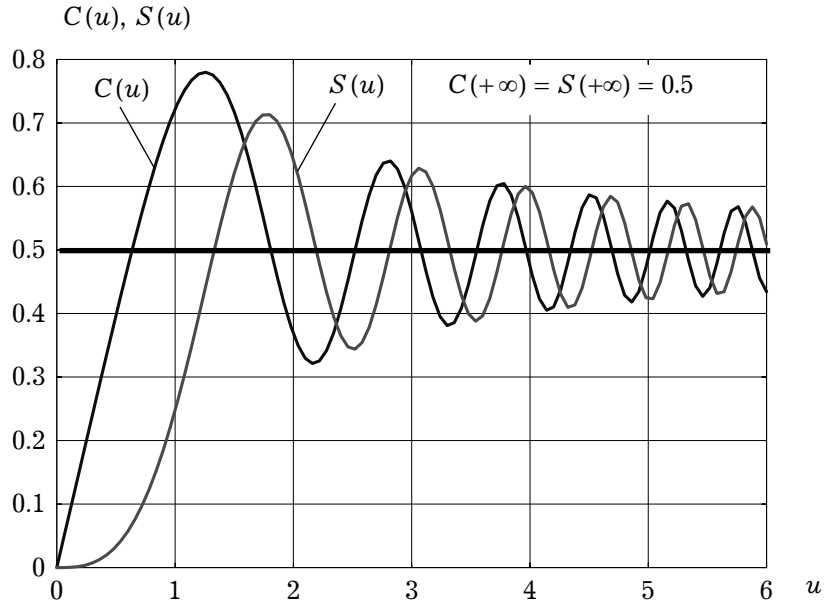


Рис. 9.15

или

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = R_m^2, \quad (9.3.6)$$

$$R_m = \sqrt{\frac{m\lambda z}{2}}.$$

В результате, получаем в плоскости $z = 0$ (плоскость экрана) семейство окружностей с центром в точке $x = x', y = y'$, с радиусами $R_m = \sqrt{m\lambda z / 2}$; в (9.3.6) z — координата точки наблюдения, лежащая вне плоскости экрана. Таким образом, плоскость $z = 0$ (экрана) разбивается на концентрические кольца, называемые *зонами Френеля*. При переходе от одной зоны к другой действительная или мнимая часть подынтегрального выражения в (9.3.3) меняет знак. Интеграл, взятый по конечному числу зон Френеля, можно представить в виде знакопеременного ряда, m -ый член которого определяет вклад m -ой зоны Френеля. Ряд быстро сходится. Физически это означает, что можно выделить область поверхности экрана, которая играет наиболее существенную роль в процессе формирования дифракционного поля. Эта область примерно совпадает с размером первой зоны Френеля. Если центр зон Френеля (x, y) лежит в области отверстия (точка наблюдения P находится вблизи оси OZ) и несколько первых зон Френеля также лежат в пределах отверстия, то максимальные значения переменных интегрирования x'_{\max} и y'_{\max} определяются размерами отверстия в экране: a и b , то есть

$$x'^2_{\max} \sim a^2 \gg \lambda z, \quad y'^2_{\max} \sim b^2 \gg \lambda z.$$

При этом интегрирование в (9.3.3) по площади отверстия можно заменить интегрированием в бесконечных пределах:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 \frac{ikA}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-ik \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z} \right] dx' dy'.$$

Сделав замену переменных

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{2z}} (x-x'), \quad \beta = \sqrt{\frac{k}{2z}} (y-y'),$$

получим

$$\vec{E} = \vec{x}_0 \frac{iA}{\pi} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\alpha^2 + \beta^2)] d\alpha d\beta = \vec{x}_0 A e^{-ikz}, \quad (9.3.7)$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2} dt = \sqrt{-i\pi}.$$

Формула (9.3.7) определяет невозмущённое электрическое поле плоской волны в области отверстия. Таким образом, если проекция точки наблюдения P на плоскость экрана лежит внутри отверстия и существенная область формирования дифракционного поля, совпадающая с первой зоной Френеля, не пересекает края отверстия, то поле в точке P оказывается практически невозмущённым. В теории дифракции важную роль играет волновой параметр

$$\tilde{d} = \frac{d}{\sqrt{\lambda z}}, \quad (9.3.8)$$

где $d = a, b$ — один из размеров отверстия. Заметим, что при $\tilde{d} \ll 1$ и $a \gg \lambda$, $b \gg \lambda$ имеем дифракцию Фраунгофера.

Если $\tilde{d} \gg 1$, экран не влияет на величину поля. Конечно, это утверждение справедливо в том случае, когда центр зон Френеля лежит внутри отверстия, то есть точки наблюдения расположены вблизи оси OZ . При увеличении значений x, y центр зон Френеля перемещается, в результате чего первая зона Френеля начинает пересекаться краем отверстия. Поле в точке наблюдения при этом становится возмущённым.

Вывод о том, что при $\tilde{d} \gg 1$ экран не оказывает влияние на дифрагированную волну, справедлив лишь для достаточно плавных распределений амплитуды поля A на отверстии. В противном случае амплитуду A в (9.3.3) необходимо внести под знак интеграла, иначе формула (9.3.3) не даёт правильных результатов. Так, например, когда A постоянна на отверстии и равна нулю вне его (приближение Кирхгофа), сказываются краевые эффекты. Поле дифрагированной волны приобретает сложную осциллирующую структуру, описываемую с помощью интегралов Френеля. Дифракционное поле в плоскостях $z = \text{const}$ можно исследовать с помощью функции

$$F(x, y) = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{E}_0|} = \frac{|\vec{H}|}{|\vec{H}_0|}, \quad (9.3.9)$$

где

$$\vec{E}_0 = \vec{x}_0 A e^{-ikz}, \quad \vec{H}_0 = \vec{y}_0 \frac{A}{Z} e^{-ikz}.$$

Согласно (9.3.4) и (9.3.5)

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \Phi_x(x) \Phi_y(y). \quad (9.3.10)$$

На рис. 9.16 в качестве иллюстрации дифракции Френеля показан качественный ход кривых $F(x, 0)$ (рассматривается распределение поля в E -плоскости) при различных значениях параметра d/z . При этом изменение параметра \tilde{d} , определяемого по формуле (9.3.8), происходит при постоянной λ . Характер кривых $F(x, 0)$ сохраняется в достаточно широкой полосе длин волн (на рис. 9.16 в выражении для \tilde{d} длина волны λ измеряется в метрах). Заметим, что при $\tilde{d} = (1000\lambda)^{-1/2}$ наблюдается дифракция Фраунгофера и характерные осцилляции интегралов Френеля отсутствуют. На рис. 9.16а показан лишь центральный участок кривой $|(\sin \xi)/\xi|$. Ширина центрального максимума составляет большую величину, поэтому видимый на рисунке малый участок кривой выглядит как прямая линия. На рис. 9.16 видно, как с увеличением расстояния z картина дифракции Френеля, для которой свойственны осцилляции интегралов Френеля (рис. 9.15), постепенно переходит в картину дифракции Фраунгофера ($\tilde{d} \ll 1$).

9.4(*). Интегральная формула Кирхгофа-Гельмгольца

До сих пор мы рассматривали эвристический подход к расчёту дифракционного поля на основе принципа Гюйгенса-Френеля и приближения Кирхгофа. Ниже рассмотрим метод Кирхгофа, применяемый для решения скалярных дифракционных задач и основанный на использовании интегральной теоремы, согласно которой значение функции ψ (составляющей электромагнитного поля), являющейся решением скалярного уравнения Гельмгольца в произвольной точке, находящейся внутри замкнутого объёма, выражается через её значение на поверхности, ограничивающей данный объём. Метод Кирхгофа является математическим обобщением принципа Гюйгенса-Френеля, идея которого состоит в том, что волновое возмущение в некоторой точке пространства M_0 (точке наблюдения) есть результат интерференции волн, испускаемых вторичными источниками, которые расположены на поверхности, находящейся между точкой M_0 и реальным источником волн. Метод Кирхгофа основан на скалярной формуле Грина.

9.4.1. Скалярная формула Грина. При рассмотрении вопросов, связанных с решением уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (9.4.1)$$

удобным аппаратом являются формулы Грина. В (9.4.1) под ψ понимается любая из компонент векторов \vec{E} или \vec{H} , k — постоянная величина.

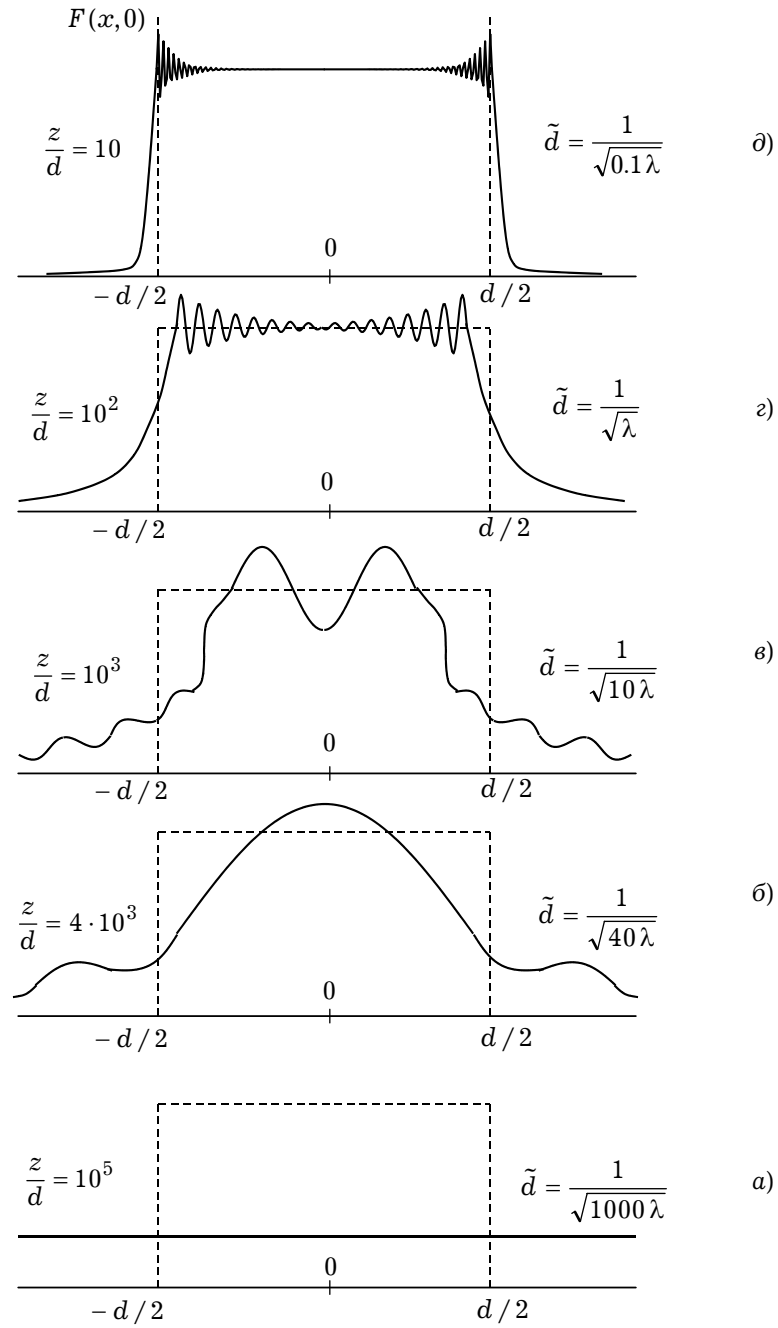


Рис. 9.16

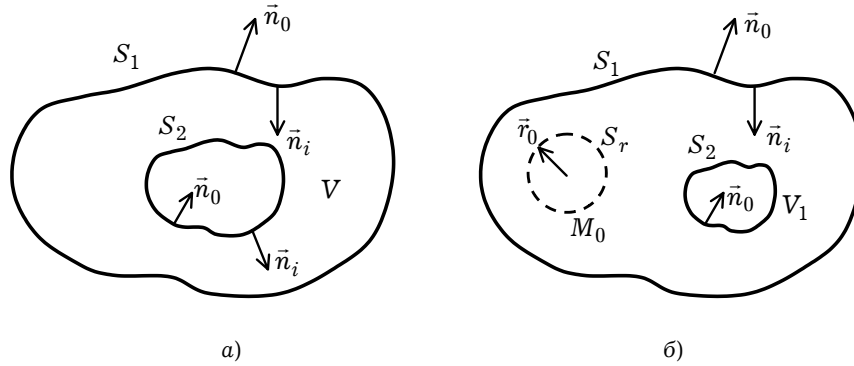


Рис. 9.17

Если u и v — аналитические функции внутри замкнутой области V , ограниченной поверхностью S , которая является поверхностью типа Ляпунова, имеет место следующая скалярная формула Грина (вторая формула Грина):

$$\int_V \{u \Delta v - v \Delta u\} dV = \oint_S \left[u \frac{\partial v}{\partial n_0} - v \frac{\partial u}{\partial n_0} \right] dS, \quad (9.4.2)$$

где $\partial u / \partial n_0$, $\partial v / \partial n_0$ — производные функций по направлению единичного вектора нормали \vec{n}_0 в точках поверхности S , внешней по отношению к области V (рис. 9.17a). В декартовой системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial n_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}_0, \vec{x}_0) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\vec{n}_0, \vec{y}_0) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\vec{n}_0, \vec{z}_0).$$

Область V может быть многосвязанной, то есть ограниченной несколькими поверхностями (рис. 9.17a). В этом случае поверхностный интеграл, стоящий в правой части формулы (9.4.2), надо брать по всем поверхностям, ограничивающим область V ($S = S_1 \cup S_2$). Заметим, что при этом нормаль \vec{n}_0 , внешняя по отношению к объёму V , будет на поверхностях, ограничивающих этот объём изнутри, направлена внутрь поверхностей. Иногда пользуются не внешней, а внутренней нормалью \vec{n}_i . При этом необходимо изменить знак у производных по нормали в правой части (9.4.2), в результате чего формула Грина запишется как

$$\int_V \{u \Delta v - v \Delta u\} dV = \oint_S \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n_i} - u \frac{\partial v}{\partial n_i} \right\} dS, \quad (9.4.3)$$

где n_i — значение единичного вектора нормали \vec{n}_i к поверхности S ($S = S_1 \cup S_2$), внутренней по отношению к области V . Рис. 9.17a поясняет запись формулы (9.4.3).

С использованием формулы Грина может быть получено выражение для функции ψ , удовлетворяющей уравнению (9.4.1) в любой точке M_0 внутри области V , в виде некоторого поверхностного интеграла. Пусть $u(M) = \psi(M)$ — функция, определённая в области V , непрерывная вместе с производными до второго порядка везде вплоть до поверхности S и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца (9.4.1).

Положим в формуле Грина (9.4.2) $u = \psi$ и $v(M) = \exp(ikR)/R$, где $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$, $R = R_{MM_0}$ — расстояние между точками M и M_0 . Функция $v(M)$ обращается в бесконечность, если точка M совпадает с M_0 , поэтому нельзя применять формулу Грина ко всей области V . В связи с этим выделим из этой области объём, ограниченный малой сферой с центром M_0 и радиусом r_0 . Обозначим через V_1 оставшуюся часть области V , а через S_r — поверхность выделенного объёма (рис. 9.17б). В области V_1 функция $v(M)$ обладает необходимыми свойствами аналитичности. Применяя к этой области формулу Грина (9.4.2), получим:

$$\int_{V_1} \{ \psi \Delta v - v \Delta \psi \} dV = \oint_S \left\{ \psi \frac{\partial v}{\partial n_0} - v \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \right\} dS + \oint_{S_r} \left\{ \psi \frac{\partial v}{\partial n_0} - v \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \right\} dS, \quad (9.4.4)$$

поскольку под u мы понимаем функцию ψ , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца (9.4.1). Так как $\Delta v = -k^2 v$, объёмный интеграл в левой части (9.4.4) преобразуется к виду:

$$- \int_{V_1} (\Delta \psi + k^2 \psi) v dV = 0.$$

Рассмотрим интеграл по поверхности сферы радиуса r_0 . Так как на S_r вектор \vec{n}_0 , направленный внутрь сферы, противоположен по направлению радиус-вектору \vec{r} , имеем: $\partial v / \partial n_0 = -\partial v / \partial r$. В результате последний интеграл в (9.4.4) преобразуется к виду:

$$I_{S_r} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_r} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \psi \left(ik + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} \right\} dS_r.$$

Рассмотрим предел этого интеграла при $r \rightarrow 0$. Радиус выделенной области устремляем к нулю, поскольку поверхность S_r должна ограничивать лишь точку особенности функции v . Принимая во внимание, что на S_r величина r имеет постоянное значение r_0 , и применяя теорему о среднем, имеем:

$$I_{S_r} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{M_r} + \psi(M_r) \left(ik + \frac{1}{r_0} \right) \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \right\} \int_{S_r} dS_r,$$

где M_r — некоторая точка на сфере S_r , причём $M_r \rightarrow M_0$ при $r_0 \rightarrow 0$.

Так как

$$\int_{S_r} dS_r = 4\pi r_0^2, \quad \text{то} \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} I_{S_r} = \psi(M_0).$$

Тогда из формулы (9.4.4) получаем:

$$\psi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{\partial \psi(M)}{\partial n_0} \frac{e^{-ikR}}{R} - \psi(M) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) \right\} dS_M, \quad (9.4.5)$$

где $R = R_{MM_0}$ — расстояние между точками M и M_0 , причём точка $M \in S$, а M_0 расположена вне поверхности S .

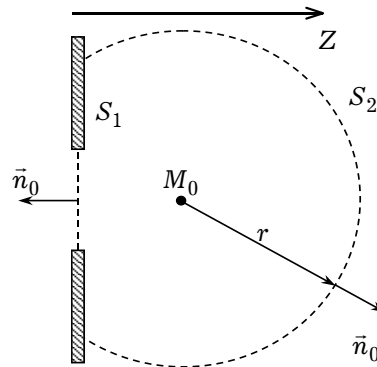


Рис. 9.18

Формулу (9.4.5) называют *третьей формулой Грина в скалярной форме*. В теории дифракции формулу (9.4.5) называют *интегральной теоремой Кирхгофа-Гельмгольца*.

9.4.2. Пример применения интегральной теоремы Кирхгофа-Гельмгольца. Условие излучения Зоммерфельда. Используем формулу (9.4.5) для определения поля волны, прошедшей через экран с отверстием. Пусть волна падает слева на экран; необходимо определить поле в произвольной точке M_0 , расположенной справа от экрана (рис. 9.18).

Чтобы применить к этой задаче интегральную теорему Кирхгофа-Гельмгольца (9.4.5), необходимо выбрать поверхность интегрирования. Будем считать, что поверхность S состоит из плоской поверхности S_1 экрана с отверстием и сферической поверхности S_2 с центром в точке M_0 , опирающейся на плоскость S_1 (рис. 9.18).

Рассмотрим интеграл по сферической поверхности S_2 . В этом случае направление внешней нормали \vec{n}_0 совпадает с направлением радиус-вектора \vec{r} :

$$\frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) = - \left(ik + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-ikR}}{R},$$

где $R = |\vec{r}|$.

Если радиус сферической поверхности взять очень большим ($R \rightarrow \infty$), то из физических соображений ясно, что интеграл по поверхности S_2 должен давать малый вклад в поле в точке M_0 . Однако для среды без потерь ($k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ — действительная величина) обращение интеграла по S_2 в нуль происходит только в том случае, если на функцию ψ (составляющая электромагнитного поля) наложить дополнительные условия, определяющие её поведение при $R \rightarrow \infty$. При $R \rightarrow \infty$ можно считать

$$R \approx r, \quad \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) \approx -ik \frac{e^{-ikr}}{r},$$

где r — координата сферической системы координат с началом в геометрическом центре щели на плоскости S_1 . Тогда интеграл по S_2 в (9.4.5) можно записать как

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_2} \left(ik\psi + \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) \frac{e^{-ikR}}{R} dS = \\ = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{4\pi} \left(ik\psi + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} r^2 d\Omega, \end{aligned}$$

где Ω — телесный угол с вершиной в точке M_0 . Интеграл по S_2 будет стремиться к нулю при $r \rightarrow \infty$, если функция ψ будет удовлетворять условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ r \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + ik\psi \right) \right\} = 0, \quad (9.4.6)$$

которое называется *условием излучения Зоммерфельда*. Ему удовлетворяет функция $\psi = e^{-ikr}/r$, которая при временной зависимости в виде $\exp\{i\omega t\}$ определяет расходящуюся сферическую волну. Так как возмущение, идущее от отверстия в экране, всегда представляет собой комбинацию сферических волн, условие (9.4.6) оказывается выполненным. Следовательно, интеграл по S_2 в (9.4.5) обращается в нуль, и поле в точке (произвольной) M_0 определяется только значением поля и его производной в отверстии и на теневой стороне экрана (поверхность S_1).

Пока не решена точно соответствующая граничная задача, значения ψ и $\partial \psi / \partial n_0$ на S_1 неизвестны. Поэтому без дополнительных предпосылок задача может быть решена лишь приближённо при определенных предположениях о значениях ψ и $\partial \psi / \partial n_0$ на теневой стороне экрана. Приближённые граничные условия Кирхгофа (*приближение Кирхгофа*) появляются в результате следующих допущений:

1. Значения ψ и $\partial \psi / \partial n_0$ равны нулю всюду, за исключением отверстий.
2. Значения ψ и $\partial \psi / \partial n_0$ внутри отверстия такие же, какими бы они были, если бы экран отсутствовал.

Несмотря на математическую нестрогость приближения Кирхгофа, расчёт электромагнитного поля дифрагированной волны в том случае, когда размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны ($ka \gg 1$, где a — размер отверстия), даёт результаты, которые хорошо согласуются с экспериментом.

Строго говоря, при одновременном обращении в нуль функции ψ и её производной по нормали к поверхности на теневой стороне экрана, функция ψ , удовлетворяющая уравнению Гельмгольца, должна обращаться в нуль всюду за экраном. Поэтому функция ψ , вычисленная по формуле (9.4.5) в приближении Кирхгофа (граничные условия 1 и 2), не описывает поля вблизи экрана и в плоскости отверстия.

Математическую нестрогость метода Кирхгофа можно устранить, определив другим образом вспомогательную функцию v в (9.4.4). Способ выбора функции Грина (функции v в (9.4.4)), исключающий необходимость одновременного задания граничных условий для поля и его производной по нормали, предложен Зоммер-

фельдом. Функция Грина G ($G = v$ в (9.4.4)) должна удовлетворять неоднородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta G + k^2 G = -\delta(R), \quad (9.4.7)$$

где R — расстояние между точкой наблюдения (x, y, z) и точкой источника (x', y', z') , условию излучения (9.4.6) и одному из граничных условий:

$$G^{(1)}(R) \Big|_S = 0 \quad (9.4.8)$$

или

$$\frac{\partial G^{(2)}(R)}{\partial n_0} \Big|_S = 0 \quad (9.4.9)$$

Функция $G^{(1)}(R)$ называется *функцией Грина*, а функция $G^{(2)}(R)$ — второй функцией Грина, или *характеристической функцией Грина*.

При использовании функций Грина $G^{(1)}(R)$ или $G^{(2)}(R)$ формула (9.4.5) существенно упрощается. Однако построение функций Грина, удовлетворяющих уравнению (9.4.7) и граничным условиям (9.4.8), (9.4.9), известно лишь для задач с простой геометрией; при этом вид функций Грина определяется видом поверхности S , свойствами среды, не зависит от положения источника излучения и от поля, создаваемого им на экране. Поэтому можно говорить о функции Грина для полупространства, среды и т.д. Напомним, что функция Грина $G(R) = e^{-ikR} / R$ называется функцией Грина для свободного пространства.

Для плоского экрана в качестве $G^{(1)}(R)$ можно взять разность полей двух точечных источников, расположенных в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_1(x, y, -z)$, являющейся зеркальным отображением точки M относительно плоскости $z = 0$:

$$G^{(1)}(R) = \frac{e^{-ikR}}{R} - \frac{e^{-ikR_1}}{R_1},$$

где

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \\ R_1 = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}.$$

В плоскости экрана ($z' = 0$)

$$G^{(1)}(R) = 0, \quad \frac{\partial G^{(1)}}{\partial n_0} = -2 \frac{\partial}{\partial z'} \frac{e^{-ikR}}{R},$$

и при $kR \gg 1$ (дальняя зона) вместо (9.4.5) (в (9.4.5) функцию e^{-ikR} / R необходимо заменить на $G^{(1)}(R)$), получаем

$$\psi(x, y, z) = \frac{ikz}{2\pi} \iint_S \psi(x', y', z' = 0) \frac{e^{-ikR}}{R^2} dx' dy', \quad (9.4.10)$$

где под S понимается отверстие в экране (рис. 9.18).

Если в качестве функции Грина выбрать

$$G^{(2)}(R) = \frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{e^{-ikR_1}}{R_1},$$

то для неё при $z' = 0$

$$\frac{\partial G^{(2)}}{\partial n_0} = 0, \quad G^{(2)}(R) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R},$$

и вместо формулы (9.4.5) имеем

$$\psi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial z'} \psi(x', y', z') \Big|_{z'=0} \frac{e^{-ikR}}{R} dx' dy'. \quad (9.4.11)$$

В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля под функциями $\psi(x', y', z' = 0)$, $\frac{\partial}{\partial z'} \psi(x', y', z' = 0)$ в (9.4.10), (9.4.11) можно понимать магнитные токи на отверстии S . Тогда формулы (9.4.10), (9.4.11) можно рассматривать как формулы расчёта полей, создаваемых системой заданных на поверхности S токов в открытом пространстве. Они являются основой теории антенн в приближении заданных токов.

9.5(*). Интегральные представления электрического и магнитного полей

Пользуясь методом Кирхгофа для скалярных волн, можно определить поле волны в различных точках за экраном. Формально интегральную формулу Кирхгофа-Гельмгольца (9.4.5) в случае электромагнитного поля можно применять только в частных случаях для простейших геометрий отверстий в экране. Это очень важное замечание связано с тем, что отверстие в экране (вернее, границы отверстия) изменяет, в общем случае, характер поляризации падающей электромагнитной волны. При этом при падении на отверстие даже плоской электромагнитной волны определённой поляризации возникает волна и другой поляризации. В результате описать дифрагированное поле с помощью одного уравнения Гельмгольца (9.4.1) не представляется возможным. Как следствие, интегральную формулу Кирхгофа (9.4.5) в этом случае при расчёте дифракции электромагнитных волн на препятствиях сложной формы использовать нельзя.

Метод Кирхгофа может быть использован при решении задач дифракции плоских электромагнитных волн только для тех препятствий (отверстий), которые не изменяют поляризацию падающей волны. К ним относятся все задачи, рассмотренные с помощью эвристического подхода Гюйгенса-Френеля. Это, например, дифракция плоской электромагнитной волны на бесконечной щели (щелях) с поляризацией параллельной краям щели (щелей). Ниже дано обобщение метода Кирхгофа на случай векторного электромагнитного поля. Согласно этому обобщению получены интегральные формулы, определяющие значения полей \vec{E} и \vec{H} в произвольной точке, находящейся внутри замкнутого объёма, через их значения на поверхности, ограничивающей объём.

Обобщение метода Кирхгофа на случай векторных полей основано на использовании векторных формул Грина.

^{*)} В научной литературе существует несколько векторных формул Грина. Ниже выводится векторная формула Грина, которая в соответствии с терминологией математической физики получила название второй.

9.5.1. Векторные формулы Грина. Получим вторую векторную формулу^{*} Грина для векторного случая. Пусть $\vec{P}(M)$, $\vec{Q}(M)$ — некоторые векторные функции, непрерывные вместе со своими вторыми производными внутри объёма V и на поверхности $S = S_1 \cup S_2$ (рис. 9.17a), ограничивающей этот объём. Применяя к вектору $\vec{A} = [\vec{P}, \text{rot } \vec{Q}]$ формулу Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \text{div } \vec{A} dV = \oint_S (\vec{n}_0, \vec{A}) dS,$$

запишем

$$\int_V \text{div} [\vec{P}, \text{rot } \vec{Q}] dV = \oint_S \vec{n}_0 [\vec{P}, \text{rot } \vec{Q}] dS.$$

Так как

$$\text{div} [\vec{P}, \text{rot } \vec{Q}] = \text{rot } \vec{Q} \text{ rot } \vec{P} - \vec{P} \text{ rot rot } \vec{Q},$$

то

$$\int_V \{ \text{rot } \vec{Q} \text{ rot } \vec{P} - \vec{P} \text{ rot rot } \vec{Q} \} dV = \oint_S \vec{n}_0 [\vec{P}, \text{rot } \vec{Q}] dS. \quad (9.5.1)$$

Поменяем в (9.5.1) местами векторы \vec{P} и \vec{Q} и вычтем полученное соотношение из (9.5.1). В результате получим векторный аналог *второй формулы Грина* (9.4.2):

$$\begin{aligned} \int_V (\vec{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{P} - \vec{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{Q}) dV = \\ = \oint_S (\vec{P} \times \nabla \times \vec{Q} - \vec{Q} \times \nabla \times \vec{P}) d\vec{S}, \end{aligned} \quad (9.5.2)$$

где векторный элемент $d\vec{S}$ направлен по внешней нормали \vec{n}_0 .

Формулу (9.5.2) удобно преобразовать следующим образом. Так как

$$\text{rot rot } \vec{P} = \text{grad div } \vec{P} - \nabla^2 \vec{P},$$

записываем

$$\begin{aligned} \vec{Q} \text{ rot rot } \vec{P} - \vec{P} \text{ rot rot } \vec{Q} &= \vec{P} \nabla^2 \vec{Q} - \vec{Q} \nabla^2 \vec{P} + \vec{Q} \text{ grad div } \vec{P} - \vec{P} \text{ grad div } \vec{Q} = \\ &= \vec{P} \nabla^2 \vec{Q} - \vec{Q} \nabla^2 \vec{P} + \nabla \{ \vec{Q} \text{ div } \vec{P} - \vec{P} \text{ div } \vec{Q} \}. \end{aligned}$$

Тогда, используя формулу Остроградского-Гаусса, приведём соотношение (9.5.2) к виду:

$$\begin{aligned} \int_V \{ \vec{P} \nabla^2 \vec{Q} - \vec{Q} \nabla^2 \vec{P} \} dV = \\ = \oint_S \{ \vec{n}_0 [\vec{P}, \text{rot } \vec{Q}] - \vec{n}_0 [\vec{Q}, \text{rot } \vec{P}] + \vec{n}_0 \vec{P} \text{ div } \vec{Q} - \vec{n}_0 \vec{Q} \text{ div } \vec{P} \} dS. \end{aligned} \quad (9.5.3)$$

Векторная формула (9.5.3) является исходной для получения интегральных представлений электромагнитного поля.

9.5.2. Интегральные представления электрического и магнитного полей. Так как векторная функция \vec{Q} является произвольной (она должна удовлетворять лишь перечисленным выше условиям), то её можно выбрать в виде:

$$\vec{Q} = \vec{a}_0 \varphi(M, M_0) = \vec{a}_0 \frac{e^{-ikR_{M_0M}}}{4\pi R_{M_0M}}, \quad (9.5.4)$$

где \vec{a}_0 — произвольно направленный постоянный вектор, R_{M_0M} — расстояние между точками M_0 и M . В качестве вектора \vec{P} возьмём комплексную амплитуду электрического поля \vec{E} ($\vec{E} \equiv \vec{P}$), удовлетворяющую уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= i\omega \varepsilon_a \vec{E} + \vec{j}_{\text{ст}}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -i\omega \mu_a \vec{H} - \vec{j}_{\text{ст}}^m, \end{aligned} \quad (9.5.5)$$

в изотропной среде внутри области V , причём

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ст}}}{\varepsilon_a}, \quad \text{div } \vec{H} = \frac{\rho_{\text{ст}}^m}{\mu_a},$$

где $\vec{j}_{\text{ст}}, \vec{j}_{\text{ст}}^m$ — векторы объёмной плотности сторонних электрического и магнитного токов, а $\rho_{\text{ст}}, \rho_{\text{ст}}^m$ — соответственно, объёмные плотности электрического и магнитного зарядов.

Поверхность S выберем так, чтобы на ней не располагались источники тока:

$$\varepsilon_a \text{div } \vec{E} \big|_S = \rho_{\text{ст}} \big|_S = 0, \quad \mu_a \text{div } \vec{H} \big|_S = \rho_{\text{ст}}^m \big|_S = 0. \quad (9.5.6)$$

Отметим также, что точка $M_0 = M$ ($R = 0$) должна быть исключена из рассмотрения, так как в ней функция φ имеет сингулярность. Поскольку будем искать поле \vec{E} в точке M_0 , выделим из общего объема V малую сферическую область с центром M_0 и радиуса r_0 (точно такую, как в случае вывода формулы (9.4.5)). Применим векторную формулу Грина (9.5.3) к оставшемуся объёму V_1 (объём V за вычетом указанной сферической области).

Так как

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = i\omega \mu_a \vec{j}_{\text{ст}} - \frac{1}{i\omega \varepsilon_a} \text{grad div } \vec{j}_{\text{ст}} + \text{rot } \vec{j}_{\text{ст}}^m$$

(уравнение следует из системы (9.5.5)),

$$\nabla^2 \vec{Q} + k^2 \vec{Q} = -\vec{a}_0 \delta(M, M_0),$$

$$\text{rot } \vec{Q} = [\text{grad}_M \varphi, \vec{a}_0], \quad \text{div } \vec{Q} = \vec{a}_0 \text{grad } \varphi,$$

где $\delta(M, M_0)$ — трёхмерная δ -функция, то из соотношения (9.5.3) с учетом (9.5.6) в пределе при $r_0 \rightarrow 0$ получаем:

$$\begin{aligned} \vec{E}(M_0) \vec{a}_0 &= \int_V \vec{F}_{\text{ст}}^e(M) \varphi(M, M_0) \vec{a}_0 dV_M + \\ &+ \vec{a}_0 \oint_S \left\{ \text{grad } \varphi, [\vec{n}_0, \vec{E}] - i\omega \mu_a \varphi [\vec{H}, \vec{n}_0] - (\vec{n}_0, \vec{E}) \text{grad } \varphi \right\} dS_M, \end{aligned}$$

где

$$\vec{F}_{\text{CT}}^e = -i\omega\mu_a\vec{j}_{\text{CT}} + \frac{1}{i\omega\epsilon_a}\text{grad div}\vec{j}_{\text{CT}} - \text{rot}\vec{j}_{\text{CT}}^m.$$

Нижний индекс « M » означает, что операция дифференцирования производится по координатам точки M .

В силу произвольности вектора \vec{a}_0 запишем интегральное представление электрического поля в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}(M_0) = & \int_V \vec{F}_{\text{CT}}^e \varphi(M, M_0) dV_M + \\ & + \oint_S \left\{ \left[\text{grad}\varphi, [\vec{n}_0, \vec{E}] \right] - i\omega\mu_a\varphi [\vec{H}, \vec{n}_0] - (\vec{n}_0, \vec{E}) \text{grad}\varphi \right\} dS_M. \end{aligned} \quad (9.5.7)$$

Аналогично полагая $\vec{P} = \vec{H}$, $\vec{Q} = \vec{a}_0\varphi(M, M_0)$ и учитывая, что

$$\nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = -\vec{F}_{\text{CT}}^m,$$

где

$$\vec{F}_{\text{CT}}^m = -i\omega\epsilon_a\vec{j}_{\text{CT}}^m + \frac{1}{i\omega\mu_a}\text{grad div}\vec{j}_{\text{CT}}^m + \text{rot}\vec{j}_{\text{CT}},$$

получим интегральное представление магнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{H}(M_0) = & \int_V \vec{F}_{\text{CT}}^m(M) \varphi(M, M_0) dV_M + \\ & + \oint_S \left\{ \left[\text{grad}\varphi, [\vec{n}_0, \vec{H}] \right] + i\omega\epsilon_a\varphi [\vec{E}, \vec{n}_0] - (\vec{n}_0, \vec{H}) \text{grad}\varphi \right\} dS_M. \end{aligned} \quad (9.5.8)$$

9.5.3. Интегральные формулы Стреттона-Чу. Если в интегральных представлениях электрического и магнитного полей (9.5.7) и (9.5.8) положить магнитные сторонние источники, равными нулю ($\vec{j}_{\text{CT}}^m = 0$), то придём к известным формулам Стреттона-Чу:

$$\begin{aligned} \vec{E}(M_0) = & - \int_V \left\{ i\omega\mu_a\vec{j}_{\text{CT}} + \frac{i}{\omega\epsilon_a}\text{grad div}\vec{j}_{\text{CT}} \right\} \varphi(M, M_0) dV_M + \\ & + \oint_S \left\{ \left[\text{grad}\varphi, [\vec{n}_0, \vec{E}] \right] - i\omega\mu_a\varphi [\vec{H}, \vec{n}_0] - (\vec{n}_0, \vec{E}) \text{grad}\varphi \right\} dS_M, \end{aligned} \quad (9.5.9)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(M_0) = & \int_V \varphi(M, M_0) \text{rot}\vec{j}_{\text{CT}} dV_M + \\ & + \oint_S \left\{ \left[\text{grad}\varphi, [\vec{n}_0, \vec{H}] \right] + i\omega\epsilon_a\varphi [\vec{E}, \vec{n}_0] - (\vec{n}_0, \vec{H}) \text{grad}\varphi \right\} dS_M. \end{aligned} \quad (9.5.10)$$

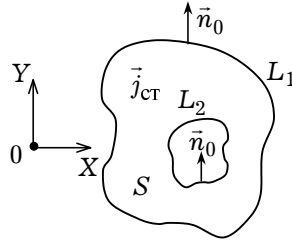


Рис. 9.19

В заключение этого раздела приведем интегральные формулы для двумерного случая. Пусть, например, для определенности, геометрия задачи и электромагнитное поле не зависят от координаты z ($\partial/\partial z = 0$) (см. рис. 9.19). В этом случае имеем ($L = L_1 \cup L_2$):

$$\begin{aligned} \vec{E}(M_0) = & - \int_S \left\{ i\omega\mu_a \vec{j}_{\text{ст}} + \frac{i}{\omega\epsilon_a} \text{grad div } \vec{j}_{\text{ст}} \right\} g(M, M_0) dS_M + \\ & + \oint_L \left\{ [\text{grad } g, [\vec{n}_0, \vec{E}]] - i\omega\mu_a g [\vec{H}, \vec{n}_0] - (\vec{n}_0, \vec{E}) \text{grad } g \right\} dl_M, \end{aligned} \quad (9.5.11)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(M_0) = & \int_S g(M, M_0) \text{rot } \vec{j}_{\text{ст}} dS_M + \\ & + \oint_L \left\{ [\text{grad } g, [\vec{n}_0, \vec{H}]] + i\omega\epsilon_a g [\vec{E}, \vec{n}_0] - (\vec{n}_0, \vec{H}) \text{grad } g \right\} dl_M. \end{aligned} \quad (9.5.12)$$

где $g \equiv g(M, M_0) = H_0^{(2)}(kR)$ — функция Ханкеля 2-го рода нулевого порядка. Уравнения (9.5.9)–(9.5.12) позволяют производить расчёт электромагнитного поля по заданным сторонним источникам электрического типа.

9.6(*). Интегральные уравнения Фредгольма второго рода в задачах дифракции, получаемые с помощью формул Грина

До настоящего момента рассматривались приближённые методы решения задач дифракции, справедливые при больших значениях параметра ka (a — характерный размер структуры): $ka \gg 1$. Это — приближение физической оптики, основанное на граничных условиях Кирхгофа и геометрической оптике, согласно которой рассеяние происходит по законам лучевой оптики: падающий и отражённый лучи лежат в одной плоскости и локальные углы падения и отражения равны. В области резонансных частот структуры ($ka \sim 1$) использование каких-либо физических допущений, как правило, неправомерно. Единственной возможностью решения задач дифракции электромагнитных волн на структурах в случае $ka \sim 1$ является их сведение к интегральным уравнениям относительно неизвестных распределений поля на поверхностях структур. Далее эти интегральные уравнения решаются численно с помощью хорошо развитых вычислительных методов.

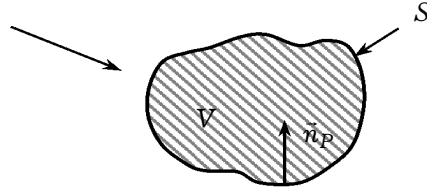


Рис. 9.20

В настоящем разделе основное внимание уделяется рассмотрению трёхмерных краевых задач. Общая процедура решения состоит в сведении трёхмерной задачи к двумерной путём перехода от неизвестных функций (электромагнитных полей), заданных в некотором объёме к неизвестным функциям, заданным на некоторой поверхности. Таким образом, вместо решения уравнения Гельмгольца со сложными граничными условиями предлагается искомые решения выразить через неизвестные составляющие электромагнитного поля, заданные на поверхности. Такой подход является более общим, чем непосредственное решение уравнения Гельмгольца, хотя и приводит к интегральным уравнениям, нахождение решений которых, в принципе, является более сложной задачей. Однако уменьшение числа независимых переменных с трёх до двух, возможность отказа от специальных систем координат, а также уменьшение физических ограничений, накладываемых на неизвестные функции (они должны удовлетворять лишь интегральным уравнениям), для большинства задач дифракции с избытком окупают возникающие дополнительные вычислительные трудности. В частности, отпадает необходимость выбора среди всех возможных решений дифференциального уравнения частного решения, удовлетворяющего граничным условиям. Метод интегральных уравнений даёт возможность, как правило, непосредственно получать единственное решение.

9.6.1. Дифракция на идеально проводящем теле. Пусть электромагнитное поле возбуждается локальными сторонними электрическими токами $\vec{j}_{\text{ст}}^e$. Для определения электромагнитного поля вне идеально проводящего тела, ограниченного замкнутой поверхностью S , нужно решить следующую задачу: найти векторы \vec{E} и \vec{H} , удовлетворяющие вне поверхности S (в области V) (рис. 9.20) уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= i\omega\epsilon_a \vec{E} + \vec{j}_{\text{ст}}^e, \\ \text{rot } \vec{E} &= -i\omega\mu_a \vec{H}, \end{aligned} \quad (9.6.1)$$

граничному условию на поверхности S :

$$[\vec{n}_0, \vec{E}]|_S = 0 \quad (9.6.2)$$

и условию излучения (9.4.6) на бесконечности.

Для получения интегрального уравнения удобно воспользоваться формулой (9.5.10), дающей интегральное представление магнитного поля вне поверхности S в любой точке M ($M \notin S$):

$$\begin{aligned} \vec{H}(M) = & \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\vec{j}_{\text{ст}}^e, \text{grad}_Q \frac{e^{-i\gamma R_{MQ}}}{R_{MQ}} \right] dV_Q + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\text{grad}_P \frac{e^{-i\gamma R_{MP}}}{R_{MP}} [\vec{n}_P, \vec{H}(P)] - i\omega\epsilon_a [\vec{n}_P, \vec{E}(P)] \times \right. \\ & \times \left. \frac{e^{-i\gamma R_{MP}}}{R_{MP}} - (\vec{n}_P, \vec{H}(P)) \text{grad}_P \frac{e^{-i\gamma R_{MP}}}{R_{MP}} \right] dS_P, \end{aligned} \quad (9.6.3)$$

где $k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$, R_{MP} — расстояние между точками M и P , R_{MQ} — расстояние между точками M и Q ($P \in S$; точка Q — текущая точка области задания сторонних токов), интегрирование в первом слагаемом (9.6.3) проводится по объёму V , содержащему все сторонние токи $\vec{j}_{\text{ст}}^e$.

Объёмный интеграл в формуле (9.6.3) представляет собой магнитное поле $\vec{H}_0(M)$ заданных источников в отсутствии идеально проводящего тела:

$$\vec{H}_0(M) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\vec{j}_{\text{ст}}^e, \text{grad}_Q \frac{e^{-i\gamma R_{MQ}}}{R_{MQ}} \right] dV_Q. \quad (9.6.4)$$

В случае идеально проводящего тела касательная составляющая электрического поля на поверхности S обращается в нуль и, как легко показать, используя уравнение Максвелла, имеет место соотношение:

$$(\vec{n}_P, \vec{H}) = 0, \quad P \in S, \quad (9.6.5)$$

где \vec{n}_P — нормаль в точке P , направленная внутрь металла (рис. 9.20).

Вводя поверхностный ток: $\vec{\eta}(P) = [\vec{n}_P, \vec{H}(P)]$, наведенный на поверхности идеально проводящего тела, на которой выполняется граничное условие (9.6.5), интегральное представление (9.6.3) можно переписать в виде:

$$\vec{H}(M) = \vec{H}_0(M) + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\text{grad}_P \frac{e^{-i\gamma R_{MP}}}{R_{MP}}, \vec{\eta}(P) \right] dS_P. \quad (9.6.6)$$

где $\vec{H}_0(M)$ определяется соотношением (9.6.4).

Для получения интегрального уравнения относительно поверхностного тока $\vec{\eta}(P)$ в соотношении (9.6.6) перейдем к пределу, устремляя точку M к поверхности S , то есть $M \rightarrow P_0$. С учётом того, что

$$\vec{H}(P_0)|_S = [\vec{\eta}(P_0), \vec{n}_{P_0}] \quad (9.6.7)$$

и соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow P_0} \oint_S \left[\vec{\eta}(P), \text{grad}_P \frac{e^{-i\gamma R_{MP}}}{R_{MP}} \right] dS_P = \\ = \oint_S \left[\vec{\eta}(P), \text{grad}_P \frac{e^{-i\gamma R_{P_0P}}}{R_{P_0P}} \right] dS_P - 2\pi [\vec{\eta}(P_0), \vec{n}_{P_0}] \end{aligned} \quad (9.6.8)$$

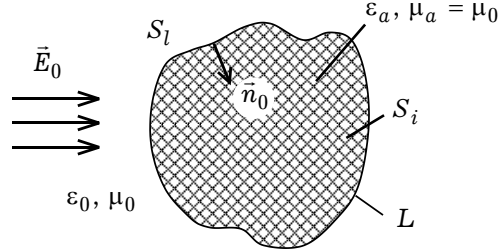


Рис. 9.21

получаем

$$\frac{1}{2} [\bar{\eta}(P_0), \bar{n}_{P_0}] = \bar{H}_0(P_0) + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\text{grad}_P \frac{e^{-i\gamma R_{PP_0}}}{R_{PP_0}}, \bar{\eta}(P) \right] dS_P. \quad (9.6.9)$$

Умножив уравнение (9.6.9) векторно на \bar{n}_{P_0} и введя обозначение

$$\bar{\eta}^{\text{перв}}(P_0) = [\bar{n}_{P_0}, \bar{H}_0(P)], \quad (9.6.10)$$

можно получить следующее интегральное уравнение:

$$\bar{\eta}(P_0) + \frac{1}{2\pi} \oint_S \left[\bar{n}_{P_0} \left[\bar{\eta}(P), \text{grad} \frac{e^{-i\gamma R_{PP_0}}}{R_{PP_0}} \right] \right] dS_P = 2\bar{\eta}^{\text{перв}}(P_0), \quad (9.6.11)$$

которое является *интегральным уравнением Фредгольма второго рода* относительно неизвестной поверхностной плотности тока $\bar{\eta}$ на идеально проводящем теле. В силу разрешимости исходной краевой задачи (9.6.1)–(9.6.2) при любом способе возбуждения (при любом стороннем токе $\bar{j}_{\text{ст}}^e$) соответствующее этой краевой задаче интегральное уравнение (9.6.11) разрешимо для любой функции $\bar{\eta}^{\text{перв}}$, определяемой через сторонние токи $\bar{j}_{\text{ст}}^e$ по формулам (9.6.4) и (9.6.10).

В заключение этого раздела заметим, что соотношение (9.6.6) является представлением магнитного поля в виде потенциала двойного слоя [Л.29], так как легко проверить, что интеграл в (9.6.6) обладает всеми свойствами потенциала двойного слоя, а его предельное значение на поверхности S определяется формулой (9.6.8).

9.6.2. Дифракция на двумерном диэлектрическом цилиндре. Получим интегральное уравнение для задачи дифракции падающей волны с электрическим полем $\bar{E}_0(x, y)$ на диэлектрическом двумерном ($\partial/\partial z \equiv 0$) цилиндре, ограниченным контуром L . Обозначим через S_i и S_l области, соответственно, внутри и вне контура L (рис. 9.21). Необходимо определить напряженность электрического поля $\bar{E}(x, y)$, удовлетворяющую в точках $x, y \in S_l$ уравнениям:

$$\text{rot } \bar{H} = i\omega\epsilon_0\bar{E} + \bar{j}_{\text{ст}}^e, \quad \text{rot } \bar{E} = -i\omega\mu_0\bar{H}, \quad (9.6.12)$$

где \vec{j}_{CT}^e — сторонний электрический ток, создающий падающее поле \vec{E}_0 , а в точках $x, y \in S_i$ уравнением:

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega\epsilon_0\epsilon \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{H}. \quad (9.6.13)$$

На контуре L ($x, y \in L$) должны выполняться граничные условия

$$\begin{aligned} [\vec{n}_0, \vec{E}^{(l)} - \vec{E}^{(i)}] &= 0, \\ [\vec{n}_0, \vec{H}^{(l)} - \vec{H}^{(i)}] &= 0. \end{aligned} \quad (9.6.14)$$

Кроме граничных условий (9.6.14) поле \vec{E} , \vec{H} на бесконечности должно удовлетворять условию излучения (9.4.6).

При выводе интегрального уравнения формально введем в уравнения Максвелла электрический ток поляризации. Тогда вместо уравнений (9.6.12), (9.6.13) запишем следующую систему уравнений Максвелла для однородной среды с параметрами ϵ_0, μ_0 :

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega\epsilon_0\epsilon \vec{E} + \vec{j}_{\text{CT}}^e + \vec{j}_{\text{пол}}, \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{H}, \quad (9.6.15)$$

где $\vec{j}_{\text{пол}} = i\omega\epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E}$ — электрический ток поляризации. Заметим, что уравнения (9.6.15) справедливы для любой точки P всей плоскости: $P \in S_i \cup S_l$. Ток поляризации отличен от нуля только в области S_i , то есть $\vec{j}_{\text{пол}} = 0$ при $P \in S_l$.

Применим формулу Стреттона-Чу (9.5.11) для контура L_∞ , представляющего собой окружность бесконечно большого радиуса. В этом случае второе слагаемое в (9.5.11) в силу условия излучения обращается в нуль. В результате имеем:

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= - \int_{S_l} \left[i\omega\mu_0 \vec{j}_{\text{CT}}^e + \frac{i}{\omega\epsilon_0} \text{grad div } \vec{j}_{\text{CT}}^e \right] g(P, Q) dS_Q - \\ &- \int_{S_i} \left[i\omega\mu_0 \vec{j}_{\text{пол}} + \frac{i}{\omega\epsilon_0} \text{grad div } \vec{j}_{\text{пол}} \right] g(P, M) dS_M, \end{aligned} \quad (9.6.16)$$

где $g(P, M) = H_0^{(2)}(\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}R)$, $R = R_{PM}$ — расстояние между точками P и M . Интегрирование в первом слагаемом в соотношении (9.6.16) проводится по точкам Q , при этом

$$\vec{E}_0(P) = - \int_{S_l} \left[i\omega\mu_0 \vec{j}_{\text{CT}}^e + \frac{i}{\omega\epsilon_0} \text{grad div } \vec{j}_{\text{CT}}^e \right] g(P, Q) dS_Q \quad (9.6.17)$$

— электрическое поле заданных источников в отсутствии диэлектрического тела.

С учетом (9.6.17) соотношение (9.6.16) переходит в следующее интегральное представление:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_0(P) + \omega^2\epsilon_0\mu_0(\epsilon - 1) \int_{S_i} \vec{E}(M) H_0^{(2)}(\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}R) dS_M. \quad (9.6.18)$$

Заметим, что при выводе последнего интегрального соотношения было учтено, что

$$\text{div } \vec{j}_{\text{пол}} = i\omega\epsilon_0(\epsilon - 1)\text{div } \vec{E} = 0,$$

так как среда однородная и объёмные свободные электрические заряды в области S_i отсутствуют.

Если считать, что точка $P \in S_i$, то уравнение (9.6.18) представляет собою интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Определяя из него $\vec{E}(P)$ для точек $P \in S_i$, а затем, подставляя полученное решение в правую часть (9.6.16), получаем явное выражение $\vec{E}(P)$ для точек $P \in S_l$, то есть фактически продолжаем решение для \vec{E} во внешнюю область S_l .

Интегральное уравнение (9.6.18) особенно удобно для построения приближенных решений в случае, когда параметры сред в областях S_i и S_l несильно отличаются друг от друга: $\varepsilon - 1 \ll 1$. В этом случае вместо искомого точного значения \vec{E} в подынтегральное выражение в (9.6.18) можно подставить, например, поле падающей волны \vec{E}_0 (борновское приближение) или упрощенное геометрическое решение, скажем, только с учетом фазового множителя (приближение фазовой коррекции) и т.д. Полученные таким образом результаты являются, разумеется, приближенными, однако они позволяют провести качественное исследование поведения дифрагированного поля, выяснить его характерные физические особенности. Зачастую именно эти сведения и представляют основной познавательный интерес.

9.7(*). Интегральные уравнения первого рода в задачах дифракции

При численном решении задач дифракции используются как интегральные уравнения второго рода, так и уравнения первого рода, причем в ряде случаев уравнения первого рода имеют ряд преимуществ по сравнению с уравнениями второго рода.

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле, находящемся в однородной среде с параметрами ε и μ . Пусть электромагнитное поле $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$ падает на идеально-проводящее тело V_i , ограниченное замкнутой поверхностью S . Представив полное электромагнитное поле $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ во внешней области V_l в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1, \quad (9.7.1)$$

получим для дифрагированного поля $\{\vec{E}_1, \vec{H}_1\}$ следующую задачу: требуется найти в области V_l решение системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_1 &= i\omega \varepsilon_a \vec{E}_1, \\ \text{rot } \vec{E}_1 &= -i\omega \mu_a \vec{H}_1, \end{aligned} \quad (9.7.2)$$

удовлетворяющее на поверхности S граничному условию

$$[\vec{n}_0, \vec{E}_1 + \vec{E}_0]_S = 0, \quad P \in S \quad (9.7.3)$$

и условию излучения на бесконечности.

Запишем формулы Стреттона-Чу (9.5.9) и (9.5.10) при $\vec{j}_{\text{ст}}^e = 0$ для дифрагированного поля $\{\vec{E}_1, \vec{H}_1\}$:

$$\vec{E}_1(M) = \oint_S \left\{ \left[\text{grad}_P \varphi, [\vec{n}_0, \vec{E}_1] \right] + i\omega\mu_a \varphi [\vec{n}_0, \vec{H}_1] - \right. \\ \left. - (\vec{n}_0, \vec{E}_1) \text{grad}_P \varphi \right\} dS_P, \quad (9.7.4)$$

$$\vec{H}_1(M) = \oint_S \left\{ \left[\text{grad}_P \varphi, [\vec{n}_0, \vec{H}_1] \right] - i\omega\epsilon_a \varphi [\vec{n}_0, \vec{E}_1] - \right. \\ \left. - (\vec{n}_0, \vec{H}_1) \text{grad}_P \varphi \right\} dS_P, \quad (9.7.5)$$

удовлетворяющего однородной системе уравнений Максвелла (9.7.2) и входящего составной частью в общее поле (9.7.1). В (9.7.4) и (9.7.5) обозначено:

$$\varphi = \varphi(P, M) = \frac{e^{-ikR_{PM}}}{4\pi R_{PM}}, \quad k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}.$$

Применяя к уравнениям (9.7.4) и (9.7.5) операцию rot_M по координатам точки M (точки наблюдения), а также используя соотношение

$$\left[\text{grad}_M \varphi, [\vec{n}_0, \vec{H}_1(P)] \right] = \text{rot}_M \left\{ \varphi(P, M) [\vec{n}_0, \vec{H}_1(P)] \right\} - \\ - \varphi(P, M) \text{rot}_M [\vec{n}_0, \vec{H}_1(P)] = \text{rot}_M \left\{ \varphi(P, M) [\vec{n}_0, \vec{H}_1] \right\},$$

получим

$$\vec{E}_1(M) = -\text{rot} \text{rot}_M \left\{ \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \oint_S \vec{\eta}_1^e(P) \varphi(P, M) dS_P \right\} - \\ - \text{rot} \text{rot} \frac{1}{\omega^2\epsilon_a\mu_a} \oint_S \text{rot}_M \left\{ \vec{\eta}_1^m(P) \varphi(P, M) \right\} dS_P, \quad (9.7.6)$$

$$\vec{H}_1(M) = \text{rot} \text{rot}_M \left\{ \frac{1}{i\omega\mu_a} \oint_S \vec{\eta}_1^m(P) \varphi(P, M) dS_P \right\} - \\ - \text{rot}_M \oint_S \vec{\eta}_1^e(P) \varphi(P, M) dS_P, \quad (9.7.7)$$

где $\vec{\eta}_1^e = [\vec{n}_0, \vec{H}_1]$, $\vec{\eta}_1^m = -[\vec{n}_0, \vec{E}_1]$ — соответственно, поверхностные плотности электрического и магнитного токов на поверхности S . Заметим, что формулы (9.7.6) и (9.7.7) содержат только тангенциальные составляющие полей \vec{E}_1 и \vec{H}_1 на поверхности S . Для координат точки M справедливо соотношение

$$\text{rot} \text{rot}_M \oint_S \vec{\eta}_1^e \varphi(P, M) dS_P = \omega^2\epsilon_a\mu_a \oint_S \vec{\eta}_1^e \varphi(P, M) dS_P + \\ + \text{grad}_M \oint_S \vec{\eta}_1^e \varphi(P, M) dS_P.$$

Аналогичное равенство имеет место и для $\vec{\eta}^m$.

В силу граничного условия (9.7.3) соотношения (9.7.6) и (9.7.7) принимают вид ($M \in V_l$):

$$\vec{E}_1(M) = -\frac{1}{i\omega\epsilon_a} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \oint_S \vec{\eta}_1^e(P) \varphi(P, M) dS_P + \vec{E}_1^{(0)}(M), \quad (9.7.8)$$

$$\vec{H}_1(M) = -\operatorname{rot} \oint_S \vec{\eta}_1^e(P) \varphi(P, M) dS_P + \vec{H}_1^{(0)}(M), \quad (9.7.9)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{E}_1^{(0)}(M) &= \frac{1}{\omega^2 \epsilon_a \mu_a} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \oint_S [\operatorname{grad}_M \varphi, [\vec{n}_0, \vec{E}_0]] dS_P, \\ \vec{H}_1^{(0)}(M) &= -\frac{1}{i\omega\mu_a} \operatorname{rot} \oint_S [\operatorname{grad}_M \varphi, [\vec{n}_0, \vec{E}_0]] dS_P. \end{aligned}$$

Таким образом, для определения дифрагированного поля $\{\vec{E}_1, \vec{H}_1\}$ в области V_l достаточно определить ток $\vec{\eta}_1^e = -[\vec{n}_0, \vec{H}_1]$ на поверхности S . Заметим, что поля $\vec{E}_1^{(0)}$ и $\vec{H}_1^{(0)}$ определены всюду вне поверхности S .

Чтобы получить интегральное уравнение для поверхностной плотности тока, поместим точку M внутри области V_i . Тогда, аналогично (9.7.9) получим

$$\operatorname{rot}_M \oint_S \vec{\eta}_1^e(P) \varphi(P, M) dS_P = H_1^{(0)}(M), \quad M \in V_i \quad (9.7.10)$$

или

$$\oint_S [\operatorname{grad}_M \varphi(M, P), \vec{\eta}_1^e(P)] dS_P = \vec{H}_1^{(0)}(M), \quad M \in V_i. \quad (9.7.11)$$

Соотношение (9.7.11) есть *интегральное уравнение Фредгольма первого рода* относительно поверхностной плотности тока $\vec{\eta}_1^e$. Решив его, найдем по формулам (9.7.8), (9.7.9) поле $\{\vec{E}_1, \vec{H}_1\}$.

Интегральное уравнение (9.7.11) получено для поверхностной плотности тока $\vec{\eta}_1^e$, определяющей дифрагированное поле. Аналогичное уравнение можно получить и для полной поверхностной плотности электрического тока:

$$\vec{\eta}^e(P) = [\vec{n}_0, \vec{H}] = [\vec{n}_0, \vec{H}_0 + \vec{H}_1], \quad P \in S. \quad (9.7.12)$$

Для этого перепишем формулу (9.7.7) применительно к падающему полю $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$ в области V_i . Имеем

$$\begin{aligned} \vec{H}_0(M) &= \operatorname{rot}_M \oint_S [\vec{n}_0, \vec{H}_0] \varphi(P, M) dS_P - \\ &- \frac{1}{i\omega\mu_a} \operatorname{rot}_M \oint_S \operatorname{rot}_M \{[\vec{n}_0, \vec{E}_0] \varphi(P, M)\} dS_P, \quad M \in V_i. \end{aligned} \quad (9.7.13)$$

Складывая соотношения (9.7.10) и (9.7.13), получим интегральное уравнение для полной поверхностной плотности тока

$$\operatorname{rot}_M \oint_S \vec{\eta}^e(P) \varphi(P, M) dS_P = \vec{H}_0(M), \quad M \in V_i \quad (9.7.14)$$

или

$$\oint_S [\operatorname{grad}_M \varphi(M, P), \vec{\eta}^e(P)] dS_P = \vec{H}_0(M), \quad M \in V_i, \quad (9.7.15)$$

в котором плотность поверхностного тока определяется как (9.7.12).

Исходя из выражения для вектора электрического поля \vec{E} , можно получить для поверхностной плотности тока $\vec{\eta}_1^e$ другое уравнение. Помещая точку M в область V_i и используя выражение для вектора \vec{E} (9.7.6), получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \oint_S \vec{\eta}_1^e(P) \varphi(P, M) dS_P = i\omega \varepsilon_a \vec{E}_1^{(0)}(M). \quad (9.7.16)$$

Если перейти к полной поверхностной плотности тока $\vec{\eta}^e$, то уравнение (9.7.16) для $M \in V_i$ принимает другой вид:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \oint_S \vec{\eta}^e(P) \varphi(P, M) dS_P = i\omega \varepsilon_a \vec{E}_0(M). \quad (9.7.17)$$

Таким образом, уравнения (9.7.14), (9.7.15), (9.7.17) являются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода относительно плотности полного поверхностного тока.

Заметим, что в векторных уравнениях Фредгольма первого рода точка M может принадлежать не всей области V_i , а только некоторой её подобласти, ограниченной замкнутой поверхностью S_1 и расположенной строго внутри объема V_i .

9.8. Метод разделения переменных в теории дифракции плоских электромагнитных волн на телах с координатными границами

Задачи дифракции электромагнитных волн, как правило, в строгой постановке сводят либо к дифференциальному уравнению (уравнению Гельмгольца) с соответствующими граничными условиями, либо к интегральным уравнениям. Обычно решение задачи дифракции в строгой постановке может быть получено только на основе численных методов. Однако для некоторых простейших задач удаётся найти строгое аналитическое решение. Такое решение можно получить только для случаев, когда тело, на которое падает электромагнитная волна, имеет координатные границы, то есть функция, описывающая его поверхность, может быть записана в аналитическом виде в одной из систем координат (декартовой, цилиндрической и т.д.). Тогда может быть использован метод разделения переменных, который применялся при анализе собственных волн прямоугольного и круглого волноводов.

Наибольший практический и теоретический интерес в теории дифракции представляет бесконечно протяжённый круговой цилиндр, поверхность которого просто

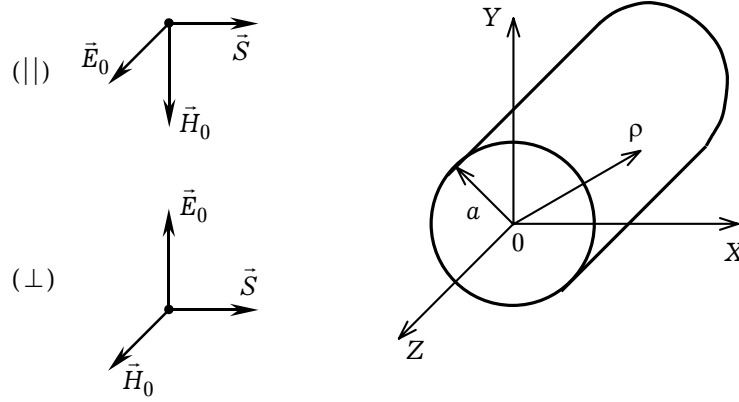


Рис. 9.22

описывается в цилиндрической системе координат. Известны аналитические решения для задач дифракции плоских волн на круговом диэлектрическом и идеально проводящем цилиндрах.

9.8.1. Дифракция плоской волны на круговом идеально проводящем цилиндре.

Рассматриваемая ниже структура позволяет поставить и решить задачу дифракции в строгой электродинамической постановке, не прибегая к эвристическим приёмам. Геометрия задачи приведена на рис. 9.22. Бесконечный идеально проводящий круговой цилиндр расположен в среде с проницаемостями $\varepsilon^{(1)}$, $\mu^{(1)}$ и ориентирован вдоль оси OZ . Падающая волна \vec{E}_0 , \vec{H}_0 распространяется нормально к оси цилиндра. Ниже рассмотрим два варианта поляризации падающей волны.

1. Вектор \vec{E}_0 параллелен оси OZ (параллельная поляризация).

$$\vec{E}_0 = \vec{z}_0 A^{\parallel} e^{-ik_1 x}, \quad \vec{H}_0 = -\vec{y}_0 \frac{A^{\parallel}}{Z^{(1)}} e^{-ik_1 x}, \quad (9.8.1)$$

2. Вектор \vec{H}_0 параллелен оси OZ (поперечная поляризация):

$$\vec{E}_0 = \vec{y}_0 A^{\perp} Z^{(1)} e^{-ik_1 x}, \quad \vec{H}_0 = \vec{z}_0 A^{\perp} e^{-ik_1 x}. \quad (9.8.2)$$

В (9.8.1) и (9.8.2) $k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon^{(1)} \mu^{(1)}}$, $Z^{(1)} = Z_0 \sqrt{\mu^{(1)} / \varepsilon^{(1)}}$, Z_0 — импеданс вакуума; A^{\perp} , A^{\parallel} — амплитуды падающих волн; $\varepsilon^{(1)}$, $\mu^{(1)}$ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Требуется найти внешнее поле дифракции: $\vec{E}^{(-)}$, $\vec{H}^{(-)}$.

Рассматриваемая задача решается в предположении отсутствия зависимости поля от переменной z , то есть является двумерной.

Очевидно, что поле $\vec{E}^{(-)}$, $\vec{H}^{(-)}$ должно удовлетворять уравнениям Гельмгольца ($\rho \geq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \vec{E}^{(-)} + k_1^2 \vec{E}^{(-)} &= 0, \\ \nabla_{\perp}^2 \vec{H}^{(-)} + k_1^2 \vec{H}^{(-)} &= 0, \end{aligned} \quad (9.8.3)$$

где символ « \perp » означает, что в операторе ∇^2 присутствуют только поперечные цилиндрические или декартовы координаты, то есть ρ и φ (или x и y).

На поверхности цилиндра (поверхность S) должно выполняться граничное условие:

$$\vec{E}_\tau = 0 \text{ на } S, \quad (9.8.4)$$

где $\vec{E}_\tau = \vec{E}_{0\tau} + \vec{E}_\tau^{(-)}$.

С учётом того, что $x = \rho \cos \varphi$, функцию $\exp\{-ik_1\rho \cos \varphi\}$ представим в виде ряда Фурье, который является ключевым для данной задачи:

$$e^{-ik_1\rho \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k_1\rho) e^{in\varphi}, \quad (9.8.5)$$

причём

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_1\rho \cos \varphi} e^{-in\varphi} d\varphi = (-i)^n J_n(k_1\rho). \quad (9.8.6)$$

Для решения задачи дифракции нужно записать представление полей $\vec{E}^{(-)}$, $\vec{H}^{(-)}$ как суперпозицию подходящих решений уравнений (9.8.3) в цилиндрической системе координат и наложить граничное условие (9.8.4) при $\rho = a$.

Параллельная поляризация. Пусть на цилиндр падает плоская волна (9.8.1). Так как рассматриваемая задача является двумерной, то напряжённость дифрагированного электрического поля также будет иметь лишь z составляющую: $\vec{E}^{(-)} = \vec{z}_0 E^{(-)}$. При этом первое уравнение из (9.8.3) имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E^{(-)}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E^{(-)}}{\partial \varphi^2} + k_1^2 E^{(-)} = 0. \quad (9.8.7)$$

Для решения уравнения (9.8.7) применим метод разделения переменных (метод Фурье), в соответствии с которым представим функцию $E^{(-)}$ в виде:

$$E^{(-)}(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi).$$

Подставив последнее выражение для $E^{(-)}$ в уравнение Гельмгольца (9.8.7), получаем:

$$\frac{1}{R} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + k_1^2 \rho^2 = \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}. \quad (9.8.8)$$

Соотношение (9.8.8) представляет собой равенство двух независимых функций. Поэтому из (9.8.8) получаем два дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k_1^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi &= 0, \end{aligned} \quad (9.8.9)$$

где n — некоторая пока неизвестная постоянная.

Решение второго уравнения из (9.8.9) можно записать в виде

$$\Phi(\varphi) = A \sin n\varphi + B \cos n\varphi,$$

где A и B — произвольные постоянные. С учётом того, что при изменении угла φ на 2π функция $E^{(-)}(\rho, \varphi)$, а значит, и функция $\Phi(\varphi)$ не должна изменяться, следует, что n — целое число ($n = 0, \infty$).

Так как падающее электрическое поле (9.8.1), где $x = \rho \cos \varphi$, описывается чётной функцией переменной φ , поле $E^{(-)}$ также должно описываться чётной функцией. Следовательно, $A = 0$ и

$$\Phi(\varphi) = B \cos n\varphi.$$

Решение уравнения Бесселя (первое уравнение из (9.8.9)), описывающее поле бегущей в радиальном направлении волны, следует представлять функциями Ханкеля:

$$R(\rho) = C H_n^{(1)}(k_1 \rho) + D H_n^{(2)}(k_1 \rho),$$

где C, D — произвольные постоянные.

Так как функция $H_n^{(1)}(k_1 \rho)$ описывает цилиндрическую волну, распространяющуюся из бесконечности к оси цилиндра (при зависимости от времени в виде $\exp\{i\omega t\}$), а функция $H_n^{(2)}(k_1 \rho)$ — цилиндрическую волну, распространяющуюся от оси цилиндра в бесконечность вдоль ρ , для выполнения условия излучения

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + i k \Psi \right) \right\} = 0$$

необходимо в приведённом решении положить $C = 0$. Следовательно, решением уравнения (9.8.7), удовлетворяющим условию излучения, может служить функция

$$E_n^{(-)} = C_n^{\parallel} H_n^{(2)}(k_1 \rho) \cos n\varphi,$$

где C_n^{\parallel} — некоторая постоянная.

Так как выражение для $E_n^{(-)}$ удовлетворяет уравнению (9.8.7) при любом целом n поле дифракции, создаваемое токами, наведёнными на поверхности проводящего цилиндра, можно представить в виде бесконечной суммы всех возможных решений $E_n^{(-)}$ ($n = 0, \infty$):

$$E^{(-)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\parallel} H_n^{(2)}(k_1 \rho) \cos n\varphi. \quad (9.8.10)$$

В формуле (9.8.10) присутствуют неизвестные коэффициенты C_n^{\parallel} . Определим их с помощью граничного условия (9.8.4), которое перепишем в более удобном виде:

$$E^{(-)}(a, \varphi) = -A^{\parallel} \exp\{-ik_1 a \cos \varphi\}. \quad (9.8.11)$$

С учётом разложения (9.8.5) представим электрическое поле падающей волны при $\rho = a$ в виде:

$$A^{\parallel} \exp\{-ik_1 a \cos \varphi\} = A^{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k_1 a) \cos n\varphi. \quad (9.8.12)$$

Подставляя (9.8.10) и (9.8.12) в (9.8.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых $\cos n\varphi$, находим неизвестные коэффициенты C_n^{\parallel} :

$$C_n^{\parallel} = -A^{\parallel} (-i)^n \frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)}; \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (9.8.13)$$

С учётом (9.8.13) нетрудно записать окончательное выражение для продольного дифрагированного электрического поля в области $\rho > a$:

$$\vec{E}^{(-)} = -\bar{z}_0 A^{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)} H_n^{(2)}(k_1 \rho) \cos n\varphi. \quad (9.8.14)$$

Найдём напряжённость дифрагированного магнитного поля $\vec{H}^{(-)}$. Из уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат с учётом того, что $\vec{E}^{(-)} = \bar{z}_0 \vec{E}^{(-)}$, следует:

$$\vec{H}^{(-)} = \frac{i}{\omega \mu_a} \text{rot} \vec{E}^{(-)} = \frac{i}{\omega \mu_a} \left(\frac{\bar{\rho}_0}{\rho} \frac{\partial E^{(-)}}{\partial \varphi} - \bar{\varphi}_0 \frac{\partial E^{(-)}}{\partial \rho} \right). \quad (9.8.15)$$

Подставляя (9.8.14) в (9.8.15), получаем ($\rho > a$):

$$\begin{aligned} \vec{H}^{(-)} = & -\frac{i A^{\parallel}}{\omega \mu_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)} \times \\ & \times \left\{ \frac{\bar{\rho}_0 n}{\rho} H_n^{(2)}(k_1 \rho) \sin n\varphi + \bar{\varphi}_0 k_1 \frac{\partial H_n^{(2)}(k_1 \rho)}{\partial (k_1 \rho)} \cos n\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (9.8.16)$$

Перпендикулярная поляризация. Задачу дифракции в этом случае можно было бы решать аналогичным путём (как в случае параллельной поляризации). Однако проще воспользоваться принципом двойственности, согласно которому переход от параллельной поляризации к перпендикулярной происходит по схеме:

$$\varepsilon_a \leftrightarrow -\mu_a, \quad \vec{E} \leftrightarrow \vec{H}. \quad (9.8.17)$$

Применяя замены (9.8.17), включая замену символов $\parallel \rightarrow \perp$, из (9.8.14), (9.8.16) получаем:

$$\begin{aligned} \vec{H}^{(-)} = & -\bar{z}_0 A^{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J'_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)} H_n^{(2)}(k_1 \rho) \cos n\varphi, \\ \vec{E}^{(-)} = & \frac{i A^{\perp}}{\omega \varepsilon_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J'_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)} \times \\ & \times \left\{ \frac{\bar{\rho}_0}{\rho} n H_n^{(2)}(k_1 \rho) \sin n\varphi + \bar{\varphi}_0 k_1 \frac{\partial H_n^{(2)}(k_1 \rho)}{\partial (k_1 \rho)} \cos n\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (9.8.18)$$

Численные результаты. Рассмотрим некоторые численные результаты исследования дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем цилиндре. Запишем дифрагируемое поле в дальней зоне, воспользовавшись асимптоти-

ческим представлением для функций Ханкеля:

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left\{ -ix + \frac{i\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\} + O[x^{-3/2}],$$

с учётом которого поле дифракции для случая падения волны параллельной поляризации можно записать в виде простых формул:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(-)} &= -\bar{z}_0 A^{\parallel} R(\rho) \Phi(\varphi), \\ \vec{H}^{(-)} &= \bar{\varphi}_0 \frac{A^{\parallel}}{Z^{(1)}} R(\rho) \Phi(\varphi), \end{aligned} \quad (9.8.19)$$

где

$$\begin{aligned} R(\rho) &= \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 \rho}} e^{-i \left(k_1 \rho - \frac{\pi}{4} \right)}, \\ \Phi(\varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)} \cos n\varphi. \end{aligned}$$

При выводе учтено, что $H_n^{(2)'}(k_1 r) \approx -i H_n^{(2)}(k_1 r)$. На рис. 9.23 приведены результаты расчёта зависимости величины $|E_z|$ от угловой координаты φ для случая падения волны с параллельной поляризацией. Интересно отметить, что при радиусе цилиндра $a \approx 0.68\lambda$ вместо тени (там, где она должна быть с точки зрения геометрической оптики) наблюдается максимум излучения.

При оценке дифракционных процессов часто используются интегральные характеристики. Одной из них является параметр σ_{\perp} , называемый *эффективным поперечным сечением рассеяния*. Он определяется как отношение

$$\sigma_{\perp} = \frac{\langle P^{(-)} \rangle}{\langle S_0 \rangle} = \frac{1}{\langle S_0 \rangle} \oint_{\Sigma} \langle \vec{S}^{(-)} \rangle dS, \quad (9.8.20)$$

где $\langle S_0 \rangle$ — абсолютное значение средней плотности $\langle \vec{S}_0 \rangle$ потока мощности падающей волны, $\langle P^{(-)} \rangle$ представляет собой полный поток вектора $\langle \vec{S}^{(-)} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}^{(-)}, \vec{H}^{(-)*}]$ через произвольную поверхность Σ , охватывающую объект дифракции. Величину $\langle P^{(-)} \rangle$ называют *потоком рассеяния*. Заметим, что параметр «эффективное поперечное сечение рассеяния» вводят, как правило, для случая дифракции плоской однородной волны.

На рис. 9.24 приведены частотные зависимости σ_{\perp} / λ при различных значениях $k_1 a$, рассчитанные на основе формулы (9.8.20).

9.8.2. Дифракция плоской волны на круговом диэлектрическом цилиндре. Геометрия задачи приведена на рис. 9.22. Бесконечный круговой диэлектрический цилиндр с проницаемостями $\epsilon^{(2)}$, $\mu^{(2)}$ расположен в среде с проницаемостями $\epsilon^{(1)}$, $\mu^{(1)}$ и ориентирован вдоль оси OZ . Индексами 1 и 2 будем обозначать и другие параметры, относящиеся к соответствующим средам. Падающая волна \vec{E}_0 , \vec{H}_0 распространяется нормально к оси цилиндра. Ниже, как и в случае дифракции волны на идеально проводящем цилиндре, рассмотрим два варианта поляризации падающей волны относительно оси цилиндра: параллельная поляризация (9.8.1) и перпендикулярная поляризация (9.8.2). Требуется найти внутреннее ($\vec{E}^{(+)}$, $\vec{H}^{(+)}$) и внеш-

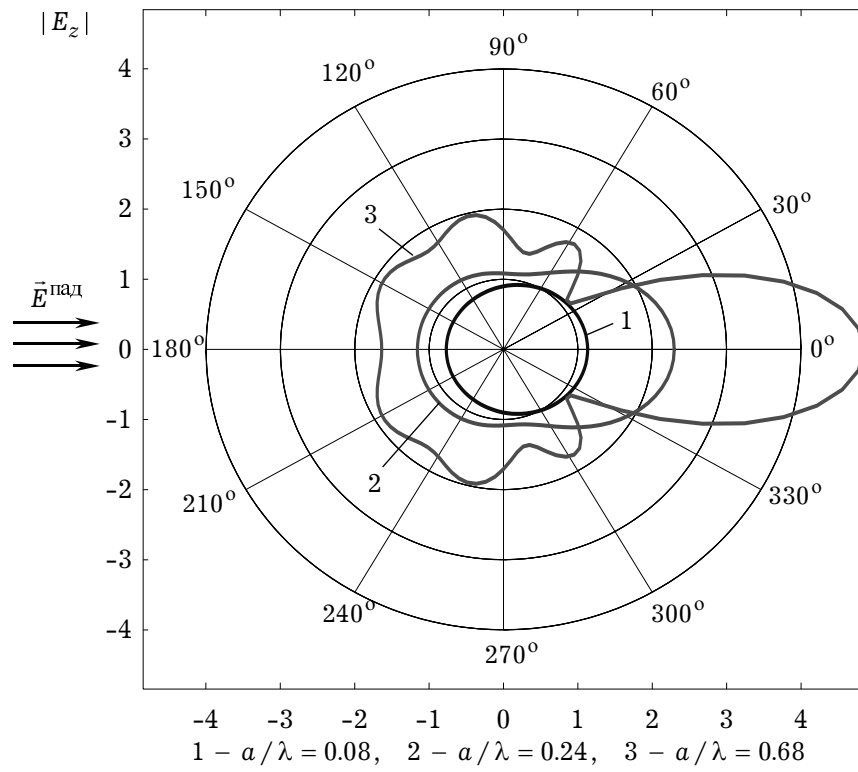


Рис. 9.23

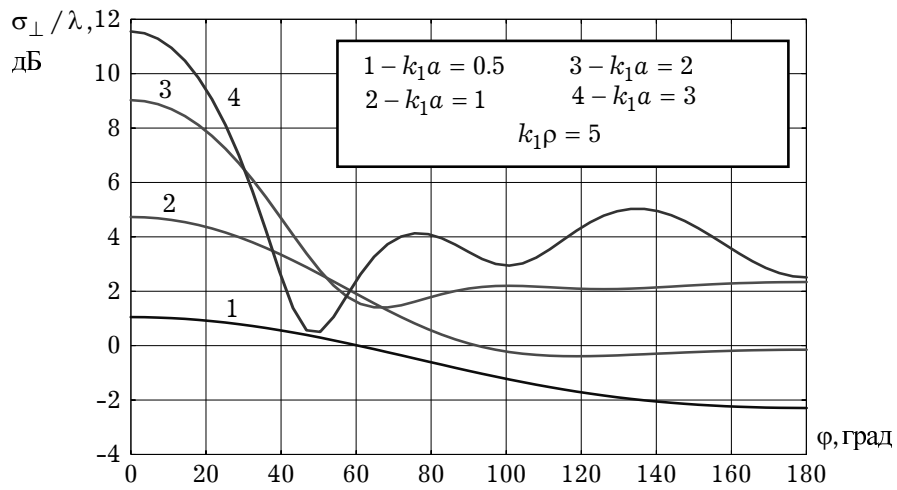


Рис. 9.24

нее ($\vec{E}^{(-)}$, $\vec{H}^{(-)}$) поля дифракции. В случае дифракции на идеально проводящем цилиндре внутреннее поле дифракции равно нулю: $\vec{E}^{(+)} = \vec{H}^{(+)} = 0$.

Задача дифракции плоской волны на круговом диэлектрическом цилиндре решается методом частичных областей, в соответствии с которым нужно получить представления полей $\vec{E}^{(+)}$, $\vec{H}^{(+)}$ и $\vec{E}^{(-)}$, $\vec{H}^{(-)}$ в виде суперпозиций решений уравнений Гельмгольца в цилиндрических координатах и подчинить их граничным условиям на поверхности цилиндра ($\rho = a$):

$$\begin{aligned} [\vec{E}_0 + \vec{E}^{(-)}, \vec{n}_0] &= [\vec{E}^{(+)}, \vec{n}_0], \\ [\vec{H}_0 + \vec{H}^{(-)}, \vec{n}_0] &= [\vec{H}^{(+)}, \vec{n}_0], \end{aligned} \quad (9.8.21)$$

где \vec{n}_0 — внешняя по отношению к цилиндру нормаль, и условию излучения на бесконечности. Заметим, что представления для внешнего поля дифракции были найдены в разделе 9.8.1.

Параллельная поляризация. Согласно (9.8.1) и (9.8.5), для падающего поля имеем:

$$\vec{E}_0 = \vec{z}_0 A^{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k_1 \rho) e^{in\varphi}, \quad \rho > a, \quad (9.8.22)$$

$$\vec{H}_0 = -\frac{A^{\parallel}}{Z^{(1)}} (\bar{\rho}_0 \sin \varphi + \bar{\varphi}_0 \cos \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k_1 \rho) e^{in\varphi}, \quad \rho > a. \quad (9.8.23)$$

При записи в (9.8.23) было учтено, что $\vec{y}_0 = \bar{\rho}_0 \sin \varphi + \bar{\varphi}_0 \cos \varphi$. Выражение для магнитного поля удобнее представить в другой форме:

$$\vec{H}_0 = \frac{iA^{\parallel}}{\omega \mu_a^{(1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \left[\bar{\rho}_0 \frac{in}{\rho} J_n(k_1 \rho) - \bar{\varphi}_0 k_1 J'_n(k_1 \rho) \right] e^{in\varphi}, \quad (9.8.24)$$

$J'_n(k_1 \rho)$ обозначает производную по аргументу. Формула (9.8.24) получается из соотношения (9.8.15) (индекс «(-)» меняется на «0»), в которое подставляется (9.8.22). Нетрудно убедиться что ряды (9.8.23) и (9.8.24) эквивалентны.

Внешнее поле дифракции $\vec{E}^{(-)}$, $\vec{H}^{(-)}$ находится путём решения уравнений Гельмгольца (9.8.3) методом разделения переменных, подробно описанным в разделе 9.8.1. Внешнее электрическое поле дифракции в случае идеально проводящего цилиндра было представлено в виде разложения (9.8.10), которое в комплексной форме запишется как

$$\vec{E}^{(-)} = \vec{z}_0 A^{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n C_n^{\parallel} H_n^{(2)}(k_1 \rho) e^{in\varphi}, \quad \rho > a, \quad (9.8.25)$$

где C_n^{\parallel} — неизвестные постоянные коэффициенты. Магнитное поле \vec{H} находится с помощью формулы (9.8.15):

$$\begin{aligned} \vec{H}^{(-)} &= \frac{iA^{\parallel}}{\omega \mu_a^{(1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n C_n^{\parallel} \times \\ &\times \left[\bar{\rho}_0 \frac{in}{\rho} H_n^{(2)}(k_1 \rho) - \bar{\varphi}_0 k_1 H_n^{(2)'}(k_1 \rho) \right] e^{in\varphi}, \quad \rho > a. \end{aligned} \quad (9.8.26)$$

Получим теперь представления для внутреннего поля дифракции $\vec{E}^{(+)}$, $\vec{H}^{(+)}$. Будем исходить из уравнений Гельмгольца для области с параметрами $\epsilon^{(2)}$, $\mu^{(2)}$, ограниченной цилиндрической поверхностью радиуса a . Метод разделения переменных, при котором функция $E^{(+)} = R(\rho)\Phi(\varphi)$ ($\vec{E}^{(+)} = \vec{z}_0 E^{(+)}$) приводит к решению двух дифференциальных уравнений аналогичных (9.8.9). Решение уравнения Бесселя (первое уравнение из (9.8.9)) для внутренней области записывается в виде:

$$R(\rho) = C J_n(k_2 \rho) + D Y_n(k_2 \rho),$$

где $k_2 = k_0 \sqrt{\epsilon^{(2)} \mu^{(2)}}$, C , D — произвольные постоянные. С учётом поведения функций $Y_n(x)$ (при $x \rightarrow 0$ $Y_n(x) \rightarrow -\infty$) положим $D \equiv 0$, так как электрическое поле $E^{(+)}(\rho, \varphi)$, создаваемое источниками конечной мощности (а значит и $R(\rho)$), при $\rho = 0$ должно быть конечным.

Решение второго уравнения из (9.8.9) представим в виде

$$\Phi(\varphi) = A e^{in\varphi},$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \infty$. Целыми значения n принимаются из тех соображений, что функция $E^{(+)}(\rho, \varphi)$ (а значит и $\Phi(\varphi)$) не должна изменяться при изменении угла φ на 2π .

Представляя внутреннее поле $E^{(+)}(\rho, \varphi)$ в виде суперпозиции всех возможных решений уравнений (9.8.9) при различных n , получим

$$\vec{E}^{(+)} = \vec{z}_0 A^{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n B_n^{\parallel} J_n(k_2 \rho) e^{in\varphi}, \quad \rho < a, \quad (9.8.27)$$

где B_n^{\parallel} — неизвестные постоянные.

Магнитное поле $\vec{H}^{(+)}$ находится с помощью формулы (9.8.15):

$$\begin{aligned} \vec{H}^{(+)} &= \frac{i A^{\parallel}}{\omega \mu_a^{(2)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n B_n^{\parallel} \times \\ &\times \left[\vec{\rho}_0 \frac{in}{\rho} J_n(k_2 \rho) - \vec{\varphi}_0 k_2 J'_n(k_2 \rho) \right] e^{in\varphi}, \quad \rho < a. \end{aligned} \quad (9.8.28)$$

Граничные условия (9.8.21) в интервале $\varphi \in [0, 2\pi]$ в данном случае принимают вид:

$$\begin{aligned} E_{0z} + E_z^{(-)} &= E_z^{(+)}, \\ H_{0\varphi} + H_{\varphi}^{(-)} &= H_{\varphi}^{(+)}, \quad \rho = a. \end{aligned} \quad (9.8.29)$$

Подставляя в (9.8.29) разложения (9.8.25), (9.8.26), (9.8.27) и (9.8.28), с использованием условия ортогональности функций $\{\exp(in\varphi)\}$ на интервале $\varphi \in [0, 2\pi]$ приходим к следующим алгебраическим уравнениям:

$$\begin{aligned} B_n^{\parallel} J_n(k_2 a) - C_n^{\parallel} H_n^{(2)}(k_1 a) &= J_n(k_1 a), \\ B_n^{\parallel} \frac{k_2}{\mu_a^{(2)}} J'_n(k_2 a) - C_n^{\parallel} \frac{k_1}{\mu_a^{(1)}} H_n^{(2)'}(k_1 a) &= \frac{k_1}{\mu_a^{(1)}} J'_n(k_1 a). \end{aligned} \quad (9.8.30)$$

Решая систему алгебраических уравнений (9.8.30), находим выражения для коэффициентов B_n^{\parallel} , C_n^{\parallel} :

$$\begin{aligned} B_n^{\parallel} &= \frac{J_n(k_1 a) H_n^{(2)'}(k_1 a) - J_n'(k_1 a) H_n^{(2)}(k_1 a)}{J_n(k_2 a) H_n^{(2)'}(k_1 a) - \frac{Z^{(1)}}{Z^{(2)}} J_n'(k_2 a) H_n^{(2)}(k_1 a)} , \\ C_n^{\parallel} &= \frac{-J_n(k_2 a) J_n'(k_1 a) + \frac{Z^{(1)}}{Z^{(2)}} J_n'(k_2 a) J_n(k_1 a)}{J_n(k_2 a) H_n^{(2)'}(k_1 a) - \frac{Z^{(1)}}{Z^{(2)}} J_n'(k_2 a) H_n^{(2)}(k_1 a)} . \end{aligned} \quad (9.8.31)$$

Перпендикулярная поляризация. Воспользовавшись принципом двойственности (9.8.17), получаем решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на диэлектрическом круговом цилиндре для случая, когда вектор падающей волны \vec{H}_0 параллелен оси цилиндра:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(+)} &= -\frac{i A^{\perp}}{\omega \varepsilon_a^{(2)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n B_n^{\perp} \times \\ &\times \left[\bar{\rho}_0 \frac{i n}{\rho} J_n(k_2 \rho) - \bar{\varphi}_0 k_2 J_n'(k_1 \rho) \right] e^{i n \varphi}, \quad \rho < a, \end{aligned} \quad (9.8.32)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}^{(+)} &= \bar{z}_0 A^{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n B_n^{\perp} J_n(k_2 \rho) e^{i n \varphi}, \quad \rho < a, \\ \vec{E}^{(-)} &= -\frac{i A^{\perp}}{\omega \varepsilon_a^{(1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n C_n^{\perp} \times \\ &\times \left[\bar{\rho}_0 \frac{i n}{\rho} H_n^{(2)}(k_1 \rho) - \bar{\varphi}_0 k_1 H_n^{(2)'}(k_1 \rho) \right] e^{i n \varphi}, \quad \rho > a, \\ \vec{H}^{(-)} &= \bar{z}_0 A^{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n C_n^{\perp} H_n^{(2)}(k_1 \rho) e^{i n \varphi}, \quad \rho > a, \end{aligned} \quad (9.8.33)$$

где коэффициенты B_n^{\perp} и C_n^{\perp} в соответствии с (9.8.31) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_n^{\perp} &= \frac{J_n(k_1 a) H_n^{(2)'}(k_1 a) - J_n'(k_1 a) H_n^{(2)}(k_1 a)}{J_n(k_2 a) H_n^{(2)'}(k_1 a) - \frac{Z^{(2)}}{Z^{(1)}} J_n'(k_2 a) H_n^{(2)}(k_1 a)} , \\ C_n^{\perp} &= \frac{-J_n(k_2 a) J_n'(k_1 a) + \frac{Z^{(2)}}{Z^{(1)}} J_n'(k_2 a) J_n(k_1 a)}{J_n(k_2 a) H_n^{(2)'}(k_1 a) - \frac{Z^{(2)}}{Z^{(1)}} J_n'(k_2 a) H_n^{(2)}(k_1 a)} . \end{aligned} \quad (9.8.34)$$

Численные результаты. На рис. 9.25–9.26 приведены некоторые численные результаты решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны параллельной поляризации на круговом диэлектрическом цилиндре, расположенном в воздухе ($\varepsilon_a^{(1)} = \varepsilon_0$, $\mu_a^{(1)} = \mu_0$).

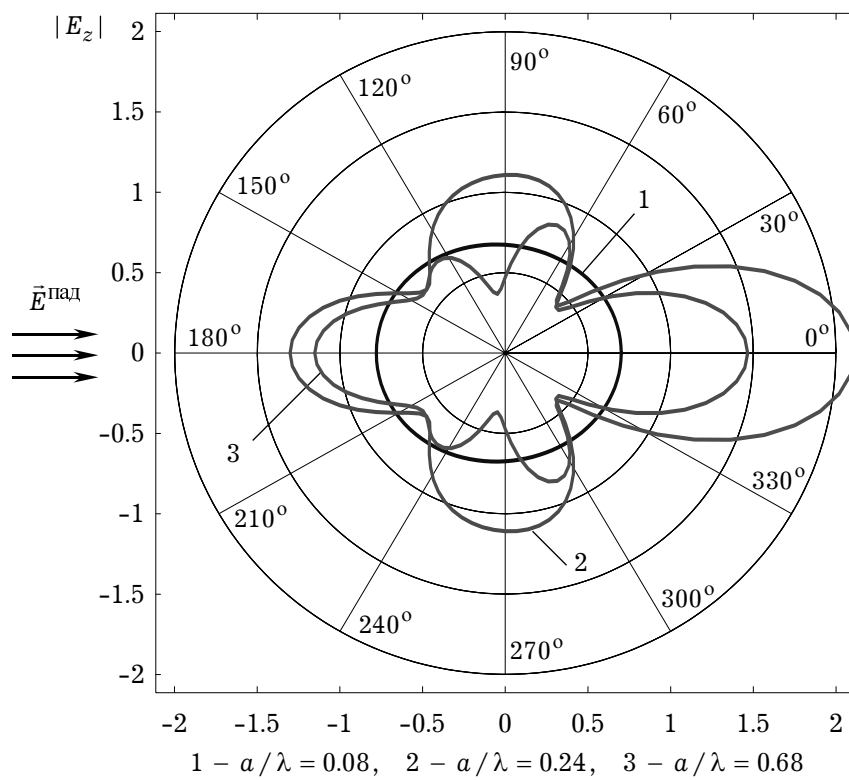


Рис. 9.25

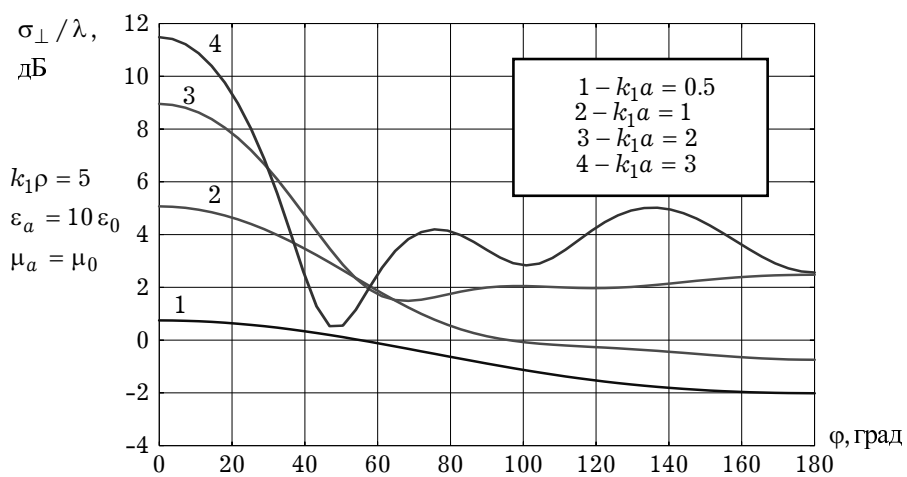


Рис. 9.26

9.8.3. Дифракция плоской волны на круговом идеально-магнитном цилиндре.

Полученные в предыдущем разделе выражения для дифрагированного поля в виде бесконечных рядов по функциям $\exp\{in\varphi\}$ (9.8.25), (9.8.26), (9.8.27), (9.8.28) и (9.8.32), (9.8.33) с коэффициентами (9.8.31), (9.8.34) можно использовать при $k_0 \sqrt{\varepsilon^{(2)}} \mu^{(2)} < 10$. При увеличении значения диэлектрической проницаемости цилиндра $\varepsilon^{(2)}$, а также его радиуса a сходимость рядов, представляющих дифрагированное поле быстро падает. Поэтому при больших значениях $\varepsilon^{(2)}$ даже для малых радиусов диэлектрического цилиндра указанными формулами пользоваться нецелесообразно. С другой стороны, диэлектрическое тело с большим значением диэлектрической проницаемости в задачах дифракции можно рассматривать в приближении «магнитной стенки», то есть поверхности, на которой тангенциальное магнитное поле должно быть равным нулю. Это приближение соответствует цилиндру, выполненному из идеального магнитного проводника. Рассмотрим дифракцию плоской волны на круговом идеально-магнитном цилиндре (рис. 9.22), на поверхности которого выполняется граничное условие:

$$\vec{H}_\tau = 0 \quad \text{при } \rho = a, \quad (9.8.35)$$

где

$$\vec{H}_\tau = \vec{H}_{0\tau} + \vec{H}_\tau^{(-)}.$$

Так же, как и в предыдущих задачах, рассмотрим два варианта поляризации падающей волны, которой соответствуют поля \vec{E}_0, \vec{H}_0 .

Параллельная поляризация. С учётом граничного условия (9.8.35) нетрудно убедиться, что для полей $\vec{E}^{(-)}, \vec{H}^{(-)}$ справедливы формулы (9.8.25) и (9.8.26), в которых постоянные коэффициенты C_n^{\parallel} имеют другой вид:

$$C_n^{\parallel} = -\frac{J'_n(k_1 a)}{H_n^{(2)'}(k_1 a)}.$$

Нетрудно записать дифрагированное поле и в дальней зоне, воспользовавшись так же, как в (9.8.19), асимптотическим представлением при $\rho \rightarrow \infty$ функций Ханкеля $H_n^{(2)}(k_1 a)$:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(-)} &= \vec{z}_0 A^{\parallel} R(\rho) \Phi(\varphi), \\ \vec{H}^{(-)} &= -i \vec{\varphi}_0 \frac{A^{\parallel}}{Z^{(1)}} R(\rho) \Phi(\varphi), \end{aligned} \quad (9.8.36)$$

где

$$\begin{aligned} R(\rho) &= \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 \rho}} e^{-i\left(k_1 \rho - \frac{\pi}{4}\right)}, \\ \Phi(\varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{\parallel} e^{in\varphi}. \end{aligned} \quad (9.8.37)$$

Перпендикулярная поляризация. Для случая перпендикулярной поляризации (вектор \vec{H}_0 параллелен оси цилиндра) выражения для дифрагированных полей $\vec{E}^{(-)}$ и $\vec{H}^{(-)}$, получаемые из (9.8.25), (9.8.26) с использованием принципа двойствен-

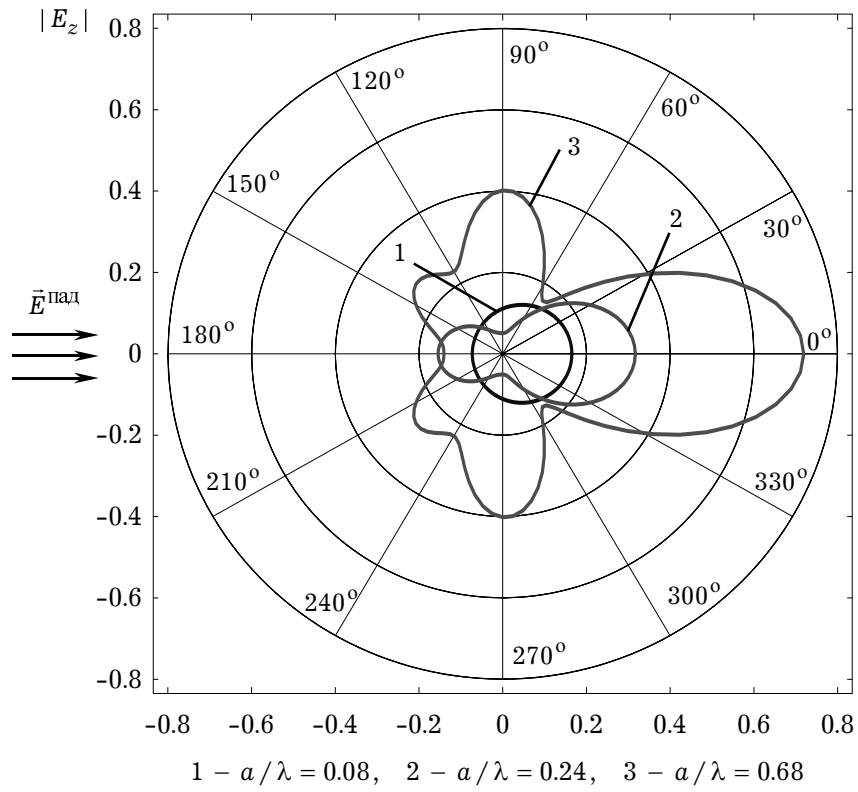


Рис. 9.27

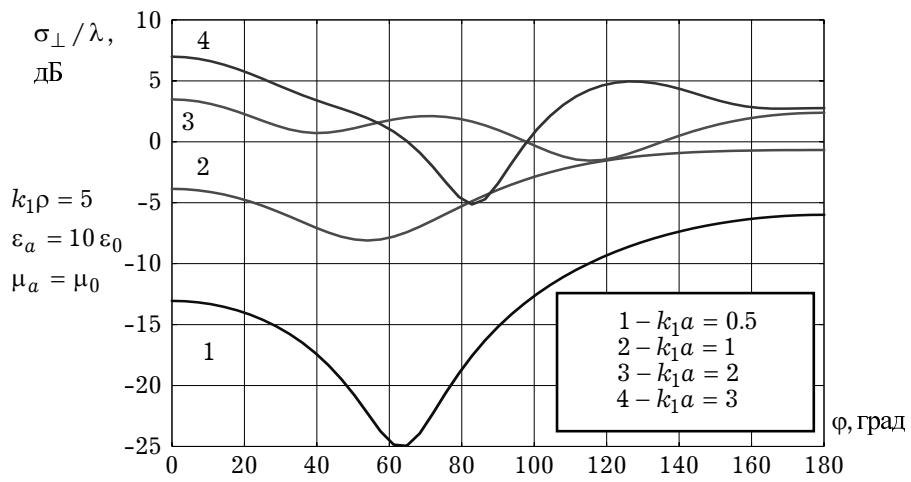


Рис. 9.28

ности, имеют вид:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{(-)} &= -\frac{i A^\perp}{\omega \varepsilon_a^{(1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n C_n^\perp \times \\ &\times \left[\bar{\rho}_0 \frac{in}{\rho} H_n^{(2)}(k_1 \rho) - \bar{\varphi}_0 k_1 H_n^{(2)'}(k_1 \rho) \right] e^{in\varphi}, \\ \vec{H}^{(-)} &= \bar{z}_0 A^\perp \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n C_n^\perp H_n^{(2)}(k_1 \rho) e^{in\varphi},\end{aligned}\tag{9.8.38}$$

где коэффициенты C_n^\perp выражаются следующим образом:

$$C_n^\perp = -\frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)}.$$

Для дифрагированного поля в дальней зоне выражения для полей (9.8.38) приобретают вид:

$$\vec{H}^{(-)} = \bar{z}_0 A^\perp R(\rho) \Phi(\varphi), \quad \vec{E}^{(-)} = -i \bar{\varphi}_0 Z^{(1)} R(\rho) \Phi(\varphi),\tag{9.8.39}$$

где функции $R(\rho)$ и $\Phi(\varphi)$ определяются соотношениями (9.8.37) с заменой $C_n^\parallel \rightarrow C_n^\perp$.

На рис. 9.27 и 9.28 представлены результаты численного моделирования задачи дифракции электромагнитной волны параллельной поляризации на идеально-магнитном круговом цилиндре, полученные с использованием формул (9.8.36), (9.8.37). Значения параметров приведены на рисунках.

Глава

10

Электромагнитные волны в анизотропных средах

10.1. Общие закономерности анизотропных сред	426
10.2. Распространение плоских гармонических волн в кристаллических средах	435
10.3. Распространение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме	439
10.4. Макроскопические модели анизотропных магнитных сред	446
10.5. Нормальные волны в безграничной намагниченной ферритовой среде	456
10.6. Магнитостатические и спиновые волны в неограниченной изотропной среде	461
10.7. Электромагнитные волны в киральных средах	467

) Символом «» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 10. Электромагнитные волны в анизотропных средах

10.1. Общие закономерности анизотропных сред

10.1.1. Уравнения Максвелла. Макроскопическая электродинамика анизотропных сред основывается на уравнениях Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} + \vec{J}_{\text{ст}}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{div} \vec{D} &= R + R_{\text{ст}}, \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

причем $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}}$, $\mu_0 \vec{H} = \vec{B} - \vec{M}$, где $\vec{\mathcal{P}}$ — вектор электрической поляризации, \vec{M} — вектор намагниченности; сторонние плотности тока $\vec{J}_{\text{ст}}$ и заряда $R_{\text{ст}}$ предполагаются заданными.

Величины \vec{J} и R связаны между собой уравнением непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0.$$

На границах раздела двух анизотропных сред выполняются граничные условия, которые являются следствиями уравнений Максвелла в интегральной форме. Если обозначить верхним индексом 1 физические величины в одной из сред, а индексом 2 — в другой и ввести единичный вектор нормали к граничной поверхности \vec{n}_0 (направленный из второй среды в первую), граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} [\vec{n}_0, \vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)}] &= 0, & (\vec{D}^{(1)} - \vec{D}^{(2)}) \vec{n}_0 &= \xi, \\ [\vec{n}_0, \vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}] &= \vec{\eta}, & (\vec{B}^{(1)} - \vec{B}^{(2)}) \vec{n}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

где $\vec{\eta}$ и ξ — соответственно, поверхностные плотности тока и заряда на границе раздела двух сред.

Если вторая среда является идеально проводящей, поле в ней отсутствует и граничные условия (10.1.2) принимают вид:

$$\begin{aligned} [\vec{n}_0, \vec{E}^{(1)}] &= 0, & [\vec{n}_0, \vec{H}^{(1)}] &= \vec{\eta}, \\ (\vec{B}^{(1)}, \vec{n}_0) &= 0, & (\vec{D}^{(1)}, \vec{n}_0) &= \xi. \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

Можно полагать, что граничные условия (10.1.3) приближённо выполняются на поверхности металла.

Таким образом, электрическое поле в анизотропной среде нормально, а вектор магнитной индукции (но, вообще говоря, не магнитное поле) касателен к поверхности металла.

10.1.2. Уравнения для комплексных амплитуд. Для гармонических полей удобно перейти к комплексным амплитудам векторов:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}], & \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}], \\ \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{D}(\vec{r})e^{i\omega t}], & \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{B}(\vec{r})e^{i\omega t}], \\ \vec{\mathcal{J}}_{\text{ст}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r})e^{i\omega t}], & R_{\text{ст}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\rho_{\text{ст}}(\vec{r})e^{i\omega t}],\end{aligned}\quad (10.1.4)$$

где \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} , $\vec{j}_{\text{ст}}$, $\rho_{\text{ст}}$ — комплексные амплитуды соответствующих величин. С учётом (10.1.4) система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд записывается как

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E} &= -i\omega \vec{B}, & \text{div } \vec{B} &= 0, \\ \text{rot } \vec{H} &= i\omega \vec{D} + \vec{j} + \vec{j}_{\text{ст}}, & \text{div } \vec{D} &= \rho + \rho_{\text{ст}},\end{aligned}\quad (10.1.5)$$

а закон сохранения заряда имеет вид:

$$\text{div } \vec{j} + i\omega \rho = 0. \quad (10.1.6)$$

Уравнение (10.1.6) называют также *уравнением непрерывности*.

Для анизотропных сред электрическая индукция \vec{D} не зависит от \vec{H} , а магнитная индукция \vec{B} не зависит от \vec{E} . Тогда для линейных анизотропных сред можно записать:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon} \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{\mu} \vec{H}, \quad (10.1.7)$$

где величины $\vec{\epsilon}$ и $\vec{\mu}$ в общем случае являются тензорами второго ранга с комплексными компонентами. Для плотности тока проводимости \vec{j} справедлив закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \vec{\sigma} \vec{E} \quad (10.1.8)$$

где $\vec{\sigma}$ — тензор проводимости.

Исключая векторы \vec{B} и \vec{D} из уравнений Максвелла (10.1.5) с помощью соотношения (10.1.6), материальных уравнений (10.1.7) и (10.1.8), получаем

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E} + i\omega \mu_0 \vec{\mu} \vec{H} &= 0, & \text{div } (\mu_0 \vec{\mu} \vec{H}) &= 0, \\ \text{rot } \vec{H} - i\omega \epsilon_0 \vec{\epsilon}_k \vec{E} &= \vec{j}_{\text{ст}}, & \text{div } (\epsilon_0 \vec{\epsilon}_k \vec{E}) &= \rho_{\text{ст}},\end{aligned}\quad (10.1.9)$$

где

$$\vec{\epsilon}_k = \vec{\epsilon} - \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \vec{\sigma} \quad (10.1.10)$$

тензор относительной комплексной диэлектрической проницаемости среды.

Из уравнений (10.1.9) нетрудно получить дифференциальные уравнения второго порядка для векторов \vec{E} и \vec{H} :

$$\text{rot}(\vec{\mu}^{-1} \text{rot } \vec{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon} \vec{E} = -i\omega \mu_0 \vec{j}_{\text{ст}}, \quad (10.1.11)$$

$$\text{rot}(\vec{\epsilon}_k^{-1} \text{rot } \vec{H}) - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\mu} \vec{H} = \text{rot}(\vec{\epsilon}_k^{-1} \vec{j}_{\text{ст}}), \quad (10.1.12)$$

где $\vec{\mu}^{-1}$ и $\vec{\epsilon}_k^{-1}$ — тензоры, обратные тензорам $\vec{\mu}$ и $\vec{\epsilon}$; $\vec{\epsilon}_k$ определяется формулой (10.1.10).

10.1.3. Общие свойства тензора комплексной диэлектрической проницаемости.

Математическое описание особенностей распространения электромагнитных волн в анизотропной среде определяется специфической формой материальных уравнений, дополняющих уравнения (10.1.11), (10.1.12). Для гармонических во времени полей без учета пространственной дисперсии они имеют вид:

$$\vec{D}(\omega, \vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{\varepsilon}(\omega) \vec{E}(\omega, \vec{r}), \quad \vec{B}(\omega, \vec{r}) = \mu_0 \vec{\mu}(\omega) \vec{H}(\omega, \vec{r}). \quad (10.1.13)$$

Обычно свойства сред таковы, что тензором является либо $\vec{\varepsilon}(\omega)$, либо $\vec{\mu}(\omega)$. Поэтому материальные уравнения для анизотропной среды записываются в виде:

$$D_i(\omega, \vec{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \vec{r}), \quad B_i(\omega, \vec{r}) = \mu_0 \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega, \vec{r}), \quad (i = x, y, z), \quad (10.1.14)$$

где

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij} + \int_0^\infty \chi_{ij}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad \text{а } \mu(\omega) \text{ — скаляр,}$$

или в виде

$$B_i(\omega, \vec{r}) = \mu_0 \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega, \vec{r}), \quad D_i(\omega, \vec{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \vec{r}), \quad (10.1.15)$$

где

$$\mu_{ij}(\omega) = \delta_{ij} + \int_0^\infty \alpha_{ij}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad \text{а } \varepsilon(\omega) \text{ — скаляр.}$$

В (10.1.14) χ_{ij} — компоненты тензора электрической восприимчивости среды; в (10.1.15) α_{ij} — компоненты тензора магнитной восприимчивости; δ_{ij} — символ Кронекера.

Ниже рассмотрим свойства тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$, вытекающие из общих принципов физики. В частности, так как тензор линейного отклика

$$\varepsilon_{ij}(t - t'; \vec{r} - \vec{r}') = \delta_{ij} \delta(t - t') \delta(\vec{r} - \vec{r}') + \chi_{ij}(t - t'; \vec{r} - \vec{r}')$$

связывает вещественные векторы \vec{D} и \vec{E}

$$D_i(t, \vec{r}) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{ij}(t, t'; \vec{r}, \vec{r}') E_j(t', \vec{r}') d\vec{r}',$$

то тензор $\varepsilon_{ij}(t, \vec{r})$ также должен быть вещественным тензором. Отсюда следует, что его Фурье-образ

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \int_0^\infty dt \int_0^\infty d\vec{r} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \varepsilon_{ij}(t, \vec{r}) d\vec{r} \quad (10.1.16)$$

как функция вещественных переменных ω и \vec{k} удовлетворяет условию

$$\varepsilon_{ij}^*(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ij}(-\omega, -\vec{k}) \quad (10.1.17)$$

или

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon'_{ij}(-\omega, -\vec{k}), \quad \varepsilon''_{ij}(\omega, \vec{k}) = -\varepsilon''_{ij}(-\omega, -\vec{k}). \quad (10.1.18)$$

Формулы (10.1.16)-(10.1.18) дают Фурье-образы параметров тензорных сред, описываемых соотношениями (10.1.13)-(10.1.16).

В теории флуктуаций электромагнитных полей в статистической физике доказываются свойства симметрии тензора ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, -\vec{k}). \quad (10.1.19)$$

Это соотношения Онсагера, которые следуют из инвариантности при $t \rightarrow -t$ уравнений движения микрочастиц. Такая инвариантность означает, что при изменении направления движения всех частиц на обратное при одновременном изменении знака магнитного поля частицы в обратном направлении будут двигаться по своим прежним траекториям.

Таким образом, тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ является симметричным только при $\vec{k} = 0$ или при отсутствии пространственной дисперсии, когда $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\omega)$.

Анизотропные среды подразделяются на *негиротропные* и *гиротропные*.

1. У *негиротропной* среды имеется центр симметрии, так что направления \vec{k} и $-\vec{k}$ эквивалентны, то есть

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, -\vec{k}). \quad (10.1.20)$$

Для такой среды тензор ε_{ij} является симметричным по индексам i и j для всех ω и \vec{k} (это свойство следует из соотношений Онсагера (10.1.19)):

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\vec{k}). \quad (10.1.21)$$

2. У *гиротропной* среды имеется, по крайней мере, одно направление для \vec{k} , не эквивалентное противоположному, то есть в отличие от (10.1.20):

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \neq \varepsilon_{ij}(\omega, -\vec{k}). \quad (10.1.22)$$

Из (10.1.22) следует, что гиротропной может быть только среда без центра симметрии. Обратное утверждение в общем случае, несправедливо: не всякая среда без центра симметрии является гиротропной.

При отсутствии пространственной дисперсии из соотношения Онсагера (10.1.19) автоматически следует соотношение симметрии (10.1.21) и такая среда является негиротропной. Таким образом, гиротропными могут быть только среды с пространственной дисперсией.

Все сказанное выше относится к случаю отсутствия внешнего постоянного магнитного поля \vec{H}_0 . Если среда находится во внешнем постоянном магнитном поле \vec{H}_0 , то соотношение Онсагера для неё записывается следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}, \vec{H}_0) \neq \varepsilon_{ji}(\omega, -\vec{k}, -\vec{H}_0). \quad (10.1.23)$$

Из (10.1.23) следует, что тензор несимметричен даже при отсутствии пространственной дисперсии. Гиротропия среды, обусловленная внешним постоянным магнитным полем \vec{H}_0 , называется *магнитной гиротропией*. Гиротропия среды с пространственной дисперсией, имеющая место при наличии \vec{H}_0 , называется *естественной гиротропией*.

10.1.4. Общие закономерности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах. Рассмотрим анизотропную немагнитную среду ($\mu = 1$) с материальными уравнениями

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{\varepsilon} \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (10.1.24)$$

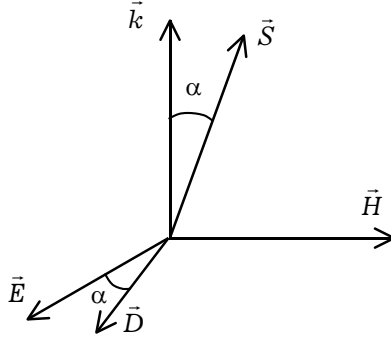


Рис. 10.1

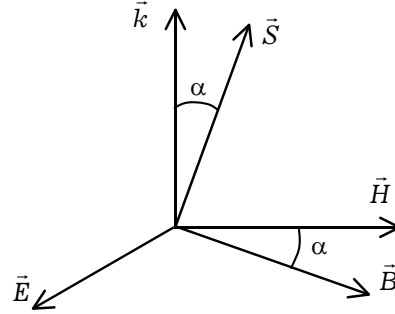


Рис. 10.2

Однородные уравнения Максвелла (без источников) для гармонических волн в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= i \omega \vec{D}, & \operatorname{div} \vec{D} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -i \omega \mu_0 \vec{H}, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (10.1.25)$$

Исключая из системы (10.1.25) магнитное поле, с учетом материальных уравнений (10.1.24), получаем уравнение Гельмгольца:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon} \vec{E} = 0. \quad (10.1.26)$$

В дальнейшем будем рассматривать распространение плоских гармонических волн (все величины пропорциональны $\exp\{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}\}$). Для таких волн система уравнений (10.1.25) принимает вид

$$\begin{aligned} [\vec{k}, \vec{H}] &= -\omega \vec{D}, & (\vec{k}, \vec{D}) &= 0, \\ [\vec{k}, \vec{E}] &= \omega \mu_0 \vec{H}, & (\vec{k}, \vec{H}) &= 0, \end{aligned} \quad (10.1.27)$$

а уравнение (10.1.26) записывается следующим образом:

$$[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{E}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon} \vec{E} = 0. \quad (10.1.28)$$

Из системы уравнений (10.1.27) следует, что векторы \vec{k} , \vec{D} , \vec{E} лежат в одной плоскости, но вектор \vec{E} не коллинеарен вектору \vec{D} . Взаимное расположение векторов \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{k} показано на рис. 10.1. Векторы \vec{D} , \vec{H} лежат в плоскости фронта волны, определяемой уравнением $(\vec{k}, \vec{r}) = \text{const}$, а вектор \vec{E} не лежит в этой плоскости. Так как направление переноса энергии определяется вектором Умова-Пойнтинга $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$, то в анизотропной среде направление плотности потока энергии не совпадает с направлением волнового вектора \vec{k} . Следовательно, не совпадают направления групповой и фазовой скоростей. Векторы \vec{E} , \vec{D} , \vec{k} , \vec{S} компланарны (лежат в одной плоскости) и ортогональны вектору \vec{H} (см. рис. 10.1).

Если тензором является магнитная проницаемость $\vec{\mu}$, а ϵ — скалярная величина, то

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{\mu} \vec{H} \quad (10.1.29)$$

и уравнения Максвелла для плоских волн принимают вид:

$$\begin{aligned} [\vec{k}, \vec{H}] &= -\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, & (\vec{k}, \vec{E}) &= 0, \\ [\vec{k}, \vec{E}] &= \omega \vec{B}, & (\vec{k}, \vec{B}) &= 0. \end{aligned} \quad (10.1.30)$$

Уравнение Гельмгольца с учётом (10.1.29), (10.1.30) записывается следующим образом:

$$[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{H}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \vec{H} = 0. \quad (10.1.31)$$

В случае анизотропии по магнитному полю, как следует из соотношений (10.1.30), векторы \vec{k} , \vec{S} , \vec{B} , \vec{H} компланарны и ортогональны вектору \vec{E} (рис. 10.2). По своему виду уравнение (10.1.31) совпадает с (10.1.28).

10.1.5. Дисперсионные уравнения для анизотропной среды. В анизотропных средах помимо волнового вектора \vec{k} вводят лучевой вектор \vec{s} , направление которого совпадает с направлением вектора Умова-Пойнтинга \vec{S} , а величина определяется из соотношения

$$(\vec{s}, \vec{n}) = 1, \quad (10.1.32)$$

где $\vec{n} = c\vec{k}/\omega$, ($n = |\vec{n}|$) — показатель преломления.

С учётом (10.1.32) вместо уравнений (10.1.27) можно записать ($\vec{s} \perp \vec{E}$, $\vec{s} \perp \vec{H}$):

$$\begin{aligned} c[\vec{s}, \vec{D}] &= \vec{H}, & (\vec{s}, \vec{E}) &= 0, \\ c\mu_0[\vec{s}, \vec{H}] &= -\vec{E}, & (\vec{s}, \vec{H}) &= 0. \end{aligned} \quad (10.1.33)$$

Материальное уравнение, соответствующее системе (10.1.33), имеет вид:

$$E_i = \varepsilon_0^{-1} \varepsilon_{ij}^{-1} D_j. \quad (10.1.34)$$

Векторное уравнение (10.1.28) для декартовых компонент вектора \vec{E} записывается следующим образом ($i, j = 1, 2, 3$):

$$(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}) E_j = 0, \quad (10.1.35)$$

где n_i — составляющие вектора \vec{n} .

Приравнявая нулю главный определитель системы (10.1.35), получаем дисперсионное уравнение:

$$\det[n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}] = 0, \quad (10.1.36)$$

устанавливающее частотную зависимость $n(\omega)$.

Если исходить из системы уравнений (10.1.33) и материального уравнения (10.1.34), соответствующее дисперсионное уравнение имеет другой вид:

$$\det[s^2 \delta_{ij} - s_i s_j - \varepsilon_{ij}^{-1}] = 0 \quad (10.1.37)$$

и определяет зависимость $s(\omega)$ ($s = |\vec{s}|$). Для получения конкретных результатов в (10.1.36), (10.1.37) необходимо знать компоненты тензоров $\varepsilon_{ij}(\omega)$ и $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$, то есть необходимо конкретизировать физические свойства среды.

10.1.6. Обобщённые уравнения Гельмгольца для гиротропных сред в декартовой системе координат. Остановимся на частном случае гиротропной среды, которая является изотропной в отсутствии внешнего подмагничивающего поля \vec{H}_0 . Для такой

среды при совпадении направления \vec{H}_0 с осью OZ тензор магнитной проницаемости имеет вид:

$$\vec{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{||} \end{vmatrix}, \quad (10.1.38)$$

а тензор диэлектрической проницаемости:

$$\vec{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon & i\epsilon_a & 0 \\ -i\epsilon_a & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{||} \end{vmatrix}. \quad (10.1.39)$$

где $\mu, \mu_a, \mu_{||}, \epsilon, \epsilon_a, \epsilon_{||}$ — известные компоненты соответствующих тензоров, явный вид которых определяется конкретной феноменологической моделью гиротропной среды*).

При изучении явлений в гиротропных средах можно обычно одну из величин $\vec{\mu}$ или $\vec{\epsilon}$ считать скалярной. Однако мы будем в этом разделе рассматривать так называемую *бигиротропную среду*, одновременно обладающую тензорными параметрами $\vec{\epsilon}$ и $\vec{\mu}$. Это дает определенные методологические преимущества (симметрия получаемых уравнений; использование при их выводе принципа перестановочной двойственности).

Рассмотрим некоторые пути решения уравнений электродинамики для среды с параметрами (10.1.38) и (10.1.39). Первым этапом решения должно быть получение уравнений для векторов \vec{E} и \vec{H} в отдельности. Один вариант таких уравнений ((10.1.28) и (10.1.31)) был уже приведен выше. В данном случае входящий в соотношение (10.1.11) обратный тензор $[\vec{\mu}]^{-1}$ имеет вид:

$$[\vec{\mu}]^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu_{\perp}} & -\frac{i\mu_a}{\mu\mu_{\perp}} & 0 \\ \frac{i\mu_a}{\mu\mu_{\perp}} & \frac{1}{\mu_{\perp}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{||}} \end{vmatrix}, \quad (10.1.40)$$

где

$$\mu_{\perp} = \mu - \mu_a^2 / \mu. \quad (10.1.41)$$

Тензор $[\vec{\epsilon}]^{-1}$ в соотношении (10.1.34) определяется аналогично (10.1.40).

Однако уравнения (10.1.28) и (10.1.31) неудобны тем, что при проецировании их на оси любой ортогональной системы координат (в том числе и декартовой) получают-

*) В главе 10 (до п.10.7) нижние индексы «a» у диэлектрической и магнитной проницаемостей обозначают не их абсолютные значения, а недиагональные компоненты соответствующих тензоров.

ся уравнения, в каждое из которых входят все три составляющие \vec{E} или \vec{H} . Уравнения для отдельных составляющих \vec{E} и \vec{H} проще всего получить, исключая остальные составляющие из уравнений Максвелла (10.1.5), спроецированных на оси декартовой системы координат.

Исключая поперечные составляющие, для случая, когда $\vec{j}_{\text{СТ}} = 0$, получаем для продольных составляющих поля уравнения вида:

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_{||} \mu_{\perp} \right) E_z + \omega \mu_0 \mu_{||} \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} + \frac{\mu_a}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial z} H_z &= 0, \\ \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\mu_{||}}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \mu_{||} \varepsilon_{\perp} \right) H_z - \omega \varepsilon_0 \varepsilon_{||} \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} + \frac{\mu_a}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial z} E_z &= 0, \end{aligned} \quad (10.1.42)$$

где

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{\perp} = \varepsilon - \frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

Если среда не обладает гиротропией ($\varepsilon_a = \mu_a = 0$), система (10.1.42) распадается на два независимых уравнения для E_z и H_z :

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_{||} \mu \right) E_z &= 0, \\ \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\mu_{||}}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \mu_{||} \varepsilon \right) H_z &= 0, \end{aligned} \quad (10.1.43)$$

откуда следует известный факт существования в негиротропной среде *поперечно-электрических* ТЕ-волн, для которых $E_z = 0$ (второе уравнение (10.1.43)), и *поперечно-магнитных* ТМ-волн, для которых $H_z = 0$ (первое уравнение (10.1.43)). Для гиротропных сред, как видно из уравнений (10.1.42), поля ТЕ и ТМ-волн могут существовать только в том случае, если они не зависят от z .

Исключая из уравнений (10.1.42) одну из величин (E_z или H_z), нетрудно получить следующие дифференциальные уравнения четвертого порядка:

$$\mathcal{L}(E_z) = 0, \quad \mathcal{L}(H_z) = 0, \quad (10.1.44)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \equiv & \nabla_{\perp}^4 + \frac{\varepsilon_{||} \mu_{||}}{\varepsilon \mu} \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \\ & + \left(\frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon} + \frac{\mu_{||}}{\mu} \right) \nabla_{\perp}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 (\varepsilon_{||} \mu_{\perp} + \mu_{||} \varepsilon_{\perp}) \nabla_{\perp}^2 + \\ & + 2k_0^2 \varepsilon_{||} \mu_{||} \left(1 + \frac{\mu_a \varepsilon_a}{\mu \varepsilon} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^4 \varepsilon_{||} \mu_{||} \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} \end{aligned} \quad (10.1.45)$$

— линейный дифференциальный оператор четвертого порядка.

Можно показать, что уравнениям (10.144) при записи оператора \mathcal{L} в виде (10.145) удовлетворяют и поперечные составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} . Следовательно, можно записать

$$\mathcal{L}(\vec{E}) = 0, \quad \mathcal{L}(\vec{H}) = 0. \quad (10.146)$$

Подчеркнем, что в отличие от уравнений второго порядка (10.142), при проецировании уравнений четвертого порядка (10.146) на оси декартовой системы координат получаются независимые (и одинаковые) уравнения для каждой составляющей векторов \vec{E} и \vec{H} . Если найдено решение этих уравнений для какой-либо составляющей (что, в общем случае, является непростой задачей), остальные составляющие можно найти с помощью уравнений Максвелла. Уравнения (10.142) и (10.146) в дальнейшем будем называть *обобщёнными уравнениями Гельмгольца для гиротропной среды*.

Рассмотрим теперь частный случай, когда составляющие поля имеют гармоническую зависимость от координаты z , совпадающей с направлением постоянного магнитного поля. Тогда любую составляющую поля ψ_i (составляющие векторов \vec{E} или \vec{H}), являющуюся решением уравнений (10.146), можно представить в виде:

$$\psi_i(x, y, z) = Z(z) \psi_{\perp}(x, y), \quad (10.147)$$

где $Z(z)$ — гармоническая функция ($e^{\pm i\gamma z}$, $\cos(\gamma z)$, $\sin(\gamma z)$ или их линейные комбинации). Этот случай включает в себя и поля, не зависящие от z ($\gamma = 0$). Когда $Z(z) = \exp(i\gamma z)$ оператор \mathcal{L} , как легко убедиться, примет вид ($\partial^2 / \partial z^2 \equiv -\gamma^2$):

$$\mathcal{L} = \nabla_{\perp}^4 + p \nabla_{\perp}^2 + q, \quad (10.148)$$

где p и q — некоторые функции компонент тензоров (10.138) и (10.139).

Оператор (10.148), в отличие от общего случая (10.145), может быть представлен в виде произведения двух операторов второго порядка:

$$\mathcal{L} = (\nabla_{\perp}^2 + \chi_1^2)(\nabla_{\perp}^2 + \chi_2^2), \quad (10.149)$$

где χ_1 и χ_2 — корни биквадратного уравнения

$$\chi^4 - p \chi^2 + q = 0. \quad (10.150)$$

Из (10.148) и (10.149) следует, что функция поперечных координат ψ_{\perp} удовлетворяет двум уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_{\perp}^{(p)} + \chi_p^2 \psi_{\perp}^{(p)} = 0, \quad (p = 1, 2), \quad (10.151)$$

где

$$\chi_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [k_0^2 \alpha_1 - \alpha_2 \gamma^2] \pm \sqrt{\frac{1}{4} [k_0^2 \alpha_1 - \alpha_2 \gamma^2]^2 + k_0^2 \gamma^2 \varepsilon_{||} \mu_{||} \alpha_3}, \quad (10.152)$$

$$\alpha_1 = \varepsilon_{||} \mu_{\perp} + \mu_{||} \varepsilon_{\perp}, \quad \alpha_2 = \varepsilon_{||} / \varepsilon + \mu_{||} / \mu, \quad \alpha_3 = \varepsilon_a / \varepsilon + \mu_a / \mu.$$

Значения $\chi_{1,2}$, фигурирующие в уравнении (10.151), являются решениями уравнения (10.150).

Общее решение ψ_i уравнений (10.146) запишется как

$$\psi_i = [\psi_{\perp}^{(1)}(x, y) + \psi_{\perp}^{(2)}(x, y)] Z(z). \quad (10.153)$$

В случае изотропной среды ($\varepsilon_a = \mu_a = 0$, $\varepsilon_{||} = \varepsilon$, $\mu_{||} = \mu$) $\chi_1^2 = \chi_2^2 \equiv \chi^2$ и из (10.1.52) следует известное соотношение

$$\gamma^2 = k_0^2 \varepsilon \mu - \chi^2.$$

10.2. Распространение плоских гармонических волн в кристаллических средах

10.2.1. Общие закономерности. В анизотропных негиротропных кристаллах тензор диэлектрической проницаемости симметричен:

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ji}(\omega). \quad (10.2.1)$$

Для среды (кристалла) без поглощения все компоненты тензора $\vec{\varepsilon}$ будут вещественны. Как следует из тензорного анализа, симметричный вещественный тензор всегда может быть приведен к главным осям, для которых в (10.2.1) отличны от нуля только его диагональные компоненты:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Для системы координат, оси которой совпадают с главными осями тензора $\vec{\varepsilon}$, материальное уравнение (10.1.7) запишется ($\mu = 1$) в виде:

$$D_{xx} = \varepsilon_0 \varepsilon_{xx} E_x, \quad D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_{yy} E_y, \quad D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_{zz} E_z, \quad (10.2.2)$$

из чего следует, что вектор \vec{D} коллинеарен \vec{E} ($\vec{D} \parallel \vec{E}$) только тогда, когда вектор \vec{D} направлен вдоль одной из главных осей.

Раскрывая определитель (10.1.36) в системе координат, оси которой совпадают с главными осями тензора ε_{ij} , с учетом соотношений (10.2.2) получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} n^2 (\varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + \varepsilon_{zz} n_z^2) - [n_x^2 \varepsilon_{xx} (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \\ + n_y^2 \varepsilon_{yy} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + n_z^2 \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} = 0, \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

которое называется *уравнением Френеля*.

Если рассматривать распространение монохроматической волны с фиксированной частотой ω , то уравнение (10.2.3) будет квадратным уравнением относительно квадрата показателя преломления n^2 . Поэтому для каждого заданного направления $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ существуют два различных абсолютных значения волнового числа $k = \omega n / c$, то есть в кристалле имеются две нормальные волны, распространяющиеся с разными фазовыми скоростями. Пусть, например, волна распространяется вдоль главной оси OZ , так что $n_x = n_y = 0$, $n_z = n$. Тогда уравнение Френеля (10.2.3) существенно упрощается:

$$n^4 - n^2 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} = 0. \quad (10.2.4)$$

Из (10.2.4) для нормальных волн находятся два значения показателей преломления:

$$n_1^2 = \varepsilon_{xx}, \quad n_2^2 = \varepsilon_{yy}.$$

Нормальные волны в кристаллах отличаются не только фазовыми скоростями, но и поляризациями. Для того, чтобы доказать это, введем систему координат, в которой ось OZ' (другая система координат) направлена вдоль вектора \vec{n} и, следовательно, $D_{z'} = 0$. Из уравнений (10.2.2) имеем:

$$D_{x'} = \varepsilon_0 n^2 E_{x'}, \quad D_{y'} = \varepsilon_0 n^2 E_{y'}. \quad (10.2.5)$$

С учетом материального уравнения (10.1.34) (тензор ε_{ij}^{-1} в системе координат x', y', z' имеет недиагональный вид) соотношения (10.2.5) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n^2} - \varepsilon_{x'x'}^{-1} \right) D_{x'} - \varepsilon_{x'y'}^{-1} D_{y'} &= 0, \\ \left(\frac{1}{n^2} - \varepsilon_{y'y'}^{-1} \right) D_{y'} - \varepsilon_{y'x'}^{-1} D_{x'} &= 0. \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

Так как для среды без потерь компоненты тензора ε_{ij}^{-1} действительны, *множитель поляризации* для нормальных волн, получаемый из (10.2.6)

$$\rho_{1,2} = \frac{D_{x'}}{D_{y'}} = \frac{\varepsilon_{x'y'}^{-1}}{n_{1,2}^{-2} - \varepsilon_{x'x'}^{-1}} \quad (10.2.7)$$

также является действительной величиной.

Как следует из (10.2.7), в анизотропной негиротропной среде нормальные волны линейно поляризованы, так как множитель поляризации есть чисто действительная величина. Всякая волна другой поляризации в анизотропной негиротропной среде (в кристаллах) расщепляется на две линейно-поляризованные волны, фазовые скорости которых в общем случае различны. Напомним, что в изотропной среде, в общем случае, возможно распространение волн с линейной, круговой или эллиптической поляризацией.

В анизотропном кристалле энергия нормальных волн распространяется вдоль лучей с разными лучевыми векторами \vec{s}_1 и \vec{s}_2 с различными групповыми скоростями. Покажем, что направление лучевого вектора \vec{s} совпадает с направлением групповой скорости.

Пусть направление колебаний вектора \vec{E} одной из нормальных волн характеризуется единичным вектором \vec{e}_0 так, что

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}_0 E(\vec{r}).$$

Тогда уравнение (10.1.28) можно переписать следующим образом:

$$[\vec{k}[\vec{k}, \vec{e}_0]] + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\varepsilon} \vec{e}_0 = \vec{k}(\vec{k}, \vec{e}_0) - (\vec{k}, \vec{k}) \vec{e}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\varepsilon} \vec{e}_0 = 0. \quad (10.2.8)$$

Умножая скалярно уравнение (10.2.8) на \vec{e}_0 , имеем

$$(\vec{k}, \vec{k}) - (\vec{k}, \vec{e}_0)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{e}_0 \vec{\varepsilon} \vec{e}_0 = 0. \quad (10.2.9)$$

Дифференцируя (10.2.9) по \vec{k} , получим уравнение

$$2\vec{k} - 2(\vec{k}, \vec{e}_0)\vec{e}_0 - \left(\frac{2\omega}{c^2} \vec{e}_0 \vec{\varepsilon} \vec{e}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{e}_0 \frac{d\vec{\varepsilon}}{d\omega} \vec{e}_0 \right) \frac{d\omega}{d\vec{k}} = 0,$$

из которого следует выражение для вектора групповой скорости

$$\vec{u} = \frac{d\omega}{d\vec{k}} = \frac{[\vec{e}_0 [\vec{k}, \vec{e}_0]]}{\frac{\omega}{c^2} \vec{e}_0 \vec{\varepsilon} \vec{e}_0 + \frac{\omega^2}{2c^2} \vec{e}_0 \frac{d\vec{\varepsilon}}{d\omega} \vec{e}_0}. \quad (10.2.10)$$

Так как вектор \vec{e}_0 параллелен вектору \vec{E} , а вектор $[\vec{k}, \vec{e}_0]$ параллелен вектору \vec{H} , направления векторов $[\vec{e}_0 [\vec{k}, \vec{e}_0]]$ и \vec{s} совпадают. Следовательно, групповая скорость в анизотропном кристалле направлена вдоль лучевого вектора \vec{s} . Формула (10.2.10) справедлива для среды без потерь.

10.2.2. Классификация кристаллических сред. В зависимости от структуры кристаллических сред, а значит, и от вида тензора ε_{ij} , кристаллы можно разделить на три группы: *кубические, одноосные и двуосные*.

Для *кубических кристаллов* $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$, то есть такая среда оптически изотропна. Здесь уместно заметить, что учет пространственной дисперсии в кубическом кристалле приводит к анизотропии. Для кубических кристаллов направления главных осей произвольны.

В *одноосных кристаллах* одна из главных осей тензора ε_{ij} совпадает с осью симметрии кристалла (оптической осью), а направления двух других главных осей произвольны. Для одноосного кристалла две из трех компонент тензора ε_{ij} одинаковы. Если, например, ось OZ совпадает с осью симметрии кристалла, то

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{||}, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon. \quad (10.2.11)$$

Уравнение Френеля (10.2.3) для среды с параметрами (10.2.11) упрощается:

$$(n^2 - \varepsilon)[\varepsilon_{||} n_z^2 + \varepsilon(n_x^2 + n_y^2) - \varepsilon_{||}\varepsilon] = 0$$

и распадается на два уравнения второго порядка:

$$n^2 = \varepsilon, \quad (10.2.12)$$

$$\frac{n_x^2}{\varepsilon_{||}} + \frac{n_y^2}{\varepsilon_{||}} + \frac{n_z^2}{\varepsilon} = 1. \quad (10.2.13)$$

Следовательно, в одноосных кристаллах имеем две отдельные поверхности волновых векторов: сферу (10.2.12) и эллипсоид вращения (10.2.13), причем по оси n_z сфера касается эллипсоида.

Если $\varepsilon > \varepsilon_{||}$, кристалл называется *оптически отрицательным*. На рис. 10.3а показаны волновые поверхности для этого случая. Если $\varepsilon < \varepsilon_{||}$, сфера находится внутри эллипсоида, и кристалл *оптически положителен* (рис. 10.3б).

Если поместить точечный источник в однородную одноосную анизотропную среду, он будет излучать две расходящиеся волны. Волна со сферическим фронтом назы-

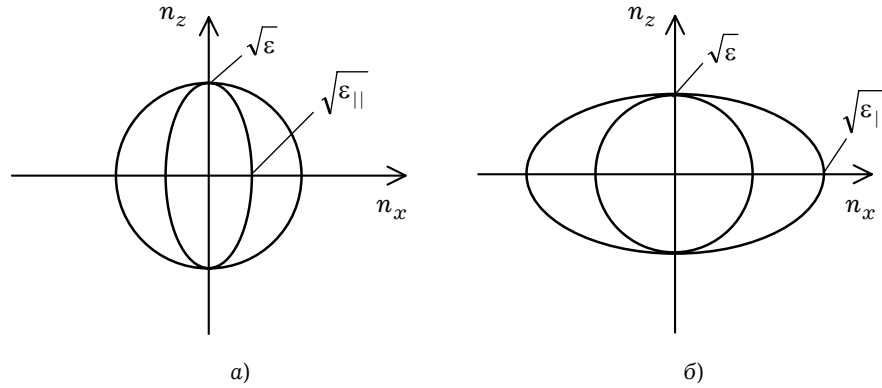


Рис. 10.3

вается обыкновенной. Для необыкновенной волны волновые фронты представляют собой эллипсоиды вращения с общей осью и центром.

Рассмотрим распространение плоских волн вдоль фиксированного направления. Пусть, например, обе волны распространяются вдоль направления, составляющего угол θ с оптической осью, так что

$$n_z = n \cos \theta, \quad n_y = n \sin \theta, \quad n_x = 0.$$

В этом случае имеем:

$$n_1 = \sqrt{\epsilon}, \quad n_2 = \frac{\sqrt{\epsilon \epsilon_{\parallel}}}{\sqrt{\epsilon \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}}.$$

Таким образом, фазовая скорость обыкновенной волны не зависит от направления распространения; фазовая же скорость необыкновенной волны зависит от угла θ .

Для двусных кристаллов все три компоненты тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{xx} , ϵ_{yy} и ϵ_{zz} различны. Для изучения закономерностей распространения волн в таких кристаллах необходимо исследовать уравнение Френеля (10.2.3) в общем виде. Представление о свойствах волновой поверхности можно получить, рассматривая ее сечение координатными плоскостями, например, плоскостями $n_z = \text{const}$.

Положив $n_z = 0$ в уравнении (10.2.3), имеем:

$$(n^2 - \epsilon_{zz}) (\epsilon_{xx} n_x^2 + \epsilon_{yy} n_y^2 - \epsilon_{xx} \epsilon_{yy}) = 0$$

или

$$n^2 = \epsilon_{zz}, \quad \frac{n_x^2}{\epsilon_{yy}} + \frac{n_y^2}{\epsilon_{xx}} = 1.$$

Таким образом, контур сечения в плоскости $n_z = \text{const}$ состоит из круга и эллипса. Пусть $\epsilon_{xx} < \epsilon_{yy} < \epsilon_{zz}$, тогда эллипс будет лежать внутри круга (рис. 10.4). В плоскостях $n_y = \text{const}$ и $n_x = \text{const}$ сечения также состоят из эллипса и круга, но в плоскости $n_x = \text{const}$ эллипс лежит вне круга, а в плоскости $n_y = \text{const}$

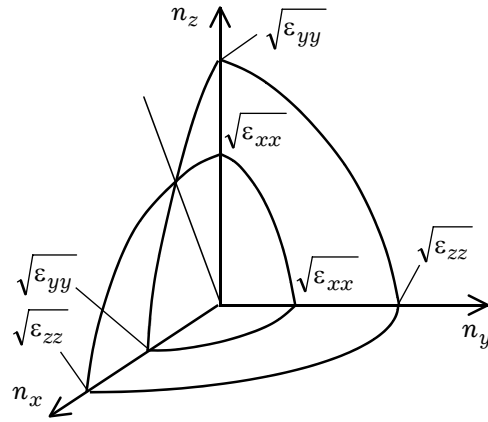


Рис. 10.4

эллипс и круг пересекаются. Следовательно, поверхность волновых векторов для двуосных кристаллов является самопересекающейся поверхностью четвертого порядка. Поверхность имеет четыре особые точки, расположенные по одной в каждом квадранте плоскости $n_y = \text{const}$. Две оси, попарно соединяющие противоположные особые точки, называются *бинормальными кристалла*. В направлении оптических осей показатель преломления n имеет только одно значение, в результате чего фазовые скорости двух волн совпадают.

10.3(*). Распространение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме

10.3.1. Магнитоактивные среды. Магнитоактивными называются анизотропные среды, приобретающие свойство гиротропии под действием внешнего постоянного магнитного поля. Тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости таких сред несимметричны. В магнитоактивной непоглощающей среде тензор ϵ_{ij} ($i \neq j$) эрмитов:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^* . \quad (10.3.1)$$

Из (10.3.1) следует, что

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon'_{ji}, \quad \epsilon''_{ij} = -\epsilon''_{ji} . \quad (10.3.2)$$

Соотношения, аналогичные (10.3.2) выполняются и для тензора $\tilde{\mu}$.

Если тензором является диэлектрическая проницаемость, а μ — скаляр, среда называется *гирослектрической*. Это, например, плазма, помещенная в постоянное магнитное поле (земная ионосфера). Если тензором является магнитная проницаемость, а ϵ — скаляр, среда называется *гиромангнитной*. Это, например, феррит, помещенный в постоянное магнитное поле.

10.3.2. Макроскопические модели магнитоактивной плазмы. Высоочастотное приближение. Получим выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы, находящейся во внешнем постоянном магнитном поле \vec{H}_0 .

Пусть частота ω волнового процесса в плазме удовлетворяет условиям (высоочастотное приближение):

$$\omega \gg \Omega = \mu_0 \frac{eH_0}{Mc}, \quad (10.3.3)$$

$$\omega \gg \nu, \quad (10.3.4)$$

где Ω — собственная частота вращения ионов в магнитном поле (M — масса иона), ν — эффективная частота соударений электронов с ионами. Условие (10.3.3) позволяет считать ионы неподвижными и учитывать только движение электронов. При выполнении условия (10.3.4) можно считать, что в поле электромагнитной волны происходит пространственное разделение зарядов, которое приводит к возникновению колебаний плотности заряда. При выполнении условий (10.3.3) и (10.3.4) плазму можно рассматривать как однородный ионизированный газ, в единице объёма которого содержится N электронов.

Условие (10.3.4) позволяет пренебречь токами проводимости по сравнению с током смещения:

$$\vec{J} = -Ne \vec{v} = \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t},$$

где \vec{P} — вектор поляризации; e, \vec{v} — заряд и скорость электрона.

Будем рассматривать гармонические волновые процессы ($\exp\{i\omega t\}$), для которых $\partial \vec{\mathcal{P}} / \partial t \Rightarrow i\omega \vec{P}$. Так как $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, получаем

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \frac{iNe}{\omega} \vec{v}. \quad (10.3.5)$$

Для определения скорости \vec{v} воспользуемся уравнением движения электрона

$$m\dot{\vec{v}} = -e \left\{ \vec{E} + \mu_0 [\vec{v}, \vec{H}_0] \right\},$$

откуда

$$\vec{v} = \frac{ie}{m\omega} \left\{ \vec{E} + \mu_0 [\vec{v}, \vec{H}_0] \right\}. \quad (10.3.6)$$

Выберем систему координат, ось OZ которой совпадает с направлением внешнего подмагничивающего поля $\vec{H}_0 = \{0, 0, H_0\}$. Тогда из (10.3.6) получается система уравнений для определения компонент вектора $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{ie}{m\omega} E_x + \frac{i\omega_H}{\omega} v_y, \\ v_y &= \frac{ie}{m\omega} E_y - \frac{i\omega_H}{\omega} v_x, \\ v_z &= \frac{ie}{m\omega} E_z, \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

где $\omega_H = \mu_0 e H_0 / m$ — собственная частота вращения электрона в магнитном поле H_0 .

Определив из соотношений (10.3.7) компоненты вектора \vec{v} и подставив их в уравнение (10.3.5), получим выражения для компонент вектора \vec{D} :

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{u}{1 - \xi^2} \right) E_x - i \frac{u\xi}{1 - \xi^2} \varepsilon_0 E_y, \\ D_y &= i \frac{u\xi}{1 - \xi^2} \varepsilon_0 E_x + \varepsilon_0 \left(1 - \frac{u}{1 - \xi^2} \right) E_y, \\ D_z &= \varepsilon_0 (1 - u) E_z, \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

где $\xi = \omega_H / \omega$, $u = \omega_p^2 / \omega^2$, $\omega_p = \sqrt{Ne^2 / (\varepsilon_0 m)}$.

Отсюда следует, что тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы, подмагниченной вдоль оси OZ, имеет вид

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{||} \end{pmatrix}, \quad (10.3.9)$$

где

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \varepsilon_a = \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}, \quad \varepsilon_{||} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (10.3.10)$$

Из соотношений (10.3.8) следует, что в направлении оси OZ векторы \vec{D} и \vec{E} параллельны, а в плоскости XOY \vec{D} и \vec{E} параллельны только для волн, имеющих круговую поляризацию. Действительно, из (10.3.8) следует

$$D_x \pm iD_y = \varepsilon_0 (\varepsilon \mp \varepsilon_a) (E_x \pm iE_y), \quad (10.3.11)$$

то есть в магнитоактивной среде нормальные волны имеют круговую или эллиптическую поляризацию. В (10.3.11) ε и ε_a определяются как (10.3.10).

Второй характерной особенностью магнитоактивной среды является существование резонансных явлений при $\omega \rightarrow \omega_H$, так как при $\omega \rightarrow \omega_H$ компоненты тензора ε и ε_a обращаются в бесконечность.

Если учесть потери энергии из-за соударений электронов с ионами и нейтральными молекулами, компоненты тензора диэлектрической проницаемости (10.3.9) вместо (10.3.10) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} &= 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega - i\nu)}{\omega [(\omega - i\nu)^2 - \omega_H^2]}, \\ \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} &= \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega [(\omega - i\nu)^2 - \omega_H^2]}, \\ \frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon_0} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu)}. \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

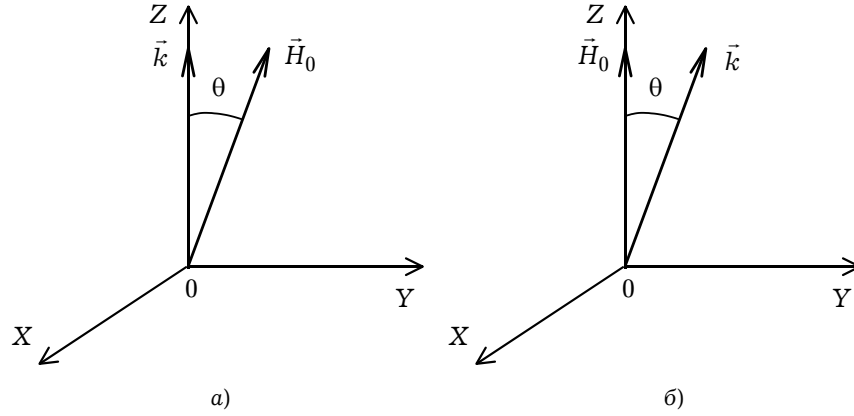


Рис. 10.5

Тензор диэлектрической проницаемости, элементы которого определяются как (10.3.12), в этом случае может быть представлен в виде:

$$\epsilon_{k,ij} = \epsilon_{ij} - i \frac{\sigma_{ij}}{\epsilon_0 \omega}, \quad (10.3.13)$$

причем $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}^*$. В (10.3.13) σ_{ij} — тензор проводимости среды.

10.3.3. Общий вид тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы. Тензор диэлектрической проницаемости (10.3.9) определен в системе координат, ось OZ которой совпадает с направлением магнитного поля \vec{H}_0 . Определим явный вид тензора $\vec{\epsilon}$ в системе координат, в которой вектор \vec{H}_0 расположен в плоскости YOZ и составляет угол θ с осью OZ , а вектор \vec{k} (направление распространения волны) совпадает с осью OZ (рис. 10.5a). Для этого нужно найти компоненты тензора в системе XYZ , получающейся поворотом системы координат, у которой ось OZ совпадала с направлением магнитного поля \vec{H}_0 , на угол θ вокруг оси OX (в плоскости YOZ). При таком преобразовании старые (x', y', z') и новые (x, y, z) координаты связаны соотношениями

$$x = x', \quad y = y' \cos \theta + z' \sin \theta, \quad z = -y' \sin \theta + z' \cos \theta. \quad (10.3.14)$$

Компоненты тензора с учётом (10.3.14) преобразуются по формулам

$$\epsilon_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \epsilon'_{kl}, \quad (10.3.15)$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

В выражении (10.3.15) по повторяющимся индексам k и l подразумевается суммирование, а компоненты ϵ'_{kl} (в системе координат x', y', z') определяются выра-

жениями (10.3.10). Перемножая матрицы, находим

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (10.3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon, & \epsilon_{yy} &= \epsilon \cos^2 \theta + \epsilon_{||} \sin^2 \theta, \\ \epsilon_{xy} &= -\epsilon_{yx} = -i\epsilon_a \cos \theta, & \epsilon_{yz} &= \epsilon_{zy} = (\epsilon_{||} - \epsilon) \sin \theta \cos \theta, \\ \epsilon_{zx} &= -\epsilon_{xz} = -i\epsilon_a \sin \theta, & \epsilon_{zz} &= \epsilon \sin^2 \theta + \epsilon_{||} \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Тензор (10.3.16) соответствует общему случаю магнитоактивной плазмы.

10.3.4. Распространение плоских высокочастотных волн в магнитоактивной плазме. Будем считать, что постоянное магнитное поле \vec{H}_0 направлено по оси OZ , а вектор \vec{k} (направление распространения волны) лежит в плоскости YOZ и составляет угол θ с осью OZ (рис. 10.5б). При этом

$$k_x = 0, \quad k_y = k \sin \theta, \quad k_z = k \cos \theta.$$

Для определения показателя преломления плазмы n , необходимо воспользоваться системой уравнений Максвелла (10.1.25). С учетом направления распространения волны $\vec{n} = \{0, n \sin \theta, n \cos \theta\}$ и явного вида тензора $\tilde{\epsilon}$ (10.3.9) система уравнений (10.1.35) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (n^2 - \epsilon) E_x + i\epsilon_a E_y &= 0, \\ -i\epsilon_a E_x + (n^2 \cos^2 \theta - \epsilon) E_y - n^2 \sin \theta \cos \theta E_z &= 0, \\ -n^2 \sin \theta \cos \theta E_y + (n^2 \sin^2 \theta - \epsilon_{||}) E_z &= 0. \end{aligned} \quad (10.3.17)$$

Из (10.3.17) имеем:

$$n_{0,n}^2 = 1 - \frac{2u(1-u)}{2(1-u) - \xi^2 \sin^2 \theta \pm \sqrt{\xi^4 \sin^4 \theta + 4\xi^2(1-u)^2 \cos^2 \theta}}. \quad (10.3.18)$$

Уравнение (10.3.18) определяет дисперсию высокочастотных волн (для них справедливы условия (10.3.3) и (10.3.4)) в магнитоактивной плазме. Из него следует, что на фиксированной частоте в плазме могут распространяться две волны: обыкновенная и необыкновенная, фазовые скорости которых определяются, соответственно, через показатели преломления n_0 и n_n .

Выясним характер поляризации нормальных волн в магнитоактивной плазме. Для этого определим коэффициенты поляризации для обыкновенной и необыкновенной волн \mathcal{P}_0 и \mathcal{P}_n . Для их определения удобнее выбрать систему координат, показанную на рис. 10.5а, для которой вектор \vec{k} (вектор \vec{n}) совпадает с осью OZ , а поле \vec{H}_0 образует с осью OZ угол θ . Для такой системы координат тензор $\tilde{\epsilon}$

имеет вид (10.3.16) и система уравнений (10.1.35) записывается в виде:

$$\begin{aligned} (n^2 - \varepsilon_{xx}) E_x - \varepsilon_{xy} E_y - \varepsilon_{xz} E_z &= 0, \\ -\varepsilon_{yx} E_x + (n^2 - \varepsilon_{yy}) E_y - \varepsilon_{yz} E_z &= 0, \\ \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z &= 0. \end{aligned} \quad (10.3.19)$$

Из (10.3.19) следует, что

$$\left(n^2 - \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} \right) E_x = \left(\varepsilon_{xy} - \frac{\varepsilon_{xz} \varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} \right) E_y, \quad (10.3.20)$$

где n^2 определяется формулой (10.3.18).

Для множителя поляризации, соответственно, имеем

$$\rho_{o,n} = \frac{E_x}{E_y} = i \frac{2\xi(1-u)\cos\theta}{\xi^2 \sin^2\theta \mp \sqrt{\xi^4 \sin^4\theta + 4\xi^2(1-u)^2 \cos^2\theta}}. \quad (10.3.21)$$

Таким образом, поляризация обыкновенной и необыкновенной волн — эллиптическая; направления вращения векторов \vec{E} в плоскости фронта у обыкновенной и необыкновенной волн противоположны. Поскольку, как следует из (10.3.21), $\rho_o \rho_n = 1$, оси эллипсов для этих волн направлены в противоположные стороны.

10.3.5. Эффект Фарадея. Слабмагнитоактивная плазма. Рассмотрим распространение плоских высокочастотных волн в плазме вдали от ферромагнитного резонанса, то есть при $\xi \ll 1$ ($\omega \gg \omega_H$), когда влияние внешнего магнитного поля является слабым. В этом случае из (10.3.18) получаем:

$$n_{o,n}^2 \approx 1 - u \mp u\xi \cos\theta \quad (10.3.22)$$

и

$$\rho_{o,n} = \pm i.$$

Учет малых слагаемых $\pm u\xi \cos\theta$ в (10.3.22) оказывается существенным, когда волна в плазме проходит достаточно большое расстояние. В такой среде возможен эффект Фарадея — поворот плоскости поляризации электромагнитной волны в магнитоактивной плазме.

Пусть линейно поляризованная волна в точке $z = 0$ с вектором \vec{E} , параллельным оси OY , распространяется вдоль оси OZ . Постоянное поле \vec{H}_0 составляет угол θ с осью OZ . На расстоянии L от начала координат поле можно представить в виде суперпозиции полей двух волн с круговой поляризацией, векторы которых вращаются в противоположные стороны:

$$\begin{aligned} E_{1x} &= \frac{1}{2} E_0 \exp\left(-i \frac{\omega}{c} n_o L\right), \quad E_{1y} = \frac{i}{2} E_0 \exp\left(-i \frac{\omega}{c} n_o L\right), \\ E_{2x} &= \frac{1}{2} E_0 \exp\left(-i \frac{\omega}{c} n_n L\right), \quad E_{2y} = -\frac{i}{2} E_0 \exp\left(-i \frac{\omega}{c} n_n L\right). \end{aligned}$$

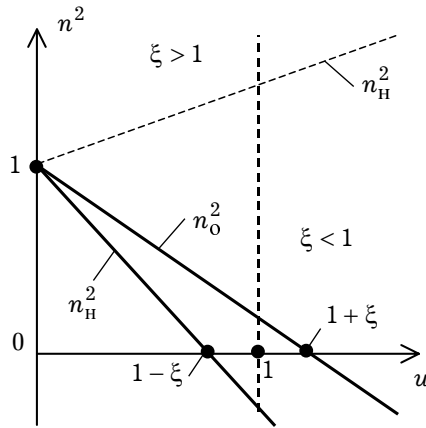


Рис. 10.6

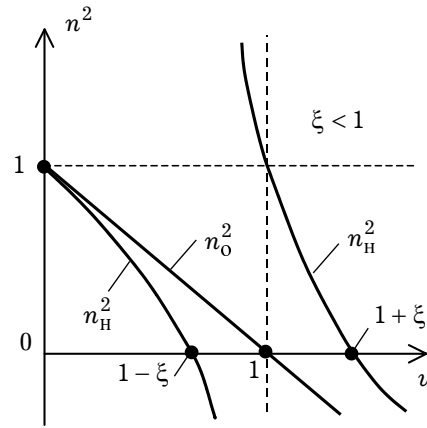


Рис. 10.7

Суперпозиция двух волн представляется выражениями:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x1} + E_{x2} = E_0 \cos\left(\frac{\omega(n_0 - n_H)}{c} L\right) \exp\left\{-i\frac{\omega(n_0 + n_H)}{c} L\right\}, \\ E_y &= E_{y1} + E_{y2} = -E_0 \sin\left(\frac{\omega(n_0 - n_H)}{c} L\right) \exp\left\{-i\frac{\omega(n_0 + n_H)}{c} L\right\}. \end{aligned} \quad (10.3.23)$$

Из (10.3.23) следует, что множитель поляризации определяется как

$$\rho = \frac{E_x}{E_y} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

где

$$\alpha = \omega L u \xi \cos \theta / (2c). \quad (10.3.24)$$

Таким образом, электромагнитная волна в слабомагнитоактивной плазме, пройдя расстояние L , поворачивает свою плоскость поляризации на угол α , определяемый по формуле (10.3.24), сохраняя при этом линейную поляризацию. В этом суть эффекта Фарадея.

10.3.6. Продольное распространение плоских волн в магнитоактивной плазме.

Пусть волна распространяется вдоль магнитного поля ($\vec{k} \parallel \vec{H}_0$). Из общих формул (10.3.18) и (10.3.21) при $\theta = 0$ получаем

$$\begin{aligned} n_O^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_H)}, \quad \mathcal{P}_O = i, \\ n_H^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_H)}, \quad \mathcal{P}_H = -i. \end{aligned} \quad (10.3.25)$$

Поляризация обыкновенной и необыкновенной волн — круговая. Обе волны — поперечные, так как у них $E_z = 0$. Причем у необыкновенной волны направление вращения вектора \vec{E} в плоскости фронта волны совпадает с направлением враще-

ния электрона в магнитном поле, что приводит при $\omega \rightarrow \omega_H$ к резонансному поглощению. На рис. 10.6 показаны качественные зависимости $n_{0,n}^2$ от параметра распространения электромагнитных волн. Показатель преломления необыкновенной волны n_n обращается в нуль при $u = 1 - \xi$; обыкновенной волны при $u = 1 + \xi$. Эти значения u соответствуют частотам, при которых волна отражается от неоднородности. Если $\omega > \omega_H$ ($\xi < 1$), от плазмы могут отражаться обе волны. Если $\omega < \omega_H$ ($\xi > 1$), необыкновенная волна отразиться от плазмы не может.

10.3.7. Поперечное распространение плоских волн в магнитоактивной плазме.

Пусть вектор \vec{k} направлен по оси OY и перпендикулярен вектору \vec{H}_0 , направленному вдоль оси OZ . В этом случае $\theta = \pi/2$ и из формул (10.3.18) следует

$$n_0^2 = 1 - u = \varepsilon_{||}, \quad n_n^2 = 1 - \frac{u(1-u)}{1-u-\xi^2}. \quad (10.3.26)$$

Система уравнений (10.3.17) при $\theta = \pi/2$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} (n^2 - \varepsilon) E_x + i \varepsilon_a E_y &= 0, \\ -i \varepsilon_a E_x - \varepsilon E_y &= 0, \\ (n^2 - \varepsilon_{||}) E_z &= 0, \end{aligned} \quad (10.3.27)$$

где n определяется формулами (10.3.26).

Как следует из уравнений (10.3.27), у обыкновенной волны вектор $\vec{E} = E_z \vec{z}_0$ ($E_x = E_y = 0$) и направлен вдоль вектора \vec{H}_0 . Этим обстоятельством объясняется тот факт, что значение n_0^2 совпадает со значением этой величины для изотропной плазмы.

Для необыкновенной волны, как следует из уравнений (10.3.27), $E_x \neq 0$, $E_y \neq 0$, $E_z = 0$ и $E_x/E_y = i\varepsilon/\varepsilon_a$, что свидетельствует об эллиптической поляризации необыкновенной волны в плоскости XOY .

На рис. 10.7 показаны зависимости $n_{0,n}^2$ от u при поперечном распространении волны в магнитоактивной плазме. При таком распространении n_n^2 при $\xi < 1$ обращается в нуль при $u = 1 \pm \xi$, $n_0^2 = 0$ при $u = 1$.

10.4(*). Макроскопические модели анизотропных магнитных сред

Магнетизм твердых тел в основном обусловлен упорядоченными магнитными моментами (спинами) неспаренных электронов в атомных оболочках некоторых элементов таких, как переходные металлы *Fe*, *Ni*, *Co*, *Cr* и т.д., или редкоземельные элементы *Gd*, *Dy*, *Nd* и т.д. Кристаллы из таких элементов и многие из их химических соединений обнаруживают намагничение при температурах ниже определенных критических значений. В большинстве случаев неспаренные электроны, или, говоря более строго, магнитные ионы, с которыми связаны эти неспаренные электроны, локализованы в некоторых местах кристаллической решетки. Однако в переходных металлах неспаренные 3d электроны, ответственные за магнетизм, локализованы не строго и обладают конечной подвижностью. Это обстоя-

тельство учитывается в зонной теории ферромагнетизма. В сложных магнитных кристаллах при температуре ниже критической возможны различные упорядоченные расположения магнитных моментов. Ферромагнитное упорядочение — такое состояние среды, когда все спины направлены в одну сторону. При антиферромагнитном упорядочении в среде имеется, по крайней мере, две магнитные подрешетки с противоположно направленными спинами, а среднее намагничивание при абсолютном нуле температур отсутствует. Существует и ферромагнитное упорядочение среды, когда присутствуют, по крайней мере, две неэквивалентные подрешетки со спинами, направленными противоположно друг другу. В них при абсолютном нуле существует среднее намагничивание, а также спиральное или гелиомагнитное упорядочение спинов, приводящее обычно к проявлению ферромагнитных свойств.

10.4.1. Ферро- и ферримагнитные среды. С микроскопической точки зрения качественная разница между ферро- и ферримагнетиками отсутствует и их можно рассматривать с единых позиций, описывая плотностью магнитного момента $\vec{M}(\vec{r})$ (намагниченностью вещества (среды)).

Основным свойством ферромагнетика при абсолютном нуле температур служит однодоменное однородное намагничивание $\vec{M}(\vec{r}) = \vec{M}_0$, где \vec{M}_0 — намагниченность насыщения. При распространении малых возмущений намагниченности в среде можно записать

$$\vec{M}(\vec{r}) = \vec{M}_0 + \vec{m}(\vec{r}), \quad (10.4.1)$$

где $|\vec{m}| \ll |\vec{M}_0|$ и $|\vec{M}|^2 = |\vec{M}_0|^2 = \text{const}$.

Последнее условие означает, что однородность намагниченности можно нарушить только изменяя её направление от точки к точке. Уравнение движения для намагниченности (10.4.1) среды без потерь имеет вид (уравнение Ландау-Лившица):

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma_0 \mu_0 [\vec{M}, \vec{H}_{\text{эф}}], \quad (10.4.2)$$

где $\gamma_0 = g \mu_B / \hbar$ — гиромагнитное отношение; $\mu_B = |e| \hbar / 2m$ — магнетон Бора, g — параметр спектроскопического расщепления (фактор Ланде), c — скорость света. Для свободного электрона $g = 2\gamma_0 = |e| \hbar / m$ ($\gamma_0 = 1.76 \cdot 10^{11}$ к/кг, величина $\gamma_0 \mu_0 H_{\text{эф}}$ имеет размерность частоты. Величина $\vec{H}_{\text{эф}}$ в уравнении (10.4.2) — эффективное магнитное поле, действующее на намагниченность \vec{M} , и определяемое как

$$\vec{H}_{\text{эф}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{M}}, \quad (10.4.3)$$

где \mathcal{H} — гамильтониан магнитной системы. В общем случае он складывается из обменного (\mathcal{H}_0), магнитокристаллического (\mathcal{H}_a), магнитоупругого (\mathcal{H}_y), размагничивающего (\mathcal{H}_d) взаимодействий, а также взаимодействия с внешним электромагнитным полем \mathcal{H}_{em} . Таким образом, гамильтониан в (10.4.3) представляет собой сумму:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_y + \mathcal{H}_d + \mathcal{H}_{em}.$$

Квантомеханическое обменное взаимодействие определяется как

$$\mathcal{H}_0 = -2 \sum_{m,n} J_{mn} \hat{S}_n \hat{S}_m ,$$

где J_{mn} — константа обменного взаимодействия для пары магнитных ионов с номерами m и n ; \hat{S}_m и \hat{S}_n — операторы спинов взаимодействующих ионов m и n . Обычно при вычислении обменной энергии рассматривают ту или иную магнитную решетку (например, кубическую) с взаимодействием лишь ближайших (соседних) ионов, так как обменное взаимодействие экспоненциально убывает с расстоянием.

Магнитокристаллическое взаимодействие (\mathcal{H}_a) связано с релятивистскими спин-спиновыми и спин-орбитальными взаимодействиями и зависит от ориентации общего магнитного момента \vec{M} относительно кристаллических осей анизотропного вещества. Появление упругого взаимодействия объясняется тем, что при намагничивании кристаллов происходит их спонтанная деформация (явление магнитоstriction), и из-за нее изменяется магнитокристаллическая энергия и, соответственно, энергия обменного взаимодействия. Конечно, возникновение деформации одновременно приводит к возрастанию упругой энергии.

Соответственно, эффективное магнитное поле $\vec{H}_{\text{эф}}$ можно представить в виде

$$\vec{H}_{\text{эф}} = \vec{H} + \vec{H}_{\text{об}} + \vec{H}_{\text{кр}} + \vec{H}_d , \quad (10.4.4)$$

где \vec{H} — приложенное внешнее магнитное поле, содержащее постоянную и переменную составляющие; $\vec{H}_{\text{об}}$ — эффективное обменное поле; $\vec{H}_{\text{кр}}$ — эффективное поле кристаллографической анизотропии; \vec{H}_d — эффективное размагничивающее поле.

Величина \vec{H}_d в (10.4.4) зависит от формы образца; при достаточно больших размерах среды ею можно пренебречь. Поле $\vec{H}_{\text{кр}}$ можно пренебречь для большинства ферромагнетиков с кубической решеткой.

10.4.2. Тензор восприимчивости для изотропного ферромагнетика. Ниже рассмотрим задачу о колебаниях намагниченности в некоторой точке тела под воздействием заданных постоянного и переменного магнитных полей в той же точке. Решение такой задачи позволяет найти динамическую (высокочастотную) магнитную восприимчивость ферромагнетика по отношению к внутреннему переменному полю. Рассмотрим неограниченный однородный ферромагнетик, намагниченный внешним постоянным магнитным полем \vec{H}_0 до насыщения. Ограничимся изучением однородных колебаний намагниченности, то есть колебаний намагниченности, не зависящих от координат. Более того, рассмотрим ферромагнетик без потерь, то есть будем исходить из уравнения движения (10.4.2).

Собственные колебания намагниченности. Рассмотрим сначала свободные колебания намагниченности без внешнего переменного поля. В отсутствие диссипации энергии они будут незатухающими. Такие незатухающие свободные колебания обычно называют *собственными колебаниями*.

Пусть внешнее магнитное поле направлено вдоль оси OZ . Тогда в первом приближении для бесконечного однородного ферромагнетика в уравнении движения

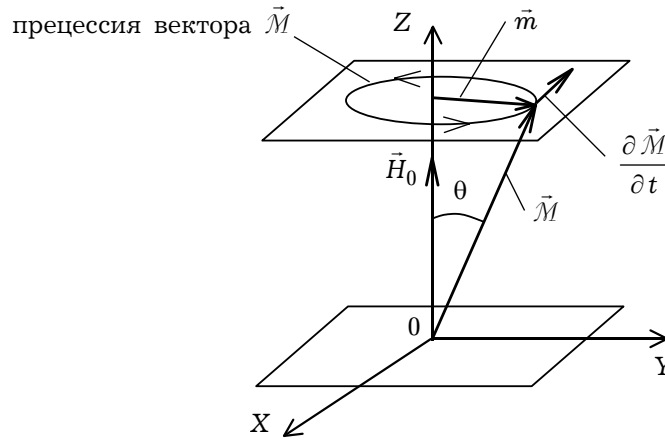


Рис. 10.8

(10.4.2) можно положить

$$\vec{H}_{\text{эф}} = \vec{z}_0 H_0 . \quad (10.4.5)$$

Предполагая колебания намагниченности $\vec{M}(t)$ гармоническими и учитывая их однородность, запишем

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{m} e^{i\omega t} , \quad (10.4.6)$$

где \vec{M}_1 — постоянная составляющая намагниченности, \vec{m} — комплексная амплитуда переменной намагниченности, а ω — неизвестная пока частота. Подставляя выражение (10.4.6) с учетом (10.4.5) в уравнение (10.4.2), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} M_{1x} = M_{1y} &= 0 , \\ i\omega m_x + \gamma_0 \mu_0 H_0 m_y &= 0 , \\ i\gamma_0 \mu_0 H_0 m_x + i\omega m_y &= 0 , \\ m_z &= 0 . \end{aligned} \quad (10.4.7)$$

Из последнего уравнения системы (10.4.7) следует, что конец вектора \vec{M} движется в плоскости, перпендикулярной оси OZ , то есть вектор переменной намагниченности \vec{m} лежит в плоскости XOY (рис. 10.8).

Условие совместности второго и третьего уравнений — равенство нулю главного определителя системы этих уравнений дает выражение для угловой скорости (круговой скорости) движения вектора \vec{M} :

$$\omega_H = \gamma H_0 , \quad (10.4.8)$$

где $\gamma = \gamma_0 \mu_0 = 2.21 \cdot 10^5 (\text{А/м})^{-1} \text{с}^{-1}$. Поле H_0 в (10.4.8) выражается в эрстедах.

Подставляя выражение для ω (10.4.8), например, во второе уравнение из системы (10.4.7), получаем

$$m_y = -im_x , \quad (10.4.9)$$

что означает, что конец вектора \vec{m} движется по окружности в правом направлении (против часовой стрелки, если смотреть навстречу вектору \vec{H}_0), то есть вектор \vec{m} имеет круговую поляризацию с правым вращением.

Таким образом, собственным однородным колебаниям намагниченности в изотропном ферромагнетике соответствует, как следует из (10.4.9), правая круговая прецессия вектора намагниченности относительно направления постоянного поля с частотой, определяемой формулой (10.4.8).

10.4.3. Вынужденные уравнения движения. Рассмотрим теперь вынужденные колебания намагниченности. Пусть к неограниченному однородному ферромагнетiku приложено переменное магнитное поле, так что

$$\vec{H}(t) = \vec{H}_0 + \vec{h} e^{i\omega t}, \quad (10.4.10)$$

где \vec{H}_0 — постоянная составляющая, \vec{h} — комплексная амплитуда переменной составляющей поля, ω — частота переменного поля. Установившуюся намагниченность \vec{M} будем по-прежнему искать в виде (10.4.6), но теперь ω — заданная частота вынуждающего поля.

Ниже рассмотрим случай малых переменных составляющих поля и намагниченности (малые магнитные колебания):

$$|\vec{m}| \ll |\vec{M}_0|, \quad |\vec{h}| \ll |\vec{H}_0|, \quad (10.4.11)$$

где \vec{M}_0 — равновесная намагниченность. Выполнение условий (10.4.11) дает возможность использовать метод последовательных приближений. В нулевом приближении, правомерном при (10.4.11) можно записать:

$$[\vec{M}_1, \vec{H}_0] = 0, \quad (10.4.12)$$

то есть постоянная составляющая намагниченности направлена по постоянному полю. Эта постоянная намагниченность (\vec{M}_1) в данном случае совпадает с равновесной намагниченностью \vec{M}_0 :

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_0. \quad (10.4.13)$$

В первом приближении, учитывая соотношения (10.4.12), (10.4.13) и сохраняя в уравнении (10.4.2) только члены первого порядка малости, при записи переменного магнитного поля в виде (10.4.10) получаем линеализованное уравнение движения:

$$i\omega \vec{m} + \gamma [\vec{m}, \vec{H}_0] = -\gamma [\vec{M}_0, \vec{h}]. \quad (10.4.14)$$

Проецируя уравнение (10.4.14) на оси декартовой системы координат, получаем:

$$\begin{aligned} i\omega m_x &= -\mu_0 \gamma_0 (m_y H_0 - M_0 h_y), \\ i\omega m_y &= \mu_0 \gamma_0 (m_x H_0 - M_0 h_x), \\ i\omega m_z &= 0. \end{aligned} \quad (10.4.15)$$

Разрешая (10.4.15) относительно комплексной амплитуды переменной намагниченности, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{m_x}{\mu_0} &= \frac{\omega_0 \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} h_x + i \frac{\omega \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} h_y, \\ \frac{m_y}{\mu_0} &= -i \frac{\omega \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} h_x + \frac{\omega_0 \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} h_y, \\ m_z &= 0, \end{aligned} \quad (10.4.16)$$

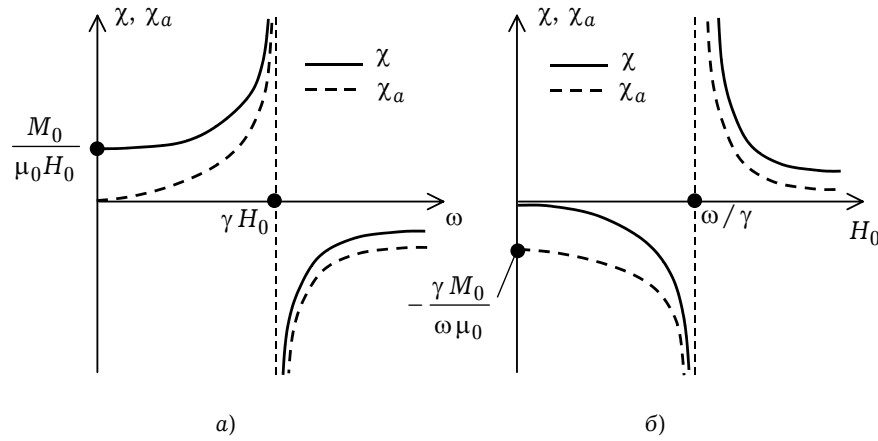


Рис. 10.9

где $\omega_M = \gamma_0 M_0$, $\omega_H = \mu_0 \gamma_0 H_0$.

Выражения (10.4.16), впервые полученные Полдером, могут быть представлены в тензорной форме:

$$\vec{m} = \mu_0 \vec{\chi} \vec{h}. \quad (10.4.17)$$

Магнитная восприимчивость по отношению к переменному полю (высокочастотная восприимчивость) $\vec{\chi}$ представляет собой тензор второго ранга следующего вида:

$$\vec{\chi} = \begin{vmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (10.4.18)$$

где

$$\chi = \frac{\omega_M \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad \chi_a = \frac{\omega \omega_M}{\omega_H^2 - \omega^2}.$$

Таким образом, комплексная амплитуда намагниченности в (10.4.6) определяется выражениями (10.4.17), (10.4.18). Качественные зависимости χ и χ_a от частоты и величины постоянного поля, следующие из (10.4.18), показаны на рис. 10.9.

Из соотношений (10.4.16) следует, что продольная составляющая переменного поля (направленная вдоль \vec{H}_0) в данном случае не вызывает переменной намагниченности. Поперечное же переменное поле вызывает не только переменную намагниченность, параллельную полю, но и перпендикулярную ему. Такое свойство среды называется *гиротропией*; оно приводит к тому, что восприимчивость для переменных составляющих становится несимметричным тензором, имеющим не только диагональные компоненты, но и антисимметричные (гиротропные) компоненты.

Второй существенной особенностью полученного решения является резонансная зависимость компонент тензора восприимчивости от частоты переменного поля ω и величины постоянного поля H_0 . Такая зависимость приводит, как мы в дальней-

шем убедимся, к резонансному поглощению энергии электромагнитного поля ферромагнетиком. Это явление носит название *ферромагнитного резонанса*.

10.4.4. Высокочастотная магнитная проницаемость. В электродинамике обычно имеют дело с вектором магнитной индукции \vec{B} . Комплексная амплитуда его переменной составляющей \vec{b} связана с переменной намагниченностью \vec{m} и переменным полем \vec{h} следующим образом:

$$\vec{b} = \mu_0 \vec{h} + \vec{m}. \quad (10.4.19)$$

Подставляя соотношение (10.4.17) в (10.4.19), получим:

$$\vec{b} = \mu_0 \vec{\mu} \vec{h}, \quad (10.4.20)$$

где

$$\vec{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (10.4.21)$$

$$\mu = 1 + \chi = \frac{\omega_H (\omega_H + \omega_M) - \omega^2}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad (10.4.22)$$

$$\mu_a = \chi_a = \frac{\omega_M \omega}{\omega_H^2 - \omega^2}.$$

Таким образом, переменная составляющая вектора магнитной индукции (10.4.20) с учётом (10.4.21) является тензорной величиной. Запись составляющих тензора $\vec{\mu}$ в форме (10.4.22) очень удобна, так как она не связана с какой-либо определенной системой единиц. В частности, вычисление частоты ферромагнитного резонанса ω_H и величины ω_M , определяемой намагниченностью феррита, можно производить и в абсолютной гауссовой системе единиц, которая используется во многих работах. Для этой системы

$$\omega_H = \gamma_1 H_0, \quad \omega_M = 4\pi \gamma_1 M_0, \quad f_0 = 2.8 \cdot 10^6 H_0, \quad (10.4.23)$$

где $\gamma_1 = 5.6\pi \cdot 10^6$ [1/(э·с)]. Здесь H_0 выражено в эрстедах, а $4\pi M_0$ — в гауссах.

Выражения (10.4.22) показывают, что составляющие тензора $\vec{\mu}$ намагниченного феррита являются функцией частоты ω , намагниченности M_0 и приложенного магнитного поля. Иногда вместо этих трех величин вводят безразмерные параметры ξ и A :

$$\mu = 1 - \frac{\xi A}{1 - \xi^2}, \quad \mu_a = \frac{A}{1 - \xi^2}, \quad (10.4.24)$$

где $A = \omega_M / \omega$, $\xi = \omega_H / \omega$.

Качественные зависимости μ и μ_a показаны на рис. 10.10. Как следует из (10.4.24), диагональная компонента μ отрицательна в некоторой области значений постоянных полей от H_2 до резонанса. Это означает, что составляющая переменной индукции, соответствующая переменному полю \vec{h} , в этой области отличается от него по фазе на π . Как следует из соотношений (10.4.22), поле, при

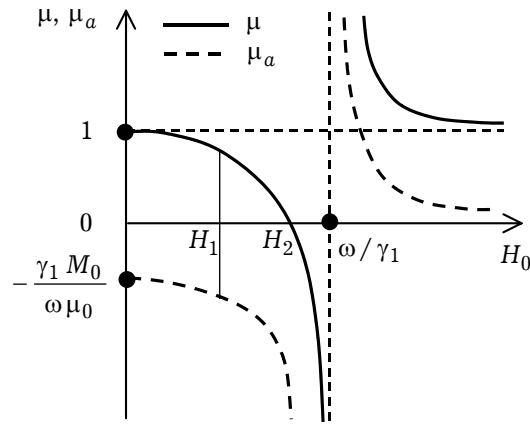


Рис. 10.10

котором $\mu = 0$, есть

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\frac{M_0}{2\mu_0}\right)^2} - \frac{M_0}{2\mu_0}, \quad (10.4.25)$$

а поле, при котором $\mu = |\mu_a|$:

$$H_1 = \frac{\omega}{\gamma_1} - \frac{M_0}{\mu_0}. \quad (10.4.26)$$

Формулы (10.4.25), (10.4.26) определяют характерные значения постоянного магнитного поля.

Иногда оказывается целесообразным введение циркулирующих поперечных составляющих векторов \vec{h} , \vec{m} , \vec{b} :

$$h_+ = h_x + i h_y, \quad h_- = h_x - i h_y; \quad (10.4.27)$$

аналогично m_{\pm} и b_{\pm} . При этом, как легко убедиться, справедливы следующие соотношения:

$$m_{\pm} = \mu_0 \chi_{\pm} h_{\pm}, \quad b_{\pm} = \mu_0 \mu_{\pm} h_{\pm}, \quad (10.4.28)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{\pm} &= \mu \pm \mu_a, \\ \chi_{\pm} &= \chi \pm \chi_a. \end{aligned} \quad (10.4.29)$$

Таким образом, в переменных (10.4.27), при введении которых выполняются соотношения (10.4.25), (10.4.28), тензоры $\tilde{\chi}$ и $\tilde{\mu}$ диагонализуются: составляющая поля h_+ обеспечивает существование только составляющих m_+ и b_+ ; соответственно, составляющая h_- — только m_- и b_- . Причем составляющая h_+ соответствует полю круговой поляризации с правым вращением. Составляющая h_- соответствует полю круговой поляризации с левым вращением. Качественные зависимости величин χ_+ и χ_- от поля H_0 показаны на рис. 10.11. Из этого

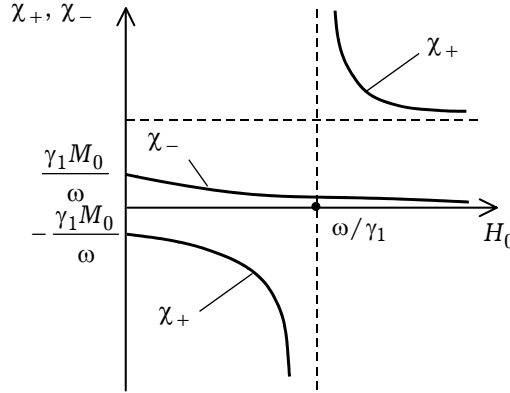


Рис. 10.11

рисунка видно, что резонанс имеет место только для χ_+ . Этот фундаментальный факт имеет простое объяснение: собственным движением намагниченности в ферромагнетике является правая процессия, и только поле с правым вращением может вызывать ферромагнитный резонанс.

10.4.5. Тензор магнитной проницаемости при наличии потерь в феррите. До этого момента мы не учитывали магнитные потери в ферритах, которые всегда имеют место. Наличие диссипации энергии приводит к тому, что свободные колебания намагниченности затухают, а вынужденные — имеют конечную амплитуду при резонансе и конечную ширину резонансной кривой.

Для учета магнитных потерь в уравнение движения (10.4.2) необходимо ввести добавочный диссипативный член. Обозначая это слагаемое буквой \vec{R} , записываем:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\mu_0\gamma_0[\vec{M}, \vec{H}] + \vec{R}. \quad (10.4.30)$$

Существует несколько форм записи диссипативного члена \vec{R} . Одна из них, предложенная Гильбертом, исходит из того, что на намагниченность действует дополнительное эффективное поле, пропорциональное по величине и обратное по знаку скорости изменения \vec{M} (сила «трения» всегда пропорциональна скорости при её небольших движениях). В этом случае

$$\vec{R} = \frac{\delta}{|\vec{M}|} \left[\vec{M}, \frac{d\vec{M}}{dt} \right], \quad (10.4.31)$$

где δ — некоторый безразмерный параметр (параметр потерь).

Запишем теперь уравнение движения (10.4.30) с учетом (10.4.31) для малых амплитуд переменных составляющих поля и намагниченности. Подставляя в него соотношения (10.4.6) и (10.4.10) и учитывая условия малости (10.4.11), получаем для комплексных амплитуд переменных намагниченности \vec{m} и поля \vec{h} линеаризованное (поле \vec{H}_0 по-прежнему направлено вдоль оси OZ) уравнение:

$$i\omega\vec{m} + (\omega_H + i\delta\omega)[\vec{m}, \vec{z}_0] = \mu_0\gamma_0 M_0 [\vec{h}, \vec{z}_0], \quad (10.4.32)$$

где \vec{z}_0 — единичный вектор, параллельный \vec{H}_0 и \vec{M}_0 . Видно, что соотношение (10.4.32) переходит в линеаризованное уравнение без диссипации (10.4.14) при замене

$$\omega_H \rightarrow \omega_H + i \delta \omega. \quad (10.4.33)$$

Рассмотрим сначала свободные колебания, то есть примем в уравнении (10.4.32) $\vec{h} = 0$. Частота и затухание свободных колебаний могут быть получены из условий существования решений векторного однородного (при $\vec{h} = 0$) уравнения (10.4.32). Для того, чтобы записать эти условия, достаточно произвести замену (10.4.33) в формуле (10.4.8). Таким образом, имеем

$$\omega = \frac{\omega_H}{1 - i \delta} = \frac{\omega_H}{1 + \delta^2} + i \frac{\delta \omega_H}{1 + \delta^2} = \omega' + i \omega'',$$

то есть при наличии потерь частота свободных колебаний становится комплексной. Ее вещественная часть есть частота колебаний, а мнимая часть — коэффициент затухания прецессии намагниченности. Величина $\tau = 1/\omega''$ является временем, за которое амплитуда прецессии убывает в e раз.

Решение уравнения (10.4.32) для вынужденных колебаний ($\vec{h} \neq 0$) также не представляет труда. Компоненты тензора $\vec{\chi}$ могут быть получены при помощи обратной замены (10.4.33) непосредственно из формул (10.4.18):

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\omega_M (\omega_H + i \delta \omega)}{\omega_H^2 - (1 + \delta^2) \omega^2 + 2i \delta \omega \omega_H}, \\ \chi_a &= \frac{\omega_M \omega}{\omega_H^2 - (1 + \delta^2) \omega^2 + 2i \delta \omega \omega_H}. \end{aligned} \quad (10.4.34)$$

Вещественные и мнимые части компонент тензора восприимчивости (при временной зависимости $\exp\{i\omega t\}$) принято вводить следующим образом:

$$\chi = \chi' - i\chi'', \quad \chi_a = \chi'_a - \chi''_a,$$

причем поглощению энергии поля веществом соответствуют $\chi'' > 0$ и $\chi''_a > 0$. Качественные зависимости вещественных и мнимых частей χ и χ_a от H_0 показаны на рис. 10.12.

Максимальные значения χ'' и χ''_a в случае малой диссипации энергии ($\delta \ll 1$) имеют место при $\omega = \omega_H$ и составляют

$$\chi''_{\text{рез}} \approx \chi''_{a \text{ рез}} \approx \frac{\omega_M}{2\delta \omega_H}.$$

Вещественные части компонент тензора $\vec{\chi}$ при резонансе, как следует из формул (10.4.34), есть

$$\chi'_{\text{рез}} = \frac{M_0}{2\mu_0 H_0}, \quad \chi'_{a \text{ рез}} = 0.$$

Для характеристики диссипации в резонансных системах часто используется *полуширина резонансной кривой*. В данном случае этот параметр следует опреде-

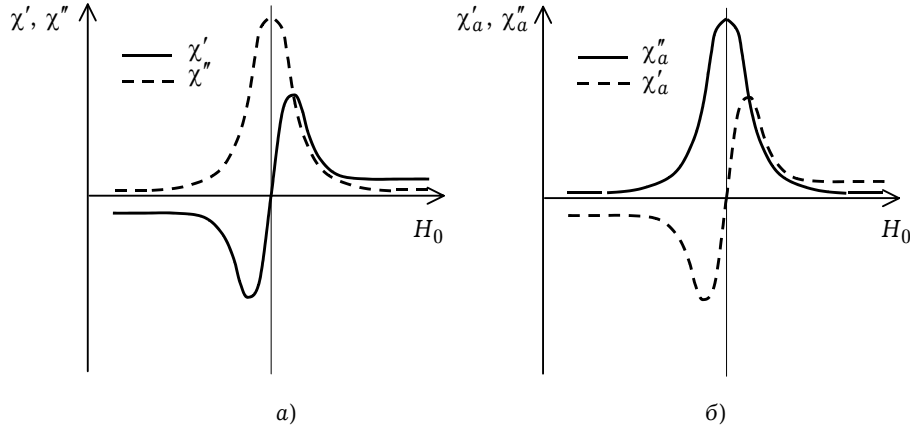


Рис. 10.12

лить как половину интервала между значениями ω , при которых

$$\chi'' = \frac{1}{2} \chi''_{\text{рез}}, \quad \chi'_a = \frac{1}{2} \chi''_{\text{рез}}.$$

10.5. Нормальные волны в безграничной намагниченной ферритовой среде

Задача исследования нормальных или собственных волн в безграничной ферритовой среде сводится к решению уравнений Максвелла, в которых должны быть учтены гиротропные свойства феррита. Рассматривая гармонические во времени процессы, запишем эти уравнения в виде:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -i\omega \vec{B}, & \text{div } \vec{B} &= 0, \\ \text{rot } \vec{H} &= i\omega \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, & \text{div } \vec{E} &= 0, \end{aligned} \quad (10.5.1)$$

где магнитная индукция и напряженность магнитного поля в случае подмагничивания ферритовой среды вдоль оси OZ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_0 (\mu H_x - i\mu_a H_y), \\ B_y &= \mu_0 (\mu H_y + i\mu_a H_x), \\ B_z &= \mu_0 \mu_{||} H_z. \end{aligned} \quad (10.5.2)$$

Рассмотрим распространение плоской волны вдоль некоторого направления, составляющего угол θ с осью OZ , вдоль которой ориентировано подмагничивающее поле H_0 . Для такой волны зависимость от координаты x будет отсутствовать и уравнения Максвелла (10.5.1) в декартовой системе координат с учётом (10.5.2)

принимают $(\partial / \partial x \equiv 0)$ вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i \omega \mu_0 (\mu H_x - i \mu_a H_y), \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -i \omega \mu_0 (\mu H_y + i \mu_a H_x),\end{aligned}\quad (10.5.3a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial y} &= i \omega \mu_0 \mu_{||} H_z, \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= i \omega \varepsilon_0 \varepsilon E_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= i \omega \varepsilon_0 \varepsilon E_y, \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -i \omega \varepsilon_0 \varepsilon E_z.\end{aligned}\quad (10.5.3б)$$

Из уравнений (10.5.3), исключая поперечные (относительно направления подмагничивающего поля H_0) составляющие, получаем для продольных два связанных уравнения:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon \mu_{\perp} \right) E_z + \omega \frac{\mu_0 \mu_{||} \mu_a}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} H_z &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon \mu_{||} \right) H_z - \omega \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\mu_a}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} E_z &= 0,\end{aligned}\quad (10.5.4)$$

где $\mu_{\perp} = \mu - \mu_a^2 / \mu$.

Для плоской гармонической волны, распространяющейся в плоскости ZOY , можно записать:

$$\begin{aligned}E_z &= A e^{-i(\gamma_y y + \gamma_z z)}, \\ H_z &= B e^{-i(\gamma_y y + \gamma_z z)},\end{aligned}\quad (10.5.5)$$

где $\gamma_z = \gamma \cos \theta$, $\gamma_y = \gamma \sin \theta$, $\gamma = \sqrt{\gamma_z^2 + \gamma_y^2}$ — неизвестная пока постоянная распространения; A и B — неизвестные постоянные, соотношение между которыми определяется углом θ . Подстановка выражений (10.5.5) в уравнения (10.5.4) приводит к системе двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных A и B . Условие совместности этих уравнений (равенство нулю главного определителя) даёт следующее дисперсионное соотношение:

$$\frac{\gamma^4}{k^4} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\mu_{||}} + \frac{\cos^2 \theta}{\mu} \right) - \frac{\gamma^2}{k^2} \left[\sin^2 \theta \left(1 + \frac{\mu_{\perp}}{\mu_{||}} \right) + 2 \cos^2 \theta \right] + \varepsilon \mu_{\perp} = 0. \quad (10.5.6)$$

Разрешая (10.5.6) относительно γ^2 , получаем формулу для вычисления постоянной распространения:

$$\gamma_{1,2}^2 = k^2 \varepsilon \frac{2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\parallel}} - 1 \right) \pm \sqrt{\sin^4 \theta \left(\frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\parallel}} - 1 \right)^2 + 4 \cos^2 \theta \frac{\mu_a^2}{\mu^2}}}{2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{\mu_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\mu} \right)}, \quad (10.5.7)$$

из которой следует, что постоянная распространения имеет два значения. Это говорит о том, что в заданном направлении на фиксированной частоте могут распространяться независимо друг от друга две волны, имеющие постоянные распространения γ_1 и γ_2 . Фазовые скорости этих волн определяются как:

$$v_{1,2} = \frac{\omega}{\gamma_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_{\text{эф}1,2}}}, \quad (10.5.8)$$

где

$$\mu_{\text{эф}1,2} = \frac{\gamma_{1,2}^2}{k^2 \varepsilon} \text{ —}$$

эффективные магнитные проницаемости среды для волн, распространяющихся в данном направлении.

Уравнение (10.5.7) можно получить и исходя непосредственно из уравнений Максвелла. Действительно, для однородной плоской волны, когда

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \vec{r})}, \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \vec{r})},$$

где \vec{E}_0 и \vec{H}_0 — постоянные векторы, уравнения Максвелла (10.5.1) записываются в виде:

$$\begin{aligned} [\vec{\gamma}, \vec{E}_0] + k \mu_0 \ddot{\vec{H}}_0 &= 0, \\ [\vec{\gamma}, \vec{H}_0] - k \varepsilon_0 \vec{E}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (10.5.9)$$

из которых несложно получить формулу (10.5.7) и, соответственно, (10.5.8). В (10.5.9) $\vec{\gamma}$ — вектор, задающий направление распространения волны.

10.5.1. Продольно намагниченная ферритовая среда. Рассмотрим явления, которые происходят в ферритовой среде при распространении электромагнитных волн в направлении, совпадающем с направлением намагничивающего поля. В этом случае угол $\theta = 0$ и постоянные распространения двух нормальных волн будут определяться из уравнения:

$$\gamma_{1,2}^2 = k^2 \varepsilon (\mu \pm \mu_a). \quad (10.5.10)$$

Таким образом, эффективные магнитные проницаемости среды для этих волн имеют вид:

$$\mu_{\text{эф}1} = \mu_+ = \mu + \mu_a, \quad \mu_{\text{эф}2} = \mu_- = \mu - \mu_a. \quad (10.5.11)$$

Подставляя (10.5.10) в проекции уравнений (10.5.9) на оси декартовой системы ко-

ординат при $\theta = 0$, получаем:

$$E_z = H_z = 0, \quad \frac{E_y}{E_x} = \frac{H_y}{H_x} = \mp i, \quad (10.5.12a)$$

$$\frac{E_x}{H_x} = \frac{E_y}{H_y} = \pm i \sqrt{\frac{\mu \pm \mu_a}{\varepsilon}} \equiv Z. \quad (10.5.12б)$$

Знаки « \pm » в (10.5.12) соответствуют двум различным волнам. Из соотношений (10.5.12) следует, что обе волны являются поперечными (Т-волны) и имеют круговую поляризацию. Верхним знакам соответствует волна с правым вращением, а нижним – с левым вращением векторов поля. Этим волнам в дальнейшем будем приписывать нижние индексы «п» и «л». Величину Z иногда называют волновым сопротивлением продольно намагниченной среды для волн с правым и левым вращением векторов поля.

Таким образом, в рассматриваемом случае волна линейной поляризации, распространяющаяся вдоль постоянного магнитного поля, распадается на две нормальные волны круговой поляризации. Если предположить, что исходная волна имела линейную поляризацию, то амплитуды нормальных волн, на которые она распадается, в отсутствие потерь будут одинаковы. По мере распространения в феррите между этими волнами будет набегать фазовый сдвиг, поскольку их фазовые скорости отличны друг от друга ($v_1 \neq v_2$). Поэтому суммарная волна, которую можно наблюдать в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения, будет отличаться от исходной направлением плоскости поляризации. Это означает, что в процессе распространения плоскость поляризации линейно поляризованной волны непрерывно поворачивается. В этом состоит хорошо известное явление вращения плоскости поляризации, называемое *явлением Фарадея*.

Угол поворота плоскости поляризации на пути длиной l определяется формулой

$$\Delta\psi = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)l = \frac{k\sqrt{\varepsilon}}{2}(\sqrt{\mu + \mu_a} - \sqrt{\mu - \mu_a})l. \quad (10.5.13)$$

В (10.5.13) $\gamma_{1,2}$ определяются соотношением (10.5.10).

Другим важным эффектом при распространении электромагнитной волны вдоль постоянного магнитного поля является *продольный ферромагнитный резонанс*. Выражения магнитных проницаемостей феррита для нормальных волн продольно намагниченной среды имеют вид:

$$\mu_+ = \mu - \mu_a = 1 - \frac{\omega_M}{\omega - \omega_H} \quad (10.5.14a)$$

для волны с правым вращением и

$$\mu_- = \mu + \mu_a = 1 + \frac{\omega_M}{\omega + \omega_H} \quad (10.5.14б)$$

для волны с левым вращением.

Как видно из (10.5.14а,б), для первой из этих волн при $\omega = \omega_H$ величина μ_+ становится бесконечно большой, то есть имеет место резонанс. Так как в среде

всегда присутствуют потери, то при резонансе эта волна будет испытывать сильное поглощение. В этом состоит явление *ферромагнитного резонанса*. Для волны с левым вращением векторов поля резонанса нет и магнитная проницаемость меняется монотонно с изменением напряженности поля или частоты.

10.5.2. Поперечно намагниченная ферритовая среда. При распространении волн в направлении, перпендикулярном постоянному полю, угол $\theta = \pi/2$, и постоянные распространения, как следует из (10.5.7), будут определяться из соотношений:

$$\gamma_1^2 = k^2 \epsilon \mu_{\perp}, \quad \gamma_2^2 = k^2 \epsilon \mu_{\parallel}. \quad (10.5.15)$$

Составляющие полей этих волн определяются из уравнений (10.5.9) и имеют вид:

для первой волны

$$H_{x1} = C_1 \psi_1, \quad H_{y1} = -i \frac{\mu_a}{\mu} C_1 \psi_1, \quad E_z = C_1 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{\perp}}{\epsilon_0 \epsilon}} \psi_1, \quad (10.5.16)$$

где

$$\psi_1 = e^{i(\omega t - \gamma_1 y)}, \quad C_1 = \frac{i\mu}{\mu_a} \frac{(\gamma_1^2 - k^2 \epsilon \mu_{\parallel})}{\gamma_1^2} A_1, \quad A_1 — \text{постоянная},$$

для второй волны

$$H_{z2} = A_2 \psi_2, \quad E_{x2} = -A_2 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{\parallel}}{\epsilon_0 \epsilon}} \psi_2, \quad (10.5.17)$$

где $\psi_2 = e^{i(\omega t - \gamma_2 y)}$, A_2 — постоянная; $\gamma_{1,2}$ определяются как (10.5.15).

Первая из нормальных волн, называемая *необыкновенной*, плоская, но не поперечная, так как она имеет составляющую H_y вдоль направления распространения, сдвинутую по фазе относительно поперечной составляющей H_x на $\pi/2$. Из соотношений (10.5.16) следует, что с уменьшением намагниченности среды ($\mu_a \rightarrow 0$) продольная составляющая H_y поля исчезает и волна становится поперечной. Постоянная распространения γ_1 зависит от величины подмагничивающего поля H_0 .

Вторая волна (10.5.17), называемая *обыкновенной*, является поперечной и имеет постоянную распространения γ_2 , не зависящую от постоянного поля. Эта волна не реагирует на гиротропные свойства среды.

Волна произвольной поляризации, бегущая вдоль оси OY , распадается в такой среде на две указанные выше нормальные волны. Если поляризация исходной волны в плоскости $y = 0$ линейная и ориентирована под углом 45° относительно осей OX и OZ , то амплитуды обыкновенной и необыкновенной волн будут одинаковы. В процессе распространения вдоль оси OY между этими волнами будет набегать разность фаз, так как они имеют разные фазовые скорости, и поляризация суммарной волны будет меняться, как показано на рис. 10.13, причем она в общем случае поляризована по эллипсу, оси которого составляют 45° с координатными осями OX и OZ , а соотношение осей эллипса периодически изменяется от 0 до ∞ по мере распространения вдоль оси OY . В случае, когда амплитуды обыкновенной и необыкновенной волн разные, также существуют плоскости, где результирующая волна имеет эллиптическую поляризацию, однако оси эллипсов будут уже составлять с

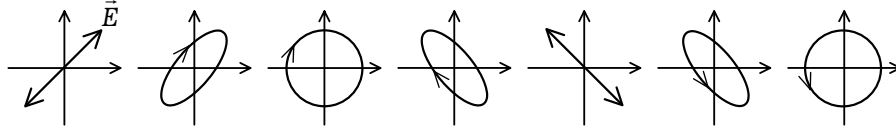


Рис. 10.13

координатными осями угол, отличный от 45° . Рассмотренное явление носит название *двойного преломления*.

Другое явление, которое наблюдается в поперечно намагниченном феррите, состоит в резонансном поглощении необыкновенной волны при определенной величине магнитного поля. Действительно, так как

$$\mu_{\perp} = 1 - \frac{\left(\omega_H + \frac{\omega_M}{\mu_0} \right) \omega_M}{\left[\omega^2 - \omega_H (\omega_H + \omega_M) \right]},$$

то $\mu_{\perp} \rightarrow \infty$ при

$$\omega = \omega_{\perp} = \sqrt{\omega_H (\omega_H + \omega_M)} = \omega_H \sqrt{1 + \frac{M_0}{H_0 \mu_0}}. \quad (10.5.18)$$

Этот случай называют *поперечным ферромагнитным резонансом*. Напряженность магнитного поля, соответствующая резонансу, определяется из (10.5.18). Обозначая ее через H_{\perp} , получаем:

$$H_{\perp} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\mu_0^2 \gamma_0^2} + \frac{M_0^2}{4 \mu_0^2}} - \frac{M_0}{2 \mu_0} = \sqrt{H_{||}^2 + \frac{M_0^2}{4 \mu_0^2}} - \frac{M_0}{2 \mu_0},$$

где через $H_{||}$ обозначена величина магнитного поля, соответствующая продольному ферромагнитному резонансу. Следовательно, напряженность поля, соответствующая поперечному ферромагнитному резонансу, всегда меньше, чем напряженность поля в случае продольного резонанса: $H_{||} > H_{\perp}$.

10.6(*). Магнитостатические и спиновые волны в неограниченной изотропной среде

Одним из важных следствий учета частотной зависимости компонент тензора $\hat{\mu}$ в магнитно-гиротропных средах является возможность существования в таких средах «медленных» волн с очень малыми (по сравнению с «обычными» электромагнитными волнами) длинами. Малость длины волны (или размеров тела) по сравнению с длиной обычной электромагнитной волны дает возможность при исследовании медленных волн (или низкочастотных колебаний) пренебречь запаздывающими членами (токами смещения) в уравнениях Максвелла, то есть использовать уравнения магнитостатики. Это дает основание называть такие волны и колебания *магнитостатическими*.

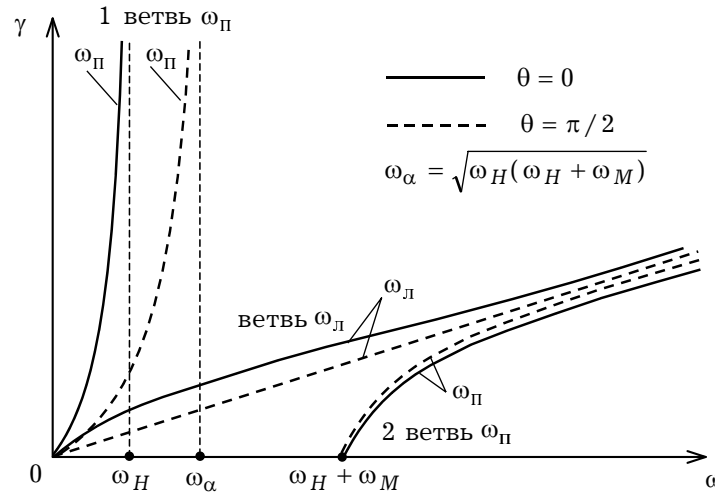


Рис. 10.14

Основное внимание уделим рассмотрению магнитостатических волн в ферромагнетике, намагниченном до насыщения. При этом не будем учитывать диссипацию энергии в среде.

Дисперсионные соотношения для электромагнитных волн в неограниченном, изотропном, намагниченном до насыщения ферромагнетике могут быть получены в результате подстановки в формулу (10.5.7) выражений для компонент тензора $\ddot{\mu}$ (10.4.22). Полученные таким образом качественные зависимости $\omega(\gamma)$ приведены для двух направлений распространения на рис. 10.14.

При распространении электромагнитных волн в продольно намагниченном ферромагнетике ($\theta = 0$) справедливо соотношение (10.5.10). Подставляя в него выражения для компонент тензора $\ddot{\mu}$ (10.4.22), получаем дисперсионное соотношение:

$$\omega_H \mp \omega + \frac{\omega_M}{[1 - (\gamma^2 / k^2 \epsilon)]} = 0. \quad (10.6.1)$$

Здесь, как и раньше, верхний знак соответствует волне с правым вращением, нижний — с левым вращением векторов поля.

Качественные зависимости постоянной распространения γ от ω для волн с правым и левым вращением, полученные с учётом (10.6.1), приведены на рис. 10.14. Из этого рисунка видно, что для волны с левым вращением, для которой компоненты μ и μ_a не испытывают резонанса, дисперсионная зависимость $\omega(\gamma)$ мало отличается от линейной, характерной для среды, параметры которой не зависят от частоты. Для волны с правым вращением дисперсионные зависимости имеют две ветви. Для одной из них, называемой электромагнитной, частота ω неограниченно растёт с ростом γ , стремясь к асимптоте $ck\sqrt{\epsilon}$ (c — скорость света). Для другой — магнитостатической ветви — частота ω при больших γ стремится к постоянной величине ω_H .

При распространении электромагнитных волн в поперечно намагниченном ферромагнетике ($\theta = \pi/2$) магнитостатическая ветвь, как это следует из соотношений (10.5.15), при больших γ стремится к постоянной величине $\sqrt{\omega_H(\omega_H + \omega_M)}$.

10.6.1. Дисперсионные соотношения для магнитостатических волн. Для магнитостатических (медленных) волн справедливо условие

$$\gamma \gg k\sqrt{\varepsilon}, \quad (10.6.2)$$

используя которое, из дисперсионного соотношения (10.5.6) получаем выражение

$$\mu = -\operatorname{ctg}^2 \theta. \quad (10.6.3)$$

Неравенство (10.6.2) является условием применимости уравнений магнитостатики. Покажем, что дисперсионное соотношение (10.6.3) непосредственно следует из уравнений магнитостатики.

Уравнения магнитостатики при отсутствии сторонних токов имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div}(\tilde{\mu} \vec{H}) &= 0, & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho. \end{aligned} \quad (10.6.4)$$

Из первого уравнения (10.6.4) следует, что можно ввести магнитостатический потенциал ψ , так что

$$\vec{H} = \nabla \psi. \quad (10.6.5)$$

Подставляя выражение (10.6.5) во второе уравнение из (10.6.4), получаем уравнение для потенциала

$$\operatorname{div}(\tilde{\mu} \nabla \psi) = 0. \quad (10.6.6)$$

Для изотропной среды, намагниченной вдоль оси OZ , тензор $\tilde{\mu}$ имеет вид (10.4.21). Поэтому из (10.6.6) следует уравнение Уокера:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (10.6.7)$$

Интересно отметить, что в это уравнение входит только диагональная компонента тензора $\tilde{\mu}$.

Будем искать решение уравнения (10.6.7) для плоской волны, распространяющейся в неограниченной среде:

$$\psi = \psi_0 \exp[-i(\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z)], \quad (10.6.8)$$

причем

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = \gamma^2, \quad \frac{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}}{\gamma_z} = \operatorname{tg} \theta.$$

Подставляя выражение (10.6.8) в уравнение Уокера (10.6.7), приходим к дисперсионному уравнению (10.6.3).

Решая, с учетом (10.4.22), уравнение (10.6.3) относительно частоты ω , находим

$$\omega^2 = \omega_H(\omega_H + \omega_M \sin^2 \theta). \quad (10.6.9)$$

Таким образом, частота магнитостатических волн в неограниченной среде не зависит от волнового числа γ , а определяется только значениями постоянного поля намагниченности и углом между направлением распространения и направлением постоянного подмагничивающего поля. Эти волны, как следует из формулы (10.6.3), могут существовать лишь в области отрицательных значений μ , то есть их частоты лежат, как следует из (10.6.9), в пределах

$$\omega_H \leq \omega \leq \omega_{\perp} \equiv \sqrt{\omega_H (\omega_H + \omega_M)}.$$

10.6.2. Пределы применимости магнитостатического приближения. Обсудим пределы применимости используемого в этом разделе приближения. Снизу интервал допустимых значений γ ограничивается условием (10.6.2). Для обычных ферритов из условия (10.6.2) следует, что $\gamma \gg 10 \text{ см}^{-1}$.

Для оценки верхней границы необходимо учесть в линеаризованном уравнении движения намагниченности (10.4.14) слагаемые

$$\gamma_0 [\vec{M}_0, \vec{h}_q] \text{ и } \gamma_0 [\vec{m}, \vec{H}_{\text{эф0}}],$$

где \vec{h}_q — эффективное переменное поле неоднородного обменного взаимодействия, $\vec{H}_{\text{эф0}}$ — постоянное эффективное поле, включающее внешнее поле, размагничивающее поле и поле анизотропии, γ_0 — гиромагнитная постоянная. Условие, определяющее верхнюю границу значений γ , заключается в том, что первое из этих слагаемых должно быть гораздо меньше второго:

$$|\vec{M}_0| |\vec{h}_q| \ll |\vec{m}| |\vec{H}_{\text{эф0}}|. \quad (10.6.10)$$

Для плоской волны

$$|\vec{h}_q| = q \gamma^2 |\vec{m}|,$$

где q — постоянная неоднородного обменного взаимодействия, и условие (10.6.10) принимает вид:

$$\gamma \ll \sqrt{\frac{H_{\text{эф0}}}{q M_0}},$$

откуда для ферритов в сантиметровом диапазоне должно быть

$$\gamma \ll 3 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}.$$

Таким образом, существует довольно широкий интервал значений волновых чисел γ : от 10^2 см^{-1} до $10^4 \div 10^5 \text{ см}^{-1}$, в котором справедливо магнитостатическое приближение без учета неоднородного члена в энергии обменного взаимодействия.

10.6.3. Спиновые волны в неограниченном ферромагнетике. При изучении неоднородных магнитных колебаний с более быстрыми вариациями переменной намагниченности \vec{m} в пространстве необходимо учитывать энергию обменного взаимодействия вследствие параллельности соседних элементарных магнитных моментов. Здесь мы по-прежнему будем использовать континуальную модель, в которой состояние магнитоупорядоченной среды описывается классическими векторами подрешеток \vec{M}_i (для ферромагнетика — одним вектором \vec{M}), являющимися

непрерывными функциями координат. В этой модели обменная энергия будет учитываться при помощи неоднородных членов обменной энергии, зависящих от производных \vec{M} по координатам. Волны, распространяющиеся в такой среде, с учетом обменного взаимодействия, будем называть *спиновыми*.

Рассмотрим изотропный ферромагнетик, намагниченный до насыщения постоянным полем \vec{H}_0 . Для плоской волны в такой среде справедливо магнитостатическое дисперсионное уравнение (10.6.3). Задача об определении спектра спиновых волн сводится к определению тензора магнитной проницаемости $\vec{\mu}$ с учетом неоднородного члена энергии обменного взаимодействия. Для того, чтобы найти компоненты тензора $\vec{\mu}$, достаточно решить следующее уравнение движения:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma_0\mu_0 [\vec{M}, \vec{H}_{\text{эф}}] + \frac{\delta}{|\vec{M}|} \left[\vec{M}, \frac{d\vec{M}}{dt} \right]. \quad (10.6.11)$$

Представим величины, входящие в уравнение (10.6.11), в виде сумм постоянных и переменных (гармонических) величин:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_0 + \vec{m} e^{i\omega t}, \\ \vec{H}_{\text{эф}} &= \vec{H}_0 + \vec{h}_{\text{об}} e^{i\omega t} + \vec{h} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (10.6.12)$$

где \vec{H}_0 — внутреннее постоянное магнитное поле, направленное вдоль оси OZ ; $\vec{h}_{\text{об}}$ — эффективное обменное поле; \vec{h} — внутреннее переменное магнитное поле, которое считается заданным.

Для изотропной среды в случае распространения в ней плоской волны

$$\vec{m} = \vec{m}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

обменное поле $\vec{h}_{\text{об}}$ определяется следующим образом:

$$\mu_0 \vec{h}_{\text{об}} = -qk^2 \vec{m}. \quad (10.6.13)$$

Подставляя (10.6.13) в уравнение движения (10.6.11), получаем с учётом (10.6.12) и $\vec{H}_0 = H_0 \vec{z}_0$, $\vec{M}_0 = M_0 \vec{z}_0$:

$$i\omega \vec{m} + \left(\omega_H + \eta k^2 + i\delta\omega \right) [\vec{m}, \vec{z}_0] = \gamma_0\mu_0 M_0 [\vec{h}, \vec{z}_0], \quad (10.6.14)$$

где

$$\eta = \gamma_0 q M_0.$$

Нетрудно видеть, что замена

$$\omega_H \rightarrow \omega_H + \eta k^2$$

приводит уравнение (10.6.14) к уравнению (10.4.32), которое не учитывает неоднородное обменное взаимодействие. Таким образом, нетрудно получить, что

$$\mu = \frac{(\omega_H + \eta k^2 + i\delta\omega)(\omega_H + \eta k^2 + i\delta\omega + \omega_M) - \omega^2}{(\omega_H + \eta k^2 + i\delta\omega) - \omega^2}. \quad (10.6.15)$$

Компоненты тензора $\vec{\mu}$ ферромагнетика с учетом неоднородного обменного взаимодействия зависят, таким образом, не только от частоты, но и от волнового вектора \vec{k} , то есть среда, описываемая тензором $\vec{\mu}$, обладает пространственной дисперсией.

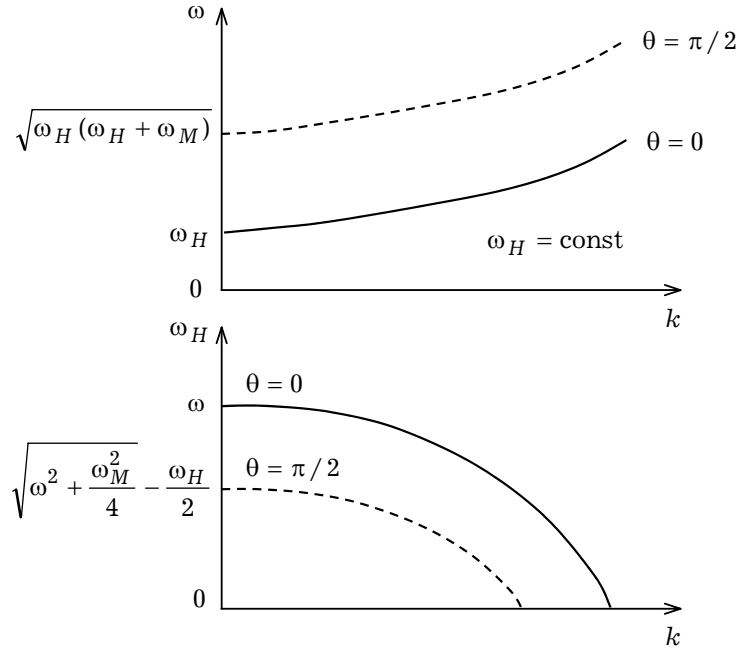


Рис. 10.15

Для нахождения дисперсионного соотношения для спиновых волн в изотропном ферромагнетике необходимо подставить выражение (10.6.15) в уравнение (10.6.3). В результате получим

$$\begin{aligned} & \omega^2 - (\omega_H + \eta k^2 + i\delta \omega) \times \\ & \times (\omega_H + \eta k^2 + i\delta \omega + \omega_M \sin^2 \theta) = 0, \end{aligned} \quad (10.6.16)$$

где θ — угол между направлением распространения и осью OZ .

Рассмотрим незатухающие спиновые волны, то есть положим в уравнении (10.6.16) $\delta = 0$. Тогда из него следует, что

$$\omega^2 = (\omega_H + \eta k^2)(\omega_H + \eta k^2 + \omega_M \sin^2 \theta). \quad (10.6.17)$$

Если $\eta k^2 \ll \omega_H, \omega_M$, то уравнение (10.6.17) переходит в соотношение (10.6.9) для безобменных магнитостатических волн.

Для спиновых волн, распространяющихся в направлении постоянного подмагничивающего поля ($\theta = 0$), из (10.6.17) имеем:

$$\omega = \omega_H + \eta k^2.$$

Качественные зависимости ω от k при $\omega_H = \text{const}$ и ω_H от k при $\omega = \text{const}$ показаны на рис. 10.15 для $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. Заметим, что используемая континуальная модель перестает быть применимой, когда параметр $1/k$ становится сравнимым с межатомными расстояниями, то есть приобретает порядок 10^{-8} см.

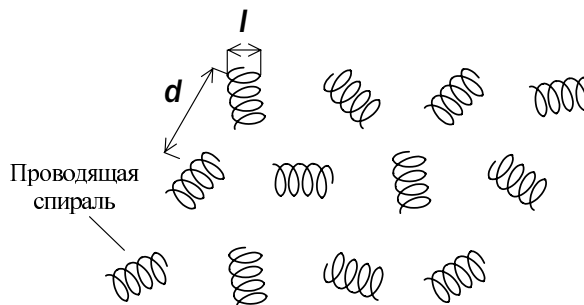


Рис. 10.16

10.7(*). Электромагнитные волны в киральных средах

10.7.1. Понятие киральной среды. В конце XX века в электродинамике СВЧ и КВЧ значительно возрос интерес к исследованию композитных искусственных сред, обладающих пространственной дисперсией в диапазоне СВЧ. Одним из примеров таких материалов является *киральная среда*, представляющая собой совокупность равномерно распределённых в изотропной диэлектрической среде проводящих зеркально-асимметричных элементов. Слово «киральный» произошло от греческого $\chi\epsilon\iota\rho$ — «рука, зеркально-несимметричный объект».

Киральность в общем смысле представляет собой свойство некоторого объекта не совпадать и не совмещаться со своим зеркальным отображением (в плоском зеркале) ни при каких перемещениях и вращениях. Киральные объекты всегда существуют только в двух видах: сам основной объект и его «зеркальный двойник», имеющий форму зеркального отображения.

В диапазоне СВЧ при создании и моделировании киральных сред чаще всего используются проводящие проволочные спирали с право- и левовинтовыми закрутками. Киральная среда обладает существенной пространственной дисперсией, если расстояние между соседними элементами d соизмеримо с длиной СВЧ волны λ ($d \sim \lambda$), а размеры спиралей l гораздо меньше её ($l \ll \lambda$) (рис. 10.16). В электродинамике элементы, обладающие вышеуказанными свойствами, принято называть *электромагнитными частицами*. Киральная среда — это искусственная материальная среда, состоящая из электромагнитных частиц зеркально-асимметричной формы (киральных элементов), вкраплённых в однородный изотропный диэлектрик.

Естественные среды, обладающие киральными свойствами, известны ещё с XIX века в оптике, где получили название оптически-активных. В 1860 году известный биолог Луи Пастер впервые объяснил природу этого явления молекулярной асимметрией, когда формы молекул лево- и правовращающихся изомеров относятся друг к другу как зеркальные отображения. Левовращающиеся молекулы получили название L-изомеров, а правовращающиеся — D-изомеров. Основным свойством оптически-активной среды является вращение плоскости поляризации электромагнитного излучения, проходящего через неё (среду). Примерами естественных киральных сред являются глюкоза и галактоза.

Для описания киральной среды недостаточно двух общепринятых материальных параметра — диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостей. Вводится дополнительный параметр χ , называемый *параметром киральности*. Заметим, что $\chi > 0$ для киральной среды на основе правовинтовых спиралей и $\chi < 0$ — в случае левовинтовых спиралей.

Материальные уравнения для киральной среды связывают векторы электрической и магнитной индукций одновременно как с напряжённостью электрического, так и магнитного полей. Это является следствием того, что падающее на киральный элемент электрическое поле индуцирует на нём не только электрический дипольный момент, но также и магнитный дипольный момент. В свою очередь, переменное магнитное поле в киральном элементе создаёт как магнитный, так и электрический дипольный момент. Это является следствием своеобразной формы кирального элемента. Например, наведённый ток в проводящей спирали будет протекать не только по кольцевым виткам спирали, но и будет иметь составляющую вдоль её оси, так как переход от одного к другому витку осуществляется как раз вдоль этой оси.

10.7.2. Материальные уравнения для киральной среды. Рассмотрим подробно модель киральной среды и исходя из микроскопической модели вещества получим для неё материальные уравнения. Как уже отмечалось, киральная среда представляет собой совокупность электромагнитных частиц зеркально-асимметричной формы равномерно распределённых в диэлектрике.

Простейшими электромагнитными частицами являются электрический и магнитный диполи. Электрический диполь представляет собой два одинаковых по величине и различных по знаку электрических заряда $+q$ и $-q$, разнесённых друг от друга на расстояние d . Свойства диполя описываются дипольным моментом $\vec{p}_e = q\vec{d}$, где \vec{d} — вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному, модуль которого равен расстоянию между зарядами.

Малый, по сравнению с длиной волны, прямолинейный отрезок электрического проводника представляет собой рассеивающий электрический диполь. Если на проводник падает электромагнитная волна, то продольная компонента электрического поля \mathcal{E}_z возбуждает в нём электрический ток, пропорциональный $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0} \cos(\omega t)$ (\mathcal{E}_{z0} — амплитуда напряжённости электрического поля падающей ЭМВ, ω — круговая частота электромагнитной волны). При этом для электрического дипольного момента можно записать следующее соотношение:

$$\vec{p}_e = \epsilon_0 \alpha_e \mathcal{E}_z \vec{z}_0,$$

где α_e — электрическая поляризуемость, \vec{z}_0 — единичный вектор, направленный вдоль проводника.

Аналогично можно ввести в рассмотрение элементарный магнитный диполь, представляющий собой металлическое проволоочное кольцо. При этом магнитный дипольный момент определяется компонентой магнитного поля H_z , пронизывающей плоскость кольца:

$$\vec{p}_m = \mu_0 \alpha_m H_z \vec{z}_0,$$

где α_m — магнитная поляризуемость.

В рассмотренных случаях электрический дипольный момент создаётся только электрическим полем \mathcal{E}_z , а магнитный — только магнитным полем \mathcal{H}_z . Такая ситуация имеет место если материальная среда состоит из электромагнитных частиц зеркально-симметричной формы. Примером такой среды является изотропный естественный диэлектрик, состоящий из зеркально-симметричных атомов.

Рассмотрим, как образуются дипольные моменты при падении электромагнитной волны на киральный элемент (например, на проводящую спираль). Будем считать, что на него падает плоская ЭМВ линейной поляризации. В области спирали (как и любой неоднородности) поле волны будет иметь, в общем случае, обе продольные компоненты \mathcal{E}_z и \mathcal{H}_z . Тогда продольная (вдоль оси спирали) составляющая электрического дипольного момента \mathcal{P}_{ez} образуется как компонентой \mathcal{E}_z электрического поля, так и компонентой \mathcal{H}_z магнитного поля, пронизывающего кольца спирали и создающего кольцевой ток, имеющий продольную составляющую:

$$\mathcal{P}_{ez} = \varepsilon_0 (\alpha_e \mathcal{E}_z + \alpha_{em} Z \mathcal{H}_z), \quad (10.7.1)$$

где α_{em} — параметр, называемый *электромагнитной поляризуемостью* элемента; Z — импеданс среды.

Аналогично продольная составляющая магнитного дипольного момента спирали \mathcal{P}_{mz} образуется кольцевым электрическим током, который создаётся пронизывающим спираль магнитным полем, и к нему добавляется кольцевой ток, который создаётся электрическим полем, так как ток вдоль оси спирали может течь только проходя по её кольцам:

$$\mathcal{P}_{mz} = \mu_0 (\alpha_m \mathcal{H}_z + \alpha_{me} Z^{-1} \mathcal{E}_z), \quad (10.7.2)$$

где α_{me} — параметр, называемый *магнитоэлектрической поляризуемостью* элемента.

Будем считать, что поля изменяются во времени по гармоническому закону, то есть векторы $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}} \sim \exp(i\omega t)$. Переходя к комплексным амплитудам \vec{E}, \vec{H} и $p_{e,m}$, перепишем соотношения (10.7.1) и (10.7.2) в виде:

$$\begin{aligned} p_{ez} &= \varepsilon_0 (\alpha_e E_z + \alpha_{em} Z H_z), \\ p_{mz} &= \mu_0 (\alpha_m H_z + \alpha_{me} Z^{-1} E_z). \end{aligned} \quad (10.7.3)$$

В научной литературе показывается, что в случае гармонической зависимости полей от времени для спирали параметры α_{em} и α_{me} равны:

$$\alpha_{em} = \mp i\beta, \quad \alpha_{me} = \pm i\beta,$$

где верхний и нижний знаки соответствуют спиралям с правой и левой закруткой; β — вещественная положительная величина.

С учётом этого выражения (10.7.3) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} p_{ez} &= \varepsilon_0 (\alpha_e E_z \mp i\beta Z H_z), \\ p_{mz} &= \mu_0 (\alpha_m H_z \pm i\beta Z^{-1} E_z). \end{aligned} \quad (10.7.4)$$

Векторы поляризации и намагничённости определяются из соотношений:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}, \quad (10.7.5)$$

где \vec{D} — комплексная амплитуда вектора электрической индукции; \vec{B} — комплексная амплитуда вектора магнитной индукции; \vec{P} — комплексная амплитуда вектора поляризации среды; \vec{M} — комплексная амплитуда вектора намагничённости среды.

Полный электрический дипольный момент среды (вектор поляризации) определяется через моменты отдельных электромагнитных частиц, образующих среду:

$$\vec{P} = \vec{p}_e N, \quad (10.7.6)$$

где N — концентрация элементов (число элементов в единице объёма вещества).

Подставляя в первое соотношение (10.7.5) выражения (10.7.6) и (10.7.4) и усредняя по объёму V , получаем:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \langle \alpha_e \rangle) \vec{E} \mp i N \beta \vec{H}, \quad (10.7.7)$$

где $\langle \alpha_e \rangle$ — электрическая поляризуемость единицы объёма среды.

Обозначая абсолютную диэлектрическую проницаемость через $\varepsilon_a = \varepsilon_0 (1 + \langle \alpha_e \rangle)$, запишем материальное уравнение (10.7.7) в виде:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} \mp i \chi \varepsilon_0 Z \vec{H},$$

где $\chi = N \beta$ — параметр киральности.

Полный магнитный дипольный момент среды (вектор намагничённости) определяется через моменты отдельных электромагнитных частиц, образующих среду:

$$\vec{M} = \vec{p}_m N. \quad (10.7.8)$$

Подставляя во второе соотношение (10.7.5) выражения (10.7.8) и (10.7.4) и усредняя по объёму V , получаем:

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \langle \alpha_m \rangle) \vec{H} \pm i N \beta \vec{E}, \quad (10.7.9)$$

где $\langle \alpha_m \rangle$ — магнитная поляризуемость единицы объёма среды.

Обозначая абсолютную магнитную проницаемость через $\mu_a = \mu_0 (1 + \langle \alpha_m \rangle)$, запишем материальное уравнение (10.7.9) в виде:

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} \pm i \mu_0 Z^{-1} \chi \vec{E}.$$

В результате материальные уравнения для киральной среды имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (\varepsilon \vec{E} \mp i \chi Z \vec{H}), \quad \vec{B} = \mu_0 (\mu \vec{H} \pm i \chi Z^{-1} \vec{E}). \quad (10.7.10)$$

В соотношениях (10.7.10) верхние знаки соответствуют киральной среде на основе спиралей с правой закруткой, а нижние знаки — киральной среде на основе левовинтовых спиралей.

Параметр киральности зависит от числа киральных элементов в единице объёма вещества, а именно, чем больше их концентрация, тем больше χ . Физический смысл параметра киральности заключается в том, что он определяет степень взаимосвязи процессов поляризации и намагничивания в среде. В частности, при $\chi = 0$ указанные процессы не являются взаимосвязанными и среда не обладает кирально-

стью. Заметим, что при $\chi = 0$ соотношения (10.7.10) переходят в общеизвестные материальные уравнения для диэлектрической среды (на основе зеркально-симметричных атомов):

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}.$$

10.7.3. Общие закономерности распространения электромагнитных волн в киральной среде. Рассмотрим общие закономерности распространения плоских электромагнитных волн в киральной среде. Будем считать, что киральная среда моделируется из правовинтовых спиралей. Запишем уравнения Максвелла с учётом материальных уравнений (10.7.10):

$$\text{rot } \vec{E} = k_0 (\mu \vec{H} + \chi Z \vec{E}), \quad \text{rot } \vec{H} = k_0 (\varepsilon \vec{E} + \chi Z^{-1} \vec{H}), \quad (10.7.11)$$

где $k_0 = \omega / c$ — волновое число вакуума; для симметрии вектор напряжённости магнитного поля \vec{H} нормирована на i^{-1} .

Рассмотрим для простоты случай двумерной киральной среды, в предположении отсутствия зависимости полей от координаты z . Расписывая уравнения (10.7.11) в проекциях на оси декартовой системы координат, с учётом $\partial / \partial z \equiv 0$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= k_0 [\varepsilon E_x + \chi Z^{-1} H_x], & \frac{\partial E_z}{\partial y} &= k_0 [\mu H_x + \chi Z E_x], \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -k_0 [\varepsilon E_y + \chi Z^{-1} H_y], & \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -k_0 [\mu H_y + \chi Z E_y]. \end{aligned} \quad (10.7.12)$$

Из уравнений (10.7.12) следуют соотношения, устанавливающие связь между продольными и поперечными составляющими электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{k_0 \varepsilon \mu} \left\{ \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - \chi Z \frac{\partial E_z}{\partial y} \right\}, & H_x &= \frac{1}{k_0 \varepsilon \mu} \left\{ \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \chi Z^{-1} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right\}, \\ E_y &= \frac{1}{k_0 \varepsilon \mu} \left\{ -\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} + \chi Z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right\}, & H_y &= -\frac{1}{k_0 \varepsilon \mu} \left\{ \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - \chi Z^{-1} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right\}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= k_0 (\varepsilon E_z + \chi Z^{-1} H_z), & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= k_0 (\chi Z E_z + \mu H_z). \end{aligned} \quad (10.7.13)$$

Для составляющих E_z и H_z из (10.7.13) получаем связанные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 E_z + k_0^2 (n^2 + \chi^2) E_z + 2k_0^2 Z^{-1} \chi \mu H_z &= 0, \\ \nabla_{\perp}^2 H_z + k_0^2 (n^2 + \chi^2) H_z + 2k_0^2 Z \chi \varepsilon E_z &= 0, \end{aligned} \quad (10.7.14)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ — относительный показатель преломления среды; $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — оператор Лапласа по поперечным координатам x и y . Заметим, что при $\chi = 0$ уравнения (10.7.14) перестают быть связанными и переходят в однородные уравнения Гельмгольца для диэлектрической среды.

Для решения системы уравнений (10.7.14) используется замена следующего вида:

$$\begin{aligned} E_z &= E_R + E_L, \\ H_z &= \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} (E_R - E_L), \end{aligned} \quad (10.7.15)$$

где E_R и E_L — неизвестные функции, имеющие размерность напряжённости электрического поля.

В результате подстановки (10.7.15) в уравнения (10.7.14) получаем для нововведённых функций E_R и E_L однородные уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 E_R + k_0^2 (n + \chi)^2 E_R &= 0, \\ \nabla_{\perp}^2 E_L + k_0^2 (n - \chi)^2 E_L &= 0. \end{aligned} \quad (10.7.16)$$

Уравнения (10.7.16) описывают распространение двух ЭМВ с право- и левокруговыми поляризациями и постоянными распространения:

$$k_{R,L} = k_0 (n \pm \chi). \quad (10.7.17)$$

Для случая диэлектрической среды при $\chi = 0$ из соотношений (10.7.17) следует $k_R = k_L = k_0 n$ (n — показатель преломления), что соответствует распространению одной плоской ЭМВ в безграничной диэлектрической среде с волновым числом $k = k_0 \sqrt{\epsilon\mu}$.

Таким образом, нормальными волнами в киральной среде являются волны с право- (ПКП) и левокруговыми (ЛКП) поляризациями, обладающие различными фазовыми скоростями. Плоские ЭМВ линейной поляризации в киральной среде распространяться не могут.

Из выражений (10.7.17) следует, что фазовая скорость волны ЛКП в неограниченной киральной среде на основе правовинтовых спиралей всегда больше фазовой скорости волны ПКП.

Если подставить соотношения (10.7.15) в уравнения Максвелла для киральной среды (10.7.11), то векторные функции $\vec{E}_R = \{E_{Rx}, E_{Ry}, E_{Rz}\}$ и $\vec{E}_L = \{E_{Lx}, E_{Ly}, E_{Lz}\}$ окажутся решениями векторных волновых уравнений первого порядка:

$$\nabla_{\perp} \times \vec{E}_{R,L} - k_{R,L} \vec{E}_{R,L} = 0. \quad (10.7.18)$$

Таким образом, представление электромагнитного поля в киральной среде в виде суперпозиции полей двух волн \vec{E}_R и \vec{E}_L сводит исходную задачу к решению двух векторных дифференциальных уравнений первого порядка (10.7.18).

Представляя любое поле \vec{E}, \vec{H} в киральной среде в виде суммы двух полей с противоположными круговыми поляризациями:

$$\vec{E} = \vec{E}_R + \vec{E}_L, \quad \vec{H} = \vec{H}_R + \vec{H}_L, \quad (10.7.19)$$

где

$$\vec{E}_{R,L} = \frac{\vec{E} \mp Z \vec{H}}{2}, \quad \vec{H}_{R,L} = \frac{\vec{H} \pm Z^{-1} \vec{E}}{2}, \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$$

и подставляя (10.7.19) в материальные уравнения (10.7.10), получаем

$$\vec{D}_{R,L} = \epsilon_{R,L} \vec{E}_{R,L}, \quad \vec{B}_{R,L} = \mu_{R,L} \vec{H}_{R,L}, \quad (10.7.20)$$

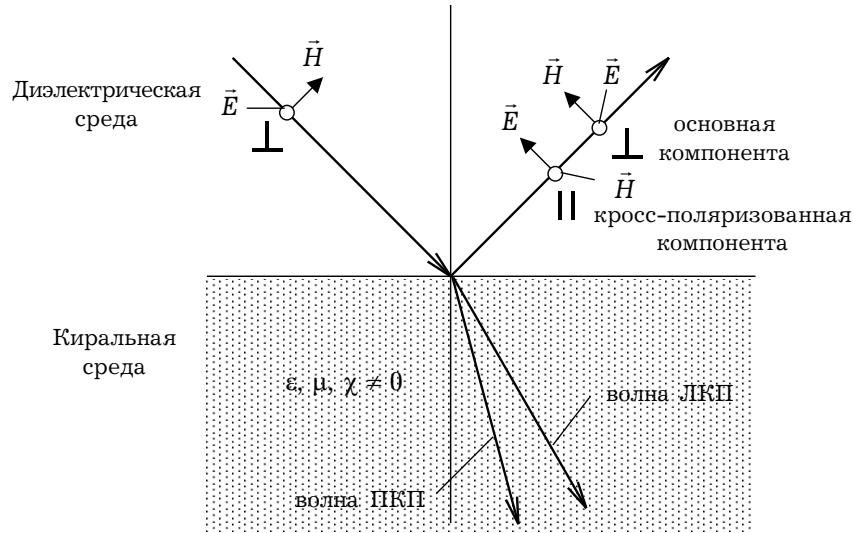


Рис. 10.17

где

$$\varepsilon_{R,L} = \varepsilon_a \left(1 \pm \frac{\chi}{n} \right), \quad \mu_{R,L} = \mu_a \left(1 \pm \frac{\chi}{n} \right).$$

Из соотношений (10.7.20) следует вывод, что киральная среда для волны ПКП обладает материальными параметрами ε_R и μ_R ; а для волны ЛКП — параметрами ε_L и μ_L . Это приводит к тому, что для волн ПКП и ЛКП среда обладает различными показателями преломления.

При падении плоской ЭМВ на киральный слой возникает явление *кросс-поляризации (деполяризации)*. Его суть состоит в том, что при падении на киральный слой ПЭМВ, например, с перпендикулярной поляризацией, в структуре поля отражённой волны возникают составляющие поля, соответствующие ортогональной (параллельной) поляризации. Это видно из системы уравнений (10.7.13), которая связывает между собой все шесть составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} , и в отличие от подобной системы, записанной для диэлектрической среды, из (10.7.13) не удаётся получить две подсистемы уравнений для E- и H-волн. Явление кросс-поляризации проиллюстрировано на рис. 10.17, на котором показано падение ПЭМВ перпендикулярной поляризации на границу раздела «диэлектрик-киральная среда».

10.7.4. Понятие биизотропной среды. Материальные уравнения (10.7.10) для киральной среды могут быть записаны в более общем виде:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon \vec{E} + \xi^* Z \vec{H} \right), \quad \vec{B} = \mu_0 \left(\mu \vec{H} + \xi Z^{-1} \vec{E} \right), \quad (10.7.21)$$

где $\xi = \zeta \pm i\chi$ — комплексный параметр; символ «*» обозначает операцию комплексного сопряжения; $\zeta = \text{Re } \xi$ называется параметром невязимности среды (параметром Теллегена); $\chi = \text{Im } \xi$ — параметр киральности.

Среда, моделируемая материальными уравнениями (10.7.21), состоит из зеркально-несимметричных электромагнитных частиц и кроме того является невзаимной. Она получила название *биизотропной*. Если в материальных уравнениях (10.7.21) параметры $\tilde{\epsilon}, \tilde{\mu}, \tilde{\xi}$ являются тензорами, то среду принято называть *бианизотропной*.

В биизотропной среде, как и в киральной, нормальными волнами являются волны с право- и левокруговыми поляризациями, обладающие различными волновыми числами:

$$k_{R,L} = k_0 \left(\sqrt{n^2 - \zeta^2} \pm \chi \right),$$

где $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ — относительный показатель преломления среды.

Киральная среда является частным случаем биизотропной среды, когда параметр невзаимности $\zeta = 0$.

Глава

11

Распространение радиоволн

11.1. Основные факторы, влияющие на распространение радиоволн	476
11.2. Зоны видимости радиолокационных станций в условиях свободного пространства	489
11.3. Волны в плавно неоднородной среде. Метод геометрической оптики	491
11.4. Распространение радиоволн в тропосфере и ионосфере	493
11.5(*). Распространение электромагнитных волн вдоль земной поверхности (задача А. Зоммерфельда)	503
11.6(*). Структура поля вертикального диполя у поверхности Земли. Функция ослабления	508
11.7(*). Поле низко расположенного излучателя над поверхностью Земли. Функция ослабления для вертикального диполя	512
11.8(*). Поле высоко поднятого излучателя в освещённой зоне	516

) Символом «» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 11. Распространение радиоволн

11.1. Основные факторы, влияющие на распространение радиоволн

11.1.1. Радиоволны. Говоря об электромагнитных волнах, используемых в радиотехнике, употребляют термин *радиоволны*. В широком смысле радиоволнами являются всевозможные волновые процессы в радиоаппаратуре, в линиях передачи и в природных условиях в среде, разделяющей приемную и передающую антенны. Приемник и передатчик, можно сказать, соединены внеаппаратурной линией передачи, *радиолинией*. В узком смысле слова под радиоволнами понимают электромагнитные волновые процессы на таких радиолиниях, которые называют также естественными радиотрассами, радиотрактами.

Каждая система передачи сигналов состоит из трёх основных частей: передатчика, приёмника и соединяющей их линии связи. В случае радиосвязи в природных условиях роль соединяющей линии выполняет пространство, в котором распространяются электромагнитные волны (радиоволны). При свободном распространении радиоволн линия связи образуется земной поверхностью и окружающей её атмосферой. Среда, в которой распространяются радиоволны, является тем звеном в цепи радиосвязи, которая практически не поддаётся управлению и при этом оказывает на распространяющиеся в ней волны следующее влияние:

- а) ослабляет их амплитуду;
- б) изменяет траекторию распространения электромагнитной волны;
- в) искажает передаваемые радиоволнами сигналы;
- г) изменяет скорость распространения.

Различают следующие *основные диапазоны радиоволн*:

сверхдлинные волны (СДВ): $\lambda = 10 \div 100$ км ($f = 3 \div 30$ кГц);

длинные волны (ДВ): $\lambda = 1 \div 10$ км ($f = 30 \div 3 \cdot 10^2$ кГц);

средние волны (СВ): $\lambda = 100$ м \div 1 км ($f = 3 \cdot 10^2 \div 3 \cdot 10^3$ кГц);

короткие волны (КВ): $\lambda = 10$ м \div 100 м ($f = 3 \div 30$ МГц);

ультракороткие волны (УКВ): $\lambda = 1$ мм \div 10 м ($f = 30$ МГц \div $\div 3 \cdot 10^2$ ГГц).

Разумеется, в принципе, могут существовать как более длинные, так и более короткие радиоволны. Освоение все более коротких волн происходит по мере развития средств генерации соответствующих электромагнитных колебаний. В результате изобретения оптических квантовых генераторов (лазеров) стали доступны электромагнитные колебания, соответствующие оптическому диапазону. В оптическом диапазоне различают следующие поддиапазоны:

инфракрасная область: $\lambda = 7.5 \cdot 10^{-4} \div 0.1$ мм ($f = 3 \cdot 10^3 \div \div 4 \cdot 10^5$ ГГц);

видимый свет: $\lambda = 4 \cdot 10^{-4} \div 7.5 \cdot 10^{-4}$ мм ($f = 4 \cdot 10^5 \div 7.5 \cdot 10^5$ ГГц);

ультрафиолетовая область: $\lambda = 10^{-4} \div 4 \cdot 10^{-4}$ мм ($f = 7.5 \cdot 10^5 \div \div 3 \cdot 10^6$ ГГц).

Таблица 11.1

№	Обозначение частот	Границы частот	Соответствующее наименование волн
4	ОЧН (очень низкие)	3÷30 кГц	Мириаметровые
5	НЧ (низкие)	30÷300 кГц	Километровые
6	СЧ (средние)	300÷3000 кГц	Гектометровые
7	ВЧ (высокие)	3÷30 МГц	Декаметровые
8	ОВЧ (очень высокие)	30÷300 МГц	Метровые
9	УВЧ (ультравысокие)	300÷3000 МГц	Дециметровые
10	СВЧ (сверхвысокие)	3÷30 ГГц	Сантиметровые
11	КВЧ (крайне высокие)	30÷300 ГГц	Миллиметровые
12	—	300÷3000 ГГц	Децимиллиметровые

В таблице 11.1 приведены сведения о классификации радиоволн в соответствии с международным Регламентом радиосвязи, установленным МККР (Международным консультативным комитетом по радио).

11.1.2. Строение атмосферы. *Атмосфера Земли* — это газообразная оболочка, окружающая Землю. Атмосферой принято считать ту область пространства вокруг Земли, в которой газообразная среда вращается с Землёй как единое целое. Масса атмосферы порядка $5.15 \cdot 10^{18}$ кг.

Атмосфера имеет, по-видимому, вторичное происхождение. Она образовалась из газов, выделенных твёрдой оболочкой Земли после формирования планеты.

Земная атмосфера состоит преимущественно из азота N_2 и кислорода O_2 ; содержит также аргон Ar, углекислый газ CO_2 , неон Ne, водород H_2 , ксенон Xe, озон O_3 и другие газы. Своим составом, таким образом, она существенно отличается от атмосфер других планет. Например, атмосферы Юпитера и Сатурна состоят главным образом из водорода и гелия; Марса и Венеры — в основном из углекислого газа.

Атмосфера Земли состоит из отдельных слоёв с условно выделенными границами. Условность заключается в том, что эти границы могут меняться, среды соседних слоёв могут проникать друг в друга и перемешиваться. Нижний слой атмосферы до высоты 10–16 км, отсчитываемой от поверхности Земли, называется *тропосферой*. В ней происходит турбулентное перемешивание газов; температура убывает с ростом высоты. Толщина тропосферы изменяется с земной широтой. В средних широтах тропосфера простирается до высот 10–12 км; в экваториальных — до 15–16 км; в полярных — до 7–10 км.

Над тропосферой располагается *стратосфера*. Она простирается до высот порядка 50–60 км. В ней температура сначала перестаёт убывать с высотой, а затем начинает возрастать. Над стратосферой находится *мезосфера*, которая простирается до высот порядка 90 км. В ней температура вновь уменьшается с высотой. Слой атмосферы, занимающий по высоте интервал 90–1000 км, называется *термосферой*. В ней температура растёт с высотой.

Термосфера считается нижним слоем *ионосферы*. Последняя простирается от высот порядка 90 км до 20000 км. По своему составу ионосфера качественно отли-

чается от нижних слоёв атмосферы содержанием в ней значительного числа свободных зарядов — электронов и ионов.

Границы, на которых происходит качественное изменение зависимости температуры от высоты, носят названия *пауз*. Так, в тропосфере на высоте порядка 10 км находится *тропопауза*, где температура перестаёт убывать с высотой. В стратосфере на высоте порядка 48 км находится *стратопазуза*, где температура перестаёт возрастать с высотой. В мезосфере на высоте порядка 80 км располагается *мезопауза*, где температура перестаёт убывать с высотой. Вертикальное распределение температуры определяет основные характеристики слоистой структуры атмосферы, в частности, плотность и давление. В связи с тем, что плотность атмосферы в целом убывает с высотой, в тропосфере сосредоточено приблизительно 80% всей массы атмосферы.

Все структурные параметры атмосферы (температура, давление, плотность) обладают значительной пространственно-временной изменчивостью. В связи с этим выше была отмечена определённая условность разбиения атмосферы по высоте на слои.

Химический состав атмосферы. Молекулам и атомам химических элементов, составляющих атмосферный газ, соответствует определённая электрическая и магнитная структура, от которой зависят электрические и магнитные параметры атмосферы.

Химический состав сухого воздуха примерно однороден до высот 90 км вследствие энергичного перемешивания воздушными течениями. В пределах этих высот сухой атмосферный газ состоит в основном из азота и кислорода в молекулярном состоянии. На высотах около 60 км наблюдается некоторое увеличение содержания озона O_3 . Существенное влияние на распространение радиоволн оказывают водяные пары. Влажность воздуха быстро убывает с увеличением высоты и у верхней границы тропосферы в сотни раз меньше, чем у поверхности Земли.

На высотах более 90 км под действием ультрафиолетового излучения Солнца происходит диссоциация молекул, то есть их расщепление на атомы. Выше 1000 км вследствие диффузного разделения газов по их молекулярным весам атмосфера состоит главным образом из нейтрального и ионизированного водорода, то есть наиболее лёгкого газа.

Температура атмосферного газа. Температура является мерой средней кинетической энергии частиц газа и влияет на его электрические параметры. На различных высотах температура атмосферного газа существенно различна. В тропосфере основным источником тепловой энергии газа является нагретая Солнцем поверхность Земли, поэтому температура падает с высотой. Наблюдаемое на высотах около 60 км увеличение температуры обусловлено поглощением ультрафиолетового излучения Солнца слоем озона. На высотах более 80 км тепловой режим атмосферы определяется поглощением солнечного излучения и поэтому температура возрастает с высотой, достигая 2000–3000 К на высотах более 500 км.

Плотность нейтральных частиц, то есть количество нейтральных частиц в единице объёма, зависит от температуры, молекулярного веса газа, ускорения силы тяжести, которые меняются с высотой.

11.1.3. Механизмы распространения радиоволн. Ввиду разнообразия, сложности и изменчивости природных условий анализ процесса распространения радиоволн приводит к решению сложных задач. Радиоволны излучаются и принимаются антеннами, расположенными либо в относительной близости Земли, либо в значительном удалении от неё, например, обе антенны радиолинии находятся в космосе. Околоземное пространство неоднородно. Поверхность Земли и атмосфера оказывают решающее влияние на формирование электромагнитных волновых процессов. Представим себе сначала, что в силу направленности действия передающей антенны излучение происходит под малыми углами к горизонту. В этом случае характер волнового процесса существенно определяется свойствами почвы (или морской поверхности). В результате поглощения, вызываемого действием материальной среды, поле убывает с расстоянием гораздо быстрее, чем в свободном пространстве. Особенности строения атмосферы в данном случае могут не влиять на передачу энергии вдоль границы раздела «воздух – земная поверхность», как будто атмосфера вообще отсутствует. Такого рода волновой процесс называется *земной* или *поверхностной волной* (рис. 11.1а).

Радиопередача из одной точки пространства *A* в другую *B* при определённых условиях может быть осуществлена иным путём, посредством так называемой *ионосферной (пространственной) волны*. Электрическая неоднородность верхних ионизированных слоёв атмосферы обеспечивает механизм распространения радиоволн с частотой до 30–40 МГц за счёт последовательного многократного отражения от ионизированных слоёв атмосферы и поверхности Земли (рис. 11.1б). Разреженный газ ионизирован, причём степень ионизации ионосферной плазмы сначала возрастает с высотой (в так называемой внутренней ионосфере), затем убывает, а, как известно, с ростом концентрации свободных электронов уменьшается диэлектрическая проницаемость среды. В результате внутренняя ионосфера представляет собой материальную среду с вертикально падающим показателем преломления.

Излучение антенны *A*, представляющее собой вблизи нижней границы ионосферы локально плоскую волну, можно представить лучом, падающим на слой ионосферы под некоторым углом. Этот луч претерпевает *рефракцию* и может вернуться к Земле, как показано на рис. 11.1б, причём рефракция в ионосфере может чередоваться с отражением от земной поверхности. При многократном переотражении от ионосферы и Земли радиоволны распространяются на огромные расстояния при сравнительно малом поглощении. Роль ионосферы весьма значительна: она образует нечто вроде «природного зеркала», которое совместно с земной поверхностью образует ионосферный волновод. Однако при достаточно коротких волнах (диапазон УКВ) ионосфера уже не играет роль отражателя. Если луч «не успевает» искривиться во внутренней ионосфере настолько, чтобы за счёт неоднородностей повернуть к Земле, он уходит во внешнюю ионосферу (рис. 11.1г), где концентрация заряженных частиц постепенно падает. Это обстоятельство играет положительную роль, поскольку именно благодаря отмеченной «прозрачности» ионосферы оказываются возможными радиосвязь с космическими объектами и радиоастрономия.

Нижние слои атмосферы также оказывают влияние на распространение радиоволн. В тропосфере, верхняя граница которой лежит на высоте порядка 15 км,

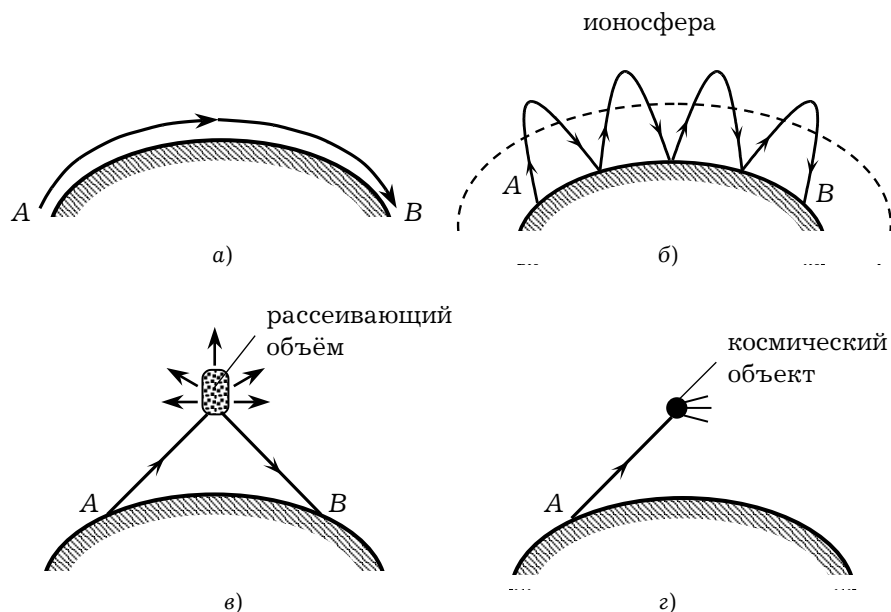


Рис. 11.1

сосредоточено около 80% всей массы воздуха. В тропосфере также происходит рефракция, проявляющаяся на больших расстояниях (рис. 11.1б). При распространении радиоволны в тропосфере происходит *процесс рассеяния*, то есть переизлучения электромагнитного поля в неоднородной среде по направлениям, отличным от направления распространения первичного поля. Различают когерентные и некогерентные рассеяния. Существенную роль при этом играют случайные неоднородности тропосферы. За счёт слабых электрических неоднородностей локального характера в атмосфере происходит рассеяние радиоволн (рис. 11.1в). Рассеяние электромагнитных волн на неоднородностях в тропосфере используется для передачи информации на частотах выше 300 МГц по наземным радиотрассам. Механизм распространения волны в тропосфере называют *дальним тропосферным распространением* (ДТР).

Мы обсудили лишь общие, главные особенности природных условий, определяющих характер распространения радиоволн. Проследим, как они проявляются в различных диапазонах радиоволн.

Для таких диапазонов, как СДВ и ДВ, все виды почв (и, тем более, водные среды) выступают как проводники. Земная поверхность отражает эти волны без значительного поглощения. Сверхдлинные и длинные волны неглубоко проникают в ионосферу. При малых частотах изменение диэлектрической проницаемости плазмы при изменении концентрации электронов является значительным, так что нижняя граница ионосферы выражена более чётко. В результате длинные волны распространяются между двумя хорошо отражающими поверхностями, как в волноводе.

Средние волны сильнее поглощаются почвой и глубже проникают в ионосферу. Для объяснения их распространения необходимо рассматривать суточный режим состояния ионосферы.

К диапазону КВ (декаметровые волны) относят радиоволны длиной от 10 до 100 м (3–30 МГц). Декаметровые волны могут распространяться на тысячи километров путём многократных отражений от ионосферы и Земли и для этого не требуются передатчики большой мощности. Диапазон КВ в основном используется для построения систем дальней связи. Основные негативные особенности данного диапазона: ограниченность полосы частот и скорости передачи информации, подверженность ионосферным возмущениям, многолучёвость, глубокие замирания и т.д.

Верхняя граница рабочих частот КВ диапазона (максимальная применимая частота (МПЧ)) зависит от длины трассы, высоты отражения, закона распределения электронной плотности по высоте, критической частоты слоя. Нижняя граница рабочих частот определяется тем, как с уменьшением частоты увеличивается поглощение в ионосфере, вследствие чего уменьшается напряжённость поля. Значение наименьшей применимой частоты (НПЧ) зависит от поглощения, уровня помех, мощности излучения, устойчивости применяемого сигнала и т.д.

При изменении состояния ионосферы НПЧ и МПЧ изменяются. Для обеспечения непрерывного действия КВ радиоприёмника необходима корректировка рабочих частот.

В диапазонах КВ и УКВ приём всегда сопровождается непрерывным изменением уровня сигнала во времени, то есть замиранием. Замирание на КВ линиях имеет интерференционное и поляризационное происхождения, а также связано с изменением поглощения в ионосфере. Для повышения устойчивости работы КВ линии связи при наличии замираний обычно используют приём на разнесённые в пространстве антенны, а также антенны с различной поляризацией. Обычно расстояние между двумя соседними приёмными антеннами выбирают примерно равным 10λ .

Расчёт КВ радиоприёмника обычно производится по следующей схеме:

1. Определяются углы наклона траекторий и требования к характеристикам направленности КВ антенн.
2. Рассчитывается напряжённость электрического поля.
3. Оценивается влияние условий распространения на работу радиоприёмника.

Основным типом передающих антенн, применяемых в этом диапазоне, являются синфазные горизонтальные диапазонные антенны (СГД). Антенна представляет собой синфазную решётку, состоящую из нескольких этажей синфазно возбуждаемых симметричных вибраторов. СГД имеют высокие коэффициент направленного действия (КНД) и коэффициент усиления (КУ), обладают возможностью управления характеристикой направленности в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

К диапазону УКВ относятся радиоволны длиной от 1 мм до 10 м (30 МГц — $3 \cdot 10^2$ ГГц). Характерная особенность этого диапазона — большая частотная ёмкость, позволяющая передавать широкополосную информацию. Одним из механизмов распространения УКВ-волн в тропосфере является ДТР, с помощью которого можно передавать информацию в разных случаях от 150 до 1000 км. На тропосферных линиях связи приём сопровождается глубокими общими и селективными замира-

ниями, что объясняется флуктуирующей многолучевой структурой принимаемого рассеянного поля. Для линий ДТР характерно быстрое убывание уровня сигнала с увеличением длины радиолиний. Обычно проводят энергетический расчёт линий ДТР, который включает в себя:

- расчёт потерь усиления антенны;
- определение месячного медианного значения множителя ослабления;
- определение статистических мгновенных значений множителя ослабления.

Сопоставляя связь на длинных и коротких волнах, необходимо учитывать, что в первом случае передающие антенны, представляющие собой огромные сооружения, всё же остаются малыми по сравнению с длиной волны. Они имеют небольшой к.п.д. и обладают слабой направленностью действия. В этом смысле короткие волны оказываются более предпочтительными. Дальняя связь на них осуществляется при помощи направленных антенн; мощности передатчиков относительно малы. Однако временная изменчивость параметров ионосферы приводит к неустойчивости коротковолновой связи.

Характеризуя связь на УКВ, следует, в первую очередь, учитывать, что ионосфера уже не обладает способностью возвращать рефрагирующий луч к Земле. Поэтому типично использование УКВ лишь в пределах прямой видимости и для связи с космическими объектами.

Систематические и случайные изменения параметров природных сред оказывают сильное влияние на работу радиолиний. Свойства ионосферы зависят от солнечной активности, испытывая суточные, сезонные и более медленные изменения. Тепловые режимы воздушной массы определяют свойства тропосферы. Случайные изменения, флуктуации характеристик свойственны в той или иной мере всем радиолиниям. Одно из их проявлений — «замирания» передаваемых сигналов, случайные амплитудные вариации. При измерениях сигналов производят усреднение результатов. Случайные изменения, разумеется, ведут к искажениям сигналов. Следует, однако, иметь в виду и полезную роль флуктуаций пространственных параметров тропосферы и ионосферы. Рассеяние на возникающих при этом неоднородностях обуславливает распространение УКВ за пределы прямой видимости.

В заключение раздела отметим одно важное обстоятельство. Разделение единого процесса распространения радиоволн на отдельные механизмы носит несколько условный характер. Тем не менее изучение вышеуказанных механизмов позволяет выявлять оптимальные траектории, оценить потери и возможные искажения сигналов. В наземных линиях в точке приёма обычно доминирует один из них, связанный или с земной, или с рассеянной, или с пространственной волной в зависимости от рабочей частоты и протяжённости линии. В качестве примера рассмотрим участок радиорелейной линии, в которой антенны расположены на расстоянии прямой видимости (рис. 11.2). В таких линиях используются ультракороткие волны (частоты выше 30 . . . 40 МГц), на которых пространственная волна не отражается от ионосферы, в результате чего не приходит в точку приёма. Рассеянная на неоднородности волна имеет гораздо меньшую интенсивность, чем земная. В данном случае оптимальным механизмом распространения является земная волна,

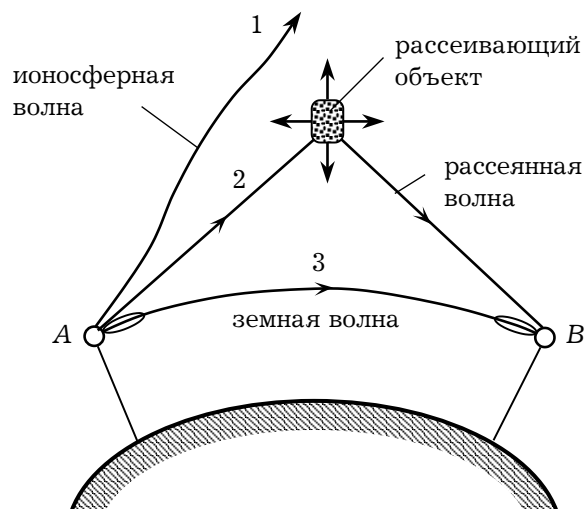


Рис. 11.2

и диаграммы направленности антенн ориентируют так, чтобы обеспечить максимальное излучение и приём именно этой волны.

Изучение отдельно выделенных механизмов позволяет при проектировании линий выбирать основные параметры системы с учётом свойств тракта, характерных для одного оптимального механизма в заданных условиях. Устойчивая работа радиолинии обеспечивается согласованием основных технических характеристик систем с условиями распространения. К таким характеристикам относятся: вид передаваемой информации, мощность передатчика, чувствительность приёмника, коэффициенты усиления и ориентировка ДН антенн на передаче и приёме, система приёма и др.

11.1.4. О возможностях постановки электродинамических задач. В общем виде одну из основных задач распространения радиоволн можно сформулировать следующим образом. На некоторой высоте над Землёй находится источник электромагнитной волны (антенна). Требуется определить напряжённость поля в любой другой точке. В принципе такая задача должна решаться, исходя из уравнений Максвелла и системы граничных условий. Однако в реальных условиях Земля является неоднородной поглощающей средой. Поверхность Земли неровная. Вокруг Земли находится атмосфера, параметры которой изменяются по широте, долготе, высоте; зависят от времени, частоты волны и т.д. С учётом перечисленных факторов нахождение электромагнитного поля от источника излучения (антенны) чрезвычайно усложняется и данная задача не имеет строгого решения до настоящего времени. Возникает вопрос: какого рода идеализации при постановке задачи являются допустимыми? Можно поставить другой вопрос: какие упрощения необходимо сделать, чтобы задача решалась строго?

В строгой постановке задачи Земля заменяется однородным шаром в однородной или даже радиально-неоднородной среде; при этом находят электромагнитное



Рис. 11.3

поле заданных источников, формализующих антенну. Представляет интерес и *плоская модель*, в которой рассматриваются заданные источники вблизи границы разнородных полупространств. Однако даже в таких постановках задачи эти не просты; возникающие математические трудности преодолевались поколениями специалистов.

Расстояния между передающими и приёмными антеннами обычно во много раз превышают длину волны. Поэтому при рассмотрении радиолиний стараются применять законы оптики.

Очень часто при расчёте радиотрасс применяют элементы теории дифракции. На рис. 11.3, в качестве примера, схематически показана радиолиния над земной поверхностью: A — передающая антенна; B — точка приёма (приёмная антенна). Пусть процесс передачи осуществляется с помощью земной волны. Если приёмная антенна B лежит в области тени (рис. 11.3), с точки зрения геометрической оптики поле в точке B должно быть равно нулю. Однако правильно оценить возможность приёма сигнала в данной точке можно только путём решения соответствующей задачи дифракции. Электромагнитные волны огибают выпуклость Земли; причём тем лучше, чем больше длина волны. Влияние предметов (например, гор), затеняющих радиотрассу, можно также оценить с помощью решения соответствующих задач дифракции электромагнитных волн на отверстиях в экране. Оказывается, что при расчёте распространения волны от источника (антенны) A в точку приёма B можно выделить область пространства в виде эллипсоида вращения, вне которой пространство практически не влияет на формирование поля в точке B . Эту область называют *областью, существенной для формирования поля*, или *доминантной областью радиолинии*.

11.1.5. Доминантная область радиолинии. Для оценки области пространства, существенной при формировании поля вдоль радиолинии AB , будем использовать задачу о дифракции электромагнитной волны на отверстии в экране, рис. 11.4а (см. раздел 9.3). Это производится следующим образом. На трассе AB мысленно размещают экран с отверстием и увеличивают отверстие до тех пор, пока экран перестаёт влиять на поле в точке B . Перемещая экран с отверстием вдоль трассы, нетрудно убедиться, что размер отверстия, при котором отсутствует влияние экрана, оказывается наибольшим на середине трассы, а по мере приближения экрана к точкам A и B уменьшается.

Ниже рассмотрим дифракцию на непрозрачном экране (рис. 11.4а) сферической волны, распространяющейся из точки A в точку приёма B . Если точка A достаточ-

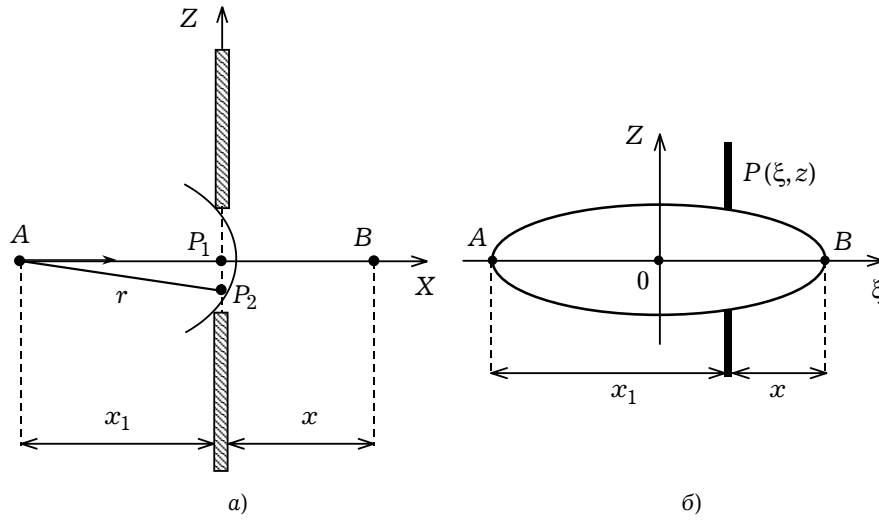


Рис. 11.4

но удалена от экрана, амплитуду сферической волны в плоскости отверстия будем считать постоянной, а распределение фазы учтём в приближении Френеля. В плоскости отверстия рассмотрим две точки: $P_1(x_1, 0, 0)$ — точка, лежащая на прямой AB ; $P_2(x_1, y', z')$ — произвольная точка. Обозначая $AP_2 = r$, $AP_1 = x_1$, запишем $r = \sqrt{(z')^2 + (y')^2 + x_1^2}$.

В приближении Френеля

$$r = x_1 + \frac{(z')^2 + (y')^2}{2x_1}$$

и выражение для электрического поля дифракции $\vec{E}^{(-)}$ принимает следующий вид в точке наблюдения (x, y, z) (формула (9.3.3)):

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(-)} = \vec{x}_0 \frac{ik_0 E(0)}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x+x_1)}}{x} \times \\ \times \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left\{ -ik_0 \left[\frac{(z-z')^2 + (y-y')^2}{2x} \right] + \left[\frac{(z')^2 + (y')^2}{2x_1} \right] \right\} dy' dz', \end{aligned} \quad (11.1.1)$$

где a и b — поперечные размеры отверстия.

Так как точка наблюдения B (рис. 11.4а) имеет координаты $z = 0$, $y = 0$, показатель экспоненты под интегралом в выражении (11.1.1) принимает вид:

$$\left\{ -ik_0 \frac{[(z')^2 + (y')^2]}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} \right) \right\}.$$

Следовательно, двойной интеграл в формуле (11.1.1) распадается на произведение двух идентичных по форме интегралов; например, интеграл по координате z'

имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left\{ -ik_0 \frac{(z')^2}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} \right) \right\} dz' = \\ & = \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left\{ -ik_0 \frac{(z')^2 (x + x_1)}{2xx_1} \right\} dz'. \end{aligned}$$

Таким образом, отличие дифракции сферической волны на отверстии в экране от дифракции плоской волны (см. формулу (9.3.3)) сводится к следующей замене переменной z в волновом параметре \tilde{d} , определяемой формулой (9.3.8):

$$z \rightarrow \frac{xx_1}{x + x_1},$$

что даёт выражение для дифракционного параметра \tilde{d} сферической волны:

$$\tilde{d} = \frac{d}{\sqrt{\lambda xx_1 / (x + x_1)}}, \quad (11.1.2)$$

где d — один из поперечных размеров отверстия (a или b). Заметим, что роль переменной z (продольная по отношению к экрану координата) в (9.3.3) в нашем случае играет переменная x . Следовательно, все формулы, полученные в разделе 9.3, с учётом выражения для \tilde{d} в виде (11.1.2), справедливы и для сферической волны.

При $d \gg 1$ поле в точке B за экраном оказывается таким же, как в его отсутствии. Поэтому, положив $\tilde{d} = C \gg 1$, где C — некоторое допустимое значение параметра, получаем выражение для размера отверстия в экране, при котором экранирование можно считать несущественным:

$$d = C \sqrt{\lambda \frac{xx_1}{x + x_1}}. \quad (11.1.3)$$

Из (11.1.3) видно, что размер d отверстия зависит от положения экрана на радиотрассе.

Введём новую декартовую систему координат $\{\xi, z\}$ на плоскости XZ с центром в середине отрезка $AB = \Delta$ (точка 0 на рис. 11.4б). Получим в этой системе координат уравнение для краевых точек, в которых прекращается влияние экрана, перемещающегося вдоль радиотрассы от точки A к точке B . Обозначим через $P(\xi, z)$ произвольную точку на краю отверстия (рис. 11.4б). Учитывая, что $x = \Delta/2 - \xi$, $x_1 = \Delta/2 + \xi$, $d = 2z$, и подставляя эти выражения в (11.1.3), получаем уравнение эллипса:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (11.1.4)$$

где $a = \Delta/2$, $b = C\sqrt{\lambda\Delta}/4$.

Таким образом, продольное сечение доминантной области радиолинии в плоскости $Z\xi$ ограничено эллипсом (11.1.4). Ввиду осевой симметрии всей системы доминантная область представляет собой эллипсоид вращения.

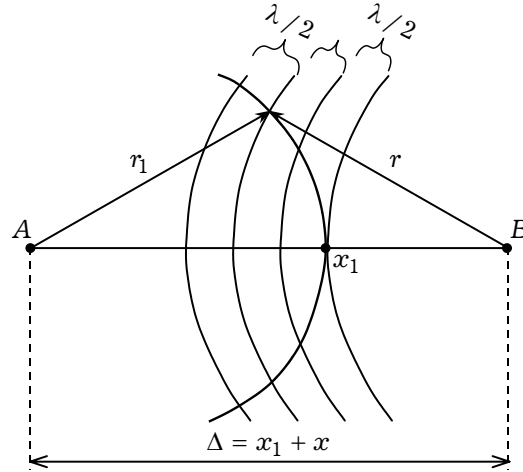


Рис. 11.5

Форму и размеры доминантной области можно установить, используя и представление о *зонах Френеля*. Эти зоны удобнее всего выделить на сферическом фронте волны с центром в точке A (рис. 11.5), который пересекает радиотрассу AB в произвольной точке x_1 . Границы зон Френеля являются окружностями, которые получаются в результате пересечения фронта волны со сферами радиусов $r = x + n\lambda/2$ ($n = 1, \infty$) с центром в точке B . Из рис. 11.5 следует, что

$$r_1 + r = x_1 + x + \frac{n\lambda}{2}. \quad (11.1.5)$$

Так как приближённо можно считать, что

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx x_1 + \frac{1}{2x_1} \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

$$r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx x + \frac{1}{2x} \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

где под d будем понимать пока неизвестный поперечный размер отверстия в экране, то, подставляя последние выражения в (11.1.5), получаем

$$n\lambda = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x}\right)$$

и

$$d = 2\sqrt{n} \sqrt{\frac{\lambda x x_1}{x + x_1}}. \quad (11.1.6)$$

Если принять, что $2\sqrt{n} = C$, то формула (11.1.6) совпадёт с выражением (11.1.3), определяющим поперечный размер отверстия в экране, при котором его влияние оказывается несущественным. Напомним, из теории дифракции следует, что экран можно считать невлиющим, когда число зон Френеля, укладывающихся в нём, ве-

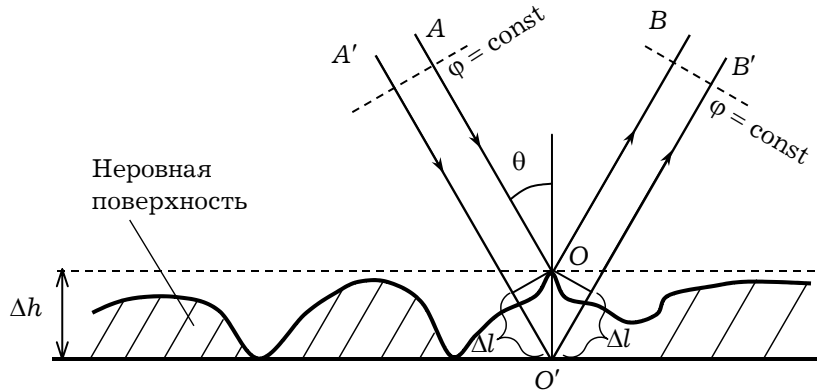


Рис. 11.6

лико. Доминантную область обычно ограничивают примерно восемью зонами Френеля. При таком приближении ошибка в вычислении поля не превышает 16%.

11.1.6. Расчёт поля с учётом рельефа местности. Земная поверхность никогда не бывает идеально гладкой. Элементы рельефа местности, их электрические свойства, а также длина распространяющейся волны оказывают существенное влияние на электромагнитное поле в точке приёма. Рассмотрим падение плоской волны на неровную поверхность с высотой (глубиной) неровностей Δh . Оценим, насколько поле рассеяния будет отличаться от поля отражения от плоской границы при отсутствии неровностей. Рассмотрим разность фаз $\Delta\varphi$ двух параллельных лучей, отражённых от верхнего и нижнего уровней неровной поверхности (рис. 11.6). Очевидно, что $\Delta\varphi$ определяется разностью хода оптических лучей $A'O'B'$ и AOB :

$$\Delta\varphi = 2k_0 \Delta l = \frac{4\pi \Delta h}{\lambda} \cos \theta, \quad (11.1.7)$$

где θ — угол падения лучей на поверхность.

Принято считать, что пренебрежение неровностями оправдано вплоть до фазовых отклонений, определяемых формулой (11.1.7), $\Delta\varphi \approx \pi/2$. Этому условию соответствует *критерий Рэлея*:

$$\Delta h < \frac{\lambda}{8 \cos \theta}. \quad (11.1.8)$$

При выполнении условия (11.1.8) отражение от Земли является рассеянным (диффузным). В этом случае поверхность можно рассматривать как ровную, характеризующуюся некоторым эффективным коэффициентом отражения.

В диапазонах длинных и средних волн обычно выполняется условие (11.1.8). Лесистые местности и даже небольшие населённые пункты можно характеризовать некоторым эффективным коэффициентом отражения, который определяется экспериментально. Для СВЧ и КВЧ диапазонов даже отдельное дерево или здание должно рассматриваться с позиций теории дифракции электромагнитных волн.

11.2. Зоны видимости радиолокационных станций в условиях свободного пространства

При рассмотрении радиолинии необходимо учитывать свойства антенн. В простейшем случае приёмную и передающую антенны можно считать точечными объектами, расположенными в свободном пространстве. Для изотропной антенны, расположенной в точке A , создаваемый ей на расстоянии r средний поток мощности имеет плотность

$$\langle S_0(r) \rangle = \frac{\langle P_\Sigma \rangle}{4\pi r^2}, \quad (11.2.1)$$

так как $\langle P_\Sigma \rangle = \langle S_0 \rangle S$; S — сферическая поверхность, из центра которой происходит излучение. Для реальных антенн характерна неравномерность, которую можно учесть при помощи коэффициента направленности действия $D(\theta, \varphi)$. Коэффициент направленного действия (КНД) вводят для дальней зоны антенны как отношение среднего значения r -составляющей (в сферической системе координат) вектора Умова-Пойнтинга $\langle S_r(\theta, \varphi) \rangle$ к величине $\langle S_0 \rangle$, полученной в соответствии с (11.2.1) в предположении, что при той же мощности излучения распределение равномерно:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{\langle S_r(\theta, \varphi) \rangle}{\langle S_0 \rangle}. \quad (11.2.2)$$

Следовательно, для реальной антенны плотность потока мощности в точке с координатами (r, θ, φ) равна:

$$\langle S_r(r, \theta, \varphi) \rangle = D(\theta, \varphi) \frac{P_\Sigma}{4\pi r^2}, \quad (11.2.3)$$

где

$$P_\Sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle S_r \rangle r^2 \sin \theta d\theta d\varphi —$$

мощность излучения антенны; $D(\theta, \varphi)$ определяется как (11.2.2).

Плотность потока мощности, создаваемого антенной радиолокационной станции (РЛС) в месте расположения цели (на расстоянии r от антенны) $\langle S_r^u \rangle$, определяется выражением

$$\langle S_r^u \rangle = G \frac{P_\Sigma}{4\pi r^2}, \quad (11.2.4)$$

где G — коэффициент усиления (КУ) антенны, определяемый произведением КНД $D(\theta, \varphi)$ на коэффициент полезного действия, характеризующий потери мощности в проводниках и изоляторах антенны. КУ антенны в некотором направлении, зависящий от углов θ и φ , определяется соотношением

$$G(\theta, \varphi) = G_{\max} F^2(\theta, \varphi), \quad (11.2.5)$$

где G_{\max} — максимальное значение КУ; $F(\theta, \varphi)$ — нормированная характери-

ка направленности антенны. В отличие от (11.2.3) формула (11.2.4) учитывает особенности антенны.

С учётом (11.2.5) выражение (11.2.4) принимает вид:

$$\langle S_r^u \rangle = \frac{P_\Sigma G_{\max} F^2(\theta, \varphi)}{4\pi r^2}. \quad (11.2.6)$$

Цель обнаруживается благодаря тому, что часть мощности, рассеянная ею, попадает в приёмную антенну РЛС. Для характеристики радиолокационных целей вводится понятие *эффективной площади рассеяния* σ . Мощность, излучаемая целью в результате вторичного рассеяния, определяется произведением $\langle S_r^u \rangle \sigma$. Эта мощность в месте расположения приёмной антенны РЛС имеет поток, плотность которого определяется как:

$$\langle S_r^{np} \rangle = \frac{\sigma \langle S_r^u \rangle}{4\pi r^2} = \frac{\sigma P_\Sigma G}{(4\pi r^2)^2}. \quad (11.2.7)$$

Мощность, принимаемая антенной, пропорциональна её плотности P_Σ . Коэффициент пропорциональности характеризует эффективность антенны и называется *эффективной площадью приёмной антенны* $S_{эф}$. Данный параметр имеет следующую связь с коэффициентом усиления антенны:

$$S_{эф} = \frac{\lambda^2 G}{4\pi} = S_{эф \max} F^2(\theta, \varphi), \quad (11.2.8)$$

где

$$S_{эф \max} = \frac{\lambda^2 G_{\max}}{4\pi}.$$

Используя соотношения (11.2.7) и (11.2.8), получаем формулу для мощности $P_{пр}$, поглощаемой приёмной антенной:

$$P_{пр} = \langle S_r^{np} \rangle S_{эф} = \frac{\sigma P_\Sigma G_{\max} S_{эф \max}}{(4\pi r^2)^2} F^4(\theta, \varphi), \quad (11.2.9)$$

которая называется *уравнением радиолокации*. В (11.2.9) $\langle S_r^{np} \rangle$ определяется по формуле (11.2.7). Максимальную дальность действия РЛС $r_{0 \max}$ можно получить из (11.2.9), если положить $F(\theta, \varphi) = 1$ и $P_{пр} = P_{пр \min}$ (где $P_{пр \min}$ — минимальная мощность, принимаемая антенной РЛС):

$$r_{0 \max} = \sqrt[4]{\frac{\sigma P_\Sigma G_{\max} S_{эф \max}}{P_{пр \min} (4\pi)^2}}. \quad (11.2.10)$$

Из формул (11.2.9) и (11.2.10) определяется дальность действия r_{\max} РЛС:

$$r_{\max}(\theta, \varphi) = r_{0 \max} F(\theta, \varphi). \quad (11.2.11)$$

Соотношение (11.2.11) в координатах r, θ, φ представляет собой уравнение поверхности с началом координат в месте расположения антенны РЛС.

Поверхность (11.2.11) делит всё пространство вокруг РЛС на область, в которой цели не видно, и область, в которой цель видна. Область видимости РЛС называет-

ся зоной видимости РЛС. Поверхность (11.2.11) является поверхностью одинаковых значений напряжённости поля. Действительно, поскольку средняя плотность потока мощности на расстоянии r от антенны в дальней зоне определяется как:

$$\langle S_r \rangle = \frac{E_0^2}{2Z_0} = \frac{P_\Sigma G_{\max} F^2(\theta, \varphi)}{4\pi r^2},$$

где $Z_0 = 120\pi$ — волновое сопротивление свободного пространства, расстояние до точки на этой поверхности ($E_0 = \text{const}$) будет:

$$r(\theta, \varphi) = \frac{\sqrt{60 P_\Sigma G_{\max}}}{E_0} F(\theta, \varphi). \quad (11.2.12)$$

Из выражений (11.2.11) и (11.2.12) определяется граничное значение напряжённости поля $E_{\text{гр}}$ на поверхности зоны видимости:

$$E_0 = E_{\text{гр}} = \frac{\sqrt{60 P_\Sigma G_{\max}}}{r_{0\max}}.$$

11.3. Волны в плавно неоднородной среде. Метод геометрической оптики

Задача состоит в построении некоторого приближенного решения уравнений Максвелла, описывающих распространение гармонических волн в неоднородной среде:

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_0 \mu(\vec{r}) \vec{H}. \quad (11.3.1)$$

Будем искать решение уравнений (11.3.1) в виде

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{e^{-ik_0 \varphi(\vec{r})}}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}} \left[\vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{1}{k_0} \vec{E}_1(\vec{r}) + \dots \right], \\ \vec{H} &= \frac{e^{-ik_0 \varphi(\vec{r})}}{\sqrt{\mu_0 \mu}} \left[\vec{H}_0(\vec{r}) + \frac{1}{k_0} \vec{H}_1(\vec{r}) + \dots \right], \end{aligned} \quad (11.3.2)$$

где $\vec{E}_0(\vec{r})$, $\vec{H}_0(\vec{r})$, $\vec{E}_1(\vec{r})$, $\vec{H}_1(\vec{r})$... — действительные неизвестные векторные функции радиус-вектора \vec{r} точки наблюдения; $\varphi(\vec{r})$ — скалярная функция координат, описывающая изменение фазы поля и называемая *эйконалом* (от греческого слова «эйкон» — изображение).

Электромагнитная волна (11.3.2) является однородной, если функции $\vec{E}_j(\vec{r})$, $\vec{H}_j(\vec{r})$ ($j = \overline{0, \infty}$) постоянны на поверхности фронта, который определяется уравнением

$$\varphi(\vec{r}) = \text{const}.$$

Для плоской волны $\varphi(\vec{r})$ — линейная функция координат, т.е. $\text{grad } \varphi = \text{const}$.

Если амплитуда и направление распространения волны меняются достаточно медленно, то есть заметные изменения амплитуды и направления распространения происходят на расстояниях $L \gg \lambda$, всё пространство можно разделить на участки с размерами $l < L$, в пределах каждого из которых волну можно считать плоской. Направление распространения волны в пределах области с линейным размером l можно характеризовать направлением нормали к ее фронту.

Если волновые поверхности не содержат особых (конических) точек, направление распространения волны на каждом участке пространства определяется направлением нормали к волновой поверхности. В этом случае можно построить семейство линий, называемых *лучами*, нормальных к волновым поверхностям. В изотропной среде вдоль лучей происходит распространение энергии волны. Определение лучей, как линий, вдоль которых направлен средний по времени поток энергии, является наиболее общим, поскольку оно справедливо как для изотропной, так и анизотропной сред. Однако в анизотропной среде нормаль к волновому фронту в общем случае не совпадает с направлением луча. В представлении процесса распространения электромагнитной волны в виде луча и заключается физическая сущность *приближения геометрической оптики*.

11.3.1. Уравнение эйконала. Подставив решение (11.3.2) в уравнение Максвелла (11.3.1) и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях $1/k_0$, в нулевом приближении получим систему уравнений:

$$[\nabla\varphi \times \vec{E}_0] - n\vec{H}_0 = 0, \quad [\nabla\varphi \times \vec{H}_0] + n\vec{E}_0 = 0, \quad (11.3.3)$$

где $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ — показатель преломления среды. Действительно, если считать, что $\vec{E} \approx \vec{E}_0 e^{-ik_0\varphi} / \sqrt{\epsilon_a}$, $\vec{H} \approx \vec{H}_0 e^{-ik_0\varphi} / \sqrt{\mu_a}$, то из второго уравнения Максвелла получаем:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{ik_0}{\sqrt{\epsilon_a}} [\nabla\varphi \times \vec{E}_0] = -\frac{i\omega\mu_a}{\sqrt{\mu_a}} \vec{H}_0, \quad [\nabla\varphi \times \vec{E}_0] = n\vec{H}_0,$$

где $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, откуда следует первое уравнение системы (11.3.3).

Соотношения (11.3.3) называются *уравнениями переноса*. Из них определяются амплитуды полей электромагнитных волн в *приближении геометрической оптики*. При учете в (11.3.2) последующих слагаемых получаем систему уравнений ($j = 1, \infty$):

$$\begin{aligned} [\nabla\varphi \times \vec{E}_j] - n\vec{H}_j &= \text{rot } \vec{E}_{j-1} - \frac{1}{2\epsilon} [\nabla\epsilon \times \vec{E}_{j-1}], \\ [\nabla\varphi \times \vec{H}_j] + n\vec{E}_j &= -\text{rot } \vec{H}_{j-1} + \frac{1}{2\mu} [\nabla\mu \times \vec{H}_{j-1}]. \end{aligned} \quad (11.3.4)$$

Найдем условие совместности уравнений (11.3.3). Для этого полученное из первого уравнения значение \vec{H}_0 подставим во второе и учтем, что векторы \vec{E}_0 и $\nabla\varphi$ ортогональны:

$$n^2 \vec{E}_0 = -\left[[\vec{E}_0, \nabla\varphi], \nabla\varphi \right] = \vec{E}_0 (\nabla\varphi)^2.$$

Отсюда следует дифференциальное соотношение, называемое *уравнением эйконала*:

$$(\nabla\varphi)^2 = n^2, \quad (11.3.5)$$

или в явном виде

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 = n^2(x, y, z).$$

Соотношение (11.3.5) является основным уравнением геометрической оптики. Поверхности $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$ называются *геометрическими волновыми поверхностями*, или *геометрическими волновыми фронтами*.

Для среды без потерь, когда n , а следовательно, и φ будут действительными функциями координат, уравнение (11.3.5) можно записать в форме:

$$\nabla\varphi = n \frac{\vec{\Phi}}{\Phi}, \quad (11.3.6)$$

где $\vec{\Phi}/\Phi$ — единичный вектор, параллельный направлению $\nabla\varphi$ (касательный к лучу).

Подставив (11.3.6) в уравнения (11.3.3) и сократив на n , получим:

$$\left[\vec{H}_0 \times \frac{\vec{\Phi}}{\Phi} \right] = \vec{E}_0, \quad \left[\vec{E}_0 \times \frac{\vec{\Phi}}{\Phi} \right] = -\vec{H}_0. \quad (11.3.7)$$

Откуда следует, что векторы \vec{E}_0 , \vec{H}_0 и $\vec{\Phi}/\Phi$ (а значит, и $\nabla\varphi$) образуют правую тройку.

11.4. Распространение радиоволн в тропосфере и ионосфере

11.4.1. Рефракция радиоволн в тропосфере и ионосфере. Нижний слой земной атмосферы, простирающийся в среднем до высоты 10-12 км, называется *тропосферой*. Высота тропосферы изменяется от 8-10 км в полярных широтах до 15-16 км у экватора. Слой атмосферы, расположенный выше 50 км, называется *ионосферой*, которая постепенно переходит на высоте 2000-3000 км в межпланетный газ. Важным свойством тропосферы является убывание температуры с высотой. Состояние атмосферы определяется в основном температурой, давлением и влажностью. Тропосферу называют *нормальной*, когда ее температура и давление линейно убывают с высотой так, что с каждым километром высоты температура убывает примерно на 6.5°C , а давление водяного пара на 350 Па. Относительная влажность при этом постоянна и составляет порядка 60%. Градиент показателя преломления такой тропосферы $dn/dz = -4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^{-1}$. У поверхности Земли значение показателя преломления атмосферы n мало отличается от единицы. При этом очень часто в нижней части атмосферы величина n меняется с высотой не монотонно. Характер изменения может меняться с течением времени. Это говорит о том, что тропосферу следует рассматривать как *неоднородную диэлектрическую среду*, показатель преломления которой меняется с высотой.

Ионосфера — газовая разреженная плазма, причем степень ионизации ионосферной плазмы (концентрация электронов) сначала возрастает с высотой, а затем убывает. Следовательно, и в ионосфере показатель преломления, определяемый концентрацией электронов, также меняется с высотой.

Влияние неоднородности тропосферы и ионосферы на распространение радиоволн тесно связано с явлением атмосферной *рефракции*, то есть с искривлением траектории распространения волны в неоднородной среде.

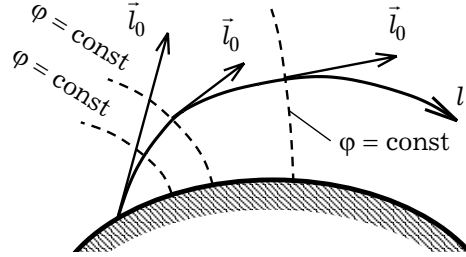


Рис. 11.7

Используя метод геометрической оптики, получим уравнение, описывающее распространение волны в неоднородной среде. Для его вывода воспользуемся уравнением эйконала (11.3.6), которое перепишем следующим образом:

$$\text{grad } \varphi = n \vec{l}_0, \quad (11.4.1)$$

где \vec{l}_0 — единичный вектор, направленный по касательной к лучу в направлении возрастания функции φ (рис. 11.7).

Возьмем производную по l от обеих частей равенства (11.4.1) и воспользуемся известным векторным соотношением

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial l} = (\vec{l}_0 \nabla) \vec{A},$$

где

$$\{(\vec{l}_0 \nabla) A\}_j = \left(l_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + l_{0y} \frac{\partial}{\partial y} + l_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \right) A_j,$$

\vec{A} — произвольный вектор; l_{0x}, l_{0y}, l_{0z} — проекции \vec{l}_0 на оси X, Y, Z. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} (\text{grad } \varphi) &= (\vec{l}_0 \nabla) \text{grad } \varphi, \\ \{(\vec{l}_0 \nabla) \text{grad } \varphi\}_x &= l_{0x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + l_{0y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + l_{0z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (11.4.2)$$

Так как из (11.4.1) следует, что

$$l_{0x} = \frac{1}{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad l_{0y} = \frac{1}{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad l_{0z} = \frac{1}{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то с учётом (11.3.5) из (11.4.2) получаем:

$$\begin{aligned} \{(\vec{l}_0 \nabla) \text{grad } \varphi\}_x &= \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} n^2 = \frac{\partial n}{\partial x}. \end{aligned}$$

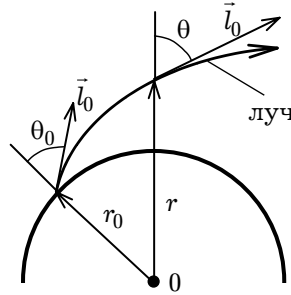


Рис. 11.8

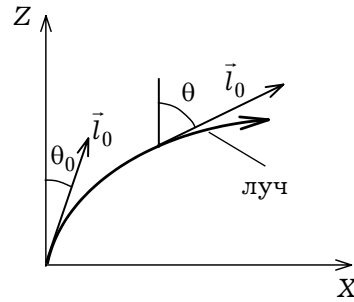


Рис. 11.9

Аналогично

$$\{(\vec{l}_0 \nabla) \text{grad } \varphi\}_y = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \{(\vec{l}_0 \nabla) \text{grad } \varphi\}_z = \frac{\partial n}{\partial z}.$$

Следовательно, уравнение траектории распространения волны (луча) есть

$$\frac{\partial}{\partial l}(\vec{l}_0 n) = \nabla n. \quad (11.4.3)$$

В общем случае произвольной зависимости n от координат решение уравнения (11.4.3) может быть решено только численно. Ниже рассмотрим случай сферически слоистой среды (случай, который имеет место для атмосферы Земли). В этом случае вектор $\text{grad } n$ коллинеарен радиус-вектору \vec{r} , проведенному из центра Земли. Поэтому имеем

$$\left[\vec{r} \times \frac{\partial}{\partial l}(\vec{l}_0 n) \right] = 0. \quad (11.4.4)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial l}[\vec{r} \times n \vec{l}_0] = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial l} \times n \vec{l}_0 \right] + \left[\vec{r} \times \frac{\partial}{\partial l}(\vec{l}_0 n) \right]$$

и $[\partial \vec{r} / \partial l \times n \vec{l}_0] = 0$, с учётом (11.4.4) получаем

$$[\vec{r} \times n \vec{l}_0] = \text{const}, \quad (11.4.5)$$

то есть ориентация плоскости, в которой лежат траектории распространения волн (лучи), остается постоянной. Таким образом, в сферически слоистой среде в приближении геометрической оптики волна распространяется в плоскости, и, следовательно, луч представляет собой плоскую кривую. Как следует из (11.4.5), для каждого луча справедливо условие

$$nr \sin \theta = \text{const}, \quad (11.4.6)$$

где θ — угол между радиус-вектором \vec{r} и касательным к лучу вектором \vec{l}_0 (рис. 11.8).

Постоянная в правой части (11.4.6) определяется из граничных условий. Пусть при $r = r_0$, $\sin \theta = \sin \theta_0$ и $n = n_0 = 1$ (рис. 11.8), тогда

$$nr \sin \theta = r_0 \sin \theta_0. \quad (11.4.7)$$

Траектория луча определяется из соотношения

$$\text{tg } \theta = \frac{r_0 \sin \theta_0}{\sqrt{n^2 r^2 - r_0^2 \sin^2 \theta_0}}. \quad (11.4.8)$$

Для плоскослоистой среды, когда $n = n(z)$, уравнение (11.4.7) принимает вид:

$$n(z) \sin \theta(z) = \sin \theta_0 = \text{const}, \quad (11.4.9)$$

где θ — угол между лучом и осью OZ в произвольной точке траектории (рис. 11.9).

Траектория луча в этом случае определяется из выражения

$$\frac{dx}{dz} = \text{tg } \theta = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}. \quad (11.4.10)$$

Таким образом, явление искривления луча в атмосфере Земли описывается уравнениями (11.4.8) и (11.4.10). Найдем теперь радиус ρ кривизны луча. Не учитывая влияния кривизны земной поверхности, будем считать, что на плоскостях, параллельных поверхности Земли, показатели преломления постоянные. Рассмотрим две плоскости с показателями преломления n и $n + dn$, расположенные на расстоянии dz друг от друга (рис. 11.10). Луч, падающий на нижнюю поверхность под углом θ_0 , преломляется и, пройдя расстояние dz , на верхнюю поверхность падает уже под углом $\theta_0 + d\theta$. Как видно из рис. 11.10

$$\rho = AB / d\theta. \quad (11.4.11)$$

Из треугольника ABC

$$AB = \frac{dz}{\cos(\theta_0 + d\theta)} \approx \frac{dz}{\cos \theta_0}. \quad (11.4.12)$$

Уравнение (11.4.9) для нашего случая имеет вид:

$$n \sin \theta_0 = (n + dn) \sin(\theta_0 + d\theta).$$

Раскрывая его правую часть и пренебрегая величинами второго порядка малости, получаем

$$\cos \theta_0 d\theta = -\frac{\sin \theta_0 dn}{n}. \quad (11.4.13)$$

Подставляя (11.4.12) и (11.4.13) в (11.4.11), получаем соотношение для радиуса кривизны

$$\rho = \frac{n}{\sin \theta_0 (-dn/dz)}.$$

При исследовании рефракции в тропосфере обычно полагают $n \approx 1$ и $\theta = \pi/2$, так как основной интерес представляют пологие лучи. В этом случае

$$\rho = -\frac{1}{dn/dz}, \quad (11.4.14)$$

то есть радиус кривизны луча в нижних слоях атмосферы определяется быстротой изменения показателя преломления с высотой. Для нормальной тропосферы $\rho = 25000 \text{ км} \approx 4 r_0$ (r_0 — радиус Земли). Искривление луча в нормальной тропосфере называют *нормальной рефракцией*.

Под влиянием определенных метеорологических условий в тропосфере может возникать распределение показателя преломления по высоте, существенно отли-

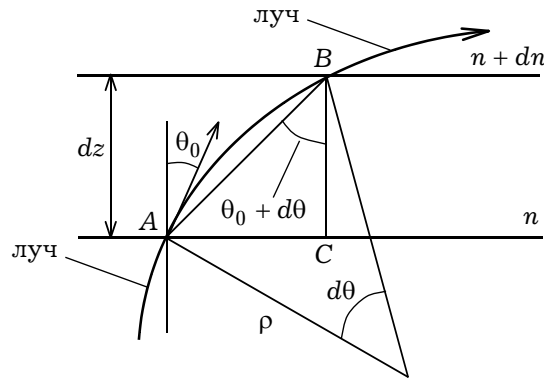


Рис. 11.10

чающееся от нормального. В связи с этим введена классификация видов *тропосферной рефракции*. В ее основе лежат два параметра:

— эквивалентный радиус Земли r_3 , для которого справедливо

$$\frac{1}{r_3} \approx \frac{1}{r_0} - \frac{1}{\rho}; \quad (11.4.15)$$

— индекс преломления

$$M = (n - 1 + z/r_0) \cdot 10^6. \quad (11.4.16)$$

С учетом (11.4.14) справедливы следующие равенства [Л.18]:

$$\rho = \frac{10^6}{-dM/dz}, \quad r_3 = \frac{r_0}{1 - r_0/\rho} = \frac{r_0}{1 + r_0(dM/dz) \cdot 10^6}, \quad (11.4.17)$$

получаемые из (11.4.15) и (11.4.16).

Все виды тропосферной рефракции разбивают на три группы: отрицательная рефракция, отсутствие рефракции и положительная рефракция.

Отрицательной называют те виды рефракции, при которых индекс M возрастает с высотой: $dM/dz > 0$. Из формул (11.4.17) следует, что при этом $\rho < 0$, то есть траектории лучей обращены выпуклостью вниз. Радиоволна при этом удаляется от поверхности Земли. В этом случае $r_3 < r_0$. Такой вариант возможен, например, во время снегопада, когда с высотой температура убывает значительно быстрее, а влажность — значительно медленнее, чем при нормальной рефракции.

Если метеорологические условия складываются таким образом, что в некотором интервале высот $M = \text{const}$, то рефракция отсутствует и траектория луча является прямолинейной. В этом случае $r_3 = r_0 \approx 4r_0/3$.

Если $dM/dz < 0$, рефракция считается *положительной*. Радиоволна при этом прижимается к поверхности Земли. Различают: *пониженную положительную тропосферную рефракцию*, когда искривление луча меньше, чем при нормальной рефракции; *нормальную*, когда $r_3 = 4r_0/3$; *повышенную*, когда искривление луча больше, чем при нормальной рефракции; *критическую*, при которой радиус кривизны

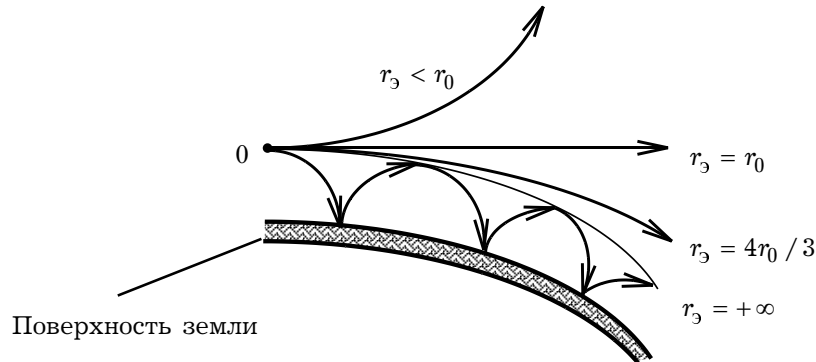


Рис. 11.11

траектории равен радиусу Земли ($r_3 = \infty$) и луч параллелен земной поверхности; *сверхрефракцию*, при которой лучи искривляются сильнее, чем при критической рефракции, а $r_3 < 0$, то есть земная поверхность становится вогнутой. Пониженная рефракция имеет место, когда с высотой температура убывает быстрее, а влажность — медленнее, чем при нормальной рефракции (во время дождя). Нормальная рефракция наблюдается в пасмурную погоду, когда слои воздуха хорошо перемешиваются. Повышенная рефракция имеет место, когда температура с высотой убывает медленнее, а влажность — быстрее, чем при нормальной рефракции. Такая ситуация бывает в хорошую ясную погоду, после захода солнца, когда слои воздуха, примыкающие к поверхности Земли, успевают охладиться, в то время как более высокие слои остаются еще теплыми. Искривление лучей для различных видов атмосферной рефракции показаны на рис. 11.11.

Рассмотрим теперь качественно рефракцию лучей в плоскостной среде, когда луч из некоторой точки M , расположенной над плоской проводящей поверхностью Земли на высоте z_M , выходит под углом $\theta_0 \neq 0$ (рис. 11.12). Примем, что показатель преломления n монотонно возрастает с высотой, то есть $\text{grad } n > 0$, что соответствует отрицательной рефракции.

Если $\theta_0 < \pi/2$ (угол θ_0 отсчитывается от оси OZ , рис. 11.12), луч направлен вверх в сторону увеличивающихся значений показателя преломления. Знаменатель в формуле (11.4.10) с высотой увеличивается, а $\text{tg } \theta$ уменьшается. В результате луч, искривляясь, приближается к вертикали (луч 1 на рис. 11.12).

Если $\theta_0 > \pi/2$ и луч направлен к отражающей поверхности, распространение волны происходит в направлении уменьшающихся значений n . При этом возможны случаи: луч достигает поверхности $z = 0$ и отражается (луч 2), затем распространяется в сторону возрастающих значений n ; луч достигает точки поворота, когда $n(z) = |\sin \theta_0|$ ($\theta = \pi/2$), и поворачивает в сторону возрастающих значений n (луч 3), и, наконец, при некотором значении угла $\theta_0 > \pi/2$ точка поворота луча находится на поверхности $z = 0$ (луч 4). Траектория луча 4 замечательна тем, что является границей между областью, в которую могут попадать лучи, и областью тени, в которую лучи, создаваемые источником, расположенным на высоте z_M , попасть не могут.

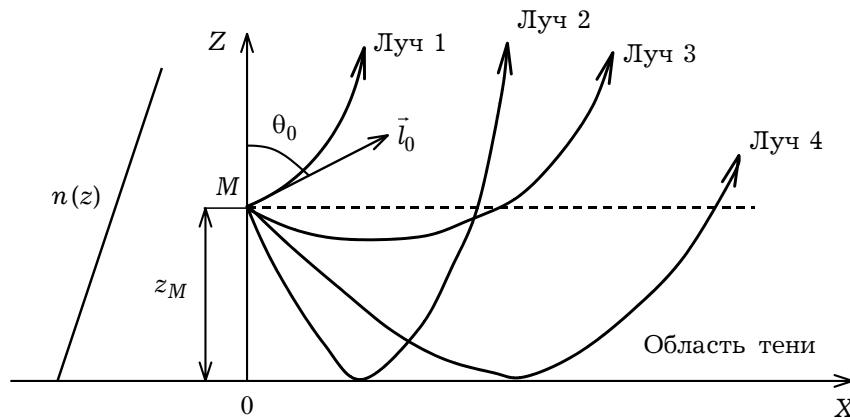


Рис. 11.12

Рассмотрим теперь рефракцию радиоволн в ионосфере. Для нее показатель преломления монотонно убывает с высотой. В этом случае лучи отклоняются к горизонтали и угол $\theta > \theta_0$ (рис. 11.13). На высоте, определяемой из условия

$$n(z_0) = \sin \theta_0, \quad (11.4.18)$$

направление луча параллельно горизонтальной плоскости, то есть при $z = z_0$ происходит поворот луча.

Уравнение траектории луча получаем [Л.8] из (11.4.10):

$$x = \int_0^{z_0} \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} dz + \int_z^{z_0} \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} dz.$$

Расстояние между точками входа луча в неоднородную среду и выхода из неё вычисляется как

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2 \sin \theta_0 \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}. \quad (11.4.19)$$

Например, при линейном законе изменения диэлектрической проницаемости $n^2(z) = 1 - z/\alpha$ ($\alpha = \text{const}$) уравнение траектории луча имеет вид параболы (рис. 11.13), представляемой уравнением:

$$(x - \alpha \sin 2\theta_0)^2 = \alpha^2 \sin^2 2\theta_0 - 4\alpha z \sin^2 \theta_0. \quad (11.4.20)$$

Вершина параболы, как следует из (11.4.20) находится в точке $x_0 = \alpha \sin 2\theta_0$, $z_0 = \alpha \cos^2 \theta_0$. Расстояние между точками входа и выхода луча в соответствии с (11.4.19) будет:

$$\Delta x = 2\alpha \sin 2\theta_0.$$

Если поверхность $z = 0$ обеспечивает отражение лучей, картина распространения повторяется. В этом случае область тени на оси ОХ отсутствует. Луч периодически изменяет своё направление, в результате чего имеет место волноводная картина распространения.

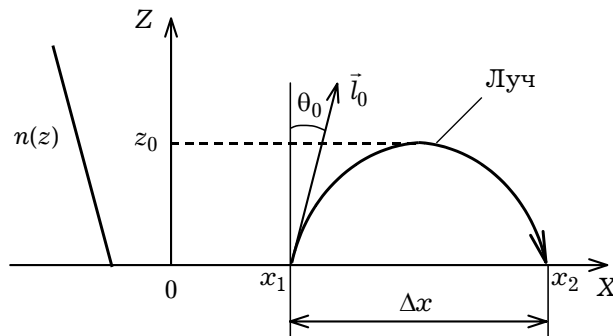


Рис. 11.13

11.4.2. Ионосферное распространение декаметровых волн. Критические частоты.

Прежде всего рассмотрим основные свойства ионосферы. Начиная с высоты около 50–60 км проявляется ионизация атмосферной среды. Это — нижняя граница ионосферы. Степень ионизации характеризуют числом свободных электронов N в единице объема среды. Величина N достигает максимума на высоте 250–400 км. Ионосферу, лежащую ниже этого уровня, называют внутренней, лежащую выше — внешней. Последняя вплоть до высоты порядка радиуса Земли может оказывать заметное влияние на распространение радиоволн.

Основной причиной ионизации атмосферы является ультрафиолетовое и рентгеновское излучение Солнца. На эту часть спектра (диапазон волн короче 0.1 мкм) приходится малая часть энергии солнечного излучения. Более длинноволновое излучение с меньшей энергией квантов не в состоянии произвести требуемую работу для ионизации. Вторым по значению фактором ионизации являются корпускулярные потоки, также в основном солнечного происхождения. Плотность мощности ионизирующего потока от Солнца по мере проникновения в атмосферу падает в результате поглощения. Плотность же газа по мере приближения к Земле возрастает. Поэтому электронная концентрация N как функция высоты имеет максимум на высоте, где ионизация наиболее интенсивна.

В ионосфере различают четыре основные области, обозначаемые буквами D, E, F₁ и F₂; их называют *слоями*. На рис. 11.14 представлено распределение электронной концентрации N (в см⁻³) в ионосфере по высоте. Днем степень ионизации значительно выше; в ночное время слои F₁ и F₂ не имеют резкой границы, а нижняя граница ионосферы поднимается до высоты около 100 км, причем исчезает область D. В зависимости от степени солнечной активности (11-летний цикл), сезона и времени суток указанное распределение варьируется. Пределы изменения высоты максимума электронной концентрации и максимального значения N на рис. 11.14 показаны крестом стрелок. Указаны также основные факторы ионизации для областей D, E и F (вертикальные стрелки); символы L_α и L_β — обозначение линий излучения серии Лаймана спектра водорода. В таблице 11.2 приведены некоторые сведения о структуре ионосферы. Слой E₁, соглас-

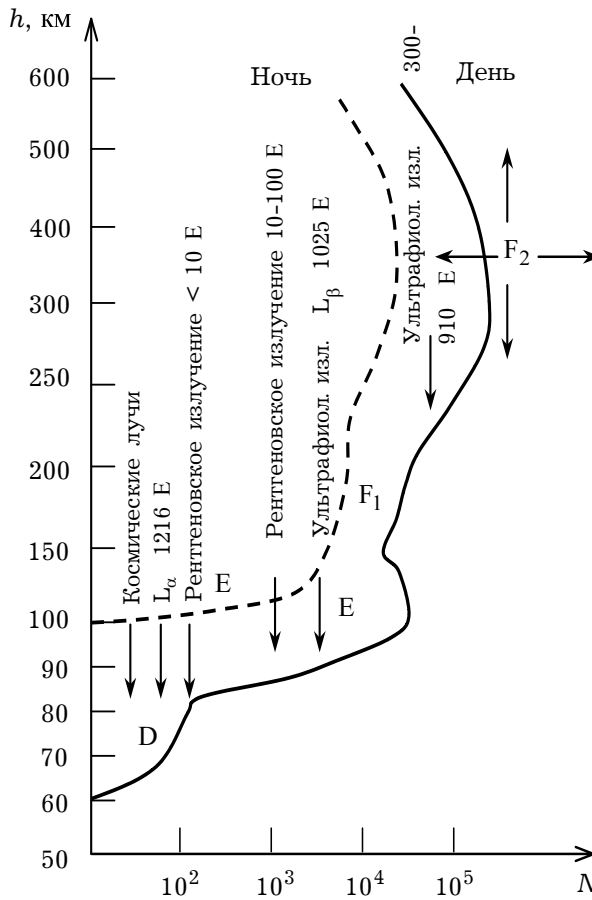


Рис. 11.14

лучения происходит резкое повышение ионизации в слое D.

Теперь рассмотрим особенности распространения декаметровых волн в ионосфере. Декаметровые волны могут распространяться в виде земных и ионосферных волн. Вследствие их значительного поглощения поверхностью Земли как земные они распространяются на небольшие расстояния (несколько десятков километров). При ионосферном распространении (путем многократного отражения от ионосферы) короткие волны могут распространяться на весьма значительные расстояния. Поскольку в ионосфере показатель преломления убывает с высотой, луч при распространении будет отклоняться от вертикали так, что угол $\theta > \theta_0$. В этом случае при представлении ионосферы в виде плоскостистой среды из уравнения траектории (11.4.10) при условии

$$n(z_0) = \sin \theta_0 \quad (11.4.21)$$

следует, что направление луча на высоте z_0 параллельно горизонтальной плоскости, то есть при $z = z_0$ происходит поворот волны. Причина этого явления — полное внутреннее отражение. Каждый из слоев ионосферы выполняет определенную роль при распространении волн. При распространении коротких (декаметровых) волн слой

но известным данным, в дневное время существует во все сезоны на всем земном шаре, а слой E_2 — только в некоторых местах. В областях F часто нет четкого разделения на слои F_1 и F_2 . Вообще, слой F наиболее нерегулярен и его параметры зависят от магнитного поля Земли.

В ионосфере в целом имеют место крупномасштабные нерегулярные явления. При *магнитных бурях*, возникающих в результате вторжения в ионосферу корпускулярных потоков, вызываемых вспышками на Солнце, происходит резкое изменение параметров области F: наблюдается сильное уменьшение электронной концентрации и увеличение высоты ее максимума. Влияние магнитных бурь сильнее в полярных зонах. Другого рода явление — вспышки на Солнце (хромосферные вспышки) — сопровождаются весьма значительным усилением ультрафиолетового и рентгеновского излучения. В результате глубокого проникновения из-

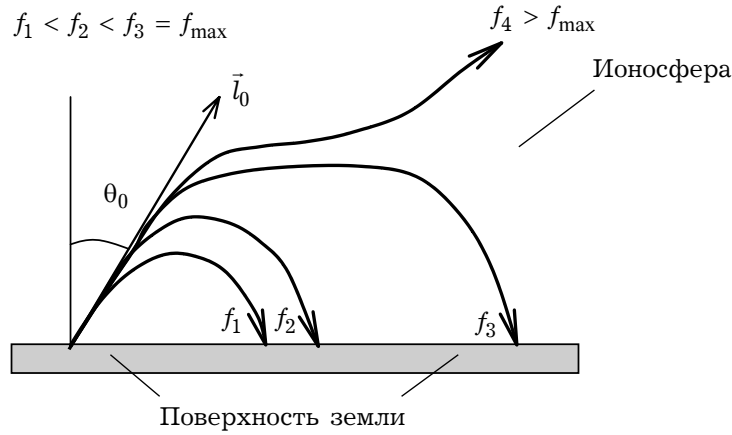


Рис. 11.15

F, имеющий наибольшую концентрацию электронов, является отражающим, а слои D и E — поглощающими.

Известно, что при нормальном падении волны на ионосферу будут отражаться только те волны, частоты которых не превосходят некоторого критического значения ω_p . Рассмотрим наклонное падение под углом θ_0 волны на однородный слой ионосферы с показателем преломления n_0 . Подставляя в (11.4.21) в качестве показателя преломления n величину $\sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - (\omega_p / \omega)^2} = \sqrt{1 - 80.6 \cdot N / f^2}$, то есть описывая слой ионосферы в приближении «холодной» плазмы [Л.8] (N — концентрация электронов) получаем [Л.32]:

$$\sin \theta_0 = \sqrt{1 - \frac{80.6 \cdot N}{f^2}} \sin \theta, \quad (11.4.22)$$

где θ — угол мгновенного направления луча в ионосфере.

Равенство (11.4.22) может быть выполнено только при положительном подкоренном выражении. Последнее с ростом высоты должно уменьшаться во внутренней ионосфере (пока N растет) и увеличиваться во внешней (где N падает). Соотношение (11.4.22) даёт значение угла θ_0 , под которым необходимо направить луч, чтобы произошло его отражение от ионосферы на высоте z_0 . Общий характер лучевой траектории зависит от того, «успеет» ли угол преломления увеличиться до 90° , то есть выполнится ли (для данных θ_0 и f) при концентрации $N = N^*$ равенство:

$$\sin \theta_0 = \sqrt{1 - \frac{80.6 \cdot N^*}{f^2}}. \quad (11.4.23)$$

Если $N^* < N_{\max}$, то условие (11.4.23) будет выполнено (на какой-то высоте) и луч достигнет точки поворота (лучи с частотами f_1, f_2 на рис. 11.15); дальнейшая — нисходящая — часть траектории симметрична первоначальной.

При фиксированном угле θ_0 высота отражения луча растет с увеличением частоты. Вследствие этого, увеличивая частоту, можно дойти до высоты отраже-

Таблица 11.2

Область ионосферы	Высота, км	Слой	Приблизительная высота, км	N, м ⁻³ (днев)
D	50-90	C D	65 75-80	$\sim 10^8$ $\sim 10^9$
E	90-(120-140)	E₁ E₂ E₃	110 - 100	$\sim 10^{11}$ - -
F	90-120 и выше	F₁ F₂	200 250	$\sim 2 \cdot 10^{11}$ $\sim 10^{12}$

ния, для которой $N(z) = N_{\max}$. В этом случае выражение

$$f_{\max} = \frac{\sqrt{80.6 \cdot N_{\max}}}{\cos \theta_0}, \quad (11.4.24)$$

где концентрация N_{\max} измеряется в м⁻³ (см. таблицу 11.2), определяет максимально возможную частоту волны, направленной под углом θ_0 , при которой она (волна) может отразиться от слоя. Для волн с большей частотой слой является прозрачным. Если же $N > N_{\max}$, то равенство (11.4.23) уже не может быть выполнено (при данных θ_0 и f) и луч будет уклоняться к Земле вплоть до уровня $N = N_{\max}$, а при переходе во внешнюю ионосферу начнет уклоняться от Земли (луч с частотой f_4 на рис. 11.15). Из выражения (11.4.24) следует, что для каждого фиксированного угла θ_0 существует свое значение f_{\max} , которое изменяется от значения $\sqrt{80.6 \cdot N_{\max}}$ до бесконечности при изменении угла θ .

11.5(*). Распространение электромагнитных волн вдоль земной поверхности (задача А. Зоммерфельда)

Определение влияния конечной проводимости Земли на распространение электромагнитных волн относится к числу классических задач теории волн. Впервые в рамках простейшей физической модели, когда источником волн является элементарный диполь, земная поверхность считается плоской, а обе среды — атмосфера и земля — однородными, задача была решена немецким физиком и математиком А. Зоммерфельдом в 1909 году. Общее решение задачи было представлено в виде контурных интегралов, физическая трактовка и практическое использование которых затруднительны. Впоследствии эта задача привлекла внимание многих учёных, среди которых можно назвать Ван-дер-Поля, Вейля, М.А. Леонтовича, В.А. Фока, Е.Л. Фейнберга и других.

Рассмотрим задачу А.Зоммерфельда: задачу о распространении электромагнитной волны в атмосфере над поверхностью Земли. Будем считать Землю плоской,

среду — однородной; в качестве источника, создающего поле, возьмём вертикальный электрический диполь, расположенный на высоте z_0 над поверхностью Земли. Ось OZ цилиндрической системы координат совместим с осью диполя, а плоскость $z = 0$ с поверхностью Земли (рис. 11.16).

В атмосфере при $z > 0$

$$\varepsilon^{(1)} = \mu^{(1)} = 1, \quad \sigma^{(1)} = 0, \quad k_1 = k_0 = \omega / c,$$

$$Z^{(1)} = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 120\pi;$$

при $z < 0$ Земля характеризуется параметрами

$$\varepsilon^{(2)}, \quad \mu^{(2)} = 1, \quad \varepsilon_k^{(2)} = \varepsilon^{(2)} - i \sigma^{(2)} / (\varepsilon_0 \omega),$$

$$k_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_k^{(2)}}, \quad Z^{(2)} = \sqrt{\mu_0 / (\varepsilon_0 \varepsilon_k^{(2)})}.$$

В силу осевой симметрии задачи зависимость электромагнитного поля от угла φ отсутствует, то есть задача Зоммерфельда является двумерной.

Задача состоит в определении поля диполя в произвольной точке наблюдения $P(\rho, z)$, которая может находиться как в Земле, так и в атмосфере. Если бы диполь находился в неограниченной однородной среде, то поле в точке P определялось бы электродинамическим потенциалом \bar{A}^e :

$$\bar{A}^e = \bar{z}_0 A_0 \frac{e^{-ik_0 r}}{4\pi r}, \quad (11.5.1)$$

направленным параллельно оси диполя. В (11.5.1) $A_0 = I_z^e l$ — момент тока диполя; $r = \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}$; l — длина диполя.

Для функции, являющейся математическим признаком сферической волны: $e^{-ik_0 r} / r$, справедливо разложение по цилиндрическим функциям [Л7.1]:

$$\frac{2e^{-ik_0 r}}{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} h H_0^{(2)}(h\rho) \frac{\exp\{-|z - z_0| \sqrt{h^2 - k_0^2}\}}{\sqrt{h^2 - k_0^2}} dh. \quad (11.5.2)$$

В случае, когда вибратор находится у поверхности Земли, поля в атмосфере и в Земле будут возмущёнными за счёт возникших в Земле токов. Полное поле в первой среде (в атмосфере) будет складываться из первичного поля и поля, отражённого от границы раздела $z = 0$. Векторный потенциал отражённого поля запишем в виде, аналогичном (11.5.1), с учётом (11.5.2). Тогда выражение для потенциала полного поля $A_z^{(1)}$ в первой среде ($z > 0$) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} A_z^{(1)} = & \frac{A_0}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(h\rho) \frac{\exp\{-|z - z_0| \sqrt{h^2 - k_0^2}\}}{\sqrt{h^2 - k_0^2}} h dh + \\ & + \frac{A_0}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(h) H_0^{(2)}(h\rho) \frac{\exp\{-\sqrt{h^2 - k_0^2} z\}}{\sqrt{h^2 - k_0^2}} h dh, \end{aligned} \quad (11.5.3)$$

где функция $f_1(h)$ пока не определена.

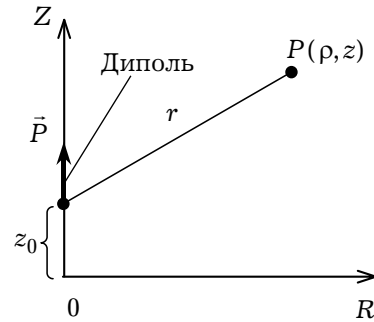


Рис. 11.16

Выражение для отражённого поля (второе слагаемое в (11.5.3)) записано с учётом того, что его источником является граница раздела двух сред при $z = 0$.

Векторный потенциал во второй среде (при $z < 0$) будем искать в форме, аналогичной (11.5.3), но с учётом того, что среда имеет другие параметры:

$$A_z^{(2)} = \frac{A_0}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(h) H_0^{(2)}(h\rho) \frac{\exp\{\sqrt{h^2 - k_2^2} z\}}{\sqrt{h^2 - k_2^2}} h dh, \quad (11.5.4)$$

где функция $f_2(h)$ также пока не определена.

Выражение для поля во второй среде записано с учётом того, что его источником является граница раздела сред при $z = 0$. Знаки в показателях экспоненциальных функций формул (11.5.3) и (11.5.4) выбраны из очевидных физических соображений: второй интеграл в (11.5.3) должен сходиться при положительных значениях z , а в (11.5.4) — при отрицательных. При указанном выборе знаков предполагается, что действительные части функций $\sqrt{h^2 - k_0^2}$ и $\sqrt{h^2 - k_2^2}$ должны быть положительными на пути интегрирования.

Для определения функций $f_1(h)$ и $f_2(h)$ воспользуемся граничными условиями при $z = 0$:

$$\vec{E}_\tau^{(1)} = \vec{E}_\tau^{(2)}, \quad \vec{H}_\tau^{(1)} = \vec{H}_\tau^{(2)}. \quad (11.5.5)$$

С учётом формул связи составляющих электрического и магнитного полей с составляющими вектора \vec{A}^e нетрудно показать, что выполнение условий (11.5.5) приводит к следующим уравнениям:

$$A_z^{(1)} = A_z^{(2)}, \quad \frac{1}{\varepsilon_K^{(1)}} \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_K^{(2)}} \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial z}. \quad (11.5.6)$$

Подставляя (11.5.3) и (11.5.4) в (11.5.6), получаем систему уравнений для определения функций $f_1(h)$ и $f_2(h)$ [Л7.1]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(h\rho) \left[\frac{e^{-\sqrt{h^2 - k_0^2} z_0}}{\sqrt{h^2 - k_0^2}} + \frac{f_1(h)}{\sqrt{h^2 - k_0^2}} \right] h dh = \quad (11.5.7)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(h\rho) \frac{f_2(h)}{\sqrt{h^2 - k_2^2}} h dh,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(h\rho) \left[e^{-\sqrt{h^2 - k_0^2} z_0} - f_1(h) \right] h dh = \quad (11.5.8)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_K^{(2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(h\rho) f_2(h) h dh.$$

При записи уравнения (11.5.8) учтено, что в первой среде $\varepsilon_K^{(1)} = 1$.

Покажем, что в уравнениях (11.5.7) и (11.5.8) из равенства интегралов следует равенство подынтегральных выражений. С этой целью умножим оба уравнения на $J_0(h'\rho)\rho$ и проинтегрируем их по ρ от $-\infty$ до $+\infty$. С учётом известного

СООТНОШЕНИЯ

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(h\rho) J_0(h'\rho) \rho d\rho = \\ & = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(h\rho) J_0(h'\rho) \rho d\rho = \frac{2\delta(h-h')}{h'} \end{aligned}$$

получаем под интегралами по h в (11.5.7) дельта-функции $\delta(h-h')$. Учитывая свойство дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(h) \delta(h-h') dh = F(h'),$$

из уравнений (11.5.7) и (11.5.8) получаем

$$\begin{aligned} f_1(h') + \frac{1}{\varepsilon_K^{(2)}} f_2(h') &= e^{-\sqrt{h'^2 - k_0^2} z_0}, \\ \frac{f_1(h')}{\sqrt{h'^2 - k_0^2}} - \frac{f_2(h')}{\sqrt{h'^2 - k_2^2}} &= -\frac{e^{-\sqrt{h'^2 - k_0^2} z_0}}{\sqrt{h'^2 - k_0^2}}. \end{aligned} \quad (11.5.9)$$

Решив систему уравнений (11.5.9) и возвратившись к переменной h , получаем выражения для $f_1(h)$ и $f_2(h)$:

$$\begin{aligned} f_1(h) &= \frac{\varepsilon_K^{(2)} \sqrt{h^2 - k_0^2} - \sqrt{h^2 - k_2^2}}{\varepsilon_K^{(2)} \sqrt{h^2 - k_0^2} + \sqrt{h^2 - k_2^2}} e^{-\sqrt{h^2 - k_0^2} z_0}, \\ f_2(h) &= \frac{2\varepsilon_K^{(2)} \sqrt{h^2 - k_0^2}}{\varepsilon_K^{(2)} \sqrt{h^2 - k_0^2} + \sqrt{h^2 - k_2^2}} e^{-\sqrt{h^2 - k_0^2} z_0}. \end{aligned} \quad (11.5.10)$$

Подстановка полученных выражений для $f_1(h)$ и $f_2(h)$ в формулы (11.5.3) и (11.5.4) формально решает задачу о нахождении поля электрического диполя, расположенного над плоской границей раздела двух сред. В частности, рассмотрим выражение для составляющей E_z электрического поля в первой среде, возбуждаемого диполем, расположенным на границе раздела двух сред ($z_0 = 0$). Очевидно, что при $z > z_0$ z -составляющая электродинамического потенциала полного поля в первой среде с учётом (11.5.10) равна:

$$\begin{aligned} A_z^{(1)} &= \frac{A_0}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^{(2)}(h\rho)}{\sqrt{h^2 - k_0^2}} \left[\exp\left\{-|z - z_0| \sqrt{h^2 - k_0^2}\right\} + \right. \\ &+ \left. \frac{\varepsilon_K^{(2)} \sqrt{h^2 - k_0^2} - \sqrt{h^2 - k_2^2}}{\varepsilon_K^{(2)} \sqrt{h^2 - k_0^2} + \sqrt{h^2 - k_2^2}} \exp\left\{-|z + z_0| \sqrt{h^2 - k_0^2}\right\} \right] h dh. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой

$$E_z = \frac{1}{i\omega \epsilon_k} \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right],$$

которая справедлива при условии отсутствия азимутальной зависимости поля, и полагая $z_0 = 0$, получаем выражение для поля в первой среде ($z > 0$):

$$E_z^{(1)} = -\frac{iA_0 \epsilon_k^{(2)}}{4\pi\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(h\rho) \frac{e^{-\sqrt{h^2 - k_0^2} z}}{\epsilon_k^{(2)} \sqrt{h^2 - k_0^2} + \sqrt{h^2 - k_2^2}} h^3 dh. \quad (11.5.11)$$

Аналитические выражения для поля над поверхностью Земли получаются интегрированием (11.5.11). Эту операцию можно сделать с помощью теории вычетов в плоскости комплексной переменной h . С учётом того, что под интегралом в (11.5.11) находятся две неоднозначные функции ($\sqrt{h^2 - k_0^2}$ и $\sqrt{h^2 - k_2^2}$), необходимо провести надлежащую систему разрезом на плоскости комплексной переменной, то есть выбрать необходимые однозначные ветви исследуемых функций. Таким образом, задача сводится к проведению интегрирования (11.5.11) по системе разрезом плоскости комплексной переменной. Интеграл (11.5.11) до сих пор точно не вычислен, несмотря на то, что этим занимались многие исследователи. Были получены различные приближённые выражения для (11.5.11). В частности, А. Зоммерфельд получил выражение [Л7.1] для электрического поля над Землёй при больших ρ :

$$E_z^{(1)} \approx C \sqrt{\frac{2}{\pi h_1 \rho}} \exp \left[-ik_0 \rho + ik_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma^{(2)}}} z - \left(k_0 \frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma^{(2)}} \rho + k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma^{(2)}}} z \right) \right], \quad (11.5.12)$$

где $h_1 = k_0 \{1 - \epsilon_0 / (2\sigma^{(2)})\}$; C — некоторая постоянная.

Поле $E_z^{(1)}$, определяемое формулой (11.5.12), представляет собой (при больших значениях ρ) волну, которая распространяется в основном в направлении ρ и амплитуда которой экспоненциально убывает как в направлении оси ρ , так и в направлении оси OZ . Напомним, что волны, амплитуды которых экспоненциально затухают в направлении, перпендикулярном распространению, называются *поверхностными*.

Волну (11.5.12) можно назвать слабоповерхностной, так как коэффициент затухания $k_0 \sqrt{\epsilon_0 \omega / (2\sigma^{(2)})}$ по оси OZ очень мал из-за достаточно больших значений проводимости $\sigma^{(2)}$. Поверхностная волна (11.5.12) получила название в литературе *волны Ценнека*. А. Зоммерфельд сделал ошибочный вывод, что главный вклад в значение поля над Землёй даёт волна Ценнека. Ошибка А. Зоммерфельда связана с тем, что вычисление интеграла (11.5.11) он свёл к определению вычета в точке h_1 , тем самым пренебрёг интегралами по системе разрезом в комплексной области h . Ошибка А. Зоммерфельда впоследствии была исправлена В.А. Фоком, но записать более строгое выражение для поля в простом аналитическом виде последнему так и не удалось.

11.6(*). Структура поля вертикального диполя у поверхности Земли. Функция ослабления

11.6.1. Функция ослабления. Процесс распространения радиоволн над поверхностью Земли неразрывно связан с явлениями поглощения энергии волны вследствие её проникновения в толщу Земли и дифракционных потерь. Особенно велики потери энергии радиоволн при размещении антенных устройств в непосредственной близости от поверхности Земли, что обычно имеет место в передвижных радиоустройствах. Таким образом, при удалении от вертикального диполя в задаче А. Зоммерфельда электромагнитное поле убывает. При этом вектор напряжённости электрического поля \vec{E} вертикального диполя (рис. 11.1) должен иметь горизонтальную составляющую, поскольку только при её существовании возможен поток электромагнитной энергии в толщу Земли, в результате чего вертикальная составляющая напряжённости поля E_z у реальной земной поверхности меньше напряжённости $E_0 = E_{z0}$ вблизи идеально-проводящей поверхности. Сравнивая составляющие E_z и E_{z0} , можно судить о степени влияния Земли на распространение радиоволн. Для этого вертикальную составляющую обычно представляют в виде

$$E_z = E_{z0} F(r). \quad (11.6.1)$$

Функция $F(r) = |F(r)| e^{i\varphi(r)}$ в (11.6.1) называется комплексной *функцией ослабления*, модуль которой по физическим соображениям не может быть больше единицы: $|F(r)| \leq 1$. Модуль функции ослабления равен единице в случае, когда вертикальный диполь расположен над идеально-проводящей плоскостью. Очевидно, что функция ослабления $F(r)$ зависит от расстояния между вибратором и точкой наблюдения $r = \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}$: с увеличением ρ функция F должна убывать.

11.6.2. Приближённые граничные условия Щукина–Леонтовича. Функцию ослабления в принципе можно найти из решения задачи А. Зоммерфельда. Однако полученное в предыдущем разделе решение является громоздким и ненаглядным. В связи с этим возникает потребность в решении задачи А. Зоммерфельда приближёнными методами, позволяющими получить простые расчётные соотношения. Один из таких методов использует *приближённые граничные условия Щукина–Леонтовича*.

Суть идеи использования приближённых граничных условий состоит в следующем. Во многих граничных задачах требуется знать поле только в одной из областей. Так, в задаче А. Зоммерфельда нас интересует прежде всего поле над поверхностью Земли. В то же время для его определения приходится рассматривать поле в обеих средах. Возникает вопрос: нельзя ли сформулировать такие граничные условия, при которых можно не рассматривать поле в той среде, где нет необходимости его знать?

Ранее при решении задачи о прохождении поля в среду с большой проводимостью (см. раздел 2.9.1) было показано, что оно в этой среде носит характер плоской волны, уходящей в направлении нормали к границе раздела сред независимо от

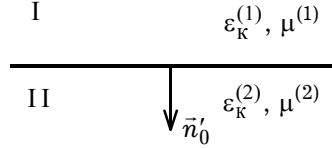


Рис. 11.17

угла падения. При этом между векторами \vec{E} и \vec{H} во второй (проводящей) среде существует простая связь:

$$[\vec{n}'_0, \vec{E}] = Z_K^{(2)} [\vec{n}'_0, [\vec{H}, \vec{n}'_0]], \quad (11.6.2)$$

где $Z_K^{(2)} = \sqrt{\mu_0 \mu^{(2)} / \epsilon_0 \epsilon_K^{(2)}}$ — импеданс второй среды, \vec{n}'_0 — вектор единичной нормали к поверхности раздела двух сред, направленный внутрь второй среды (рис. 11.17).

Вследствие непрерывности тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} на границе раздела сред они связаны тем же самым соотношением (11.6.2). Волновое сопротивление второй среды $Z_K^{(2)}$ на границе раздела двух сред называется в этом случае *поверхностным импедансом* Z , и граничное условие записывается следующим образом:

$$[\vec{n}_0, \vec{E}] = Z [\vec{n}_0, [\vec{n}_0, \vec{H}]], \quad (11.6.3)$$

где \vec{n}_0 — внешняя нормаль ко второй (проводящей) среде (рис. 11.18). Уравнения подобного типа часто называют *импедансными граничными условиями Щукина-Леонтовича*.

Кроме среды с большой проводимостью $\sigma^{(2)}$ граничные условия (11.6.3) применимы и тогда, когда коэффициент преломления второй среды

$$n_{21} = \sqrt{\frac{\epsilon_a^{(2)} \mu_a^{(2)}}{\epsilon_a^{(1)} \mu_a^{(1)}}}$$

велик за счёт больших величин $\epsilon_a^{(2)}$ и $\mu_a^{(2)}$.

В заключение раздела запишем граничные условия Щукина-Леонтовича (11.6.3) в проекциях на оси декартовой системы координат, показанной на рис. 11.18 (орт \vec{z}_0 направлен по нормали \vec{n}_0):

$$E_x^{(1)} = \sqrt{\frac{\mu_a^{(2)}}{\epsilon_K^{(2)}}} H_y^{(1)}, \quad E_y^{(1)} = -\sqrt{\frac{\mu_a^{(2)}}{\epsilon_K^{(2)}}} H_x^{(1)}. \quad (11.6.4)$$

11.6.3. Структура поля радиоволны у поверхности Земли. Определим электромагнитное поле вблизи поверхности Земли. Запишем уравнения Максвелла в проекциях на оси декартовой системы координат (рис. 11.18) с учётом отсутствия

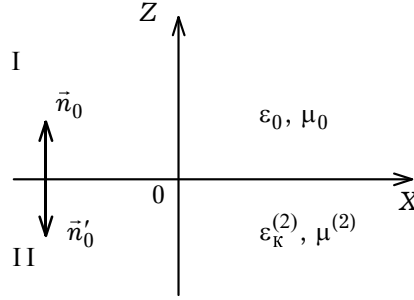


Рис. 11.18

зависимости электромагнитного поля от координаты y для области, свободной от источников (вне диполя):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x^{(1)}}{\partial x} &= -\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial z}, \quad \frac{\partial H_y^{(1)}}{\partial x} = i\omega\epsilon_0 E_z^{(1)}, \\ \frac{\partial H_x^{(1)}}{\partial x} &= -\frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial x} = -i\omega\mu_0 H_z^{(1)}. \end{aligned} \quad (11.6.5)$$

Дифференцируя уравнения (11.6.4) по координате x , с учётом соотношений (11.6.5), нетрудно переписать граничные условия (11.6.4) в виде ($z = 0$):

$$\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial z} = i \frac{k_0}{\sqrt{\epsilon_k^{(2)}}} E_z^{(1)}, \quad (11.6.6)$$

$$\frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial z} = ik_0 \sqrt{\epsilon_k^{(2)}} E_z^{(1)}. \quad (11.6.7)$$

При записи (11.6.6) и (11.6.7) было учтено, что $\mu_a^{(2)} = \mu_0$ и $|\epsilon_k^{(2)}| \gg 1$.

Будем считать, что волна у поверхности Земли распространяется вдоль оси ОХ (рис. 11.18):

$$\vec{E}^{(1)}(x, z) = \vec{e}(x, z) e^{-ik_0 x},$$

где амплитуда поля $\vec{e}(x, z)$ — медленно меняющаяся по x функция, то есть она мало изменяется на расстоянии, равном длине волны.

В этом случае можно считать, что

$$\frac{\partial \vec{E}^{(1)}}{\partial x} \approx -ik_0 \vec{E}^{(1)}. \quad (11.6.8)$$

Согласно уравнению (11.6.8) и первому из уравнений системы (11.6.5), можно записать:

$$\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial z} \approx ik_0 E_x^{(1)}. \quad (11.6.9)$$

Подставив (11.6.9) в граничное условие (11.6.6), получаем

$$E_x^{(1)} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k^{(2)}}} E_z^{(1)}. \quad (11.6.10)$$

Формула (11.6.10) показывает, что распространяющаяся над поверхностью Земли радиоволна уже не является поперечной, как в однородной среде без границ, а имеет продольную составляющую $E_x^{(1)}$. Очевидно, что амплитуда продольной составляющей обычно меньше вертикальной и сдвинута относительно вертикальной составляющей по фазе. Пусть, например, вертикальная составляющая электрического поля задана следующим образом:

$$\varepsilon_z^{(1)} = E_{z0}^{(1)} \cos(\omega t - k_0 x). \quad (11.6.11)$$

Тогда с учётом (11.6.10) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(1)} &= \frac{E_{z0}^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon_k^{(2)}}} \cos(\omega t - k_0 x - \psi/2) = \\ &= \frac{E_{z0}^{(1)}}{\sqrt[4]{(\varepsilon^{(2)})^2 + (60\lambda\sigma^{(2)})^2}} \cos(\omega t - k_0 x - \psi/2), \end{aligned} \quad (11.6.12)$$

где

$$\psi = \arctg\left(\frac{60\lambda\sigma^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}}\right).$$

При записи (11.6.12) было использовано выражение для комплексной диэлектрической проницаемости в виде:

$$\varepsilon_k^{(2)} = \varepsilon^{(2)} - i60\lambda\sigma^{(2)}.$$

Амплитуда горизонтальной составляющей электрического поля тем меньше, чем больше проводимость земной поверхности и больше длина волны. В диапазоне длинных и средних волн при обычных значениях проводимости почвы горизонтальная составляющая в сотни раз меньше вертикальной.

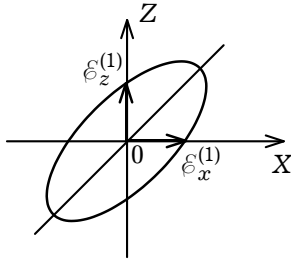


Рис. 11.19

Так как вертикальная и горизонтальная составляющие поля волны вблизи Земли сдвинуты по фазе, результирующее поле является эллиптически-поляризованным. Согласно уравнениям (11.6.11) и (11.6.12) конец вектора $\vec{\varepsilon}^{(1)}$ описывает эллипс в вертикальной плоскости (рис. 11.19). Если в почве преобладают токи смещения ($\varepsilon^{(2)} \gg 60\lambda\sigma^{(2)}$), угол ψ стремится к нулю

и эллипс вырождается в линию. Вектор $\vec{\varepsilon}^{(1)}$ при этом отклонён от нормали на угол φ , определяемый выражением:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_{x0}^{(1)}}{E_{z0}^{(1)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(\varepsilon^{(2)})^2 + (60\lambda\sigma^{(2)})^2}}.$$

Если почва является идеальным проводником ($\varepsilon_x^{(1)} = 0$), эллипс вырождается в линию и вектор $\vec{\varepsilon}^{(1)}$ становится перпендикулярным к поверхности Земли.

11.7(*). Поле низко расположенного излучателя над поверхностью Земли. Функция ослабления для вертикального диполя

Будем исходить из уравнения Гельмгольца для комплексной амплитуды вектора напряжённости электрического поля, записанного с учётом сторонних электрических токов и зарядов в воздухе:

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \vec{E} = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} (\text{grad div } \vec{j}^e + k_0^2 \vec{j}^e). \quad (11.7.1)$$

Уравнение (11.7.1) получается из первого уравнения в (7.2.19) при отсутствии сторонних магнитных токов ($\vec{j}^m = 0$).

Роль сторонних электрических токов в нашем случае играет вертикальный электрический диполь (рис. 11.18).

Применим скалярную формулу Грина (9.4.5), которую удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}(p) = & \frac{i}{4\pi \omega \varepsilon_0} \int_V (\text{grad div } \vec{j}^e + k_0^2 \vec{j}^e) G(p, q) dV' + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_S \left(G(p, q) \frac{\partial \vec{E}}{\partial n'} - \vec{E} \frac{\partial G(p, q)}{\partial n'} \right) dS', \end{aligned} \quad (11.7.2)$$

где $G(p, q)$ — функция Грина; n' — модуль внешней нормали \vec{n}'_0 к поверхности S (рис. 11.18).

В качестве замкнутой поверхности S , внутри которой расположены излучатель (вертикальный вибратор) и точка наблюдения $p(x, y, z)$, выберем поверхность $S = S_0 \cup S_\infty$, где S_0 — поверхность Земли, S_∞ — полусфера, уходящая в бесконечность.

Так как поле излучения вибратора на бесконечности должно удовлетворять условию излучения, интеграл по поверхности S_∞ равен нулю и выражение (11.7.2) для вертикальной составляющей вектора \vec{E} запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} E_z(p) = & \frac{i}{4\pi \omega \varepsilon_0} \int_V (\text{grad}_z \text{div } \vec{j}^e + k_0^2 j_z^e) G(p, q) dV' + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left(G(p, q) \frac{\partial E_z}{\partial n'} - E_z \frac{\partial G(p, q)}{\partial n'} \right) dS'. \end{aligned} \quad (11.7.3)$$

Функцию $G(p, q)$ выберем в виде

$$G(p, q) = \frac{e^{-ik_0 R}}{R} + \frac{e^{-ik_0 R_1}}{R_1}, \quad (11.7.4)$$

где R, R_1 — расстояния, соответственно, от точки наблюдения $p(x, y, z)$ и её зеркального изображения $p_1(x, y, -z)$ относительно плоскости S_0 до какой-либо точки

на поверхности S_0 : точки источника $q(x', y', 0)$. Очевидно, что $R = R_1$. В этом случае производная по нормали от функции $G(p, q)$ будет равна нулю, так как нормали в двух слагаемых в (11.7.4) направлены в противоположные стороны. Поэтому под знаком поверхностного интеграла в (11.7.3) второе слагаемое пропадает.

Учитывая, что (рис. 11.18)

$$\frac{\partial E_z}{\partial n'} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

и используя граничное условие (11.6.6), выражение (11.7.3) приводим к виду:

$$E_z(p) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon_0} \int_V \left(\text{grad}_z \text{div} \vec{j}^e + k_0^2 j_z^e \right) G(p, q) dV - \frac{ik_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_K^{(2)}}} \int_{S_0} E_z \frac{e^{-ik_0 R}}{R} dx' dy', \quad (11.7.5)$$

где $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$ — расстояние от точки наблюдения $p(x, y, z)$ до текущей точки на поверхности $S_0 (z=0)$.

Для вертикального электрического диполя ориентированного вдоль оси OZ и расположенного в точке $z = z_0$, имеем:

$$\vec{j}^e = \vec{z}_0 A_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0). \quad (11.7.6)$$

Так как точка наблюдения p определяется $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$ — расстоянием от диполя, расположенным в точке $(0, 0, z_0)$ до точки $p(x, y, z)$, поэтому в левой части интегрального соотношения (11.7.5) сделаем замену аргумента функции E_z : $p \rightarrow r$.

Подстановка (11.7.6) в (11.7.5) приводит к выражению

$$E_z(r) = \frac{iA_0}{4\pi\omega\epsilon_0} \left\{ k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} - \frac{ik_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_K^{(2)}}} \int_{S_0} E_z \frac{e^{-ik_0 R}}{R} dx' dy'.$$

При выводе последнего соотношения было использовано известное свойство дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \delta''(z - z_0) dz = f''(z_0),$$

где $\delta''(z - z_0)$ — вторая производная дельта-функции по координате z .

При рассмотрении поля излучения вибратора в дальней зоне второй производной по z от множителя $\exp\{-ik_0 r\}/r$ можно пренебречь:

$$E_z(r) = \frac{iA_0 k_0^2}{4\pi\omega\epsilon_0} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} - \frac{ik_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_K^{(2)}}} \int_{S_0} E_z \frac{e^{-ik_0 R}}{R} dx' dy'. \quad (11.7.7)$$

С учётом того, что $k_0^2/(2\pi\omega\epsilon_0) = 120\pi/\lambda$, первое слагаемое в (11.7.7)

$$E_z^{(1)} = \frac{iA_0 120\pi \sin \theta}{\lambda} \frac{e^{-ik_0 r}}{r}$$

определяет поле вертикального диполя, расположенного над идеально проводящей поверхностью (оно в два раза больше поля диполя в свободном пространстве). Второе слагаемое в уравнении (11.7.7) учитывает отличие Земли от идеального проводника. Поэтому составляющую E_z , входящую под знак интеграла в (11.7.7), можно записать в виде:

$$E_z = A \frac{e^{-ik_0 r}}{r_1} F(r_1), \quad (11.7.8)$$

где $A = i 120 \pi A_0 \sin \theta / \lambda$, $F(r_1)$ — функция ослабления (11.6.1);

$r_1 = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z' - z_0)^2}$ — расстояние от диполя, расположенного на поверхности S_0 до точки наблюдения $p'(x', y', 0)$; штрих означает, что по этим переменным проводится интегрирование в (11.7.7).

С учётом (11.7.8) запишем (11.7.7) в виде:

$$E_z(r) = A \frac{e^{-ik_0 r}}{r} - \frac{ik_0}{2\pi \sqrt{\epsilon_k^{(2)}}} \int_{S_0} A \frac{e^{-ik_0 r_1}}{r_1} F(r_1) \frac{e^{-ik_0 R}}{R} dx' dy' = A \frac{e^{-ik_0 r}}{r} F(r).$$

Подставляя в полученное выражение составляющую E_z , записанную по формуле (11.7.8) в точке наблюдения (x, y, z) , получаем интегральное уравнение относительно функции ослабления $F(r)$:

$$F(r) = 1 - \frac{ik_0 r}{2\pi \sqrt{\epsilon_k^{(2)}}} \int_{S_0} \frac{e^{-ik_0(R+r_1-r)}}{R r_1} F(r_1) dx' dy'. \quad (11.7.9)$$

Решение интегрального уравнения (11.7.9) для области вдали от диполя имеет вид [Л.17]:

$$F(\rho) = 1 - i \sqrt{\pi \rho} e^{-\rho} - 2 e^{-\rho} \sqrt{\rho} \int_0^{\sqrt{\rho}} e^{v^2} dv, \quad (11.7.10)$$

где

$$\rho = -\frac{i \pi r}{\epsilon_k^{(2)} \lambda} \quad (11.7.11)$$

безразмерная величина, называемая *численным расстоянием*.

Амплитудное значение вертикальной составляющей поля, согласно (11.7.8), определяется выражением:

$$|E_z| = \frac{120 \pi A_0}{\lambda r} |F(\rho)|. \quad (11.7.12)$$

Формула (11.7.12), в которой $F(\rho)$ определяется с помощью (11.7.10), (11.7.11), называется *формулой Шулейкина-Ван дер Поля*. На практике $|F(\rho)|$ находят по *кривым Берроуза* (рис. 11.20), где по оси абсцисс откладывается значение модуля параметра ρ :

$$|\rho| = \frac{\pi r}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{(\epsilon^{(2)})^2 + (60 \lambda \sigma^{(2)})^2}}. \quad (11.7.13)$$

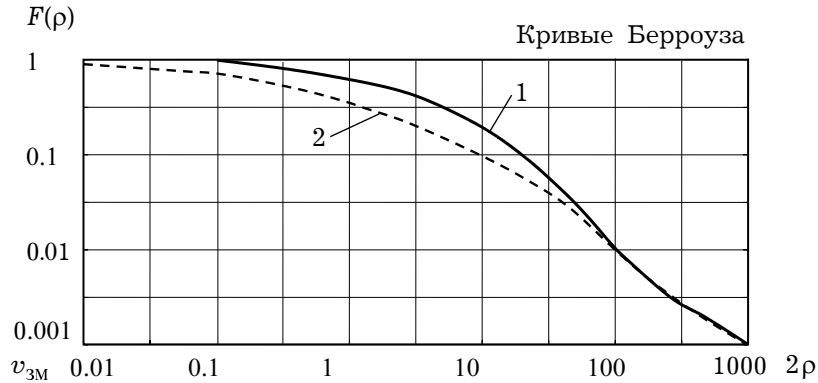


Рис. 11.20

Кривая 1 на рис. 11.20 относится к случаю $60\lambda\sigma^{(2)} \gg \varepsilon^{(2)}$, который характерен для длинных волн и хорошо проводящих почв. Кривая 2 соответствует $60\lambda\sigma^{(2)} \ll \varepsilon^{(2)}$, что справедливо для коротких волн и плохо проводящих почв.

При отсутствии графиков для определения модуля функции ослабления используют приближённую формулу [Л.32]:

$$|F(\rho)| \approx \frac{2 + 0.3|\rho|}{2 + |\rho| + 0.6|\rho|^2}. \quad (11.7.14)$$

Для малых расстояний $|\rho| \approx 0$ и $F(\rho) \approx 1$. Амплитуда напряжённости поля при этом убывает по закону $1/r$. При больших расстояниях, когда $|\rho| \gg 1$, функция ослабления определяется выражением

$$|F(\rho)| \approx 1/2|\rho|. \quad (11.7.15)$$

При этом, с учётом (11.7.13) амплитуда напряжённости поля обратно пропорциональна квадрату расстояния r .

Для хорошо проводящей почвы и достаточно длинных волн из (11.7.13) следует, что $\rho \approx \pi r / (60\lambda^2\sigma^{(2)})$, и выражение (11.7.12) принимает вид:

$$|E_z| \approx \frac{3600 A_0 \lambda \sigma^{(2)}}{r^2}. \quad (11.7.16)$$

В случае плохо проводящей почвы и достаточно коротких волн справедлива формула Введенского [Л11.3]:

$$|E_z| \approx \frac{60 A_0}{r^2} \frac{(\varepsilon_k^{(2)})^2}{\varepsilon_k^{(2)} - 1}. \quad (11.7.17)$$

Так как

$$F(r) = |F(r)| e^{-i\varphi(r)},$$

то из (11.6.1) следует, что поверхность постоянной фазы z -составляющей электрического поля определяется уравнением $\omega t - k_0 r - \varphi(r) = \text{const}$, дифференцируя которое по t , находим выражение для фазовой скорости распространения земной волны:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k_0 + \frac{d\varphi}{dr}} = \frac{c}{1 + k_0^{-1} \varphi'(r)}. \quad (11.7.18)$$



Рис. 11.21

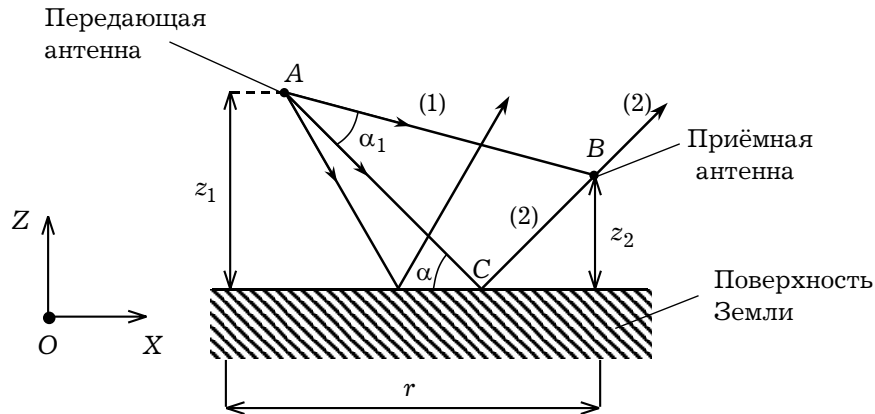


Рис. 11.22

Из (11.7.18) следует, что фазовая скорость волны, распространяющейся вдоль земной поверхности, меньше скорости света и изменяется с расстоянием при $\phi'(r) \neq 0$. Однако при больших расстояниях ρ , когда выполняется равенство (11.7.15), скорость распространения радиоволн не зависит от параметров почв и равна скорости распространения волны в воздухе.

11.8(*). Поле высоко поднятого излучателя в освещенной зоне

Антенны телецентров, радиорелейных и радиолокационных станций коротковолнового и ультракоротковолнового диапазонов, как правило, расположены над поверхностью земли на высоте, в несколько раз превышающей длину волны. Это так называемые высоко поднятые антенны, которые на практике применяются при работе в диапазоне УКВ и с некоторыми ограничениями в диапазоне КВ. В этом случае при рассмотрении процесса распространения радиоволн могут быть использованы законы геометрической оптики.

Вдоль пути распространения земной волны в зависимости от степени освещенности выделяют три области (зоны): освещенную (I), область полутени (II) и область тени (III), как показано на рис. 11.21. Наиболее просто рассчитывается напряженность поля в освещенной зоне при высоко поднятых антеннах, когда влияние Земли сводят к интерференции в точке приема прямой и отраженной волн. При

этом некоторые упрощения получаются благодаря тому, что поверхность Земли считается плоской.

11.8.1. Интерференционные (отражательные) формулы. Электромагнитное поле в точке B приёмной антенны (рис. 11.22) можно представить как результат интерференции свободно распространяющейся по воздуху волны (луч 1) и отражённой от поверхности в точке C волны (луч 2). Заметим, что в точку B из всех отражённых лучей попадает только один луч 2.

Определим комплексную амплитуду поля, соответствующего лучу 1 в точке B . Так как по определению для данной зоны

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} [\vec{E}_0, \vec{H}_0^*] = \frac{E_0^2}{2Z_0} \vec{r}_0 = \frac{E_0^2}{240\pi} \vec{r}_0,$$

где E_0, H_0 — амплитуды напряжённостей электрического и магнитного полей, с учётом соотношения (11.2.3) комплексную амплитуду поля, соответствующего лучу 1, в точке B можно представить в виде

$$E_1 = \frac{1}{r_1} \sqrt{60 P_1 D_1} e^{-ik_0 r_1}, \quad (11.8.1)$$

где P_1 — мощность излучения передающей антенны, расположенной в точке A , D_1 — её КНД, $r_1 = AB$.

Если высоты, на которых расположены излучающая и приёмная антенны много меньше расстояния r (рис. 11.22): $z_1 \ll r, z_2 \ll r$, то $\alpha_1 \approx \alpha$ (α — угол наблюдения), и лучи 1 и 2 почти параллельны. Следовательно, и в направлении луча 2 можно считать, что КНД также равен D_1 . Поэтому выражение для комплексной амплитуды поля, соответствующего лучу 2 в точке B запишем следующим образом:

$$E_2 = \frac{1}{r_2} R \sqrt{60 P_1 D_1} e^{-ik_0 r_2}, \quad (11.8.2)$$

где $r_2 = AC + CB$, $R = |R| \exp(i\varphi)$ — комплексный коэффициент отражения плоской волны от поверхности Земли. При определении R обычно полагают поверхность Земли гладкой и однородной на протяжении всей трассы.

Так как $z_{1,2} \ll r$, можно положить $r_1 \approx r_2 \approx r$. Тогда поле в точке приёма B можно записать в виде:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{r} \sqrt{60 P_1 D_1} e^{-ik_0 r} (1 + |R| e^{-i\beta}), \quad (11.8.3)$$

где $|R|$ — модуль коэффициента отражения R , $\beta = \varphi + k_0 \Delta r$, φ — фаза коэффициента отражения, $\Delta r = r_2 - r_1$.

С учётом того, что

$$\begin{aligned} 1 + |R| e^{-i\beta} &= 1 + |R| \cos \beta - i |R| \sin \beta = \\ &= \sqrt{1 + 2|R| \cos \beta + |R|^2} e^{-i\delta}, \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{|R| \sin \beta}{1 + |R| \cos \beta},$$

получаем из (11.8.3) следующее выражение:

$$E = \frac{1}{r} \sqrt{60P_1 D_1} \sqrt{1 + 2|R| \cos(\varphi + k_0 \Delta r) + |R|^2} \times \exp\{-i(k_0 r + \delta)\}, \quad (11.8.4)$$

которое называется *интерференционной* или *отражательной формулой* для напряжённости электрического поля в дальней зоне при поднятых над земной поверхностью антеннах.

Обычно формулу (11.8.4) записывают в более компактном виде:

$$E = \frac{1}{r} \sqrt{60P_1 D_1} \Phi e^{-i(k_0 r + \delta)}, \quad (11.8.5)$$

где функцию

$$\Phi = \sqrt{1 + 2|R| \cos(\varphi + 2\pi \Delta r / \lambda) + |R|^2} \quad (11.8.6)$$

называют *интерференционным множителем*.

Модуль $|R|$ и фаза φ в (11.8.6) определяются из решения задачи о падении плоской электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред, рассмотренную в разделе 2.9.3, причём разделяют два вида поляризации падающей волны: параллельную и перпендикулярную. У параллельно-поляризованной волны вектор \vec{E} лежит в плоскости падения $ХОУ$ и имеет составляющие E_x и E_z , а вектор \vec{H} перпендикулярен к этой плоскости и имеет только одну составляющую H_y . У волн перпендикулярной поляризации вектор \vec{E} перпендикулярен к плоскости падения.

Знание характеристик плоских электромагнитных волн двух указанных поляризаций при их падении на границу раздела достаточно, чтобы рассмотреть произвольно-поляризованную плоскую волну, так как её можно всегда представить в виде суммы этих двух линейно поляризованных волн.

Коэффициенты отражения электромагнитных волн от плоской границы раздела двух сред для параллельной $R_{||}$ и перпендикулярной R_{\perp} поляризаций плоской волны определяются формулами (2.9.11) и (2.9.12). Так как в нашем случае среды можно считать немагнитными ($\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 1$), а первая среда представляет собой воздух ($\varepsilon_K^{(1)} = 1$), то

$$\frac{Z_K^{(1)}}{Z_K^{(2)}} = \sqrt{\varepsilon_K^{(2)}},$$

где $\varepsilon_K^{(2)}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость земной поверхности; $Z_K^{(j)} = Z_0 \sqrt{\mu^{(j)} / \varepsilon_K^{(j)}}$; Z_0 — волновое сопротивление вакуума, и выражения для коэффициентов отражения принимают вид:

$$R_{||} = \frac{\varepsilon_K^{(2)} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_K^{(2)} - \sin^2 \theta}}{\varepsilon_K^{(2)} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_K^{(2)} - \sin^2 \theta}} = |R_{||}| e^{i\varphi_{||}}, \quad (11.8.7)$$

$$R_{\perp} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\varepsilon_K^{(2)} - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\varepsilon_K^{(2)} - \sin^2 \theta}} = |R_{\perp}| e^{i\varphi_{\perp}},$$

Таблица 11.3

Вид земного покрова	ϵ	σ , См/м
1. Морская вода	80	1 ... 6
2. Пресная вода озер и рек	80	$1 \cdot 10^{-3} \dots 1 \cdot 10^{-2}$
3. Влажная почва	10 ... 30	$3 \cdot 10^{-3} \dots 3 \cdot 10^{-2}$
4. Сухая почва	3 ... 6	$1 \cdot 10^{-5} \dots 5 \cdot 10^{-3}$
5. Мерзлая почва	3 ... 6	$1 \cdot 10^{-3} \dots 1 \cdot 10^{-2}$
6. Снег ($\varphi = -10^\circ$)	1	$1 \cdot 10^{-6}$
7. Лед ($\varphi = -10^\circ$)	4 ... 5	$1 \cdot 10^{-2} \dots 1 \cdot 10^{-1}$

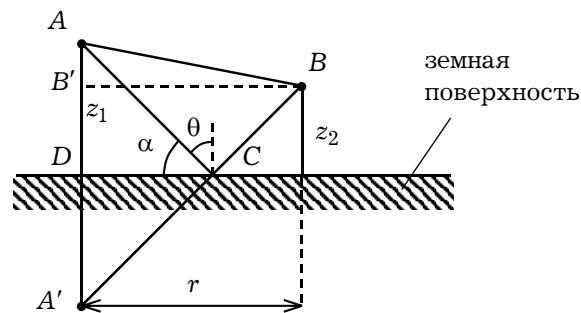


Рис. 11.23

где $\epsilon_k^{(2)} = \epsilon - i60\lambda\sigma$. Значения ϵ и σ для различных земных покровов приведены в таблице 11.3.

Угол падения θ и разность хода лучей Δr можно определить из рис. 11.23:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= AB = \sqrt{r^2 + (z_1 - z_2)^2} \approx r + \frac{z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2}{2r}, \\
 r_2 &= A'B = \sqrt{r^2 + (z_1 + z_2)^2} \approx r + \frac{z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2}{2r}, \\
 \Delta r &\approx \frac{2z_1z_2}{r}.
 \end{aligned} \tag{11.8.8}$$

Подставив (11.8.8) в формулу (11.8.6), получаем выражение для интерференционного множителя:

$$\Phi_{\parallel, \perp} = \sqrt{1 + 2|R_{\parallel, \perp}| \cos\left(\phi_{\parallel, \perp} + \frac{4\pi z_1 z_2}{\lambda r}\right) + |R_{\parallel, \perp}|^2}, \tag{11.8.9}$$

входящего в интерференционную формулу (11.8.5).

При изменении расстояния r функция Φ проходит последовательно через ряд максимумов и минимумов, определяемых из уравнений:

$$\cos\left(\varphi_{\parallel,\perp} + \frac{4\pi z_1 z_2}{\lambda r}\right) = \pm 1.$$

11.8.2. Интерференционный множитель при малых углах скольжения. Формулы (11.8.9) можно упростить для малых углов скольжения α (рис. 11.23), когда угол $\theta \rightarrow \pi/2$. Из (11.8.7) следует, что в этом случае $|R_{\perp,\parallel}| = 1$, $\varphi_{\perp,\parallel} = \pi$. Тогда

$$\Phi_{\parallel,\perp} \approx 2 \left| \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta r\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{2\pi z_1 z_2}{\lambda r}\right) \right|. \quad (11.8.10)$$

Интерференционный множитель (11.8.10) принимает максимальные значения при условии

$$\frac{2\pi z_1 z_2}{\lambda r_n} = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, первый максимум расположен на расстоянии

$$r_1 = \frac{4z_1 z_2}{\lambda}$$

от передатчика.

Минимальные значения функции (11.8.10) определяются из условия

$$\frac{2\pi z_1 z_2}{\lambda r_n} = \pi(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Первый минимум от передатчика расположен на расстоянии

$$r_1 = \frac{2z_1 z_2}{\lambda}.$$

11.8.3. Влияние интерференционного множителя на диаграмму направленности передающей антенны. Рассмотрим пространственную интерференционную структуру поля, создаваемого излучателем. Выразим z_2 через угол наблюдения $\alpha = \pi/2 - \theta$ в вертикальной плоскости. С учётом того, что $\sin \alpha \approx z_2 / r$ получаем уравнение для определения максимумов и минимумов интерференционного множителя

$$\cos\left(\varphi_{\parallel,\perp} + \frac{4\pi z_1}{\lambda} \sin \alpha\right) = \pm 1. \quad (11.8.11)$$

11.8.4. Поле горизонтального диполя. Рассмотрим поле излучения горизонтального диполя в плоскости, перпендикулярной его оси, то есть в меридиональной плоскости. В этой плоскости его характеристика направленности в свободном пространстве $F(\alpha) = 1$, где $\alpha = \pi/2 - \theta$ — угол наблюдения.

Напомним, что $\varepsilon_k^{(2)} = \varepsilon - i60\lambda\sigma$. Рассмотрим два случая: 1) почва является проводником ($60\lambda\sigma \gg \varepsilon$); 2) почва является диэлектриком ($60\lambda\sigma \ll \varepsilon$). Из формул

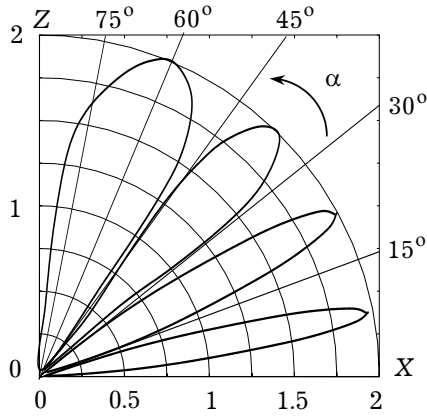


Рис. 11.24

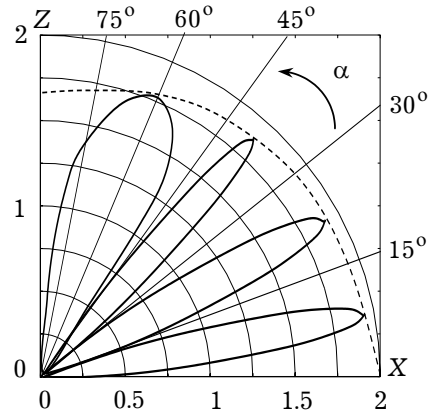


Рис. 11.25

(11.8.7) следует, что $|R_{\perp}| < 1$, $\varphi_{\perp} = \pi$. Условия максимумов и минимумов для обоих видов почв являются одинаковыми. Из уравнений (11.8.11) следует:

$$\frac{4\pi z_1}{\lambda} \sin \alpha_{\max} = \pi(2n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.8.12)$$

$$\frac{4\pi z_1}{\lambda} \sin \alpha_{\min} = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11.8.13)$$

На рис. 11.24 приведена диаграмма направленности горизонтального диполя, расположенного над почвой-проводником, когда $|R_{\perp}| = 1$ и

$$\Phi_{\perp} = 2 \left| \sin \left(\frac{2\pi z_1}{\lambda} \sin \alpha \right) \right|$$

для случая $z_1 / \lambda = 2$.

На рис. 11.25 приведена диаграмма направленности горизонтального диполя, расположенного над диэлектриком для $z_1 / \lambda = 2$. В этом случае $|R_{\perp}| \leq 1$ и из (11.8.9) следует что

$$\Phi_{\perp \max} = 1 + |R_{\parallel, \perp}|, \quad \Phi_{\perp \min} = 1 - |R_{\parallel, \perp}|.$$

Очевидно, что нормированные максимумы диаграммы направленности меньше двух, а минимумы больше нуля (рис. 11.25).

11.8.5. Поле вертикального диполя. Рассмотрим его диаграмму направленности в вертикальной (меридиональной) плоскости. Так как в этой плоскости характеристика направленности диполя в свободном пространстве $F^{(1)}(\alpha) = \cos \alpha$, его характеристика направленности над Землёй определяется выражением:

$$F(\alpha) = F^{(1)}(\alpha) \Phi_{\parallel}(\alpha). \quad (11.8.14)$$

Для почвы-проводника ($60\lambda\sigma \gg \varepsilon$) из (11.8.7) следует, что $|R_{\perp}| \approx 1$, $\varphi_{\parallel} \approx 0$ и

$$\Phi_{\parallel}(\alpha) = 2 \left| \cos \left(\frac{2\pi z_1}{\lambda} \sin \alpha \right) \right|.$$

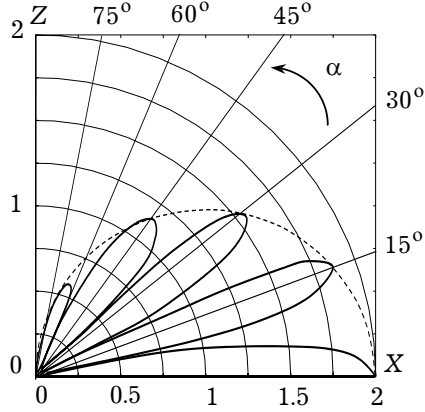


Рис. 11.26

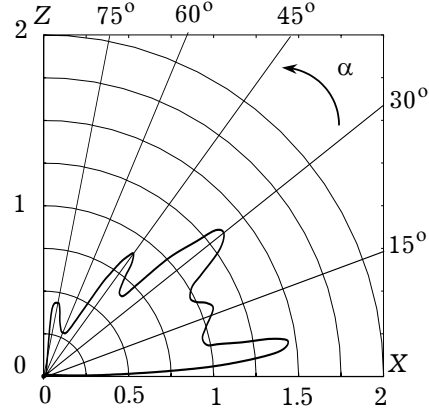


Рис. 11.27

При $2\pi z_1/\lambda \gg 1$ функция $\Phi_{\parallel}(\alpha)$ быстро меняется по сравнению с $\cos \alpha$, поэтому максимумы и минимумы функции (11.8.14) определяются формулами (11.8.12) и (11.8.13). Для случая $z_1/\lambda = 2$ диаграмма направленности поля излучения вертикального диполя над почвой-проводником показана на рис. 11.26.

Для почвы-диэлектрика из формул (11.8.7) следует, что $\Phi_{\parallel} = \pi$ при углах $\theta > \theta_0$ (где θ_0 — угол Брюстера) и $\Phi_{\parallel} = 0$ при углах $\theta < \theta_0$; при $\theta_0 = 0$: $R_{\parallel} = 0$. Тогда, согласно (11.8.11), при $\theta > \theta_0$ условия максимумов и минимумов совпадают с условиями максимумов и минимумов для случая горизонтальной поляризации, а при $\theta < \theta_0$ — с условиями максимумов и минимумов для случая вертикальной поляризации.

На рис. 11.27 показана диаграмма направленности поля излучения вертикального диполя над почвой-диэлектриком при $z_1/\lambda = 2$.

11.8.6. Квадратичная формула Введенского. Для углов $\alpha \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi/2$ из формул (11.8.7) следует, что $|R_{\parallel}| \approx |R_{\perp}| \approx 1$, $\Phi_{\parallel} \approx \Phi_{\perp} \approx \pi$. Тогда формула (11.8.9) принимает вид:

$$\Phi_{\parallel}(\alpha) = \Phi_{\perp}(\alpha) = 2 \left| \sin \left(\frac{2\pi z_1}{\lambda} \sin \alpha \right) \right|. \quad (11.8.15)$$

При $2\pi z_1 \sin \psi / \lambda \leq \pi/6$ можно считать, что

$$\sin \left(\frac{2\pi z_1}{\lambda} \sin \alpha \right) \approx \frac{2\pi z_1}{\lambda} \sin \alpha.$$

В результате выражение (11.8.15) преобразуется к виду:

$$\Phi_{\parallel}(\alpha) = \Phi_{\perp}(\alpha) = \frac{4\pi z_1}{\lambda} \sin \alpha = \frac{4\pi z_1 z_2}{\lambda r}.$$

Следовательно, амплитуды поля для вертикального и горизонтального диполей определяются выражением

$$E_{0\parallel} = E_{0\perp} = \frac{4\pi\sqrt{60P_{\Sigma}}}{\lambda} \frac{D}{r^2} z_1 z_2,$$

где P_{Σ} — мощность излучения. С учётом того, что КНД для диполя $D = 1.5$, окончательно получаем *квадратичную формулу Введенского*:

$$E_{0\parallel} = E_{0\perp} = \frac{4\pi\sqrt{90P_{\Sigma}}}{\lambda r^2} z_1 z_2. \quad (11.8.16)$$

Глава 12

Основы линейной теории устройств сверхвысоких частот для гармонических процессов

12.1(*). Основные определения	525
12.2(*). Основные теоремы СВЧ-цепей	528
12.3(*). Соотношения между характеристическими матрицами (дескрипторами) четырёхполюсника	536
12.4(*). Основные свойства матрицы рассеяния	538
12.5(*). Анализ четырёхполюсников каскадной структуры с помощью матриц передачи	540
12.6(*). Метод симметричных восьмиполусников (метод синфазного и противо- фазного возбуждений)	543
12.7(*). Матрицы передачи и рассеяния для некоторых широко используемых типов четырёхполюсников	545
12.8(*). Пример использования матрицы рассеяния	549
12.9(*). Вычисление волновых сопротивлений линий передачи	551

^{*)} Символом «*» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 12(*). Основы линейной теории устройств сверхвысоких частот для гармонических процессов

Любое линейное устройство СВЧ-диапазона (в том числе линию передачи и резонатор) в обобщенном виде можно представить в виде многополюсника (рис. 12.1), который обычно состоит из нескольких элементов, соединенных определенным образом между собой с помощью отрезков различных линий. Такие многополюсники (в эквивалентном их представлении) обычно описываются нормированными напряжениями и токами на входах устройства. На низких частотах для этой цели используются матрицы сопротивлений, матрицы проводимостей или («классические») матрицы передачи. Эти классы матриц весьма широко используются в инженерной практике. В СВЧ- и КВЧ-диапазонах напряжения и токи заменяются нормированными волновыми переменными и устройство анализируется с помощью матрицы рассеяния.

Большинство элементов СВЧ-устройств имеют один вход и один выход, то есть являются четырехполюсниками. Часто СВЧ-схемы могут быть представлены в виде каскадного соединения таких четырехполюсных элементов (базовых элементов). Анализ таких схем особенно удобен с помощью матриц передачи отдельных четырехполюсников.

12.1(*). Основные определения

12.1.1. Многополюсник СВЧ. Будем понимать под многополюсником СВЧ любую комбинацию проводников, диэлектриков и других элементов, имеющую несколько входов в виде поперечных сечений линий передачи с заданными типами волн в каждой линии (рис. 12.1). Для каждого входа многополюсника для определения фаз определяют *плоскости отсчета фаз* нормированных напряжений, которые выбирают таким образом, чтобы нераспространяющиеся волны высших типов, возбуждаемые в многополюснике, в этих сечениях были пренебрежимо малы, что исключает возможность обмена энергией между многополюсником и остальной частью тракта за счет высших типов волн. При использовании термина « $2N$ -полюсник СВЧ» подразумевается устройство с N подводными линиями передачи с заданными плоскостями отсчета фаз или, более строго, с N типами волн во входных линиях.

В нашем курсе рассматриваются пассивные линейные многополюсники. Свойство пассивности означает отсутствие усиления или генерации мощности СВЧ внутри многополюсника и выражается в виде неравенства $P_{\text{пот}} \geq 0$, где $P_{\text{пот}}$ — мощность потерь внутри многополюсника при любых его возбуждениях. Свойство линейности означает независимость внешних характеристик многополюсника от уровня мощности, то есть устройство описывается с помощью линеаризованных уравнений Максвелла. Однако этот уровень должен оставаться в определенных границах, например, он не должен превышать предела электрической прочности диэлектрика в устройстве СВЧ.

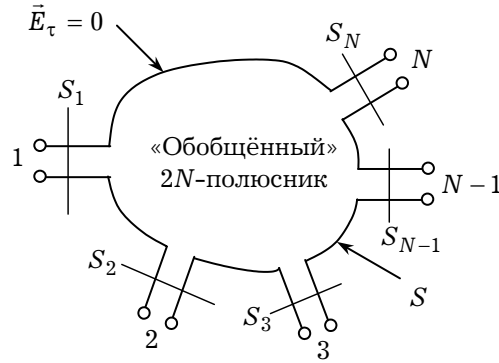


Рис. 12.1

Ниже будем рассматривать преимущественно внешние гармонические характеристики многополюсника, устанавливающие связи между электрическими величинами его входов. Зависимость от времени выбирается в виде $\exp(i\omega t)$. Для описания и расчета внешних характеристик линейных многополюсников используется матричный аппарат линейной алгебры.

12.1.2. Матрицы многополюсников выявляют взаимосвязи между электрическими режимами его входов. Режимы в плоскостях отсчета фаз многополюсника могут быть описаны как в терминах волнового, так и в терминах классического подходов.

При волновом подходе для каждого m -входа произвольного $2N$ -полюсника (рис. 12.2а) вводят нормированное напряжение для падающей волны, распространяющейся в сторону к многополюснику (вдоль продольной координаты ξ):

$$u_{nm} = \sqrt{P_{nm}} e^{i\varphi_{nm}^E} e^{-i\gamma_0^{(m)}\xi} = u_{nm}(0) e^{-i\gamma_0^{(m)}\xi}, \quad (12.1.1)$$

где активная мощность P_{nm} , переносимая падающей волной, определяется интегралом от вектора Умова–Пойнтинга этой волны по поперечному сечению S_m m -входа:

$$P_{nm} = \operatorname{Re} \left\{ \int_{S_m} [\vec{E}_{nm}, \vec{H}_{nm}^*] d\vec{S} \right\}, \quad (12.1.2)$$

$\gamma_0^{(m)}$ — постоянная распространения основной волны линии передачи в m -входе; φ_{nm}^E — фаза нормированного напряжения падающей волны в m -входе, равная фазе составляющей поперечного электрического поля для основной волны; $\vec{E}_{nm}, \vec{H}_{nm}$ — электрические и магнитные поля в m -входе для падающей волны; $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$ — векторный элемент площади поперечного сечения S , \vec{n}_0 — единичный вектор внешней нормали по отношению к поперечному сечению. Нормированное напряжение для отраженной волны в m -входе записывается аналогичным образом:

$$u_{om} = \sqrt{P_{om}} e^{i\varphi_{om}^E} e^{i\gamma_0^{(m)}\xi} = u_{om}(0) e^{i\gamma_0^{(m)}\xi}, \quad (12.1.3)$$

где активная мощность отраженной волны P_{om} и фаза нормированного напряже-

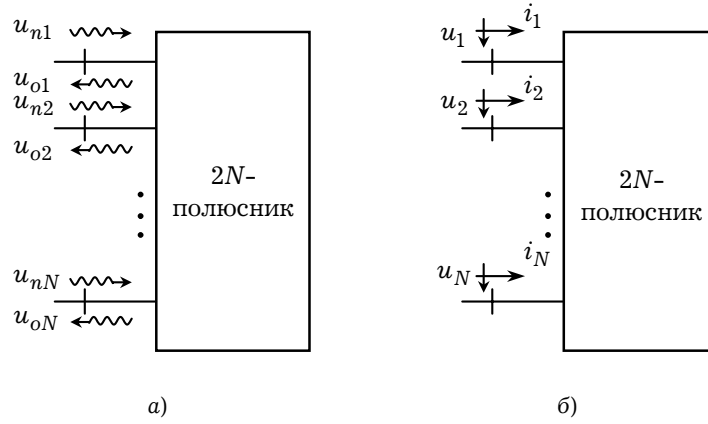


Рис. 12.2

ния отраженной волны φ_{om}^E определяется точно так же, как и для падающей волны. Заметим, что нормированные напряжения u_{nm}, u_{om} имеют размерность $\sqrt{\text{Вт}}$.

При классическом подходе для каждого m -входа устройства задаются нормированные напряжения u_m и нормированные токи i_m , втекающие внутрь многополюсника (рис. 12.2б), по формулам

$$u_m = u_{nm} + u_{om}, \quad i_m = u_{nm} - u_{om}. \quad (12.1.4)$$

Нормированные u_m и i_m также измеряются в $\sqrt{\text{Вт}}$.

В самом общем случае режим на m -входе многополюсника может быть однозначно описан двумя комплексными величинами, например, это могут быть u_{nm}, u_{om} или u_m, i_m , а также любая их комбинация. Выделяя на каждом входе 2N-полюсника одну из величин, входящих в (12.1.4), в качестве компонента независимого воздействия на многополюсник, а какую-либо другую — в качестве компонента реакции на это воздействие, сформируем N -мерные (по числу входов) векторы воздействия \vec{F} и реакции \vec{R} :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_N \end{pmatrix}, \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_N \end{pmatrix}. \quad (12.1.5)$$

В силу линейности многополюсника вектор реакции \vec{R} должен быть связан с вектором воздействия \vec{F} линейным матричным соотношением:

$$\vec{R} = \vec{T} \vec{F}, \quad (12.1.6)$$

где квадратная матрица \vec{T} N -порядка является полной внешней характеристикой 2N-полюсника в том смысле, что позволяет рассчитать реакцию многополюсника \vec{R} на любое выбранное воздействие \vec{F} . Матрица \vec{T} называется *дескриптором* устройства СВЧ.

12.1.3. Матрица рассеяния. Самым распространенным в теории устройств СВЧ является выбор вектора воздействия на 2N-полюсник в виде набора N -падающих

волн и вектора реакции в виде набора N отраженных волн, то есть

$$\vec{F} \equiv \vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ \dots \\ u_{nN} \end{pmatrix}, \quad \vec{R} \equiv \vec{u}_o = \begin{pmatrix} u_{o1} \\ u_{o2} \\ \dots \\ u_{oN} \end{pmatrix}. \quad (12.1.7)$$

В этом случае взаимосвязь векторов воздействия и реакции определяется *матрицей рассеяния* \vec{S} ($\vec{T} \equiv \vec{S}$):

$$\vec{u}_o = \vec{S} \vec{u}_n. \quad (12.1.8)$$

Квадратная матрица \vec{S} имеет смысл математического оператора, указывающего правило преобразования вектор-воздействия \vec{u}_n в вектор-реакцию \vec{u}_o .

12.1.4. Матрицы сопротивлений и проводимостей. Пусть теперь воздействие на $2N$ -полюсник выбрано в виде набора N нормированных токов, а реакция — в виде набора N нормированных напряжений:

$$\vec{F} \equiv \vec{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_N \end{pmatrix}, \quad \vec{R} \equiv \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix}. \quad (12.1.9)$$

Тогда связь между векторами \vec{i} и \vec{u} определяется *матрицей нормированных сопротивлений* $[\vec{Z}]$:

$$\vec{u} = [\vec{Z}] \vec{i}. \quad (12.1.10)$$

Подобным образом определяется *матрица нормированных проводимостей* $[\vec{Y}]$ $2N$ -полюсника:

$$\vec{i} = [\vec{Y}] \vec{u}. \quad (12.1.11)$$

Матрицы нормированных сопротивлений и проводимостей часто применяются при анализе и расчете многоэлементных антенн и антенных решеток (в частности, фазированных антенных решеток (пассивных и активных)) для учета влияния отдельных излучателей друг на друга.

Сравнивая определения матриц нормированных сопротивлений и проводимостей для одного и того же многополюсника, можно установить, что они взаимно обратны:

$$[\vec{Z}] = [\vec{Y}]^{-1}, \quad [\vec{Y}] = [\vec{Z}]^{-1}. \quad (12.1.12)$$

12.2(*). Основные теоремы СВЧ-цепей

В настоящем разделе рассмотрим основные теоремы цепей с распределенными параметрами, позволяющие существенно упростить анализ и синтез линейных устройств.

12.2.1. Теорема Умова–Пойнтинга. В электродинамике, теории дифракции и смежных дисциплинах широко используется теорема Умова–Пойнтинга, основывающаяся на понятии вектора Умова–Пойнтинга \vec{S} , определяемого как векторное произведение векторов электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей в некоторой точке пространства: $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$. Это классическое представление вектора Умова–Пойнтинга для поперечных электромагнитных полей. В нашем курсе мы будем пользоваться исключительно этим определением \vec{S} .

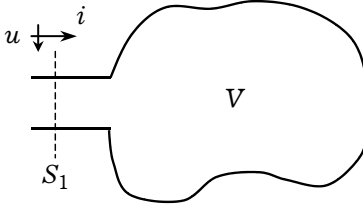


Рис. 12.3

Рассмотрим двухполюсник, подсоединенный каким-либо способом к внешней цепи в сечении S_1 (рис. 12.3); входные нормированные напряжение u и ток i считаются известными. Предположим также, что внутри объема V двухполюсника электрический и магнитный токи отсутствуют; его стенки изготовлены из идеальных проводников. Среду внутри объема V будем считать изотропной со скалярными параметрами ϵ, μ, σ , где σ — проводимость диэлектрика, заполняющего объем двухполюсника.

В случае гармонической зависимости от времени уравнения Максвелла для комплексных амплитуд могут быть записаны в форме

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_0\mu\vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = (\sigma + i\omega\epsilon_0\epsilon)\vec{E}. \quad (12.2.1)$$

Используя известное тождество:

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \vec{H}^* \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \text{rot } \vec{H}^*, \quad (12.2.2)$$

получим

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}^*] = -i\omega\mu_0\mu|\vec{H}|^2 - (\sigma - i\omega\epsilon_0\epsilon)|\vec{E}|^2. \quad (12.2.3)$$

Интеграл от дивергенции комплексного вектора Умова–Пойнтинга $[\vec{E}, \vec{H}^*]$ по объему устройства равен поверхностному интегралу от этого вектора. Так как стенки устройства являются идеальными проводниками, то векторное произведение $[\vec{E}, \vec{H}^*]$ на стенках двухполюсника равно нулю. Поэтому поверхностный интеграл берем только по поверхности S_1 (рис. 12.3):

$$\begin{aligned} \int_V \text{div} [\vec{E}, \vec{H}^*] dV &= \int_{S_1} [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{S} = \\ &= i\omega \int_V (\epsilon_0\epsilon|\vec{E}|^2 - \mu_0\mu|\vec{H}|^2) dV - \int_V \sigma|\vec{E}|^2 dV. \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

Так как для двухполюсника

$$- \int_{S_1} [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{S} = u i^*, \quad (12.2.5)$$

то

$$\frac{1}{2} u i^* = 2i\omega(P_H - P_E) + P_{\text{пот}}, \quad (12.2.6)$$

где

$$P_H = \frac{1}{4} \int_V \mu_0 \mu |H|^2 dV \text{ — средняя накопленная энергия магнитного поля;}$$

$$P_E = \frac{1}{4} \int_V \varepsilon_0 \varepsilon |E|^2 dV \text{ — средняя накопленная энергия электрического поля;}$$

$$P_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma |E|^2 dV \text{ — средняя мощность омических потерь.}$$

Таким образом, комплексная мощность $ui^*/2$, поступающая в двухполюсник, включает в себя действительную часть $P_{\text{пот}}$ (омические потери) и мнимую часть $2\omega(P_H - P_E)$, которая, в свою очередь, выражается через накопленную магнитную и электрическую мощности и частоту. Это есть теорема Умова–Пойнтинга для двухполюсника. Соотношение (12.2.6) — математическая формулировка теоремы.

Так как $\bar{u} = \bar{Z}i$, где \bar{Z} — нормированное сопротивление двухполюсника, то

$$\bar{Z} = \frac{4i\omega(P_H - P_E) + 2P_{\text{пот}}}{|i|^2}. \quad (12.2.7)$$

Аналогично для проводимости \bar{Y} получим

$$\bar{Y} = \frac{4i\omega(P_E - P_H) + 2P_{\text{пот}}}{|u|^2}. \quad (12.2.8)$$

Если $P_H = P_E$, то величина $\bar{Z}(\bar{Y})$ является чисто действительной; при $P_{\text{пот}} = 0$ (потери равны нулю) нормированное сопротивление \bar{Z} — чисто мнимая величина.

Теорема Умова–Пойнтинга (12.2.6) для случая $2N$ -полюсника записывается в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N u_k i_k^* = 2i\omega(P_H - P_E) + P_{\text{пот}}, \quad (12.2.9)$$

где $P_H, P_E, P_{\text{пот}}$ имеют тот же смысл, что и в уравнении (12.2.6).

Таким образом, теорема Умова–Пойнтинга для $2N$ -полюсника в форме (12.2.9) устанавливает связь между комплексной мощностью, поступающей на входы, активной мощностью и накопленной энергией.

12.2.2. Лемма Лоренца для многополюсников. Если (\vec{E}_1, \vec{H}_1) и (\vec{E}_2, \vec{H}_2) представляют собой два различных решения однородных (без источников) уравнений Максвелла для комплексных амплитуд, удовлетворяющие граничным условиям внутри рассматриваемого устройства с изотропным заполнением, то на одной и той же частоте имеет место равенство

$$\text{div} \{ [\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1] \} = 0. \quad (12.2.10)$$

Это соотношение справедливо как для двух различных типов волн устройства, так и для двух различных генераторов СВЧ.

Проинтегрируем уравнение (12.2.10) по объему устройства (рис. 12.1) и применим теорему Остроградского–Гаусса. Тогда

$$\int_{S_1+S_2+\dots+S_N} \{[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1]\} d\vec{S} = 0, \quad (12.2.11)$$

где интегрирование ведется по поперечным сечениям S_k ($k = \overline{1, N}$) входов $2N$ -полюсника в плоскостях отсчета фаз. При выводе соотношения (12.2.11) было учтено, что вектор \vec{E} параллелен вектору $d\vec{S}$ на идеально проводящей части поверхности S (рис. 12.1).

Если два решения соответствуют одному и тому же типу волны, то есть предполагается наличие двух генераторов с одинаковой частотой ω , тогда на любом входе m

$$\int_{S_m} [\vec{E}_1, \vec{H}_1] d\vec{S} = C \int_{S_m} [\vec{E}_2, \vec{H}_2] d\vec{S}, \quad (12.2.12)$$

где C — комплексный постоянный множитель.

Если устройство внутри объема V содержит анизотропную среду с тензорами $\vec{\mu}$ и $\vec{\epsilon}$, то лемма Лоренца для комплексных амплитуд имеет вид (сторонние источники отсутствуют):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \{[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1]\} + i\omega (\mu_0 \vec{H}_2 \vec{\mu} \vec{H}_1 - \\ - \mu_0 \vec{H}_1 \vec{\mu} \vec{H}_2 - \epsilon_0 \vec{E}_2 \vec{\epsilon} \vec{E}_1 + \epsilon_0 \vec{E}_1 \vec{\epsilon} \vec{E}_2) = 0. \end{aligned} \quad (12.2.13)$$

Представим $\vec{\mu}$ и $\vec{\epsilon}$ в виде сумм симметричных $\vec{\mu}_c$, $\vec{\epsilon}_c$ и антисимметричных $\vec{\mu}_{ac}$, $\vec{\epsilon}_{ac}$ тензоров:

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_c + \vec{\mu}_{ac}, \quad \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_c + \vec{\epsilon}_{ac}.$$

Легко убедиться, что

$$\vec{H}_1 \vec{\mu}_c \vec{H}_2 = \vec{H}_2 \vec{\mu}_c \vec{H}_1, \quad \vec{H}_1 \vec{\mu}_{ac} \vec{H}_2 = -\vec{H}_2 \vec{\mu}_{ac} \vec{H}_1.$$

Аналогичные соотношения имеют место и для тензоров $\vec{\epsilon}_c$, $\vec{\epsilon}_{ac}$. С учетом этих соотношений лемма Лоренца принимает более простой вид:

$$\operatorname{div} \{[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1]\} + 2i\omega (\mu_0 \vec{H}_2 \vec{\mu}_{ac} \vec{H}_1 - \epsilon_0 \vec{E}_2 \vec{\epsilon}_{ac} \vec{E}_1) = 0. \quad (12.2.14)$$

Проинтегрировав уравнение (12.2.14) по объему устройства V (рис. 12.1) и применив теорему Остроградского–Гаусса, получим:

$$\begin{aligned} \int_{S_1+S_2+\dots+S_N} \{[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1]\} d\vec{S} = \\ = -2i\omega \int_V (\mu_0 \vec{H}_2 \vec{\mu}_{ac} \vec{H}_1 - \epsilon_0 \vec{E}_2 \vec{\epsilon}_{ac} \vec{E}_1) dV. \end{aligned} \quad (12.2.15)$$

Устройства, для которых справедливы соотношения (12.2.14), (12.2.15), называются *невзаимными*. Заметим, что необходимым условием появления антисимметричных компонент тензоров $\vec{\mu}$ и $\vec{\epsilon}$ является наличие внешнего постоянного поля или постоянной намагниченности. Это находится в соответствии с обобщенным принципом симметрии кинетических коэффициентов (принцип

ном Онсагера), который может быть записан в виде:

$$\mu_{ij}(\omega, \vec{k}, \vec{B}_0) = \mu_{ji}(\omega, -\vec{k}, -\vec{B}_0), \quad (12.2.16)$$

где \vec{B}_0 — постоянная магнитная индукция.

Наличие сред, обладающих тензорами $\vec{\mu}$ или $\vec{\epsilon}$ с такими антисимметричными компонентами, является по определению условием создания невзаимных устройств. Однако наличие постоянного магнитного (электрического) поля или постоянной намагниченности служит необходимым, но не достаточным условием создания невзаимных устройств.

12.2.3. Теорема Фостера для недиссипативных многополюсников. Рассмотрим вначале недиссипативный двухполюсник с изотропным заполнением (рис. 12.3). Для него справедлива следующая теорема Фостера:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \{ [\vec{E}, d\vec{H}^*] - [d\vec{E}, \vec{H}^*] \} d\vec{S} = \\ = i d\omega \int_V (\mu_0 \mu |\vec{H}|^2 + \epsilon_0 \epsilon |\vec{E}|^2) dV, \end{aligned} \quad (12.2.17)$$

где $d\vec{H}$ и $d\vec{E}$ — приращения векторов \vec{H} и \vec{E} при изменении частоты ω на величину $d\omega$. Введем на входе двухполюсника нормированные напряжение u и ток i , так что

$$u = \bar{Z}i, \quad (12.2.18)$$

где \bar{Z} — нормированное сопротивление.

Используя соотношения (12.2.17), (12.2.18), нетрудно показать, что для нормированного реактивного сопротивления \bar{X} недиссипативного двухполюсника справедливо следующее соотношение ($\bar{Z} = i\bar{X}$):

$$\frac{d\bar{X}}{d\omega} = \frac{4(P_E + P_H)}{|i|^2} \geq 0. \quad (12.2.19)$$

Аналогично для нормированной реактивной проводимости \bar{B} двухполюсника без потерь имеем ($\bar{Y} = i\bar{B}$):

$$\frac{d\bar{B}}{d\omega} = \frac{4(P_E + P_H)}{|u|^2} \geq 0. \quad (12.2.20)$$

Соотношения (12.2.19), (12.2.20) выражают тот факт, что наклоны кривых зависимости реактивных сопротивления и проводимости от частоты всегда положительны. На рис. 12.4 приведена типичная зависимость нормированного реактивного сопротивления \bar{X} от частоты для двухполюсника без потерь.

Из соотношений (12.2.7), (12.2.19) можно сделать следующие выводы:

1. Для устройств без потерь на частоте $\omega = 0$ нормированное реактивное сопротивление \bar{X} равно нулю или $-\infty$. Между двумя полюсами кривая зависимости \bar{X} от частоты обязательно пересекает ось абсцисс; полюса и нули чередуются (рис. 12.4).

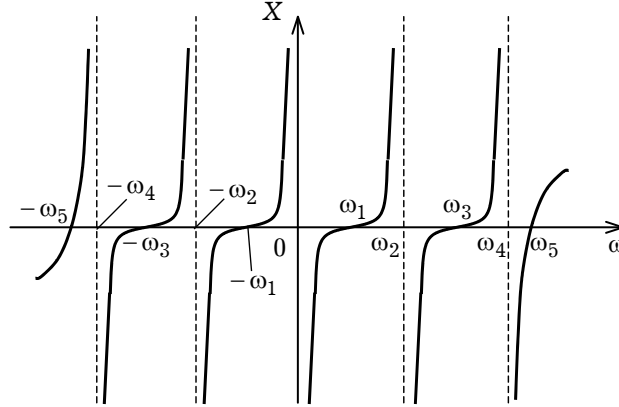


Рис. 12.4

2. Функция $\bar{X} = \bar{X}(\omega)$ является нечетной: $\bar{X}(-\omega) = -\bar{X}(\omega)$.

3. На комплексной плоскости сопротивление \bar{X} полностью определяется своими полюсами и нулями с точностью до некоторой произвольной постоянной A :

$$\bar{X} = \frac{A_\infty}{\omega} \prod_{n=2}^N \frac{(\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{(\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}. \quad (12.2.21)$$

На основании теории вычетов (12.2.21) можно записать в виде ряда:

$$\bar{X} = A_\infty \omega + \frac{a_0}{\omega} + 2\omega \sum_{n=2}^N \frac{a_{2n-2}}{\omega^2 - \omega_{2n-2}^2}, \quad (12.2.22)$$

где A_∞ и коэффициенты a_0 , a_2 , a_{2n-2} называются *вычетами в соответствующих полюсах*.

Так как $\bar{B} = -1/\bar{X}$, то в соответствии с уравнением (12.2.22) имеем:

$$\bar{B} = C_\infty \omega + \frac{b_0}{\omega} + 2\omega \sum_{n=2}^N \frac{b_{2n-3}}{\omega^2 - \omega_{2n-3}^2}. \quad (12.2.23)$$

Таким образом, полюсы для \bar{X} становятся нулями для \bar{B} , а нули для \bar{X} — полюсами для \bar{B} .

В окрестности точки ω_{2i} запишем:

$$\bar{X} \approx \frac{2a_{2i}\omega}{\omega^2 - \omega_{2i}^2} \quad (12.2.24)$$

и

$$\bar{B} \approx -\frac{\omega^2 - \omega_{2i}^2}{2a_{2i}\omega}, \quad (12.2.25)$$

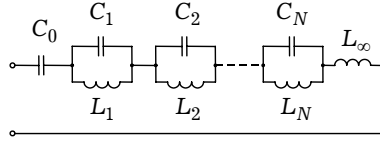


Рис. 12.5

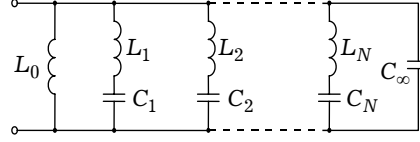


Рис. 12.6

где

$$a_{2i} = - \frac{1}{\left. \frac{d\bar{B}}{d\omega} \right|_{\omega_{2i}}}, \quad (12.2.26)$$

то есть вычеты функции $\bar{X}(\omega)$ могут быть получены, если известны значения производных $d\bar{B}(\omega)/d\omega$.

12.2.4. Первая эквивалентная схема. Соотношение (12.2.22) соответствует ряду параллельных резонансных контуров, соединенных последовательно (рис. 12.5). Типичное слагаемое $2a_{2i}\omega/(\omega^2 - \omega_{2i}^2)$ соответствует параллельному резонансному контуру, причем $\omega_{2i}^2 = 1/(L_i C_i)$.

Непосредственное сравнение схемы, изображенной на рис. 2.5 с формулой (12.2.22), показывает, что

$$C_0 = -\frac{1}{a_0}, \quad C_i = -\frac{1}{2a_i}, \quad \omega_{2i}^2 = \frac{1}{L_i C_i}, \quad L_\infty = A_0.$$

12.2.5. Вторая эквивалентная схема. Уравнение (12.2.23) соответствует ряду последовательных резонансных контуров, соединенных параллельно (рис. 12.6).

Из непосредственного сравнения схемы, изображенной на рис. 12.6 с формулой (12.2.23), следует, что

$$L_0 = -\frac{1}{b_0}, \quad L_i = -\frac{1}{2b_i}, \quad C_\infty = -\frac{1}{A_\infty}, \quad \omega_{2i-1}^2 = \frac{1}{L_i C_i}.$$

Во многих практических случаях рабочий диапазон устройства находится около какого-либо одного полюса, а другие полюса находятся достаточно далеко и не оказывают влияние на реактивное сопротивление в рабочем диапазоне. Поэтому двухполюсник может быть представлен простым LC -контуром, если пренебречь потерями. Кроме того, если учесть потери, то типичный элемент первой эквивалентной схемы (рис. 12.5) будет состоять из параллельного соединения сопротивления R_i , емкости C_i и индуктивности L_i , причем его добротность $Q_i = \omega_{2i} C_i R_i$ (рис. 12.7a). Для второй эквивалентной схемы элемент состоит из последовательного соединения R_i , L_i и C_i , причем $Q_i = \omega_{2i-1} L_i / R_i$ (рис. 12.7б).

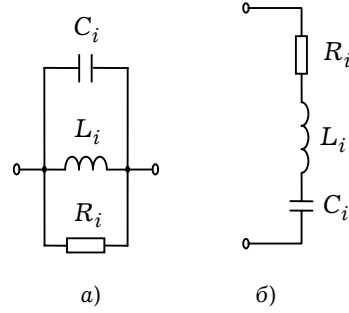


Рис. 12.7

Приведенные выше результаты легко обобщаются на случай $2N$ -полюсника (рис. 12.1). В этом случае теорема Фостера для $2N$ -полюсника записывается в виде

$$\int_{S_1+S_2+\dots+S_N} \{ [\vec{E}, d\vec{H}^*] - [d\vec{E}, \vec{H}^*] \} d\vec{S} = 4id\omega(P_E + P_H), \quad (12.2.27)$$

где поверхностный интеграл берется по поперечным сечениям плоскостей отсчета фаз всех входов.

Перепишем уравнение (12.2.27) в переменных u_n, i_n ($n = 1, 2, \dots, N$):

$$\sum_{n=1}^N (u_n di_n^* - du_n i_n^*) = -4id\omega(P_E + P_H). \quad (12.2.28)$$

Так как

$$u_n = \sum_{m=1}^N \bar{Z}_{nm} i_m,$$

то (12.2.28) для недиссипативного $2N$ -полюсника можно записать в виде $\bar{Z}_{nm} = i\bar{X}_{nm}$

$$\sum_{n, m=1}^N i_n i_m^* \frac{d\bar{X}_{mn}}{d\omega} = 4(P_E + P_H) \geq 0. \quad (12.2.29)$$

В матричной форме теорема Фостера записывается следующим образом:

$$\vec{i}_T^* [\bar{X}]' \vec{i} = 4(P_E + P_H) \geq 0, \quad (12.2.30)$$

где

$$[\bar{X}]' = \begin{vmatrix} \frac{d\bar{X}_{11}}{d\omega} & \frac{d\bar{X}_{12}}{d\omega} & \dots & \frac{d\bar{X}_{1N}}{d\omega} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d\bar{X}_{N1}}{d\omega} & \frac{d\bar{X}_{N2}}{d\omega} & \dots & \frac{d\bar{X}_{NN}}{d\omega} \end{vmatrix}, \quad (12.2.31)$$

вектор \vec{i} определяется соотношением (2.1.8), индекс «Т» означает операцию транспонирования элементов вектора \vec{i}^* :

$$\vec{i}_T^* = \{i_1^*, i_2^*, \dots, i_N^*\}.$$

Из уравнения (12.2.30) также следует, что

$$\det[\bar{X}]' \geq 0. \quad (12.2.32)$$

Таким образом, можно сказать, что теорема Фостера позволяет анализировать сложные многополюсники и синтезировать их из простых элементов подобно тому, как гармонический анализ дает возможность анализировать и синтезировать периодические волны сложной формы путем разложения их на простые гармонические составляющие.

12.3(*). Соотношения между характеристическими матрицами (дескрипторами) многополюсника

12.3.1. Связь между матрицами $[\bar{Z}]$, $[\bar{Y}]$, $[S]$. Самой распространенной в теории линейных устройств СВЧ является матрица рассеяния. Поэтому подробно рассмотрим ее основные свойства. И прежде всего установим взаимосвязь между матрицей рассеяния $[S]$ и матрицей сопротивлений $[\bar{Z}]$. Имея в виду, что формулы (12.1.4) справедливы для всех входных линий $2N$ -полюсника (рис. 12.2б), их можно представить в матричной форме относительно векторов-столбцов нормированных напряжений \vec{u} и токов \vec{i} :

$$2\vec{u}_n = \vec{u} + \vec{i}, \quad 2\vec{u}_o = \vec{u} - \vec{i}. \quad (12.3.1)$$

Так как $\vec{u}_o = \vec{S}\vec{u}_n$, то из (12.3.1) следует, что

$$\vec{u} = (\vec{I} - \vec{S})^{-1} (\vec{I} + \vec{S}) \vec{i},$$

где \vec{I} — единичная матрица.

Сопоставляя последнее соотношение с уравнением (12.1.10), получаем формулу связи матриц $[\bar{Z}]$ и \vec{S} :

$$[\bar{Z}] = (\vec{I} - \vec{S})^{-1} (\vec{I} + \vec{S}), \quad (12.3.2)$$

из которой следует, что матрица $[\bar{Z}]$ является неопределенной при обращении в нуль определителя матрицы, подлежащей обращению, то есть при $\det(\vec{I} - \vec{S}) = 0$.

Аналогично можно получить выражение, связывающее матрицы $[\bar{Y}]$ и \vec{S} :

$$[\bar{Y}] = (\vec{I} + \vec{S})^{-1} (\vec{I} - \vec{S}) \quad (12.3.3)$$

которое справедливо при условии, что определитель $\det(\vec{I} + \vec{S}) \neq 0$. При $\det(\vec{I} + \vec{S}) = 0$ матрица нормированных проводимостей $[\bar{Y}]$ для многополюсника отсутствует. В качестве примера многополюсника, для которого нельзя ввести матрицы $[\bar{Z}]$ и $[\bar{Y}]$, можно привести шестиполюсник в виде параллельного разветвления трех линий передачи, для которого

$$\det(\vec{I} - \vec{S}) = \det(\vec{I} + \vec{S}) = 0.$$

Из (12.3.2), (12.3.3) можно получить формулы для матрицы рассеяния через матрицы $\begin{bmatrix} \bar{Z} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \bar{Y} \end{bmatrix}$:

$$\tilde{S} = (\begin{bmatrix} \bar{Z} \end{bmatrix} - \tilde{I})(\begin{bmatrix} \bar{Z} \end{bmatrix} + \tilde{I})^{-1}, \quad \tilde{S} = (\tilde{I} - \begin{bmatrix} \bar{Y} \end{bmatrix})(\tilde{I} + \begin{bmatrix} \bar{Y} \end{bmatrix})^{-1}. \quad (12.3.4)$$

12.3.2. Зависимость матриц многополюсников от нумерации входов. Любая матрица многополюсника имеет смысл только при установленном порядке нумерации входов. При изменении нумерации входов получаются другие матрицы: числовые значения элементов остаются теми же самыми, но расположение элементов матрицы изменяется. Для установления зависимости элементов матрицы $2N$ -полюсника от нумерации входов введем N -порядка квадратную матрицу перенумерования \tilde{G} по следующему правилу. В каждую строку матрицы \tilde{G} запишем $N-1$ нулей и одну единицу в ту позицию, номер которой соответствует новому номеру входа, прежний номер которого равен номеру этой строки. Нетрудно показать, что матрица перенумерования является ортогональной, то есть

$$\tilde{G} \tilde{G}_T = \tilde{I},$$

где \tilde{I} — единичная матрица N -порядка, индекс «Т» указывает на транспонирование матрицы \tilde{G} .

Обозначив через символ \tilde{S}_G матрицу рассеяния $2N$ -полюсника с перенумерованными входами, запишем формулу для преобразования исходной матрицы рассеяния \tilde{S} :

$$\tilde{S}_G = \tilde{G}_T \tilde{S} \tilde{G}, \quad (12.3.5)$$

которая является частным случаем известного в математике преобразования подобия.

Аналогично

$$\begin{bmatrix} \bar{Z} \end{bmatrix}_G = \tilde{G}_T \begin{bmatrix} \bar{Z} \end{bmatrix} \tilde{G}, \quad \begin{bmatrix} \bar{Y} \end{bmatrix}_G = \tilde{G}_T \begin{bmatrix} \bar{Y} \end{bmatrix} \tilde{G}. \quad (12.3.6)$$

Перенумерация входов позволяет приводить матрицы устройств к стандартной форме, принятой для многополюсников того или иного вида.

12.3.3. Сдвиг плоскостей отсчета фаз на входах многополюсника. На практике иногда необходимо преобразовать матрицы многополюсника к новым плоскостям отсчета фаз относительно первоначальных. Наиболее просто эта задача решается для матриц рассеяния. При изменении плоскостей отсчета входов многополюсника в элементы первоначальной матрицы рассеяния вносятся дополнительные запаздывающие или опережающие сдвиги из-за удлинения или укорочения путей прохождения сигналов. Кроме того, из-за затухания волн в подводящих линиях происходят изменения модулей элементов матрицы рассеяния.

Таким образом, формулу для преобразования элементов матрицы рассеяния \tilde{S}^Φ с измененными плоскостями отсчета фаз на входах многополюсника можно записать в виде

$$S_{mn}^\Phi = S_{mn} \exp(-i\gamma_m l_m - i\gamma_n l_n), \quad (12.3.7)$$

где l_m и l_n — смещения плоскостей отсчета фаз в m -й и n -й входных линиях; $\gamma_m = \beta_m - i\alpha_m$, $\gamma_n = \beta_n - i\alpha_n$ — постоянные распространения в этих линиях.

Сдвиг плоскостей отсчета приводит также к изменению элементов матриц нормированных сопротивлений и проводимостей. Однако для элементов преобразованных матриц $[\bar{Z}]^{\Phi}$ и $[\bar{Y}]^{\Phi}$ простых формул не существует. Поэтому расчет измененных матриц сопротивления и проводимостей должен производиться путем перехода от этих матриц к матрице рассеяния и обратно по формулам (12.3.2)–(12.3.4).

12.4(*). Основные свойства матрицы рассеяния

Самой распространенной в теории линейных устройств СВЧ является матрица рассеяния. Поэтому ниже подробно рассмотрим основные ее свойства.

12.4.1. Физический смысл элементов матрицы рассеяния. Для матрицы рассеяния существуют простейшие испытательные режимы, позволяющие определить физический смысл элементов матрицы \tilde{S} . Обратившись к матричному уравнению (12.1.8), можно заметить, что если отлично от нуля только напряжение одной из падающих волн, то соответствующий столбец матрицы \tilde{S} может быть легко найден:

$$S_{mk} = \left. \frac{u_{om}}{u_{nk}} \right|_{u_{ni}=0; \ i=\overline{1, N}; \ i \neq k}. \quad (12.4.1)$$

Из выражения (12.4.1) следует четкий физический смысл. Внедиагональный элемент S_{mk} ($m \neq k$) представляет собой волновой коэффициент передачи по нормированному напряжению из плеча k в плечо m при согласованных нагрузках на других входах. Диагональный элемент S_{mm} является коэффициентом отражения по нормированному напряжению для m -входа при согласованных нагрузках на других входах.

Заметим, что согласно выражению (12.4.1) элементы матрицы рассеяния безразмерны.

12.4.2. Симметричность матрицы рассеяния для взаимных устройств. К взаимным устройствам относятся многополюсники, которые удовлетворяют требованиям теоремы взаимности относительно двух любых входов при произвольных режимах на остальных входах. Математически это условие имеет вид

$$\tilde{S} = \tilde{S}_T \text{ или } S_{ij} = S_{ji}. \quad (12.4.2)$$

Аналогичные соотношения взаимности имеют место и для матриц нормированных сопротивлений и проводимостей:

$$[\bar{Z}] = [\bar{Z}]_T, \quad [\bar{Y}] = [\bar{Y}]_T. \quad (12.4.3)$$

Симметричность матриц взаимного многополюсника значительно уменьшает число независимых параметров. Для полного описания взаимного $2N$ -полюсника достаточно всего $N(N+1)/2$ элементов матрицы рассеяния.

Необходимым условием взаимности устройств является отсутствие внутри него анизотропных включений, например, подмагниченных ферритов или плазмы.

12.4.3. Унитарность матрицы рассеяния для недиссипативных многополюсников. Недиссипативными называют такие многополюсники, в которых отсутствуют внутренние потери электромагнитной энергии. Условием отсутствия потерь внутри многополюсника является унитарность матрицы \vec{S} :

$$\vec{S}_T^* \vec{S} = \vec{I}. \quad (12.4.4)$$

Унитарные матрицы обладают рядом характерных свойств. Норма каждого столбца унитарной матрицы (то есть корень квадратный из суммы квадратов модулей элементов столбца) равна единице, столбцы ортогональны между собой, а определитель унитарной матрицы имеет единичный модуль и его можно представить в виде

$$\det \vec{S} = e^{i\varphi}. \quad (12.4.5)$$

В качестве примера приведем в развернутом виде условие унитарности матрицы \vec{S} (12.4.4) для недиссипативного четырехполюсника:

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 &= 1, \quad |S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1, \\ S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (12.4.6)$$

Первые два равенства являются выражениями закона сохранения энергии при возбуждении четырехполюсника со стороны входов 1 и 2 и при согласованной нагрузке на противоположном входе. Третье — устанавливает дополнительную связь между амплитудами и фазами элементов матрицы \vec{S} . Из совместного решения всех трех равенств вытекает, что для любого недиссипативного четырехполюсника должны выполняться ограничения

$$\begin{aligned} |S_{11}| &= |S_{22}|, \quad |S_{12}| = |S_{21}|, \\ \varphi_{11} + \varphi_{22} &= \varphi_{12} + \varphi_{21} \pm \pi, \end{aligned} \quad (12.4.7)$$

где φ_{mn} — фаза элемента S_{mn} матрицы рассеяния.

12.4.4. Коммутируемость матрицы рассеяния \vec{S} с матрицей симметрии \vec{G} для симметричных многополюсников. Матрица симметрии \vec{G} вводится аналогично матрице перенумерования, введенной в разделе 12.3.2. Она также должна содержать в каждой строке и в каждом столбце по одному ненулевому элементу, который может принимать значения ± 1 , причем -1 соответствует смене положительного направления нормированного напряжения на соответствующем входе. Применение матриц симметрии при анализе различных симметричных устройств СВЧ основано на том, что они коммутируют с матрицами параметров многополюсника:

$$\vec{G}\vec{S} = \vec{S}\vec{G}, \quad \vec{G}[\vec{Z}] = [\vec{Z}]\vec{G}, \quad \vec{G}[\vec{Y}] = [\vec{Y}]\vec{G}. \quad (12.4.8)$$

В качестве примера составления матрицы \vec{G} рассмотрим разветвление двухпроводных линий передачи (рис. 12.8). Режим шестиполюсника и его описание останутся неизменными, если при «зеркальной» замене правой половины шестиполюсника на

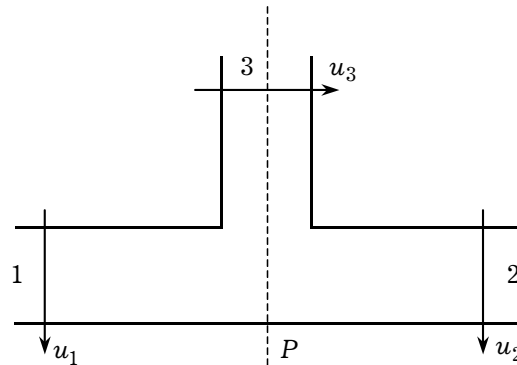


Рис. 12.8

левую одновременно изменяется положительное направление напряжения на входе 3 на противоположное. Поэтому матрица симметрии для разветвления двухпроводных линий передачи должна соответствовать перенумерации входов: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$ и $3 \rightarrow -3$, что дает

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

12.4.5. Преимущества матрицы рассеяния. В заключение этого раздела приведем основные преимущества использования матрицы \tilde{S} по сравнению с матрицами нормированных проводимостей $[\bar{Y}]$ и сопротивлений $[\bar{Z}]$.

1. В технике СВЧ и КВЧ кроме частоты непосредственно можно измерить только КСВН и мощность. Эти измерения по существу эквивалентны измерениям значений элементов матрицы \tilde{S} . Что касается матриц $[\bar{Z}]$ и $[\bar{Y}]$, то аналогичных непосредственных измерений произвести нельзя.

2. Свойство унитарности матрицы \tilde{S} позволяет легко проверить условие баланса мощностей для устройства без потерь. При использовании матриц $[\bar{Z}]$ и $[\bar{Y}]$ проверить это условие затруднительно.

3. При изменении положения плоскости отсчета многополюсника меняются только фазы коэффициентов матрицы рассеяния. При тех же условиях элементы матриц $[\bar{Z}]$ и $[\bar{Y}]$ будут меняться как по фазе, так и по модулю.

4. При определенных условиях физической симметрии можно определить матрицу \tilde{S} исходя только из геометрических соображений.

12.5(*). Анализ четырехполюсников каскадной структуры с помощью матриц передачи

Рассмотренная ранее матрица рассеяния неудобна для анализа схем, состоящих из каскадно соединенных четырехполюсников, для которых характерно, что выход

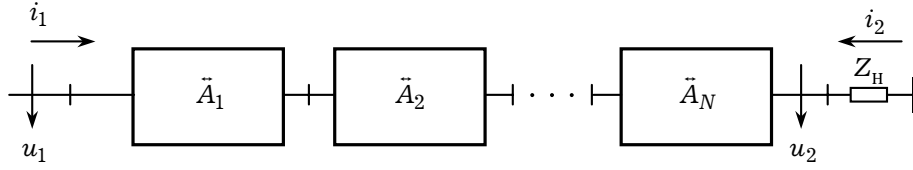


Рис. 12.9

предшествующего четырехполусника является входом последующего (рис. 12.9). Анализ такого соединения значительно упрощается, если характеризовать четырехполусники матрицами передачи.

Для классической матрицы передачи \tilde{A} связь воздействия и реакции имеет вид:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (12.5.1)$$

При таком определении матрица передачи^{*)} для N -каскадно включенных четырехполусников оказывается равной произведению матриц передачи \tilde{A}_n отдельных каскадов:

$$\tilde{A} = \prod_{n=1}^N \tilde{A}_n, \quad (12.5.2)$$

причем перемножать матрицы каскадов надо именно в той последовательности, в какой они включены в тракт. Иногда предпочитают пользоваться волновой матрицей передачи \tilde{T} , вводимой матричным соотношением:

$$\begin{pmatrix} u_{n1} \\ u_{01} \end{pmatrix} = \tilde{T} \begin{pmatrix} u_{n2} \\ u_{02} \end{pmatrix}, \quad \tilde{T} \equiv \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (12.5.3)$$

Зная элементы матрицы \tilde{A} , легко анализировать двухполусники каскадной структуры, образующиеся при нагружении последнего каскада нормированной нагрузкой $Z_n = u_2 / (-i_2)$ (рис. 12.9). Нормированное входное сопротивление такого двухполусника будет

$$Z_{\text{вх}} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{A_{11}Z_n + A_{12}}{A_{21}Z_n + A_{22}}, \quad (12.5.4)$$

где использованы элементы матрицы \tilde{A} , определяемой соотношением (12.5.2).

Уравнения перехода от элементов матрицы \tilde{S} к элементам матрицы \tilde{A} имеют вид:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1 + S_{11} - S_{22} - \Delta S}{2S_{21}}, & A_{12} &= \frac{1 + S_{11} + S_{22} + \Delta S}{2S_{21}}, \\ A_{21} &= \frac{1 - S_{11} - S_{22} + \Delta S}{2S_{21}}, & A_{22} &= \frac{1 - S_{11} + S_{22} - \Delta S}{2S_{21}}, \end{aligned} \quad (12.5.5)$$

^{*)} В литературе существуют и другие обозначения для элементов матрицы \tilde{A} :

$A_{11} = a, \quad A_{12} = b, \quad A_{21} = c, \quad A_{22} = d$

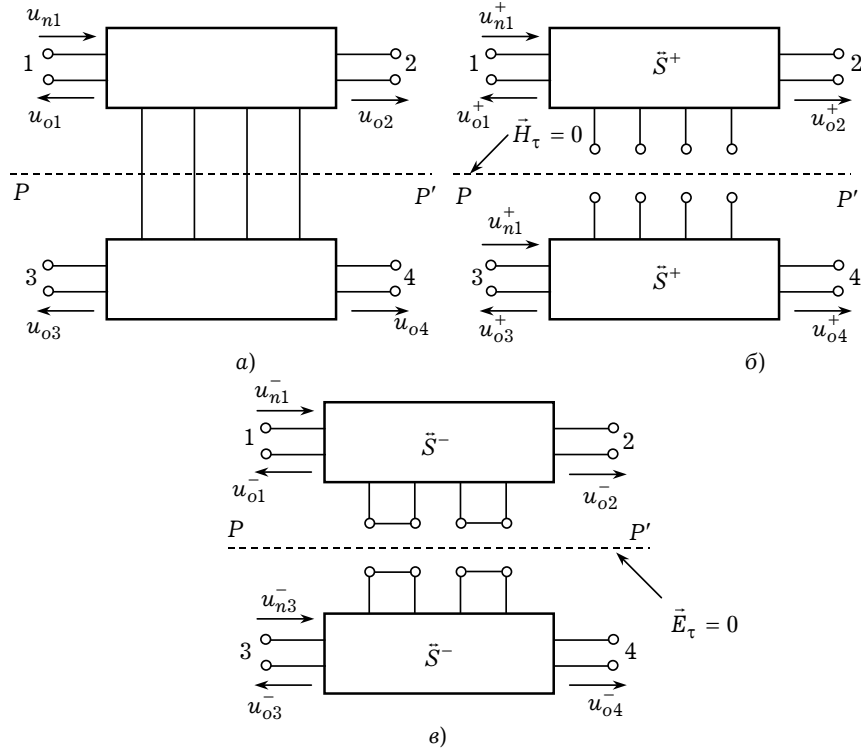


Рис. 12.10

где

$$\Delta S = S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12}.$$

Заметим, что если $S_{21} = 0$, то элементы матрицы \tilde{A} становятся неопределенными. Параметр S_{21} представляет собой коэффициент прямой передачи, и в СВЧ- и КВЧ-цепях он редко бывает равным нулю.

Формулы перехода от элементов матрицы \tilde{A} к элементам матрицы рассеяния \tilde{S} определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{(A_{11} - A_{22}) + (A_{12} - A_{21})}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}, & S_{12} &= \frac{2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}, \\ S_{21} &= \frac{2}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}, & S_{22} &= \frac{-(A_{11} - A_{22}) + (A_{12} - A_{21})}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}. \end{aligned} \quad (12.5.6)$$

Определенные соотношениями (12.5.3) T_{ij} — параметры связаны с элементами S_{ij} следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{11} &= -\frac{\Delta S}{S_{21}}, & T_{12} &= \frac{S_{11}}{S_{21}}, \\ T_{21} &= -\frac{S_{22}}{S_{21}}, & T_{22} &= \frac{1}{S_{21}}. \end{aligned} \quad (12.5.7)$$

Как и в случае \tilde{A} матрицы, элементы матрицы \tilde{T} становятся неопределенными, если коэффициент прямой передачи $S_{21} = 0$.

Матрица рассеяния устройств СВЧ- и КВЧ-диапазонов может быть найдена из T -матрицы по следующим формулам:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{T_{12}}{T_{22}}, & S_{12} &= T_{11} - \frac{T_{12}T_{21}}{T_{22}}, \\ S_{21} &= \frac{1}{T_{22}}, & S_{22} &= -\frac{T_{21}}{T_{22}}. \end{aligned} \quad (12.5.8)$$

Для того, чтобы можно было осуществить преобразование \tilde{T} -матрицы в \tilde{S} -матрицу, параметр T_{22} не должен быть равным нулю.

Матрица передачи \tilde{A} обладает следующими свойствами:

1. Для взаимных четырехполосников ($S_{12} = S_{21}$):

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1. \quad (12.5.9)$$

2. Для симметричных четырехполосников (которые остаются неизменными при замене входных зажимов на выходные зажимы):

$$A_{11} = A_{22}. \quad (12.5.10)$$

3. Для недиссипативного четырехполосника в матрице передачи \tilde{A} элементы A_{11} и A_{22} должны быть чисто вещественными, а элементы A_{12} и A_{21} — чисто мнимыми.

12.6(*). Метод симметричных восьмиполосников (метод синфазного и противофазного возбуждений)

Этот метод сводит анализ восьмиполосников, имеющих плоскость симметрии (рис. 12.10), к анализу более простых четырехполосников, представляющих собой «половины» восьмиполосников.

12.6.1. Режим холостого хода (синфазное возбуждение). Рассмотрим восьмиполосник (рис. 12.10а), симметричный относительно плоскости PP' . Такой восьмиполосник можно рассмотреть в двух режимах: синфазное возбуждение, когда в плоскости симметрии находится максимум напряжения, и противофазное возбуждение, когда в плоскости симметрии находится максимум тока. Рассмотрим первый режим. Подведем ко входам 1 и 3 одинаковые по амплитуде синфазные волны $u_{n1}^+ = u_{n3}^+ = u_n / 2$. Допустим, что все остальные входы согласованы. Эти волны относительно плоскости симметрии мы будем называть четными волнами. В силу симметрии максимум напряжения будет в плоскости PP' (рис. 12.10б), то есть в ней устанавливается пучность распределения напряженности касательного электрического поля \vec{E}_τ и нуль распределения напряженности касательного магнитного поля \vec{H}_τ (режим холостого хода). Плоскость PP' условно расчленяет восьмиполос-

ник на два не связанных между собой одинаковых (парциальных) четырехполюсника синфазного возбуждения с матрицами рассеяния

$$\tilde{S}^+ = \begin{bmatrix} S_{11}^+ & S_{12}^+ \\ S_{21}^+ & S_{22}^+ \end{bmatrix}.$$

В этом случае четные волны, отраженные от входов восьмиполюсника, соответственно будут связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} u_{o1}^+ &= u_{o3}^+ = S_{11}^+ \frac{u_n}{2}, \\ u_{o2}^+ &= u_{o4}^+ = S_{21}^+ \frac{u_n}{2}. \end{aligned} \quad (12.6.1)$$

12.6.2. Режим короткого замыкания (противофазное возбуждение). Если же к входам 1 и 3 подвести одинаковые по амплитуде противофазные (сдвинутые на 180°) волны, то есть $u_{n1}^- = -u_{n3}^- = u_n/2$ (нечетные волны), то в плоскости PP' будет нуль напряжения (рис. 12.10в). В этом случае в плоскости симметрии устанавливается пучность распределения напряженности касательного магнитного поля \vec{H}_τ и нуль распределения напряженности касательного электрического поля \vec{E}_τ (режим короткого замыкания). Плоскость симметрии условно расчленяет восьмиполюсник на два не связанных между собой одинаковых парциальных четырехполюсника противофазного возбуждения с матрицами рассеяния:

$$\tilde{S}^- = \begin{bmatrix} S_{11}^- & S_{12}^- \\ S_{21}^- & S_{22}^- \end{bmatrix}. \quad (12.6.2)$$

Тогда волны, отраженные от входов восьмиполюсника, будут связаны соотношениями

$$u_{o1}^- = -u_{o3}^- = S_{11}^- \frac{u_n}{2}, \quad u_{o2}^- = -u_{o4}^- = S_{21}^- \frac{u_n}{2}. \quad (12.6.3)$$

12.6.3. Общее решение задачи возбуждения восьмиполюсников со стороны плеча 1 волной амплитудой u_n определится в виде наложения (суперпозиции) частных решений для синфазного и противофазного возбуждений:

$$\begin{aligned} u_{n1} &= u_{n1}^+ + u_{n1}^- = u_n, \quad u_{n3} = u_{n3}^+ + u_{n3}^- = 0, \\ u_{o1} &= u_{o1}^+ + u_{o1}^- = (S_{11}^+ + S_{11}^-) \frac{u_n}{2} = S_{11} u_n, \\ u_{o2} &= u_{o2}^+ + u_{o2}^- = (S_{21}^+ + S_{21}^-) \frac{u_n}{2} = S_{21} u_n, \\ u_{o3} &= u_{o3}^+ + u_{o3}^- = (S_{11}^+ - S_{11}^-) \frac{u_n}{2} = S_{31} u_n, \\ u_{o4} &= u_{o4}^+ + u_{o4}^- = (S_{21}^+ - S_{21}^-) \frac{u_n}{2} = S_{41} u_n. \end{aligned} \quad (12.6.4)$$

12.6.4. Связь между матрицами. Из этих соотношений следует, что между элементами матрицы рассеяния восьмиполюсника \tilde{S} (рис. 12.10а) и элементами матриц рассеяния четырехполюсников S^+ и S^- (рис. 12.10 б и рис. 12.10 в) существуют следующие

щие зависимости:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{S_{11}^+ + S_{11}^-}{2}, & S_{21} &= \frac{S_{21}^+ + S_{21}^-}{2}, \\ S_{31} &= \frac{S_{11}^+ - S_{11}^-}{2}, & S_{41} &= \frac{S_{21}^+ - S_{21}^-}{2}. \end{aligned} \quad (12.6.5)$$

Если восьмиполусник возбуждается со стороны плеча 2, то аналогично

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{S_{12}^+ + S_{12}^-}{2}, & S_{22} &= \frac{S_{22}^+ + S_{22}^-}{2}, \\ S_{32} &= \frac{S_{12}^+ - S_{12}^-}{2}, & S_{42} &= \frac{S_{22}^+ - S_{22}^-}{2}. \end{aligned} \quad (12.6.6)$$

При возбуждении восьмиполусника со стороны плеча 3 определяются элементы матрицы S_{i3} ($i = 1, 4$):

$$\begin{aligned} S_{13} &= \frac{S_{11}^+ - S_{11}^-}{2}, & S_{23} &= \frac{S_{21}^+ - S_{21}^-}{2}, \\ S_{33} &= \frac{S_{11}^+ + S_{11}^-}{2}, & S_{43} &= \frac{S_{21}^+ + S_{21}^-}{2}. \end{aligned} \quad (12.6.7)$$

Аналогично для элементов S_{i4} ($i = 1, 4$) имеем:

$$\begin{aligned} S_{14} &= \frac{S_{12}^+ - S_{12}^-}{2}, & S_{24} &= \frac{S_{22}^+ - S_{22}^-}{2}, \\ S_{34} &= \frac{S_{12}^+ + S_{12}^-}{2}, & S_{44} &= \frac{S_{22}^+ + S_{22}^-}{2}. \end{aligned} \quad (12.6.8)$$

12.6.5. Схема анализа. Опишем последовательность расчета рабочих параметров симметричного восьмиполусника:

1. Определение матриц рассеяния S^+ и S^- четырехполусников, образующихся при синфазном и противофазном видах возбуждения восьмиполусника.
2. Выбор (первостепенного) рабочего параметра (например, элемент S_{11} , характеризующий согласование со стороны первой пары полюсов) и его расчет.
3. Из условия идеальности выбранного первостепенного рабочего параметра (например, $S_{11} = 0$ для идеального согласования входа 1) установление связи между проводимостями (или сопротивлениями) плеч восьмиполусника.
4. Расчет остальных элементов матрицы \tilde{S} с учетом найденных соотношений между проводимостями.
5. Вычисление рабочих параметров восьмиполусника.

12.7(*). Матрицы передачи и рассеяния для некоторых широко используемых четырехполусников

Иногда на практике для анализа четырехполусников используют и ненормированную матрицу передачи, так называемую матрицу $ABCD$, которая определя-

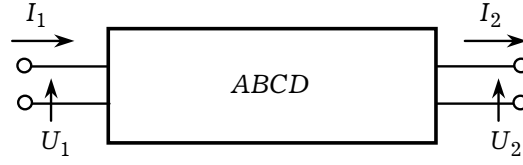


Рис. 12.11

ется как (см. рис. 12.11)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad (12.7.1)$$

где напряжения U_k и токи I_k в k -плече связаны с нормированными величинами u_k , i_k следующим образом:

$$U_k = \sqrt{Z_k} u_k, \quad I_k = \frac{i_k}{\sqrt{Z_k}}, \quad (12.7.2)$$

где Z_k — волновое сопротивление k -входа.

Элементы $ABCD$ -матрицы выражаются через элементы матрицы передачи \tilde{A} по формулам:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} A, & A_{12} &= \frac{B}{\sqrt{Z_1 Z_2}}, \\ A_{21} &= C \sqrt{Z_1 Z_2}, & A_{22} &= \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} D, \end{aligned} \quad (12.7.3)$$

где Z_1 и Z_2 — волновые сопротивления линий передачи соответственно на входах 1 и 2 четырехполюсника.

Уравнения перехода от $ABCD$ -матрицы к матрице рассеяния \tilde{S} имеют вид:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{AZ_2 + B - CZ_1 Z_2 - DZ_1}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1}, \\ S_{12} &= \frac{2(AD - BC)\sqrt{Z_1 Z_2}}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1}, \\ S_{21} &= \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1}, \\ S_{22} &= \frac{-AZ_2 + B - CZ_1 Z_2 + DZ_1}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1}. \end{aligned} \quad (12.7.4)$$

В таблице 12.1 приведены выражения для матриц \tilde{S} и \tilde{A} для наиболее широко используемых четырехполюсников. Причем элементы матрицы \tilde{S} являются безразмерными, то есть они являются нормированными.

Таблица 12.1

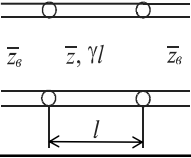
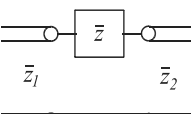
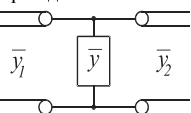
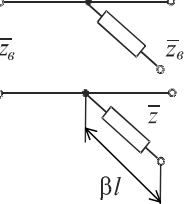
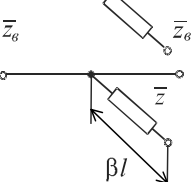
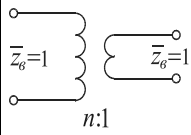
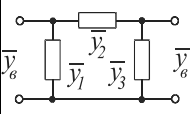
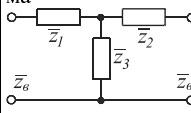
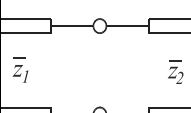
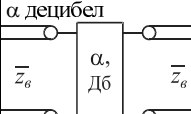
Элемент	<i>ABCD</i> -матрица	<i>S</i> -матрица
<p>1. Отрезок линии передачи</p> 	$\begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & \bar{Z}_0 \operatorname{sh} \gamma l \\ \operatorname{sh} \gamma l / \bar{Z}_0 & \operatorname{ch} \gamma l \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} (\bar{Z}^2 - \bar{Z}_0^2) \operatorname{sh} \gamma l & 2\bar{Z}_0 \bar{Z} \\ 2\bar{Z}_0 \bar{Z} & (\bar{Z}^2 - \bar{Z}_0^2) \operatorname{sh} \gamma l \end{bmatrix},$ <p>где $D_s = 2\bar{Z}_0 \bar{Z} \operatorname{ch} \gamma l + (\bar{Z}^2 + \bar{Z}_0^2) \operatorname{sh} \gamma l$</p>
<p>2. Последовательное сопротивление</p> 	$\begin{bmatrix} 1 & \bar{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} \bar{Z} + \bar{Z}_2 - \bar{Z}_1 & 2\sqrt{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2} \\ 2\sqrt{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2} & \bar{Z} + \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2 \end{bmatrix},$ <p>где $D_s = \bar{Z} + \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$</p>
<p>3. Параллельная проводимость</p> 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \bar{Y} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - \bar{Y} & 2\sqrt{\bar{Y}_1 \bar{Y}_2} \\ 2\sqrt{\bar{Y}_1 \bar{Y}_2} & \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1 - \bar{Y} \end{bmatrix},$ <p>где $D_s = \bar{Y} + \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$</p>
<p>4. Разомкнутый шлейф, параллельно включенный в линию</p> 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/(i\bar{Z} \operatorname{tg} \beta l) & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} -1 & D_s - 1 \\ D_s - 1 & 1 \end{bmatrix},$ <p>где $D_s = 1 + 2i\bar{Z} \operatorname{tg} \beta l / Z_0$</p>
<p>5. Короткозамкнутый шлейф, параллельно включенный в линию</p> 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i \operatorname{tg} \beta l / \bar{Z} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} -1 & D_s - 1 \\ D_s - 1 & 1 \end{bmatrix},$ <p>где $D_s = 1 + 2i\bar{Z} \operatorname{tg} \beta l / \bar{Z}_0$</p>

Таблица 12.1 (продолжение)

6. Идеальный трансформатор 	$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$	$\frac{1}{n^2 + 1} \begin{bmatrix} n^2 - 1 & 2n \\ 2n & 1 - n^2 \end{bmatrix}$
7. П-образная схема 	$\begin{bmatrix} 1 + \bar{y}_2/\bar{y}_3 & 1/\bar{y}_3 \\ D/\bar{y}_3 & 1 + \bar{y}_1/\bar{y}_3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} \bar{y}_g^2 - P\bar{y}_g - D & 2\bar{y}_g\bar{y}_3 \\ 2\bar{y}_g\bar{y}_3 & \bar{y}_g^2 + P\bar{y}_g - D \end{bmatrix},$
	где $D_s = \bar{y}_g^2 + Q\bar{y}_g + D$, $D = \bar{y}_1\bar{y}_2 + \bar{y}_2\bar{y}_3 + \bar{y}_3\bar{y}_1$ $Q = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 2\bar{y}_3$, $P = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$	
8. Т-образная схема 	$\begin{bmatrix} 1 + \bar{z}_1/\bar{z}_3 & D/\bar{z}_3 \\ 1/\bar{z}_3 & 1 + \bar{z}_2/\bar{z}_3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} -\bar{z}_g^2 + P\bar{z}_g + D & 2\bar{z}_g\bar{z}_3 \\ 2\bar{z}_g\bar{z}_3 & -\bar{z}_g^2 - P\bar{z}_g + D \end{bmatrix},$
	где $D_s = \bar{z}_g^2 + Q\bar{z}_g + D$, $D = \bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_2\bar{z}_3 + \bar{z}_3\bar{z}_1$ $Q = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + 2\bar{z}_3$, $P = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$	
9. Скачок волнового сопротивления 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} \bar{z}_2 - \bar{z}_1 & 2\sqrt{\bar{z}_1\bar{z}_2} \\ 2\sqrt{\bar{z}_1\bar{z}_2} & \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \end{bmatrix},$ где $D_s = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
10. Атенюатор на α децибел 	$\begin{bmatrix} (A+B)/2 & \bar{z}_g(A-B)/2 \\ (A-B)/2\bar{z}_g & (A+B)/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix},$
	где $A = 10^{\alpha/20}$, $B = 1/A$	

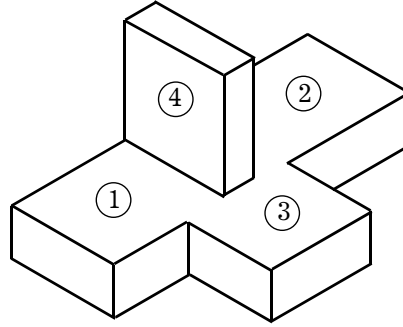


Рис. 12.12

12.8(*). Пример использования матрицы рассеяния

12.8.1. Двойной волноводный тройник. Рассмотрим восьмиполюсник, представляющий собой двойной волноводный тройник (рис. 12.12). Идеальная матрица рассеяния такого устройства при определенном выборе плоскостей отсчета имеет вид

$$\vec{\vec{S}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.8.1)$$

Тогда зависимости между падающими и отраженными нормированными напряжениями в матричной форме в соответствии с (12.8.1) определяются соотношениями

$$\begin{bmatrix} u_{o1} \\ u_{o2} \\ u_{o3} \\ u_{o4} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u_{n3} + u_{n4} \\ u_{n3} - u_{n4} \\ u_{n1} + u_{n2} \\ u_{n1} - u_{n2} \end{bmatrix}. \quad (12.8.2)$$

12.8.2. Свойства двойного волноводного тройника:

1. Сигнал, поданный в плечо 3 (H -плечо), делится на две равные части и без отражений синфазно попадает в плечи 1 и 2; в плечо 4 (E -плечо) — сигнал не попадает. Действительно, при $u_{n3} \neq 0$, $u_{n1} = u_{n2} = u_{n4} = 0$ $u_{o1} = u_{o2} = u_{n3} / \sqrt{2}$, $u_{o3} = u_{o4} = 0$.

2. Сигнал, поданный в плечо 4 (E -плечо), делится на две равные части и в противофазах проходит в плечи 1 и 2. В плечо 3 (H -плечо) сигнал не проходит. Действительно, при $u_{n4} \neq 0$, $u_{n1} = u_{n2} = u_{n3} = 0$ $u_{o1} = -u_{o2} = u_{n4} / \sqrt{2}$, а $u_{o3} = u_{o4} = 0$.

3. При подаче двух одинаковых синфазных сигналов в плечи 3 и 4 суммарный сигнал без отражений проходит в плечо 1. В плечо 2 сигналы не проходят. Действительно, при $u_{n3} = u_{n4}$ и $u_{n1} = u_{n2} = 0$ $u_{o1} = \sqrt{2} u_{n3}$, а $u_{o2} = u_{o3} = u_{o4} = 0$.

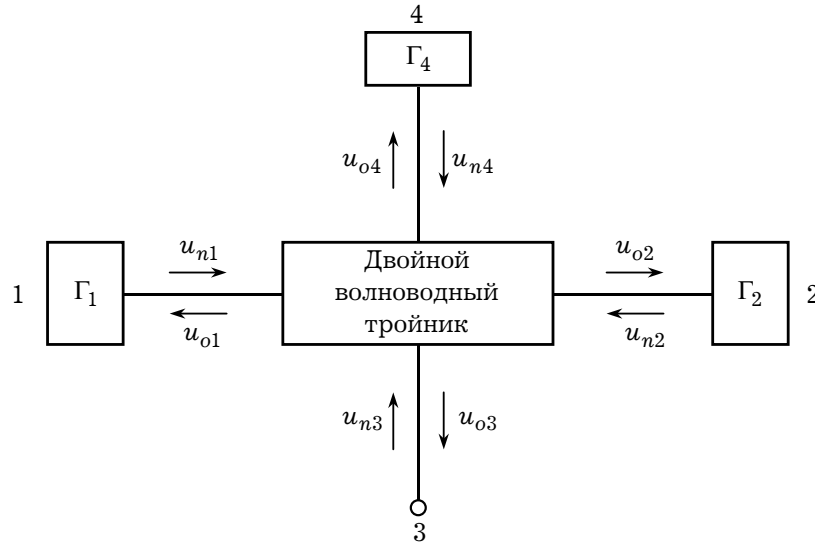


Рис. 12.13

4. При подаче двух сигналов, поданных противофазно в плечи 3 и 4, суммарный сигнал без отражений проходит в плечо 2. В плечо 1 сигнал не проходит. Действительно, при $u_{n3} = -u_{n4}$ и $u_{n1} = u_{n2} = 0$ $u_{o2} = \sqrt{2}u_{n3}$, а $u_{o1} = u_{o3} = u_{o4} = 0$.

Остальные свойства двойного волноводного тройника приведем без доказательства. Предлагаем Читателю проделать это самостоятельно.

5. Сигнал, поданный в плечо 1, делится на две равные части и без отражений синфазно проходит в плечи 3 и 4; в плечо 2 сигнал не проходит.

6. Сигнал, поданный в плечо 2, делится на две равные части и без отражений синфазно попадает в плечи 3 и 4; в плечо 1 сигнал не попадает.

7. Сигналы, поданные синфазно в плечи 1 и 2, складываясь, без отражений попадают в плечо 3; в плечо 4 сигналы не проходят.

8. Сигналы, поданные противофазно в плечи 1 и 2, суммируясь, без отражений попадают в плечо 4; в плечо 3 сигнал не проходит.

12.8.3. Пример. Определим свойства двойного волноводного тройника с матрицей рассеяния (12.8.1) при подаче сигнала в плечо 3 при условиях, что в плоскостях отсчета фаз плеч 1, 2, и 4 включены несогласованные нагрузки с коэффициентами отражения соответственно Γ_1 , Γ_2 и Γ_4 .

Для несогласованных нагрузок справедливо (рис. 12.13):

$$u_{n1} = \Gamma_1 u_{o1}, \quad u_{n2} = \Gamma_2 u_{o2}, \quad u_{n4} = \Gamma_4 u_{o4}.$$

Подставив значения u_{ni} ($i = 1, 4$) в уравнение (12.1.8), где матрица рассеяния \tilde{S} определяется формулой (12.8.1), получим:

$$\begin{aligned} u_{o1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{n3} + \Gamma_4 u_{o4}), & u_{o2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{n3} - \Gamma_4 u_{o4}), \\ u_{o3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_1 u_{o1} + \Gamma_2 u_{o2}), & u_{o4} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_1 u_{o1} - \Gamma_2 u_{o2}). \end{aligned}$$

Эти уравнения можно привести к каноническому виду:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}u_{o1} - \Gamma_4 u_{o4} &= u_{n3}, \\ \sqrt{2}u_{o2} + \Gamma_4 u_{o4} &= u_{n3}, \\ \Gamma_1 u_{o1} + \Gamma_2 u_{o2} &= \sqrt{2}u_{o3} = 0, \\ -\Gamma_1 u_{o1} + \Gamma_2 u_{o2} + \sqrt{2}u_{o4} &= 0.\end{aligned}$$

Решая эту систему относительно неизвестных u_{oi} ($i = \overline{1, 4}$), получим:

$$\begin{aligned}u_{o1} &= \sqrt{2} \frac{1 - \Gamma_2 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2)} u_{n3}, & u_{o2} &= \sqrt{2} \frac{1 - \Gamma_1 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2)} u_{n3}, \\ u_{o3} &= \sqrt{2} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2)} u_{n3}, & u_{o4} &= \sqrt{2} \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2 - \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2)} u_{n3}.\end{aligned}\quad (12.8.3)$$

Вычисленные величины u_{oi} ($i = \overline{1, 4}$) определяют свойства восьмиполусника при несогласованных нагрузках плеч.

Мощность, поглощаемая в каждом плече, равна разности между мощностью, падающей на соответствующую нагрузку, и мощностью, отраженной от этой нагрузки (см. рис. 12.13):

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{1}{2}(|u_{n1}|^2 - |u_{o1}|^2), \\ P_2 &= \frac{1}{2}(|u_{n2}|^2 - |u_{o2}|^2), \\ P_4 &= \frac{1}{2}(|u_{n4}|^2 - |u_{o4}|^2).\end{aligned}\quad (12.8.4)$$

Разность мощностей падающей и отраженной волн в плече 3 равна мощности, поглощаемой во всей системе:

$$P_3 = \frac{1}{2}(|u_{n3}|^2 - |u_{o3}|^2). \quad (12.8.5)$$

12.9(*). Вычисление волновых сопротивлений линий передачи

Понятие волнового сопротивления линии передачи «пришло» в электродинамику СВЧ-структур из теории цепей и, нужно сказать, является очень полезным, если не пользоваться им бездумно. Дело в том, что нельзя ввести единого понятия волнового сопротивления для разных типов и классов линий передачи. Такая неоднозначность в определении волнового сопротивления связана с различной картиной полей собственных волн в разных типах линий.

Устройства СВЧ зачастую одновременно содержат различные типы линий и, подчеркнем особо, с разными типами волн. Основной задачей конструктора является согласование разных типов линий передачи с неодинаковыми структурами электромагнитных полей между собой. Это очень непростая задача, и для ее эф-

фективного решения необходим строгий электродинамический подход к решению задач дифракции на стыках различных линий передачи. Введение волнового сопротивления линии передачи позволяет, в ряде случаев, более просто, хотя и более грубо, подойти к проблеме согласования различных типов линий передачи.

Рассмотренная в этой главе теория линейных устройств СВЧ- и КВЧ-диапазонов основана на введении векторов нормированных волновых напряжений для падающих и отраженных волн \vec{u}_n , \vec{u}_o , а также векторов нормированных напряжения \vec{u} и тока \vec{i} , втекающего внутрь многополюсника. Истинные (реальные) напряжения U_k и ток I_k k -входа (плеча) устройства связаны с нормированными величинами следующими соотношениями:

$$U_k = \sqrt{Z_k} u_k, \quad I_k = \frac{i_k}{\sqrt{Z_k}}; \quad k = \overline{1, N}, \quad (12.9.1)$$

где N — число входов многополюсника. Поэтому одной из проблем, возникающих при анализе устройств СВЧ, является задача определения волновых сопротивлений линий передачи, на основе которых построены входы многополюсника.

12.9.1. Волновое сопротивление линии с Т-волной. Определим волновое сопротивление линии передачи, работающей на волне типа Т. В этом случае просто ввести реальные напряжения U и ток I :

$$U = - \int_{L_1} \vec{E}(l) d\vec{l}, \quad I = \int_{L_2} \vec{H}(l) d\vec{l}, \quad (12.9.2)$$

где интегрирование проводится в общем случае по несовпадающим контурам L_1 , L_2 .

В случае, например, коаксиальной линии передачи (рис. 4.14) напряжение U между внутренним и наружным проводниками вычисляется интегрированием радиальной напряженности электрического поля:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_\rho d\rho = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\delta d\rho}{2\pi\rho} = E_{\max} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1},$$

где $E_{\max} = \delta / (2\pi\rho)$ — радиальная напряженность электрического поля на поверхности внутреннего проводника при $\rho = R_1$, δ — величина погонного заряда. Продольный электрический ток I , текущий по внутреннему проводнику, определяется интегралом от касательной составляющей напряженности магнитного поля на поверхности внутреннего проводника:

$$I = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi \Big|_{\rho=R_1} = R_1 \int_0^{2\pi} H_{\max} d\phi = 2\pi R_1 H_{\max},$$

где $H_{\max} = E_{\max} / W_0$, W_0 — характеристическое сопротивление среды с параметрами ϵ , μ .

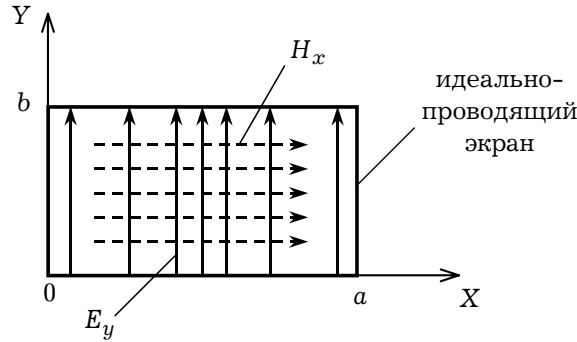


Рис. 12.14

Определим волновое сопротивление коаксиального волновода как отношение напряжения к току в бегущей волне:

$$Z(U, I) = \frac{U}{I}. \quad (12.9.3)$$

Тогда для коаксиальной линии передачи

$$Z = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (12.9.4)$$

12.9.2. Волновое сопротивление линии с Е-, Н- и гибридными волнами. Для линий передачи с другими типами волн можно лишь ввести условные напряжение и ток. Напряжение определяется как интеграл от \vec{E}_\perp (индекс « \perp » обозначает поперечную составляющую) вдоль направления максимального значения этого вектора. Ток можно определить как интеграл от вектора \vec{H}_τ по границам поперечных сечений металлических проводников.

В качестве примера определим волновое сопротивление прямоугольного волновода для H_{10} -волны. Поперечное сечение данной структуры показано на рис. 12.14. В соответствии с определением для волны H_{10} имеем:

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\gamma_0 z}, & H_x &= -i\gamma_0 \frac{a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\gamma_0 z}, \\ E_y &= \frac{i\omega\mu_0\mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\gamma_0 z}, & E_z &= E_x = H_y = 0, \end{aligned} \quad (12.9.5)$$

где

$$\gamma_0 = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} —$$

постоянная распространения для H_{10} -волны. Напряжение определим как интеграл от E_y вдоль направления, где $E_y = E_{\max}$, то есть при $x = a/2$:

$$U = - \int_0^b E_y(y) dy \Big|_{x=\frac{a}{2}} = - \frac{i\omega\mu_0\mu a}{\pi} H_0 b e^{-i\gamma_0 z}.$$

Ток равен интегралу от H_x по внутренним частям металлических стенок волновода L :

$$\begin{aligned} I &= \int_L \vec{H}_x d\vec{l} = \int_0^a H_x(x) dx \Big|_{y=0} - \int_a^0 H_x(x) dx \Big|_{y=b} = \\ &= 2 \int_0^a H_x(x) dx = -\frac{4i\gamma_0 a^2}{\pi^2} H_0 e^{-i\gamma_0 z}. \end{aligned}$$

Используя определение для волнового сопротивления в форме (12.9.3), получим

$$Z(U, I) = \frac{\pi b}{4a} Z_{\text{уд}}, \quad (12.9.6)$$

где

$$Z_{\text{уд}} = \frac{\omega \mu_0 \mu}{\gamma_0} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} -$$

удельное сопротивление прямоугольного волновода для H -волны.

12.9.3. «Энергетическое» определение волнового сопротивления. Кроме формулы для волнового сопротивления через U и I в форме (12.9.3) для линий передачи используют и энергетические определения:

$$Z(P, I) = \frac{2P}{|I|^2}, \quad (12.9.7)$$

$$Z(P, U) = \frac{|U|^2}{2P}. \quad (12.9.8)$$

Величина

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_S [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{S} \right\} -$$

представляет средний по времени за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ поток активной мощности,

проходящей через поперечное сечение S линии передачи. Подынтегральное выражение для P есть вектор Умова–Пойнтинга.

В случае прямоугольного волновода значения волнового сопротивления, определяемые формулами (12.9.7) и (12.9.8), могут быть выражены через удельное сопротивление $Z_{\text{уд}}$:

$$Z(P, I) = \frac{\pi^2 b}{8a} Z_{\text{уд}}, \quad (12.9.9)$$

$$Z(P, U) = 2 \frac{b}{a} Z_{\text{уд}}. \quad (12.9.10)$$

12.9.4. Резюме. Таким образом, понятие волнового сопротивления линии передачи является условным и зависит от его определения. В случае линий передачи с T -волной все три определения волнового сопротивления (формулы (12.9.3), (12.9.7) и (12.9.8)) являются идентичными.

Выбор того или иного определения для волнового сопротивления диктуется следующими соображениями. Во-первых, необходимо учитывать, какие величины $\{U, I, P\}$ проще вычислить. Во-вторых, принимая во внимание характер распределения магнитных и электрических полей в линии передачи, следует определить, какая из величин (U или I) определяется более естественным образом. Другими словами, использование напряжения целесообразно при условии, что в поперечном сечении линии передачи можно выделить область, для которой оно определяется естественным образом (область с максимальной концентрацией электрического поля). Ток вводится для областей, в которых существует максимальная концентрация магнитного поля. Так, например, для полосковых волноведущих структур (полосковые и связанные полосковые линии) целесообразно использовать определение (12.9.7), в котором фигурирует ток, протекающий по токопроводящим полоскам. Аналогично для щелевых линий передачи более удобно применять формулу (12.9.8), в которую входит напряжение. Его можно представлять (интерпретировать) как напряжение в щели структуры, где наблюдается максимальная концентрация электрического поля.

Глава

13

Введение в автоматизированное проектирование устройств СВЧ и антенн

13.1(*). Основные термины и определения	557
13.2(*). Принцип декомпозиции в системах машинного проектирования	559
13.3(*). Формализация устройств СВЧ и антенн	561
13.4(*). Расчёт дескрипторов сложных схем СВЧ и антенн	566
13.5(*). Принцип многоуровневой модели базового элемента в системах машинного проектирования	571
13.6(*). Принцип параметрического синтеза в системах машинного проектирования	574
13.7(*). Роль вычислительной электродинамики в системах машинного проектирования	575

) Символом «» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 13(*). Введение в автоматизированное проектирование устройств СВЧ и антенн

13.1(*). Основные термины и определения

С появлением СВЧ гибридных интегральных микросхем (ГИС) машинное проектирование стало неотъемлемым этапом разработки СВЧ устройств. Процесс разработки таких устройств в последнее время существенно усложнился из-за появления большого числа разнообразных активных и пассивных СВЧ элементов, возрастания сложности новых систем и необходимости более тщательного и точного проектирования. Вопрос ещё более усложняется из-за того, что возможности подстройки и регулировки ГИС СВЧ после изготовления ограничены.

В настоящей главе даются общие понятия и технические приёмы, используемые при машинном анализе и проектировании СВЧ устройств и антенн.

Любая задача машинного проектирования состоит из трёх важных этапов — моделирования, анализа и оптимизации. Ниже подробно рассматриваются только первые два этапа.

К настоящему времени в технике СВЧ сформировались три направления процесса разработки устройств СВЧ и излучающих антенн с использованием ЭВМ:

- автоматизированное проектирование (АП);
- автоматическое проектирование (АП);
- система автоматизированного или автоматического проектирования (САПР, САПР).

Автоматизированное проектирование — это проектирование, при котором отдельные преобразования описаний объекта и (или) алгоритма его функционирования или алгоритма процесса, а также представление описаний на различных языках программирования осуществляется посредством взаимодействия человека и ЭВМ.

Автоматическое проектирование — это проектирование, при котором все описания объекта и (или) алгоритма его функционирования или алгоритма процесса, а также представление описаний на различных языках осуществляется посредством без участия человека.

Система автоматизированного (автоматического) проектирования — это комплекс средств автоматизации проектирования, взаимосвязанных с необходимыми подразделениями проектной организации или коллективом специалистов — пользователей системы, выполняющих автоматизированное (автоматическое) проектирование.

При АП пользователь благодаря разработанной ранее математической модели (алгоритма) объекта, позволяющей определить его выходные параметры по изве-

ственным входным, имеет возможность с помощью ЭВМ рассчитать большое число вариантов (решений) и выбрать из них наилучший. В этом варианте выходные параметры объекта являются в определённом смысле самыми близкими к заданным, но, вообще говоря, не оптимальными. Следовательно, АП, существенно облегчая процесс разработки, не обеспечивает оптимального решения задачи.

При АП, согласно определению, реализуется оптимальное решение задачи. Это возможно только в случае, если в алгоритм проектирования введена обратная связь между выходными и входными параметрами объекта и происходит управление последними по определённому закону (алгоритму). Создание такого алгоритма, осуществляющего выбор оптимального варианта, является сложной творческой задачей, с которой необходимо справиться разработчику объекта. И, наконец, САПР (САПР), как видно из определения, помимо собственно АП (АП) должна обеспечить выпуск конструкторской и технологической документации (схем, чертежей и т.п.), которым, как известно, и заканчивается процесс разработки любого объекта. Это очень сложная задача. Таким образом, САПР (САПР) характеризуется формализованным входом (исходные технические требования на проектируемое устройство) и неформализованным выходом (конструкторская и технологическая документация объекта).

Основными задачами САПР являются:

- автоматизированный анализ математических моделей и выбор оптимальных параметров;
- автоматизированное накопление, хранение и оперативная коррекция и выдача данных, используемых в процессе проектирования;
- автоматизированное использование информации, полученной на отдельных стадиях проектирования;
- автоматизированный выпуск конструкторской и технической документации;
- планирование и проведение натурного эксперимента и обработка его результатов;
- автоматизированное управление ходом технологического процесса.

Система автоматизированного проектирования строится принципиально в виде «человеко-машинной» системы, где проектировщик выполняет наиболее творческую функцию по выбору и принятию решений, а ЭВМ поручается рутинная и трудоёмкая работа по получению и запоминанию вариантов решений на всех стадиях проектирования. Автоматизированное проектирование не исключает проектировщика из процесса проектирования, а отбирает у него те процедуры, которые им делаются непроизводительно.

Там, где нужны точность, память и быстроедействие в вычислениях, повторяемость результатов и процедур проектирования, используются технические средства. Когда решение задачи требует интуиции, опыта и принятия решения в ситуации, до конца не определённой, то работа возлагается на человека. В этом и заключается общий принцип оптимального распределения функций проектирования между проектировщиком и техническими средствами.

Процесс создания АП, АП, САПР и САПР основывается на следующих принципах:

- декомпозиции;
- многоуровневой физической и математической моделей;
- параметрического синтеза;
- формализованного входа и неформализованного выхода (только в САПР).

13.2(*). Принцип декомпозиции в системах машинного проектирования

Предварительно необходимо подчеркнуть, что реальные устройства СВЧ конфигурационно сложны и могут быть относительно велики в волновом масштабе. Известно, что при любом способе алгоритмизации краевой задачи усложнение формы области и увеличение её размеров быстро ведут к росту вычислительных трудностей. Не только при современном состоянии вычислительных средств, но и в будущем всегда найдутся такие реальные устройства, формализация которых посредством решения единой краевой задачи окажется совершенно бесперспективной. Поэтому математическое моделирование устройств СВЧ невозможно без такого подхода к сложным объектам, который позволяет сводить их к совокупности относительно простых элементов, допускающих независимый анализ.

Таким образом, при проектировании сложного устройства СВЧ неизбежно возникает необходимость его формального расчленения, то есть *декомпозиции* на более простые объекты, получившие название *базовых элементов* (БЭ). Причём, под БЭ будем понимать электродинамическую структуру (открытую, закрытую) или СВЧ-многополюсник, для которых известен их *дескриптор*, например, матрица рассеяния. Типичными представителями БЭ могут, например, служить: отрезки и различные виды соединений линий передачи, переключатели и циркуляторы, фазовращатели и фильтры, которые входят в состав сложного тракта. Заметим, что электродинамической структуре при определённых физических допущениях всегда можно поставить в соответствие некоторый эквивалентный СВЧ-многополюсник.

Принцип декомпозиции является наиболее перспективным для задач большой размерности. Применение декомпозиции позволяет решать задачи в приемлемые сроки при эффективном использовании всех ресурсов ЭВМ.

Отметим, что далеко не всегда легко расчленить устройство на простые БЭ. Например, в активных фазированных решётках (ФАР) имеется много узлов, входящих одновременно в приёмный и передающий тракты. Поэтому здесь одним из БЭ является достаточно сложный объект — приёмопередающий модуль решётки. В других случаях базовый элемент может конструктивно самостоятельно не существовать, но существенно влиять на физические процессы, протекающие в устройстве, например, нерегулярность, возникающая при соединении двух волноводных или полосковых линий передачи разного поперечного сечения. Вместе с тем, во всех случаях выходные параметры предыдущего БЭ обязательно входят в исходные данные для проектирования последующего БЭ.

Рассмотрим пример декомпозиции сложного устройства, показанного на рис. 13.1. Математическая модель считается построенной, если в конечном счёте полу-

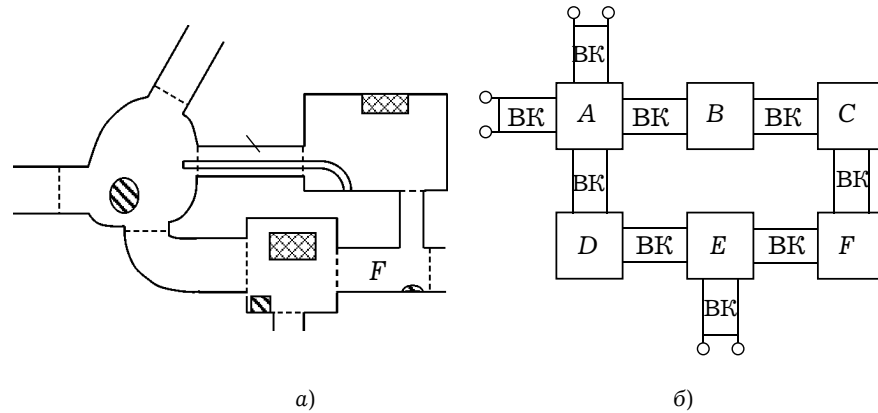


Рис. 13.1

чен её *дескриптор*, например матрица рассеяния. Очевидно, что непосредственно дескриптор этого устройства записать нельзя.

Посредством декомпозиции сложное устройство СВЧ расчленяется на автономные блоки (АБ), для которых могут быть решены соответствующие краевые задачи и определены дескрипторы (матрицы рассеяния, проводимостей и сопротивления). Процедура нахождения дескриптора всего устройства сводится к процессу объединения матриц рассеяния БЭ с помощью методов теории цепей и описана в разделе 13.4.

Поясним принцип декомпозиции (рис. 13.1а). Штриховыми линиями на рисунке отмечены плоскости, рассекающие объект на части (блоки) A, B, C, \dots . Всякую смежную границу двух блоков можно рассматривать как поперечное сечение волнового канала (ВК), причём для волноводного устройства такое толкование тривиально; понятие ВК в общем случае вводится в разделе 13.3. Следовательно, декомпозиция приводит к следующей эквивалентной схеме сложного устройства (рис. 13.1а): совокупность БЭ A, B, C, D, E, F соединённых между собой волновыми каналами (рис. 13.1б). Причём, поперечным сечениям, показанным на рис. 13.1а штриховыми линиями, поставлены ВК, описывающие волновые процессы между соседними БЭ. На рис. 13.1б показана эквивалентная схема устройства, показанного на рис. 13.1а. Будем считать, что выделенные блоки A, B, C, \dots имеют дескрипторы, построенные по отношению к указанным каналам, например, в виде матриц рассеяния S_A, S_B, S_C, \dots . Если последние известны, то нетрудно получить дескриптор устройства в целом без всякой потери информации о связи выделенных блоков. Иными словами, части A, B, C, \dots являются *автономными блоками* (АБ).

Возможно использование двух уровней декомпозиции:

- расчленение устройства на укрупнённые БЭ и применение затем специальных алгоритмов их объединения;
- расчленение укрупнённых элементов на простые БЭ, процессы в которых можно анализировать, решая соответствующую краевую задачу для уравнений Максвелла, или с помощью тех или иных эквивалентных схем.

Например, при анализе некоторых ИС СВЧ целесообразно использовать так называемые схемы замещения БЭ, состоящие только из отрезков соединительных линий и сосредоточенных R , C и L элементов. Подобные БЭ удобно характеризовать матрицей их параметров (рассеяния, проводимостей, сопротивлений). Объединение двух или более таких элементов сводится к определению методами теории цепей эквивалентной матрицы параметров, рассчитываемой по известным матрицам простейших БЭ.

Таким образом, принцип декомпозиции при машинном проектировании СВЧ устройств и антенн сводится к процедуре их разбиения на БЭ с известными дескрипторами, соединённые между собой ВК.

13.3(*). Формализация устройств СВЧ и антенн

Выше было показано, что любое сложное устройство СВЧ может быть представлено в виде совокупности БЭ, соединённых между собой ВК. Следовательно, о формализации можно говорить как на уровне БЭ, так и на уровне всего устройства СВЧ или антенны.

В основе формализации устройств СВЧ и антенн лежат такие понятия как *волновой канал*, «чёрный ящик» и *дескриптор*.

13.3.1. Волновой канал. Понятие ВК вводится для описания связи между соседними БЭ при декомпозиции сложного устройства или антенны. Будем использовать понятие о ВК в широком смысле слова. Примером обычного ВК может служить любая линия передачи, например, полый прямоугольный волновод. Под ВК в широком смысле слова будем понимать формальную операцию при построении математической модели электродинамической системы. Наиболее распространённым типом ВК является продольно-однородная электродинамическая система, то есть та, которая не изменяет своей структуры вдоль некоторого направления (обозначаемого здесь символом z).

Простейшей продольно-однородной электродинамической системой (ВК) может служить продольно-однородная изотропная среда. Электромагнитное поле, распространяющееся вдоль некоторого направления z в виде плоской волны общего вида описывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{z}_0 E_z + \frac{1}{\chi^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{i\omega\mu\mu_0}{\chi^2} [\nabla_{\perp} H_z, \vec{z}_0] \\ \vec{z}_0 H_z + \frac{1}{\chi^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{i\omega\epsilon\epsilon_0}{\chi^2} [\vec{z}_0, \nabla_{\perp} H_z] \end{pmatrix}, \quad (13.3.1)$$

где $\chi^2 = k^2 - \gamma^2$, проницаемости ϵ , μ могут быть функциями поперечных координат, а символ « \perp » означает исключение дифференцирования по z в операторах.

При записи (13.3.1) подразумевается продольная зависимость типа бегущей волны: $\exp\{\pm i\gamma z\}$. Плоские неоднородные волны, описываемые (13.3.1), имеют как электрическую, так и магнитную продольные компоненты. Различают следующие частные классы: T -волны ($E_z = H_z \equiv 0$), E -волны ($H_z \equiv 0$), H -волны ($E_z \equiv 0$).

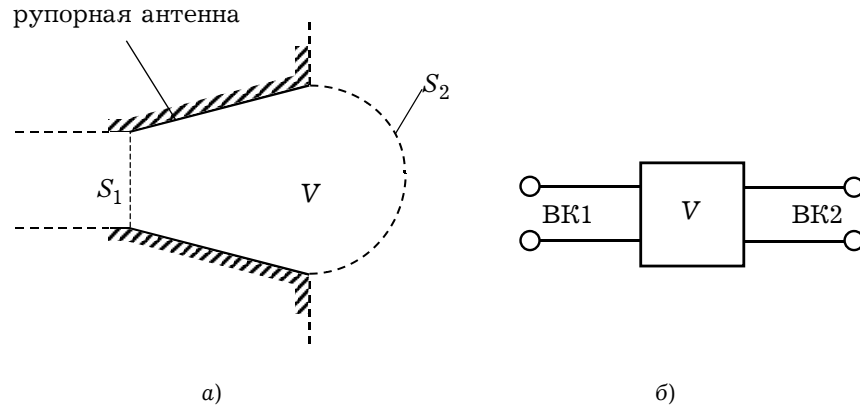


Рис. 13.2

Можно показать, что произвольное электромагнитное поле в ВК, удовлетворяющее однородным (источники отсутствуют) уравнениям Максвелла, представимо в виде суммы его собственных волн, то есть всех решений типа (13.3.1). Таким образом, под ВК будем понимать продольно-однородную электродинамическую систему, которая является волнововедущей структурой вдоль некоторого направления z , имеющей в общем случае некоторый набор собственных волн.

Из вышеприведённого определения ВК следуют рекомендации для декомпозиции сложного устройства СВЧ. Так, например, плоскости (штриховые линии), расчленяющие объект на рис. 13.1а, должны быть проведены таким образом, чтобы в них (плоскостях) выполнялись соотношения (13.3.1), где под z понимается координата, перпендикулярная к соответствующей плоскости (штриховой линии). Если рассматривается устройство с излучением (например, антенна), необходимо формализовать внешнее пространство как волновой канал. В качестве примера формализации антенны на рис. 13.2а показано представление рупорной антенны: внутренняя область рупора V соединяется с полым волноводом через плоское сечение S_1 и с полусферическим волноводом, формализующим область излучения, через полусферическое сечение S_2 . На рис. 13.2б приведена эквивалентная схема рупорной антенны в виде одного БЭ, соответствующего области V , с двумя ВК: ВК1 описывает связь БЭ с полым волноводом, ВК2 — связь БЭ с внешним пространством через полусферическое сечение S_2 .

13.3.2. Устройство СВЧ как «чёрный ящик». Будем описывать некоторое устройство СВЧ в целом, либо его часть в виде следующей схемы. Представим устройство в виде основной области V с присоединёнными к ней полубесконечными ВК (рис. 13.3), которые граничат с V поперечными сечениями S_α ($\alpha = 1, P$). ВК определим таким образом, чтобы они не создавали никакого излучения, кроме прямой и обратной передачи энергии вдоль одного выделенного направления ξ_α . Область V должна иметь энергетические связи с внешним пространством только через ВК.

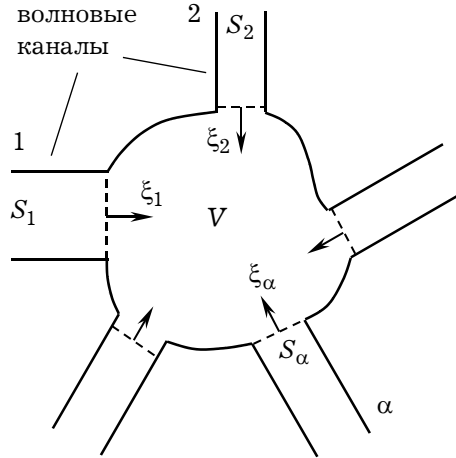


Рис. 13.3

Пусть по одному или нескольким (возможно, по всем) ВК к объекту V приходит «сигнал» в виде системы собственных волн; при этом в каналах распространяются и всевозможные обратные собственные волны, образующие «отклик» объекта. Речь идёт об одном из возможных дифракционных процессов (порождение отклика сигналом) или, можно сказать, об одном из мыслимых режимов рассматриваемого объекта.

Положим, что устройство — линейное, а электромагнитный процесс — монохроматический (круговая частота ω). Символами $c_{n(\alpha)}^{\pm}$ обозначим комплексные коэффициенты в выражениях для прямых (+) и обратных (–) волн каналов с номерами α , причём n — номер нормальной (собственной) волны в том или ином канале. Коэффициенты $c_{n(\alpha)}^{\pm}$ выбираются таким образом, чтобы на входных сечениях S_{α} поле сигнала $\vec{E}_{\alpha}^{(+)}, \vec{H}_{\alpha}^{(+)}$ и поле отклика $\vec{E}_{\alpha}^{(-)}, \vec{H}_{\alpha}^{(-)}$ в общем случае имеет вид следующих рядов:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_{\alpha}^{\pm} \\ \vec{H}_{\alpha}^{\pm} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n(\alpha)}^{\pm} \begin{pmatrix} \vec{e}_{\pm n(\alpha)} \\ \vec{h}_{\pm n(\alpha)} \end{pmatrix}; \quad \alpha = 1, 2, \dots, P, \quad (13.3.2)$$

где $\vec{e}_{\pm n(\alpha)}, \vec{h}_{\pm n(\alpha)}$ — поле n -ой нормальной (собственной) волны в α -волновом канале. Под прямыми «+» волнами, как обычно, понимают волны, входящие в многополюсник, под обратными «–» — волны, выходящие из многополюсника.

Соотношение (13.3.2) представляет собой разложение полей сигналов $\vec{E}_{\alpha}^{(+)}, \vec{H}_{\alpha}^{(+)}$ по собственным (нормальным волнам) прямым волнам $\vec{e}_{n(\alpha)}, \vec{h}_{n(\alpha)}$ ВК с индексом α , а поле сигнала $\vec{E}_{\alpha}^{(-)}, \vec{H}_{\alpha}^{(-)}$ — по собственным (нормальным) обратным волнам $\vec{e}_{-n(\alpha)}, \vec{h}_{-n(\alpha)}$. Разложения (13.3.2) записаны с учётом того, что ВК могут обладать невзаимными свойствами, так как в общем случае $\vec{e}_{n(\alpha)} \neq \vec{e}_{-n(\alpha)}, \vec{h}_{n(\alpha)} \neq \vec{h}_{-n(\alpha)}$.

При использовании в качестве ВК с индексом α обычной волноведущей структуры, например, прямоугольного волновода, под $\vec{e}_{n(\alpha)}, \vec{h}_{n(\alpha)}$ следует понимать собственные функции прямоугольного волновода.

В любом ВК имеет смысл учитывать конечное число членов собственных волн. Для определённости в ВК с индексом α будем учитывать N_α собственных волн ($\alpha = 1, P$). Тогда можно ввести два следующих вектора \vec{c}^+ и \vec{c}^- :

$$\begin{aligned}\vec{c}^+ &= \{c_{1(1)}^+, c_{2(1)}^+, \dots, c_{N_1(1)}^+, c_{1(2)}^+, c_{2(2)}^+, \dots, c_{N_2(2)}^+, \dots, c_{N_P(P)}^+\}^T, \\ \vec{c}^- &= \{c_{1(1)}^-, c_{2(1)}^-, \dots, c_{N_1(1)}^-, c_{1(2)}^-, c_{2(2)}^-, \dots, c_{N_2(2)}^-, \dots, c_{N_P(P)}^-\}^T,\end{aligned}\quad (13.3.3)$$

где символ «Т» обозначает операцию транспонирования вектора.

Процесс дифракции — формирование отклика под действием сигнала — характеризуется соотношением

$$\vec{c}^- = \tilde{S} \vec{c}^+, \quad (13.3.4)$$

где \tilde{S} — некоторый линейный оператор, называемый *матрицей рассеяния*. С учётом (13.3.2) и (13.3.3) матрица S имеет структуру:

$$\tilde{S} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} S_{11}^{11} & \dots & S_{1N_1}^{11} & | & | & S_{11}^{1P} & \dots & S_{1N_P}^{1P} \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{N_1 1}^{11} & \dots & S_{N_1 N_1}^{11} & | & \dots & S_{N_1 1}^{1P} & \dots & S_{N_1 N_P}^{1P} \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{11}^{P1} & \dots & S_{1N_1}^{P1} & | & | & S_{11}^{PP} & \dots & S_{1N_P}^{PP} \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{N_P 1}^{P1} & \dots & S_{N_P N_1}^{P1} & | & \dots & S_{N_P 1}^{PP} & \dots & S_{N_P N_P}^{PP} \end{array} \right], \quad (13.3.5)$$

то есть матрица \tilde{S} размерности P имеет блочную структуру; каждый из блоков, в свою очередь, является матрицей. Верхние индексы в (13.3.5) определяют номер матричного блока. Произвольный блочный элемент S_{lm} представляет собой следующую матрицу:

$$S_{lm} = \begin{bmatrix} S_{11}^{lm} & \dots & S_{1N_m}^{lm} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{N_l 1}^{lm} & \dots & S_{N_l N_m}^{lm} \end{bmatrix},$$

где N_m определяет число собственных волн в ВК с индексом m , а N_l — число собственных волн в волновом канале с индексом l . Таким образом, элемент S_{lm} определяет элементы матрицы рассеяния \tilde{S} между каналами l (число учитываемых собственных волн — N_l) и m (число учитываемых собственных волн — N_m).

Матрица рассеяния \tilde{S} предопределяет любые возможные режимы описываемого линейного пассивного объекта. Поэтому, если она известна для некоторого устройства СВЧ этого класса, то, следовательно, устройство полностью формализовано без какого-либо учёта внутренней структуры, то есть рассматривается как

«чёрный ящик». Будем говорить, что матрица \tilde{S} есть *дескриптор* устройства СВЧ.

Если устройство линейно, но активно, то вместо соотношения (13.3.4) необходимо записать:

$$\bar{c}^- = \tilde{S}\bar{c}^+ + \tilde{Q}\bar{c}^\Sigma, \quad (13.3.6)$$

где \bar{c}^Σ — вектор источников, \tilde{Q} — матрица излучения. Вектор \bar{c}^Σ — набор комплексных чисел, характеризующих (в определённом базисе) внутренние источники или, например, факторы «накачки». В простейшем случае \tilde{Q} — просто формализация (тип представления) общего решения задачи о возбуждении объектами заданными источниками. Активное устройство формально отличается от пассивного тем, что создаёт расходящиеся волны ($\bar{c}^- \neq 0$) при отсутствии сигнала ($\bar{c}^+ = 0$).

13.3.3. Y и Z-дескрипторы и соотношения между ними. В подавляющем большинстве случаев бывают известны падающие волны на входах устройств СВЧ (а не полные электрические либо магнитные поля), то есть режимы имеют характер дифракции. Поэтому дескрипторы, являющиеся операторами над падающими волнами, обладают очевидным преимуществом адекватности. По этой причине в разделе 13.3.2 было дано описание матрицы рассеяния. Попутно отметим, что соотношения (13.3.4) и (13.3.6) требуют некоторого обобщения, когда рассматриваются сферические волны.

На практике встречаются и другие дескрипторы. Как следует из (13.3.1), полные (тангенциальные) поля на входных сечениях S_α представляются в виде

$$\begin{aligned} \bar{E}_\alpha &= \sum_{n=1}^{+\infty} (c_{n(\alpha)}^+ \bar{e}_{+n(\alpha)} + c_{n(\alpha)}^- \bar{e}_{-n(\alpha)}), \\ \bar{H}_\alpha &= \sum_{n=1}^{+\infty} (c_{n(\alpha)}^+ \bar{h}_{+n(\alpha)} + c_{n(\alpha)}^- \bar{h}_{-n(\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, P. \end{aligned} \quad (13.3.7)$$

Если ВК подчинены принципу взаимности (не содержат анизотропных включений), поперечные распределения полей собственных волн обоих направлений идентичны: взяв в этом случае $\bar{e}_{-n(\alpha)} = \bar{e}_{+n(\alpha)}$, имеем $\bar{h}_{-n(\alpha)} = -\bar{h}_{+n(\alpha)}$. Тогда вместо (13.3.7) можно записать

$$\bar{E}_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n(\alpha)} \bar{e}_{n(\alpha)}, \quad \bar{H}_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n(\alpha)} \bar{h}_{n(\alpha)}, \quad (13.3.8)$$

где $a_{n(\alpha)} = c_{n(\alpha)}^+ + c_{n(\alpha)}^-$, $b_{n(\alpha)} = c_{n(\alpha)}^+ - c_{n(\alpha)}^-$.

Подобно тому как ранее из коэффициентов $c_{n(\alpha)}^\pm$ по формулам (13.3.3) формировались векторы \bar{c}^\pm , построим из $a_{n(\alpha)}$ и $b_{n(\alpha)}$ векторы \bar{a} и \bar{b} .

Матрицей нормированной проводимости и *матрицей нормированного сопротивления* называют соответственно операторы $[\bar{Y}]$ и $[\bar{Z}]$ в линейных соотношениях

$$\bar{b} = [\bar{Y}]\bar{a}, \quad \bar{a} = [\bar{Z}]\bar{b}.$$

В качестве дескрипторов используют также матрицу передачи \vec{A} и волновую матрицу передачи \vec{T} .

13.3.4. Ключевые задачи электродинамики и парциальные режимы. Дескрипторы устройств СВЧ в инженерной практике в одномодовом приближении нередко можно измерить. Более точно дескрипторы определяются путём постановки и решения соответствующих задач электродинамики.

Ключевой задачей будем называть краевую задачу электродинамики, сформулированную таким образом, что её решение даст информацию о дескрипторе устройства. Для получения полной информации о дескрипторе устройства СВЧ необходимо решить набор ключевых задач, соответствующих различным режимам описываемого объекта. Эти решения называются *парциальными*.

S-задача. Для определения матрицы рассеяния \vec{S} (дескриптора S) рассматриваются парциальные режимы дифракции нормальных (собственных) волн всех учитываемых типов во всех волновых каналах. Каждая ключевая задача есть краевая задача для однородных (без источников) уравнений Максвелла при условии, что на один из входов S_j падает волна определённого типа n . На всех входах (включая S_j) задаются условия излучения: отсутствие прямых волн в отклике.

Для определения всех элементов матрицы \vec{S} устройства СВЧ (рис. 13.3) необходимо решить набор ключевых задач, варьируя сечение S_j ($j = \overline{1, P}$) и типы волн n в каждом канале (для S_1 — $n = \overline{1, N_1}$; для S_2 — $n = \overline{1, N_2}$; для S_P — $n = \overline{1, N_P}$).

Y-задача. Для определения матрицы нормированной проводимости $[\vec{Y}]$ парциальные режимы выбираются в виде «короткого замыкания» на всех входах, кроме одного (S_j): задаются граничные условия $\vec{E}_\tau = 0$ на всех входах, кроме S_j при $\vec{E}_\tau = \vec{e}_{n(j)}$ на S_j . Все элементы матрицы $[\vec{Y}]$ находятся при требуемом переборе j и n в постановке ключевой задачи, то есть в результате исследования серии парциальных режимов «короткого замыкания».

Z-задача. Для определения матрицы нормированного сопротивления $[\vec{Z}]$ ставится ключевая задача типа «холостого хода». В парциальном режиме на всех входах, кроме S_j , задаётся $\vec{H}_\tau = 0$, а на этом единственном входе $\vec{H}_\tau = \vec{h}_{n(j)}$.

13.4(*). Расчёт дескрипторов сложных схем СВЧ и антенн

При анализе сложных схем СВЧ и антенн применяется принцип декомпозиции, в соответствии с которым сложная система представляется в виде совокупности БЭ, соединённых между собой ВК. Ниже, считая дескрипторы БЭ заданными, рассмотрим различные методы определения характеристик сложных СВЧ-схем, то есть рассмотрим задачу объединения БЭ.

13.4.1. Схемы, состоящие из четырёхполюсников. Многие функциональные элементы, используемые в технике СВЧ, являются четырёхполюсниками. Более того, большинство СВЧ устройств и антенн может быть представлено в виде комбина-

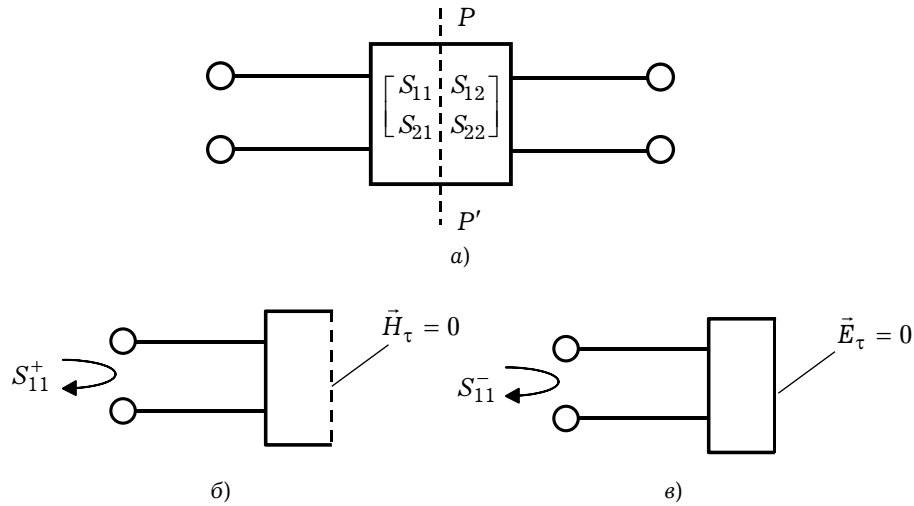


Рис. 13.4

ций только четырёхполюсников. Четырёхполюсники могут соединяться между собой каскадно; соединения могут быть последовательными, параллельными и гибридными. В результате различных последовательных и (или) параллельных соединений четырёхполюсников может быть получено большое число многополюсных устройств.

Использование симметрии при анализе схем. Расчёт многополюсных схем, обладающих симметрией относительно некоторой плоскости, может проводиться для двух более простых схем, являющихся половинами исходной схемы, при чётном и нечётном возбуждениях. При чётном возбуждении можно рассматривать только половину схемы с магнитной стенкой в плоскости симметрии. При нечётном возбуждении соответственно анализируется половина схемы с электрической стенкой в плоскости симметрии.

В качестве примера использования симметрии рассмотрим симметричный относительно плоскости PP' четырёхполюсник, показанный на рис. 13.4а. Половины симметричного четырёхполюсника с чётными (рис. 13.4б) и нечётными (рис. 13.4в) типами колебаний являются двухполюсниками. Эти два двухполюсника анализируются соответственно с магнитной (рис. 13.4б) и электрической (рис. 13.4в) стенками в сечении плоскости симметрии PP' . Коэффициенты отражения рассчитываются для разомкнутой и короткозамкнутой схем в сечении плоскости симметрии. Элементы матрицы рассеяния \tilde{S} исходной схемы четырёхполюсника определяются по формулам:

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{22} &= \frac{S_{11}^+ + S_{11}^-}{2}, \\ S_{12} = S_{21} &= \frac{S_{11}^+ - S_{11}^-}{2}. \end{aligned} \quad (13.4.1)$$

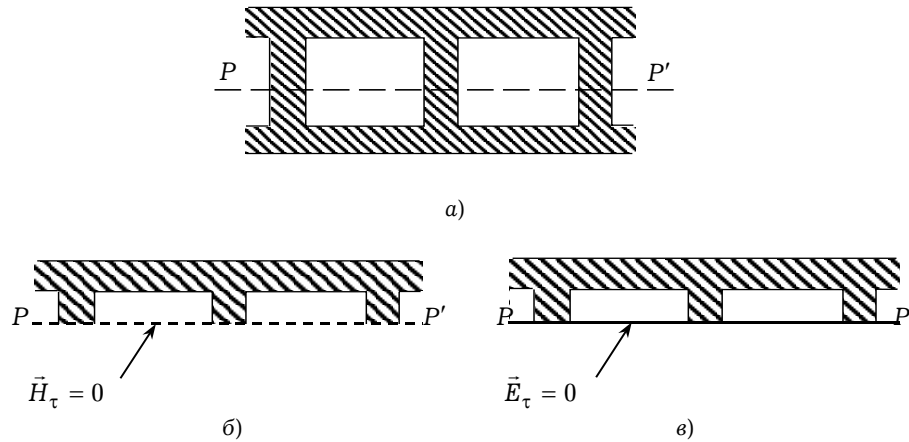


Рис. 13.5

Для симметричных восьмиполусников половины схем с чётными и нечётными возбуждениями обычно являются четырёхполусниками. В разделе 12.6 описан метод симметричных восьмиполусников (метод синфазного и противофазного возбуждения), позволяющий сводить анализ восьмиполусников к анализу более простых четырёхполусников. Ниже в качестве примера приведём декомпозицию шлейфного направленного ответвителя, который представляет собой металлизированный рисунок в виде токопроводящих полосок (рис. 13.5а), нанесённый на диэлектрическую подложку с односторонней металлизацией. Анализ симметричного восьмиполусника (рис. 13.5а) относительно плоскости PP' можно свести к анализу двух четырёхполусников при чётном (рис. 13.5б) и нечётном (рис. 13.5в) возбуждениях в плоскости симметрии.

Каскадное соединение четырёхполусников. При исследовании схем, состоящих из каскадно соединённых четырёхполусников, удобно использовать \tilde{A} и \tilde{T} -матрицы. Анализ четырёхполусников каскадной структуры с помощью \tilde{A} и \tilde{T} -матриц описан в разделе 12.5.

13.4.2. Произвольное соединение четырёхполусников. В результате некоторых соединений четырёхполусников может быть получена многополусная схема. Некоторые примеры таких соединений показаны на рис. 13.6. Для исследования таких систем можно ввести некоторые фиктивные многополусники (на рис. 13.6 они изображены штриховыми линиями), определяющие необходимые соединения четырёхполусников. Затем можно использовать метод анализа соединений многополусников, описанный в разделе 13.4.3. Для этого необходима \tilde{S} -матрица многополусного соединения.

В результате последовательного или параллельного соединения четырёхполусников получается четырёхполусная схема (рис. 13.7). Для анализа этих схем могут использоваться $[\tilde{Y}]$ и $[\tilde{Z}]$ -матрицы. Например, при параллельно-парал-

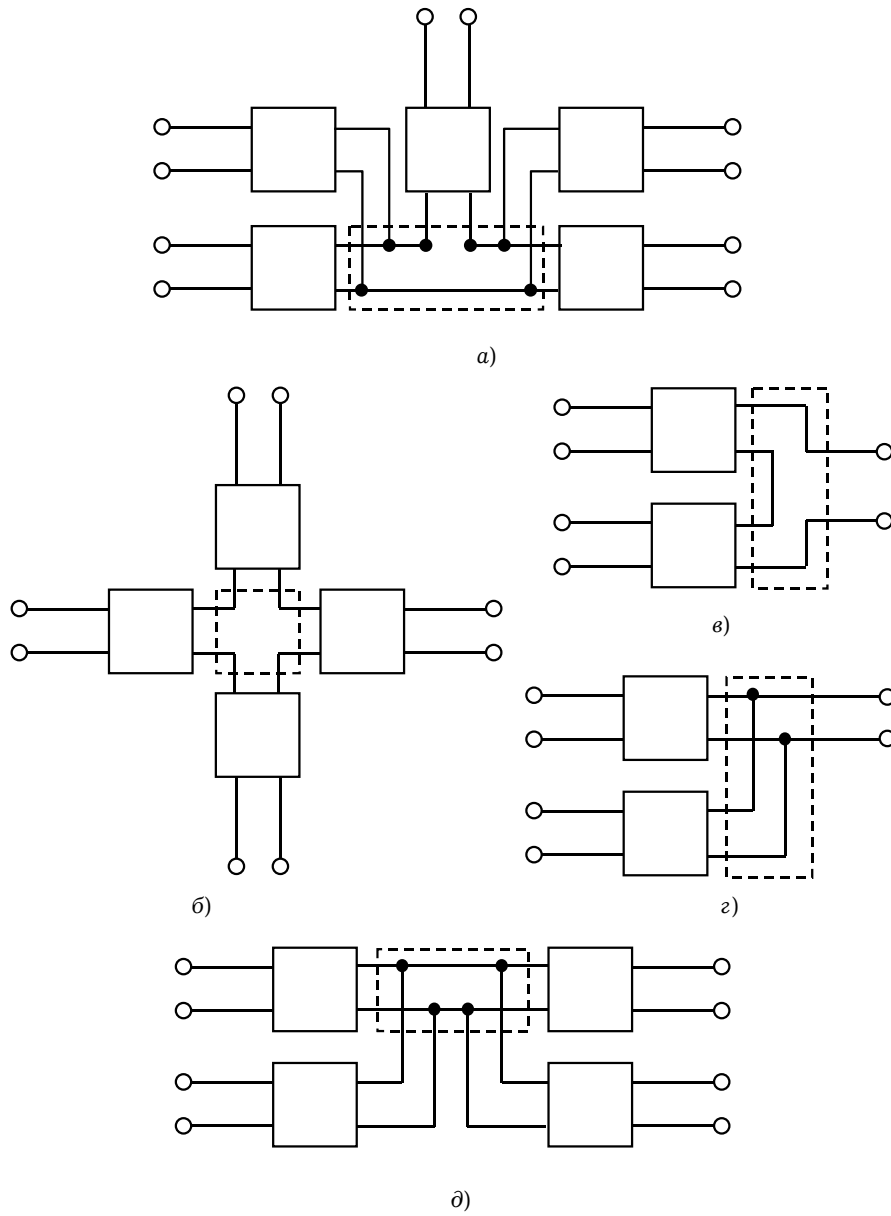


Рис. 13.6

лельном соединении четырёхполюсников (рис. 13.7,а) $[\bar{Y}]$ -матрица может быть получена простым сложением $[\bar{Y}]$ -матриц двух компонент. При последовательно-последовательном соединении (рис. 13.7б) общая $[\bar{Z}]$ -матрица получается сложением $[\bar{Z}]$ -матриц компонент. Кроме операций сложения матриц, необходимо ещё

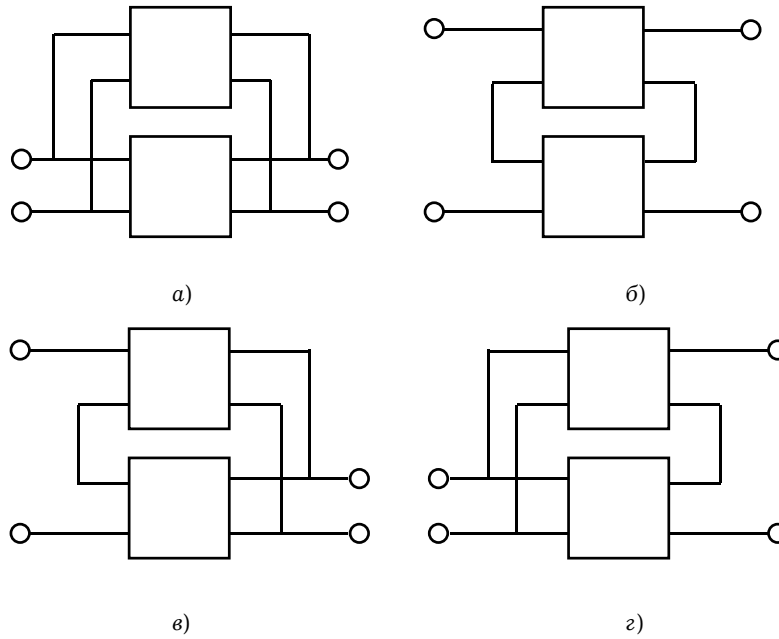


Рис. 13.7

выполнить однообразные, хотя и очень несложные действия, обеспечивающие получение $[\bar{Y}]$, $[\bar{Z}]$ -матриц из \tilde{S} -матриц, и наоборот.

13.4.3. Метод определения параметров схем с произвольными внутренними соединениями. Рассмотрим метод расчёта $2P$ -полусника (рис. 13.6), который содержит q внутренних (соединяемых между собой) и p внешних входов. Под любым входом, как обычно, понимаем ВК, в каждом из которых учитываем N_α собственных волн ($\alpha = 1, \bar{P}$). Аналогично (13.3.4) можно записать

$$\bar{c}^- = \tilde{S} \bar{c}^+, \quad (13.4.2)$$

где \bar{c}^+ и \bar{c}^- определяются соотношением (13.3.3), а матрица рассеяния \tilde{S} имеет блочный вид (13.3.5).

Перегруппируем строки и столбцы в (13.4.2) таким образом, чтобы волновые переменные разделялись на две группы: первая бы соответствовала p внешним входам, а вторая — q входам, соединённым внутри схемы. Тогда уравнение (13.4.2) можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_p^- \\ \bar{c}_q^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pp} & S_{pq} \\ S_{qp} & S_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_p^+ \\ \bar{c}_q^+ \end{bmatrix}, \quad (13.4.3)$$

где \bar{c}_p^-, \bar{c}_p^+ — векторы, составленные из амплитуд обратных и прямых волн, соответствующих p внешним входам; \bar{c}_q^-, \bar{c}_q^+ — векторы, составленные из амплитуд обратных и прямых волн, соответствующих q внутренним входам.

Ограничения, накладываемые внутренними соединениями для q внутренних входов, запишем в виде:

$$\bar{c}_q^- = \bar{\Gamma} \bar{c}_q^+, \quad (13.4.4)$$

где $\bar{\Gamma}$ — матрица внутренних соединений, описывающая их топологию. Матрица $\bar{\Gamma}$ составляется следующим образом. В каждой строке матрицы $\bar{\Gamma}$ все элементы являются нулями, кроме единицы, записанной в столбце, соответствующем внутренним соединениям. Если элемент (j, k) в матрице $\bar{\Gamma}$ есть единица, то это означает, что вход j соединяется с входом k . При этом полагается, что нормирующие сопротивления каждого соединения одинаковы.

Из выражений (13.4.3) и (13.4.4) получаем

$$\bar{\Gamma} \bar{c}_q^+ = \bar{S}_{qp} \bar{c}_p^+ + \bar{S}_{qq} \bar{c}_q^+$$

или

$$\bar{c}_q = (\bar{\Gamma} - \bar{S}_{qq})^{-1} \bar{S}_{qp} \bar{c}_p^+. \quad (13.4.5)$$

Подставляя (13.4.5) в (13.4.3), находим, что

$$\bar{c}_p^- = \left[\bar{S}_{pp} + \bar{S}_{pq} (\bar{\Gamma} - \bar{S}_{qq})^{-1} \bar{S}_{qp} \right] \bar{c}_p^+, \quad (13.4.6)$$

откуда матрица рассеяния для внешних соединений определяется следующим образом:

$$\bar{S}_p = \bar{S}_{pp} + \bar{S}_{pq} (\bar{\Gamma} - \bar{S}_{qq})^{-1} \bar{S}_{qp}. \quad (13.4.7)$$

Матричные уравнения (13.4.5) и (13.4.4) могут быть использованы для определения векторов \bar{c}_q^- , \bar{c}_q^+ на внутренних входах для любого произвольного способа возбуждения p внешних входов.

Таким образом, используя материал этого раздела, можно рассчитать внутренние фиктивные многополюсники на рис. 13.6 (изображённые штриховыми линиями), определяющие внутренние соединения многополюсников, и тем самым определить матрицы рассеяния составных сложных многополюсных устройств.

13.5(*). Принцип многоуровневой модели базового элемента в системах машинного проектирования

13.5.1. Физические и математические модели базовых элементов. Расчёт любого БЭ начинается с построения его физической модели. Универсальной физической моделью любого устройства СВЧ или антенны (или их БЭ) является описание на электродинамическом уровне процесса распространения в них электромагнитного поля. Из-за сложности строгого электродинамического описания БЭ во многих случаях стремятся найти удовлетворительное приближение к универсальной физической модели, которое, сохраняя многие детали физического процесса в устройстве, позволит создать реализуемый на ЭВМ алгоритм его анализа. Таковы, например, модели анализа собственных волн и колебаний волноводов и полых резонаторов, не учитывающие потери в металлических стенках структур. При анализе неоднородно-

стей в волноведущих структурах СВЧ обычно учитывают конечное число высших типов, возникающих вблизи неоднородностей. Таким образом, под *физической моделью* БЭ или устройства будем понимать совокупность физических приближений, использованных при его расчёте.

Часто даже простые модели, учитывающие только основной тип волны, позволяют решить задачу расчёта неоднородностей в волноводе с достаточной для практики точностью.

Математическая модель представляет собой математическое описание физического процесса, протекающего в проектируемом устройстве, то есть физической модели. В рассматриваемом случае она характеризует процесс распространения электромагнитного поля БЭ устройств СВЧ и антенн. Естественно, что основой для определения универсальной математической модели любого БЭ является система уравнений Максвелла, удовлетворяющая известным для данного объекта краевым условиям.

13.5.2. Многоуровневость математических моделей базовых элементов. Согласно существующему уровню развития науки можно утверждать, что система уравнений Максвелла вполне определяет закономерности электромагнитных процессов. Имея в виду макроскопические объекты, можно сказать, что надо лишь правильно формулировать входящие в эту систему материальные уравнения. Решение электродинамической задачи, то есть некоторая совокупность математических операций (над уравнениями Максвелла при наложении тех или иных условий), даст при этом исчерпывающие сведения о конкретном физическом процессе. Иными словами, *математические модели электродинамики адекватны физической реальности* (разумеется, уточнение этого высказывания потребовало бы ряда оговорок). Поэтому может сложиться ошибочное мнение, что в области электромагнитных явлений нет необходимости экспериментировать или заниматься трудоёмкой обработкой технических конструкций при помощи измерений, если всё подлежит точному расчёту с единых позиций.

Однако строгая постановка задач электродинамики, отвечающих реальным объектам техники, приводит к серьёзным трудностям. Если под решениями понимать некоторые формулы (позволяющие вычислять требуемые величины), то можно утверждать, что для неидеализированных электродинамических задач они получаются крайне редко. Зато к настоящему времени разработаны методы, позволяющие получать решения весьма сложных задач при помощи вычислительных процессов на ЭВМ. В большинстве случаев электродинамическая задача сводится к системе алгебраических уравнений, порядок которой в принципе неограничен, а для реализации достаточной точности модели должен быть сделан настолько большим, что принципиально важно применение ЭВМ. Математические модели электродинамики, отвечающие сложным объектам техники, реализуются, как правило, в виде комплекса программ для больших ЭВМ.

В радиотехнике существуют и эвристические способы расчёта электродинамических структур, основанные на различных догадках и упрощающих предположениях. Такой подход сложился ещё в период отсутствия быстродействующих ЭВМ. Эвристические средства полезны, поскольку концентрируют инженерный опыт,

но полезность их ограничена. Тот или иной упрощённый подход оправдан в какой-то области применения параметров, которая известна весьма приблизительно. Поэтому он оказывается непригодным для применения в новых нетрадиционных условиях. В упрощённую модель уже заложено нечто ожидаемое, подсказанное предыдущим опытом. Нужно много времени, а порой и счастливое стечение обстоятельств, чтобы найти новый подходящий образ, который должен быть ещё опробован. Между тем, применение неупрощённых моделей электродинамики не нуждается в предварительных догадках, так как источник их — в фундаментальных положениях теории. Поэтому также результаты расчётов становятся источником информации. «Мысленный эксперимент», реализуемый на ЭВМ, во многом выгодно отличается от натурального: он может производиться гораздо быстрее, в несравненно более широких масштабах и без посторонних влияний.

Математические модели электродинамики создаются для целых классов объектов, к которым относятся и ещё не изобретённые технические устройства. Заранее разработанный программный комплекс может оказаться готовым к техническим идеям завтрашнего дня или даже способствовать их становлению.

Эффективное решение системы уравнений Максвелла для многих БЭ пока невозможно. Поэтому приходится довольствоваться тем или иным уровнем приближения к точному решению, определяющим уровень математической модели. Например, любой БЭ распределительной системы антенны можно характеризовать его матрицей рассеяния. Если эта матрица вычисляется на основе решения краевой задачи для уравнений Максвелла, то имеем математическую модель высшего уровня. При учёте только основного типа волны соответствующая математическая модель расчёта матрицы рассеяния БЭ будет более низкого уровня. В ряде случаев модель может представлять собой математическое описание результатов измерения матрицы рассеяния.

Чем ниже уровень математической модели, тем меньше затрат машинного времени требует реализация её алгоритма, но тем вероятнее, что спроектированное устройство окажется неоптимальным. Поэтому учитывая всё возрастающий прогресс в области быстродействия ЭВМ и увеличение её оперативной памяти, следует признать, что системы проектирования должны опираться на модели высшего (электродинамического) уровня, основанные на решении краевых задач для уравнений Максвелла. Тем более, что указанные модели помимо полного соответствия физическим процессам, протекающим в устройствах, как правило, обладают ещё и универсальностью, то есть пригодны при проектировании целых классов БЭ. Деление моделей по уровню весьма условно, так как для разных задач требуемый уровень модели может существенно изменяться.

Особого подхода требуют современные интегральные схемы СВЧ или, например, устройства оптоэлектроники, проектирование которых должно принципиально опираться на неупрощённые математические модели электродинамики, то есть, математические модели высшего уровня. Здесь следует заметить, что неидеализированные задачи электродинамики, отвечающие реальным объектам радиотехники, почти всегда являются задачами дифракции. Например, обычно передающую антенну представляют в виде излучения от заданных источников, а в

действительности необходимо найти распределение токов по антенне вследствие её возбуждения, например, волноводом, а это уже задача дифракции. Любое устройство СВЧ, волноводное или построенное в виде интегральной схемы, соединяется с другим посредством каких-либо направляющих структур (например, полых волноводов или коаксиальных кабелей). Опять-таки речь должна идти о дифракции соответствующих направляемых волн.

Разумеется, при построении математических моделей БЭ приходится решать различные промежуточные задачи. К ним относятся задачи о собственных волнах направляющих структур и о собственных колебаниях резонаторов.

Реальным объектам отвечают *граничные задачи* электродинамики: решения уравнений Максвелла должны удовлетворять известным условиям на границах раздела сред или некоторых подобластей. Простейшие граничные задачи в этой книге неоднократно рассматривались. При этом обычно использовался метод разделения переменных, а система координат соответствовала конфигурации области пространства, в которой искалось решение. Так, например, было получено решение задачи о собственных волнах прямоугольного волновода (см. раздел 4.5) в декартовой системе координат, при этом граница прямоугольной области описывается как совокупность некоторых координатных поверхностей (линий). Казалось бы, в задаче о полом волноводе Н-образного поперечного сечения выполняются подобные условия, но здесь уже не удаётся получить решение задачи в явном виде. Следует также иметь в виду, что существует небольшое число систем координат, в которых этот метод может быть применён. Важнейшие из них: декартовая, цилиндрическая, сферическая, эллиптическая, эллипсоидальная, параболическая и параболоида вращения. При этом переход к новой системе координат требует введения аппарата специальных функций. Построение, исследование и, наконец, табулирование различных специальных функций составило целую эпоху в развитии математической физики. Достигнутые при этом успехи важны и сейчас. Однако этот подход в настоящее время не позволяет решать граничные задачи, соответствующие реальным устройствам СВЧ.

13.6(*). Принцип параметрического синтеза в системах машинного проектирования

На рассмотренных выше принципах осуществляется АП любого устройства, при этом параметры проектируемого объекта выбирают в процессе параметрического синтеза. Он может осуществляться как в режиме «пользователь — ЭВМ» (интерактивный режим), что соответствует АП, так и в режиме, когда такой «диалог» отсутствует, а все функции оптимального выбора параметров передаются ЭВМ. Естественно, что его реализация в АП является творческой задачей, поскольку должен быть разработан алгоритм, не просто формально заменяющий «диалог» пользователя с ЭВМ, а обеспечивающий, с одной стороны, все практические требования формализованного задания на проектирование, а с другой — оптимизацию параметров устройства по заданным критериям.

Это означает необходимость разработки для нормального функционирования АП *прикладной математической модели*, которая описывает не только физический процесс, протекающий в устройстве, но также учитывает в математической форме все практические требования к его параметрам. Например, математические модели волноводно-целевых решёток, излучающие мощности различных порядков (десятки ватт, сотни киловатт), ничем не отличаются друг от друга, так как описывают один и тот же физический процесс распространения электромагнитной волны независимо от требуемого закона распределения тока в апертуре антенны. Однако решётки, предназначенные для излучения сотен киловатт (особенно в условиях низкого давления окружающего пространства), могут функционировать не при любом законе амплитудного распределения тока в раскрыве. Это практическое требование в математической модели волноводно-целевой решётки не содержится, а оно принципиально необходимо, так как сужает класс допустимых формальных решений задачи.

Включение в математическую модель устройства СВЧ или антенны тем или иным способом (методом) математического описания практических и иных требований переводит её в *прикладную математическую модель* устройства. Например, прикладная математическая модель интегральной схемы СВЧ, как правило, представляет собой так называемую целевую функцию, которую необходимо минимизировать или максимизировать при определённых ограничениях, описывающих различные требования к параметрам и характеристикам интегральной схемы — амплитудно-частотным и фазочастотным характеристикам, ограничениям по мощности, массо-габаритным характеристикам и т.п. Подобные задачи оптимизации целевой функции (в общем случае нелинейной) при наличии (возможно, и отсутствии) нелинейных ограничений, задаваемых в виде равенств и неравенств, получили название *задач нелинейного программирования*. В частном случае, когда целевая функция и ограничения являются линейными функциями относительно искомых параметров и характеристик, говорят о *задаче линейного программирования*.

13.7(*). Роль вычислительной электродинамики в системах машинного проектирования

Перейдём к обсуждению современных электродинамических методов, позволяющих строить математические модели БЭ устройств СВЧ и антенн. Подробно вычислительные методы в электродинамике будут рассмотрены в главе 14. Ниже мы остановимся только на ключевых моментах.

Электродинамические методы расчёта БЭ можно условно разбить на три группы. Содержание первой группы составляет анализ БЭ на основе приближённых моделей, основанных на тех или иных эвристических предположениях о характере волновых процессов. В качестве эвристической модели, например, расчёта открытой микрополосковой линии передачи может служить модель Олинера, которая заключается в анализе собственных волн прямоугольного волновода с боковыми магнитными стенками. Применение эвристических подходов позволяет записывать простые расчётные соотношения, но полученные результаты имеют очень узкую

область применения. Кроме того, установить адекватность выбранной эвристической модели реальному БЭ удаётся далеко не всегда, а оценка при этом неизбежных приближений зачастую оказывается более сложной и трудоёмкой, нежели решение самой задачи.

Численные методы, предусматривающие минимальную аналитическую обработку задач, составляют содержание второй группы работ. К таким методам следует отнести проекционные и дискретизационные методы. Указанные подходы являются наиболее универсальными; границы применимости метода обычно определяются мощностью ЭВМ.

13.7.1. Способы представления электромагнитного поля в численных методах расчёта базовых элементов. Центральным моментом любого численного метода является способ представления электромагнитного поля в задаче. Применяя метод разделения переменных (например, в упоминавшейся уже задаче о прямоугольном волноводе), мы получаем некоторые выражения для векторных функций, которые точно удовлетворяют уравнениям Максвелла и граничным условиям. В таких случаях иногда говорят, что решение получено в *замкнутой форме*. Хотя в большинстве технически интересных задач это недостижимо, метод разделения переменных оказывается полезным как средство построения систем функций, служащих для представления полей в различных более сложных случаях.

Пусть, например, методом разделения переменных получена система решений уравнений Максвелла $\{\vec{E}_n, \vec{H}_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), каждая из которых удовлетворяет граничным условиям на некоторой простой границе, являющейся частью более сложной границы, для которой необходимо решить краевую задачу. В ряде случаев, пользуясь этой системой, можно построить приближение решения для области со сложной границей:

$$\vec{E}^N = \sum_{n=1}^N c_n \vec{E}_n, \quad \vec{H}^N = \sum_{n=1}^N c_n \vec{H}_n, \quad (13.7.1)$$

где c_n — неизвестные пока коэффициенты.

Удовлетворяя тем или иным способом (например, в системе точек) функции \vec{E}^N и \vec{H}^N требуемым граничным условиям на сложной границе, можно прийти к системе N линейных алгебраических уравнений относительно N коэффициентов c_n . Чем выше N , тем лучше удаётся удовлетворить граничным условиям, если система $\{\vec{E}_n, \vec{H}_n\}$ обладает нужными свойствами.

Иногда в распоряжении имеются системы функций $\{\vec{E}_n\}$ и $\{\vec{H}_n\}$, не связанных уравнениями Максвелла, но удовлетворяющих граничным условиям. Решение представляется в виде:

$$\vec{E}^N = \sum_{n=1}^N a_n \vec{E}_n, \quad \vec{H}^N = \sum_{n=1}^N b_n \vec{H}_n, \quad (13.7.2)$$

где a_n и b_n — неизвестные коэффициенты.

Если системы функций $\{\vec{E}_n\}$ и $\{\vec{H}_n\}$ обладают некоторыми свойствами (частично обсуждаемыми в главе 14), то удаётся приблизить функции $\{\vec{E}_n\}$, $\{\vec{H}_n\}$ к ре-

шению уравнений Максвелла. Это опять-таки сводит задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_n и b_n в суммах (13.7.2). С ростом N качество получаемого решения граничной задачи оказывается выше.

Сущность того или иного численного метода состоит в том, каким путём сводится граничная задача к системе алгебраических уравнений. В главе 14 особое внимание будет уделено так называемым *проекционным методам*. Представления полей в этом случае подчиняются системам интегральных соотношений. Производимые операции можно назвать *проецированием*, в том смысле, который обсуждается в разделе 14.1.1.

Другой важный класс численных методов составляют *дискретизационные методы*. Область, в которой ищут решение, при этом подвергается дискретизации, разбиению. Можно, например, рассматривать решение только на некотором множестве точек, выделенных в области. Образуя разности соседних значений, формируют аналоги производных, так что дифференциальный оператор задачи (например, оператор Лапласа) приближённо заменяется разностным оператором. Такой подход, называемый *разностным методом*, также сводит задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Существуют другие дискретизационные методы, базирующиеся на выделении системы подобластей, а не точек; обычно они имеют черты проекционных.

К третьей группе относятся численно-аналитические методы расчёта БЭ, опирающиеся на учёт специфики структур и возможность существенного аналитического преобразования первоначального представления электромагнитного поля в задаче. К ним относятся метод сингулярных интегральных уравнений (СИУ) и метод ортогонализирующей постановки. Эти подходы позволяют часто получить приближённые решения ключевых задач в замкнутом (аналитическом) виде и оценить его погрешность. Поэтому в главе 14 рассмотрено достаточно большое число различных электродинамических задач, применение к анализу которых вышеуказанных методов позволило впервые получить приближённые аналитические решения.

13.7.2. О значении сингулярных интегральных уравнений в математических моделях базовых элементов. О значении СИУ в разработке строгих математических моделей БЭ можно говорить в двух аспектах: в широком и узком смысле. В широком смысле слова под значением СИУ будем понимать роль интегральных уравнений при построении математических моделей БЭ в целом. В узком смысле значение СИУ сводится к определению места и роли сингулярных интегральных уравнений в разработке математических моделей БЭ.

Случаи формулировки краевых задач в виде интегральных уравнений встречались уже в первой половине XIX века. В настоящее время существует определённый и достаточно обширный круг физических задач, для математического описания которых эффективно используются интегральные уравнения и преобразования. К ним следует отнести и краевые задачи о собственных волнах в полосковых и щелевых структурах. Выбор интегральных уравнений как инструмента моделирования исследуемого явления может быть обусловлен такими факторами, как «не-

возможность составления других уравнений, необходимость снижения мерности (количества независимых переменных) при решении некоторых задач для сплошных сред, возможность компактной формулировки граничных задач, достижение упрощений при вычислениях, возможность простого и естественного перехода к конечным системам алгебраических уравнений. Практически может быть принята во внимание лишь часть этих факторов или один из них. Однако этого достаточно, чтобы сделать оправданным применение интегральных уравнений для описания исследуемого явления. Такими же соображениями можно объяснить и тот факт, что интегральные уравнения применяются всё чаще к таким типам задач, которые ранее описывались уравнениями в частных производных и обыкновенными дифференциальными уравнениями». Использование интегральных уравнений применительно к математическим моделям БЭ в отношении окончательно получаемых результатов эквивалентно применению дифференциальных уравнений, однако позволяет получить более компактные выражения для элементов матрицы рассеяния БЭ за счёт включения в них граничных условий. С точки зрения использования дифференциальных уравнений математические модели БЭ являются двух- и трёхмерными. Математические модели, сформулированные в виде интегральных уравнений, являются уже одномерными и двумерными. Кроме того, в некоторых случаях интегральные уравнения допускают аналитические решения.

Остановимся теперь на значении СИУ в разработках математических моделей БЭ. Здесь уместно отметить, что моделирование ключевых структур БЭ часто проводят на основе интегральных уравнений Фредгольма первого рода, которые получаются, как правило, в результате простого усечения рядов в функциях Грина интегральных уравнений адмитансного и импедансного типов, содержащих в неявном виде логарифмические особенности и сингулярности типа Коши. Нахождение решений интегральных уравнений Фредгольма первого рода является некорректно поставленной задачей. В результате остаётся открытым очень важный вопрос проверки истинности решения и установления его адекватности рассматриваемому БЭ. Выделение особенностей в интегральных уравнениях и последующее их решение с помощью аппарата теории СИУ даёт возможность математически обоснованно подойти к построению математических моделей БЭ.

Применение математического аппарата теории СИУ позволило получить приближённые аналитические решения для ряда ключевых задач. При этом оцениваются и погрешности полученных результатов. Эти решения могут стать основой для построения аналитических математических моделей БЭ.

Ценность полученных решений ключевых задач определяется и тем обстоятельством, что они имеют большое значение при установлении погрешностей численных методов расчёта БЭ и определении эффективности выбора того или иного базиса для представления электромагнитного поля в их математических моделях.

Глава

14 Электродинамические методы расчёта устройств СВЧ и антенн

14.1(*). Проекционные методы решения электродинамических задач	580
14.2(*). Интегральные уравнения электродинамики, связанные с базисами Трефца (адмитансные и импедансные интегральные уравнения)	585
14.3(*). Общие сведения об интегральных уравнениях	591
14.4(*). Приближенные методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода	596
14.5(*). Интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Некорректные задачи в электродинамике	600
14.6(*). Сингулярные интегральные уравнения	604
14.7(*). Метод частичных областей расчета продольно-однородных линий передачи	612
14.8(*). Вариационный метод расчета постоянных распространения сложных частично заполненных волноводов	616
14.9(*). Волноводно-щелевая линия передачи. Метод сингулярных интегральных уравнений	620
14.10(*). Дифракция основной волны прямоугольного волновода на индуктивной диафрагме, расположенной на стыке двух диэлектриков. Метод ортогонализирующей подстановки	632
14.11(*). Дифракция основной волны прямоугольного волновода на индуктивной полоске, расположенной на стыке двух диэлектриков. Метод сингулярного интегрального уравнения	638
14.12(*). Электродинамическая теория трубчатых электрических вибраторов. Постановка задачи	642
14.13(*). Вывод сингулярного интегрального уравнения для трубчатого электрического вибратора на основе уравнений Максвелла	645
14.14(*). Электродинамический анализ электромагнитного поля в промежуточной и ближней зонах полуволнового электрического вибратора	651
14.15(*). Несамосопряженные краевые задачи электродинамики	654

^{*)} Символом «*» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 14(*). Электродинамические методы расчёта устройств СВЧ и антенн

14.1(*). Проекционные методы решения электродинамических задач

Центральным моментом любой электродинамической задачи является способ представления электромагнитного поля. Применяя метод разделения переменных, например, для решения краевой задачи о собственных волнах прямоугольного волновода, мы можем получить формулы для векторных функций, которые точно удовлетворяют уравнениям Максвелла и граничным условиям. В этом случае говорят, что решение получено в замкнутой форме. Хотя при расчете большинства устройств СВЧ и КВЧ диапазонов такое представление для электромагнитного поля невозможно, метод разделения переменных оказывается полезным как средство построения систем функций, по которым удобно разложить искомое электромагнитное поле.

14.1.1. Ортогональные ряды. Две функции \vec{u} и \vec{v} называются *ортогональными*, если скалярное произведение

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0. \quad (14.1.1)$$

Будем рассматривать собственные функции $\vec{u} = \vec{u}_i$ ($i = \overline{1, \infty}$), задачи

$$L\vec{u} = \lambda\vec{u} \quad (14.1.2)$$

при симметричном операторе L ; λ — скалярный оператор. Для двух разных функций \vec{u}_i, \vec{u}_j имеем

$$L\vec{u}_i = \lambda_i\vec{u}_i, \quad L\vec{u}_j = \lambda_j\vec{u}_j, \quad (14.1.3)$$

где λ_i, λ_j — собственные значения оператора.

Оператор L называется *симметричным*, если выполняется равенство:

$$(L\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, L\vec{v}). \quad (14.1.4)$$

Образует скалярные произведения $(L\vec{u}_i, \vec{u}_j)$ и $(\vec{u}_i, L\vec{u}_j)$. Тогда

$$(L\vec{u}_i, \vec{u}_j) - (\vec{u}_i, L\vec{u}_j) = (\lambda_i - \lambda_j)(\vec{u}_i, \vec{u}_j).$$

Из симметрии оператора (14.1.4) следует

$$(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$$

так как $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$.

Таким образом, собственные функции симметричного оператора L являются ортогональными, если им отвечают неравные собственные значения ($\lambda_i - \lambda_j \neq 0$), то есть задача (14.1.2) порождает ортогональные системы функций $\{\vec{u}_i\}$.

Для ортонормированной системы

$$(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \delta_{ij}, \quad (14.1.5)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

В качестве примера приведем скалярные функции

$$u_{mnl}^{(1)} = N_{mnl}^{(1)} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sin(l\pi z/d),$$

где

$$N_{mnl}^{(1)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{abd}},$$

которые являются ортонормированными в области

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq d.$$

Пусть система скалярных функций $\{u_n\}$ является ортонормированной системой функций в некоторой области. Тогда для произвольной функции f , определенной в той же области, можно построить ряд

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \quad a_n = (f, u_n). \quad (14.1.6)$$

Ряд (14.1.6) называется *ортogonalным рядом (рядом Фурье)* функции f ; a_n — коэффициенты Фурье.

Если система $\{u_n\}$ обладает свойством *полноты*, то ряд Фурье (14.1.6) сходится в среднем к функции f , то есть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(f - \sum_{n=1}^N a_n u_n, f - \sum_{n=1}^N a_n u_n \right) \rightarrow 0. \quad (14.1.7)$$

Смысл разложения Фурье (14.1.6) поясним простым примером. Обозначим в трехмерном пространстве через $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ единичные взаимно перпендикулярные векторы соответствующей системы координат. Тогда мы имеем ортонормированную систему $\{\vec{u}_n\}_{n=1}^3$, так как скалярное произведение $(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \delta_{ij}$. Эта система полна в том смысле, что по ней может быть разложен любой вектор \vec{F} :

$$\vec{F} = \sum_{n=1}^3 a_n \vec{u}_n, \quad a_n = (\vec{F}, \vec{u}_n), \quad (14.1.8)$$

причем a_n есть проекции вектора \vec{F} на ось \vec{u}_n в трехмерной системе координат.

Точно также определяются и коэффициенты Фурье a_n в (14.1.6). Поэтому ряд (14.1.6) можно рассматривать как разложение вектора f в бесконечномерном пространстве, при этом коэффициенты Фурье a_n есть проекции f на u_n .

При решении большинства электродинамических задач искомое электромагнитное поле \vec{E}, \vec{H} представляют в виде разложения по некоторым системам функций $\{E_n\}_{n=1}^N, \{H_n\}_{n=1}^N$, полученным, например, с помощью метода разделения переменных:

$$\vec{E}^N = \sum_{n=1}^N a_n \vec{E}_n, \quad \vec{H}^N = \sum_{n=1}^N b_n \vec{H}_n, \quad (14.1.9)$$

где a_n, b_n — неизвестные коэффициенты.

В качестве систем $\{E_n\}_{n=1}^N, \{H_n\}_{n=1}^N$ можно использовать функции, удовлетворяющие уравнениям Максвелла (но не удовлетворяющие граничным условиям на

границе области), функции не связанные с уравнениями Максвелла, но удовлетворяющие граничным условиям и т.д. Таким образом, решение электродинамической задачи, соответствующей устройству СВЧ, сводится к нахождению постоянных коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^N, \{b_n\}_{n=1}^N$, для определения которых необходимо построить соответствующую систему линейных алгебраических уравнений. *Сущность того или иного проекционного метода состоит в том, каким образом задача сводится к системе алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных a_n, b_n .*

В этом разделе будут рассмотрены проекционные методы нахождения a_n, b_n . Построение соответствующих процедур для их определения можно называть *проектированием* в том смысле, что ищутся проекции (коэффициенты a_n, b_n) на базисные функции. С ростом числа базисных функций ($N \rightarrow \infty$) решение граничной задачи \vec{E}^N, \vec{H}^N в виде (14.1.9) при правильном выборе базисных функций будут стремиться к истинному решению \vec{E}, \vec{H} электродинамической задачи.

14.1.2. Метод моментов (метод Галеркина). Не стремясь к максимальной общности изложения, опишем алгоритм метода моментов на примере операторного уравнения

$$L\vec{u} - \lambda q\vec{u} = \vec{\Phi}, \quad (14.1.10)$$

где линейный оператор L действует в гильбертовом пространстве L^2 (дифференциальный (с заданием граничных условий), интегральный или иной); λ — неизвестный собственный параметр, q — известная функция (тензор) координат; $\vec{\Phi}$ — известный вектор. Символом \vec{u} обозначено неизвестное решение задачи.

Введем в этом пространстве две полные системы линейно-независимых функций — базисную (координатную) $\{\vec{u}_n\}_{n=1}^N$ и проекционную (весовую) $\{\vec{v}_n\}_{n=1}^N$, причем функции \vec{u}_n принадлежат области определения оператора $L: \vec{u}_n \in D_L$. Это означает, что функции \vec{u}_n должны удовлетворять граничным условиям задачи (14.1.10) (в ряде случаев это требование можно ослабить). Представим приближенное решение \vec{u}^N задачи (14.1.10) в виде

$$\vec{u}^N = \sum_{n=1}^N a_n^N \vec{u}_n, \quad (14.1.11)$$

где a_n^N — неизвестные коэффициенты.

Подставив (14.1.11) в уравнение (14.1.10), получаем

$$(L - \lambda q)\vec{u}^N - \vec{\Phi} = -R^N, \quad (14.1.12)$$

где $R^N = (L - \lambda q)(\vec{u} - \vec{u}^N)$ — невязка функции, зависящая от разности между точным и приближенным решениями. Алгоритм проекционного метода по Галеркину (метод моментов) предусматривает минимизацию невязки с тем, чтобы точные и приближенные решения возможно меньше отличались друг от друга. Тожественное обращение невязки в нуль при численном решении задачи, очевидно, невозможно. Можно потребовать, однако, чтобы обращалась в нуль проекция невязки на множество функций $\{\vec{v}_i\}^N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N)$:

$$(R^N, \vec{v}_i) = 0 \quad \text{при } i = \overline{1, N}.$$

Таким образом, получаем однородную СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов a_n^N в следующем виде:

$$P \vec{a}^N = \vec{F}, \quad (14.1.13)$$

где P — квадратная матрица порядка N с элементами

$$P_{ij} = ((L - \lambda q) \vec{u}_i, \vec{v}_j), \quad (14.1.14)$$

$$\vec{a}^N = \begin{bmatrix} a_1^N \\ a_2^N \\ \dots \\ a_N^N \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} (\vec{\Phi}, \vec{v}_1) \\ (\vec{\Phi}, \vec{v}_2) \\ \dots \\ (\vec{\Phi}, \vec{v}_N) \end{bmatrix}. \quad (14.1.15)$$

Матричное уравнение (14.1.13) назовем *проекционной моделью физической системы*, которую отражает задача (14.1.10). Нахождение вектора \vec{a}^N (и последующее построение приближенного решения (14.1.11)) сведено, таким образом, к решению алгебраической задачи. Описанный алгоритм известен под названием *метода моментов* (метод Галеркина, метод Галеркина-Петрова) и является наиболее важным случаем проекционного метода.

Можно представить себе серию проекционных моделей (14.1.13), построенных при неограниченном возрастании N . Можно ожидать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \vec{u}^N = \vec{u},$$

то есть процесс Галеркина (метод моментов) сходится к решению задачи (14.1.10).

Рассмотрим метод моментов в случае задачи на собственные значения:

$$L_1 \vec{u} - \lambda L_2 \vec{u} = 0, \quad (14.1.16)$$

где L_1, L_2 — несамосопряженные линейные операторы, λ — собственный параметр. В этом случае вместо (14.1.13) имеем однородную СЛАУ относительно коэффициентов \vec{a}^N :

$$(A - \lambda^N B) \vec{a}^N = 0, \quad (14.1.17)$$

где A и B — квадратные матрицы порядка N с элементами

$$A_{ij} = (L_1 u_i, v_j), \quad B_{ij} = (L_2 u_i, v_j), \quad (14.1.18)$$

λ^N означает приближенное значение λ , которое будет получено при реализации метода. Из условия совместности системы уравнений (14.1.17) следует характеристическое уравнение относительно λ^N , являющееся алгебраическим уравнением степени N :

$$\text{Det} |A - \lambda^N B| = 0. \quad (14.1.19)$$

Его корни $\lambda_1^N, \lambda_2^N, \dots, \lambda_N^N$ — это приближенные значения искомых величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. При решении системы (14.1.17) находятся отвечающие этим приближенным собственным значениям вектора \vec{a}^N , а значит, и решение задачи в виде (14.1.11).

14.1.3. Метод Бубнова-Галеркина. В методе Бубнова-Галеркина базисная система функций $\{\bar{u}_i\}$ совпадает с проекционной $\{\bar{v}_i\}$. В этом случае операторному уравнению (14.1.10) соответствует также матричное уравнение (14.1.13), где коэффициенты матрицы P имеют вид

$$P_{ij} = ((L - \lambda q)\bar{u}_i, \bar{u}_j), \quad (14.1.20)$$

а

$$F = [(\bar{\Phi}, \bar{u}_1), (\bar{\Phi}, \bar{u}_2), \dots, (\bar{\Phi}, \bar{u}_N)]^{-T}. \quad (14.1.21)$$

Для задачи на собственные значения (14.1.16) метод Бубнова-Галеркина приводит к следующей СЛАУ относительно коэффициентов a_i^N ($i = 1, N$):

$$(L_1 \bar{u}^N - \lambda^N L_2 \bar{u}^N, \bar{u}_n) = 0; \quad n = \overline{1, N}, \quad (14.1.22)$$

из условия совместности которой следует характеристическое уравнение для определения чисел λ_n^N ($n = 1, N$).

14.1.4. Метод Ритца. Как известно, операторному уравнению можно поставить в соответствие некоторый функционал, причем решение исходного уравнения эквивалентно нахождению функции, сообщающей минимум функционалу.

Прежде всего дадим определение *функционала*. Если каждому элементу (функции) и на множестве $D \in L^2$ (L^2 — гильбертово пространство) поставлено в соответствие некоторое число $J\{u\}$, то говорят, что на множестве D определен функционал J . Функционал называется линейным, если D представляет собой линейное множество и выполняется соотношение: $J\{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2\} = \lambda_1 J\{u_1\} + \lambda_2 J\{u_2\}$, где λ_1, λ_2 — постоянные.

Например, выражение

$$J\{u(x)\} = \int_a^b \int_a^b G(x, x') u(x) u(x') dx dx',$$

где $G(x, x')$ — известная функция двух переменных x и x' , которая является функционалом на множестве интегрируемых функций $u(x)$ ($a < x < b$).

Рассмотрим внутреннюю задачу на собственные значения в виде (14.1.16), которой поставим в соответствие функционал

$$J(\bar{u}) = \frac{(L_1 \bar{u}, \bar{u})}{(L_2 \bar{u}, \bar{u})}. \quad (14.1.23)$$

Если оператор L_2 является самосопряженным и положительно определенным, то для функционала (14.1.23) справедлива следующая теорема:

Теорема: если существует функция \bar{u}_0 , сообщающая функционалу J минимальное значение, то оно удовлетворяет уравнению (14.1.16) при $\lambda = \lambda_1$, где λ_1 — наименьшее собственное значение задачи, а функционал $J(\bar{u}_0) = \lambda_1$.

Подставив в функционал (14.1.23) приближенное решение задачи в виде (14.1.11), получим

$$J^N(\vec{u}^N) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j^* (L_1 u_i, u_j)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j^* (L_2 u_i, u_j)}. \quad (14.1.24)$$

Так как функционал $J^N(\vec{u}^N)$ есть функция коэффициентов разложения a_i^* ($i = \overline{1, N}$), для нахождения его экстремума необходимо приравнять производные по этим коэффициентам к нулю:

$$\frac{\partial J^N}{\partial a_n^*} = 0; \quad n = \overline{1, N}. \quad (14.1.25)$$

В результате получаем систему уравнений

$$\sum_{n=1}^N a_n (L_1 u_n, u_i) - J^N \sum_{n=1}^N a_n (L_2 u_n, u_i) = 0; \quad i = \overline{1, N}, \quad (14.1.26)$$

которая совпадает с системой уравнений (14.1.22), полученной методом Бубнова-Галеркина. Описанная выше проекционная процедура получила название *метода Ритца*.

Важной проблемой при реализации проекционных методов является выбор базисной и проекционных систем функций, к которым предъявляются следующие требования:

1. Линейная независимость и полнота.
2. Принадлежность базисных, а в ряде алгоритмов и проекционных функций к области определения оператора $L_1(L)$. Для дифференциальных операторов это означает, что функции должны иметь производные соответствующего порядка, и кроме того, удовлетворять краевым условиям задачи.
3. Минимальность ошибки аппроксимации (14.1.11) при заданном числе функций N .
4. Устойчивость решения при увеличении числа функций, то есть при увеличении порядка системы (14.1.13) или (14.1.17).

К этому можно добавить требования простоты — минимального числа арифметических операций, необходимого для вычисления функции с заданной точностью.

Заметим, что если граничные условия задачи для используемого в методе Ритца функционала оказываются естественными, базисные функции могут им не удовлетворять. Это относится и к методу Бубнова-Галеркина. Отмеченное обстоятельство существенно облегчает выбор базисных функций для области сложной формы, но сходимость алгоритмов с такими функциями, как правило, оказывается слабой.

При выборе конкретной системы функций необходимо учитывать форму области рассматриваемой электродинамической структуры и вид используемой системы координат.

14.2(*). Интегральные уравнения электродинамики, связанные с базисами Трефца (адмитансные и импедансные интегральные уравнения)

14.2.1. Проекционное наложение граничных условий: процесс Трефца. Описанные в разделе 14.1 проекционные методы являются достаточно универсальными.

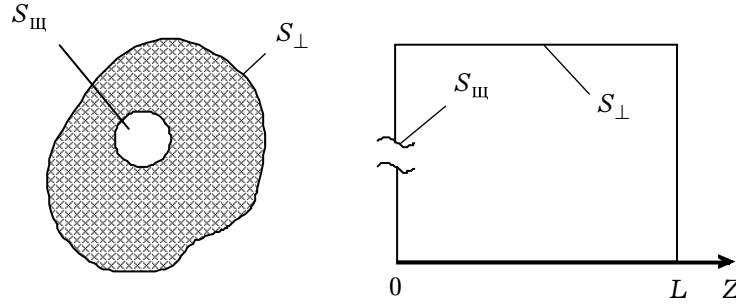


Рис. 14.1

Представления электромагнитного поля в виде (14.1.9) можно строить, используя достаточно простые системы $\{\vec{E}_n\}$ и $\{\vec{H}_n\}$, например, такие, для которых не выполняются граничные условия, но для них справедливы уравнения Максвелла. При этом неизвестное решение задачи ищем в форме (14.1.9). Наложение на разложение (14.1.9) необходимых граничных условий приводит к определению коэффициентов a_i^N, b_i^N ($i = 1, N$). Конечно надо иметь в виду, что при конечном N это можно сделать, в общем случае, лишь приближенно.

Процесс наложения граничных условий можно проводить в проекционной форме, то есть аналогично методам Галеркина и Бубнова-Галеркина. Такой подход получил название *метода (процесса) Трефца*. Введенную выше в (14.1.9) систему решений уравнений Максвелла $\{\vec{E}_n\}, \{\vec{H}_n\}$ будем называть базисом Трефца, если они пригодны для разложения произвольного тангенциального поля на той поверхности, где требуется удовлетворить граничным условиям.

Применение метода Трефца поясним на задаче возбуждения волноводного резонатора цилиндрической формы через отверстие S_{III} в его торце (основании цилиндра) (рис. 14.1).

Построим базис Трефца из стоячих волн волновода с учетом граничных условий для электромагнитного поля при $z = L$. Поперечные поля \vec{E}_τ и \vec{H}_τ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\vec{E}_\tau^N(\vec{\rho}, z) &= \sum_{n=1}^N a_n \vec{e}_n(\vec{\rho}) \sin[\gamma_n(z - L)], \\ \vec{H}_\tau^N(\vec{\rho}, z) &= \sum_{n=1}^N b_n \vec{h}_n(\vec{\rho}) \cos[\gamma_n(z - L)],\end{aligned}\tag{14.2.1}$$

где \vec{e}_n, \vec{h}_n — собственные вектора электрического и магнитного полей, зависящие от поперечных координат (для них выполнены все граничные условия, кроме сечения при $z = 0$); γ_n — постоянные распространения собственных волн регулярного волновода, на основе которого построен резонатор (без электрической стенки при $z = L$); a_n, b_n — неизвестные постоянные, которые необходимо определить.

При $z = 0$ для $\vec{E}_\tau(0)$ справедливы граничные условия

$$\vec{E}_\tau(\vec{\rho}, 0) = \begin{cases} 0 & \text{на } S_\perp - S_{III}, \\ \vec{E}_\tau & \text{на } S_{III}. \end{cases}\tag{14.2.2}$$

Этим условиям не удовлетворяют разложения поля (14.2.1). Надо стремиться к выполнению равенства

$$\vec{E}_\tau^N(\vec{\rho}, 0) = \vec{E}_\tau(\vec{\rho}, 0), \quad (14.2.3)$$

где \vec{E}_τ^N — представление поля в базисе Трефца. Наложить это условие в проекционной форме — это значит обратить в нуль коэффициенты Фурье функции $\vec{E}_\tau^N(\vec{\rho}, 0) - \vec{E}_\tau(\vec{\rho}, 0)$ на каком-нибудь выбранном базисе на S_\perp .

Собственные волны цилиндрического волновода ортогональны и для собственных функций-векторов $\vec{e}_i(\vec{\rho})$, $\vec{h}_i(\vec{\rho})$, зависящих только от поперечных координат, справедливо условие ортогональности

$$\int_{S_\perp} [\vec{e}_i, \vec{h}_k^*]_z dS = \delta_{ik} \frac{Z_k}{|Z_k|}, \quad (14.2.4)$$

где Z_k — волновое сопротивление для k -собственной волны. Тогда граничные условия (14.2.2) при $z = 0$ в проекционной форме можно записать в следующем виде:

$$\int_{S_\perp} [\vec{E}_\tau^N(\vec{\rho}, 0) - \vec{E}_\tau(\vec{\rho}, 0), \vec{h}_k^*]_z dS = 0; \quad k = \overline{1, N}. \quad (14.2.5)$$

Подставляя базис Трефца (14.2.1) в уравнения (14.2.5), получим

$$- \int_{S_\perp} \sum_{n=1}^N a_n [\vec{e}_n(\vec{\rho}) \sin(\gamma_n L), \vec{h}_k^*]_z dS = \int_{S_\parallel} [\vec{E}^\parallel, \vec{h}_k^*]_z dS; \quad k = \overline{1, N}.$$

С учетом ортогональности (14.2.4) имеем

$$a_k = - \frac{Z_k}{|Z_k| \sin(\gamma_n L)} \int_{S_\parallel} [\vec{E}^\parallel, \vec{h}_k^*]_z dS; \quad k = \overline{1, N}. \quad (14.2.6)$$

Рассмотренная выше задача могла быть решена и прямым проекционным методом (методом моментов, методом Бубнова-Галеркина и т.д.). В этом случае проекционный процесс необходимо записать для всего объема резонатора; базисы $\{\vec{E}_n\}$ и $\{\vec{H}_n\}$ в разложении (1.5.9) должны быть полны во всем объеме резонатора, что привело бы к необходимости для каждого из поперечных распределений $\{\vec{e}_n\}$, $\{\vec{h}_n\}$ рассматривать ряды гармоник по z . При той же степени аппроксимации поля количество базисных функций в процессе Галеркина окажется значительно больше. Это связано с тем обстоятельством, что базис Трефца не должен обладать свойством полноты для всего объема резонатора. Требуется лишь полнота по отношению к той части границы, на которой должны быть удовлетворены граничные условия (14.2.2), то есть на поверхности S_\perp (условие (14.2.4) как раз и выполняется на поверхности S_\perp).

14.2.2. Процесс Трефца как метод частичных областей. На рис. 14.2 представлены геометрии некоторых электродинамических задач, для которых естественно применение метода Трефца: а) — Н-образный волновод; б) — волновод (резонатор) с диэлектрическим включением; в) — экранированная несимметричная по-

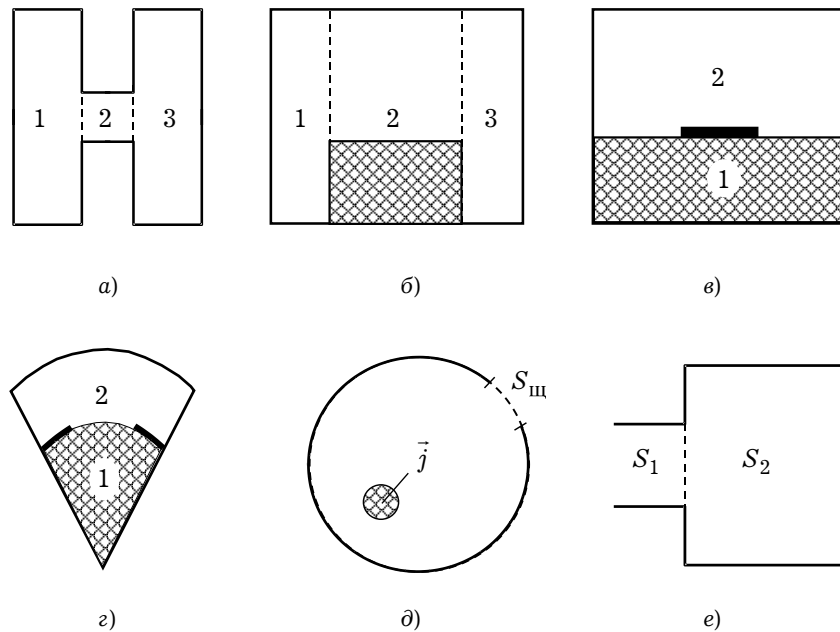


Рис. 14.2

лосковая линия передачи; *г*) — секториально-цилиндрический щелевой волновод (резонатор); *д*) — сферический резонатор, излучающий через отверстие в свободное пространство; *е*) — скачкообразное сочленение двух волноведущих структур. Общим в этих задачах является то обстоятельство, что область, в которой ищется электромагнитное поле, можно разделить на несколько частичных областей, в каждой из которых базис Трефца может быть найден известными методами, например, методом разделения переменных. Базисы Трефца должны обладать свойством полноты на смежных границах областей, где производится проекционное наложение граничных условий непрерывности тангенциальных компонент \vec{E}^N и \vec{H}^N . Такой подход называют *методом частичных областей*.

14.2.3. Адмитансные и импедансные интегральные уравнения. Выше было показано, что располагая базисами Трефца, объемную электродинамическую задачу можно свести к процессу нахождения электромагнитного поля на некоторой границе. При таком подходе может быть записано интегральное уравнение относительно электромагнитного поля на этой поверхности, которое включает в себя граничные условия внутри (вне) этой поверхности. На рис. 14.3 приведены «геометрии» некоторых задач, для которых могут быть записаны интегральные уравнения с помощью базисов Трефца: *а*) — диафрагма в цилиндрическом волноводе; *б*) — экранированная несимметричная полосковая линия; *в*) — волноводно-щелевая линия передачи; *г*) — скачкообразное сочленение коаксиальных линий с различными диаметрами внутреннего проводника.

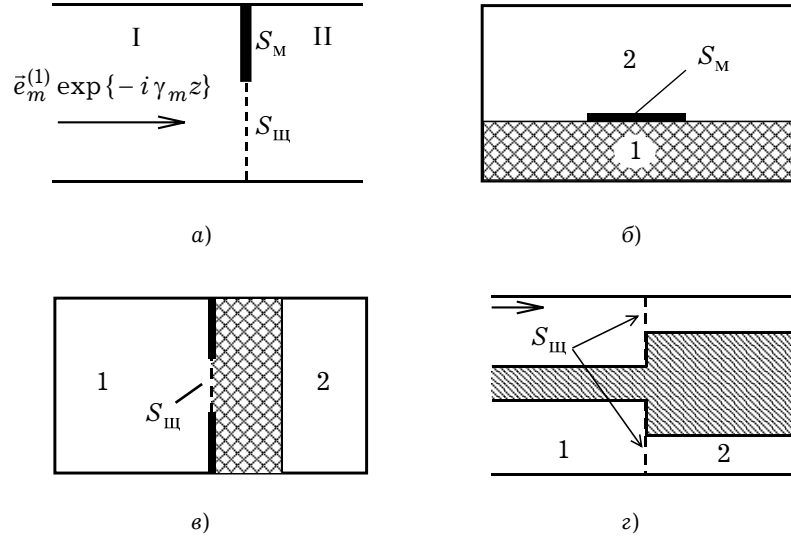


Рис. 14.3

Для определенности рассмотрим задачу дифракции для волновода с диафрагмой (рис. 14.3а). Пусть слева на диафрагму падает некоторая волна $\vec{E}_m^{(1)}, \vec{H}_m^{(1)}$. Построим представление поля в обеих полубесконечных подобластях:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_1^N \\ \vec{H}_1^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_m \\ \vec{h}_m \end{pmatrix} e^{-i\gamma_m z} + \sum_{n=1}^N R_n^N \begin{pmatrix} \vec{e}_n \\ \vec{h}_n \end{pmatrix} e^{i\gamma_n z}, \quad z < 0, \quad (14.2.7)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_2^N \\ \vec{H}_2^N \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^N T_n^N \begin{pmatrix} \vec{e}_n \\ \vec{h}_n \end{pmatrix} e^{-i\gamma_n z}, \quad z > 0, \quad (14.2.8)$$

где \vec{e}_n, \vec{h}_n — собственные функции цилиндрического волновода без диафрагмы, зависящие только от поперечных координат (базис Трефца). R_n^N, T_n^N — неизвестные коэффициенты; γ_n — постоянные распространения собственных волн, при этом $\gamma_n > 0$, если $\omega > \omega_{кр}^n$ и $i\gamma_n > 0$, если $\omega < \omega_{кр}^n$ ($\omega_{кр}^n$ — критическая частота для n -типа волны).

Будем использовать ортонормировку в следующем виде:

$$\int_{S_{\perp}} \vec{e}_k^* \vec{e}_n dS = \delta_{kn}, \quad (14.2.9)$$

где S_{\perp} — поперечное сечение волновода ($S_{\perp} = S_{III} \cup S_M$).

Электромагнитное поле в плоскости диафрагмы ($z = 0$) должно удовлетворять следующим граничным условиям

$$\vec{E}_{\tau}^{(1)}(0) = \vec{E}_{\tau}^{(2)}(0) \text{ на } S_{\perp}, \quad (14.2.10)$$

$$\vec{E}_{\tau}^{(1)} = 0 \text{ на } S_M, \quad (14.2.11)$$

$$\vec{H}_{\tau}^{(1)}(0) = \vec{H}_{\tau}^{(2)}(0) \text{ на } S_{III}. \quad (14.2.12)$$

Первое из них наложим в проекционной форме:

$$\int_{S_{\perp}} (\vec{E}_{\tau}^{(1)}(0) - \vec{E}_{\tau}^{(2)}(0)) \vec{e}_k^* dS = 0; \quad k = \overline{1, N}, \quad (14.2.13)$$

из которого следует (при подстановке (14.2.7) и (14.2.8) в (14.2.13))

$$R_n^N + \delta_{nm} = T_n^N. \quad (14.2.14)$$

Выражая далее постоянные T_n^N как коэффициенты Фурье функции $\vec{E}_{\tau}^{(1)}(0) = \vec{\epsilon}$ в базисе $\{\vec{e}_n\}$, имеем

$$T_n^N = \int_{S_{\text{ш}}} \vec{\epsilon} \vec{e}_n^* dS, \quad (14.2.15)$$

где учтено условие (14.2.11), согласно которому $\vec{\epsilon} = 0$ на S_M .

Остается лишь наложить граничное условие (14.2.12). Для этого приравняем выражения $\vec{H}_{1\tau}^N(0)$ и $\vec{H}_{2\tau}^N(0)$, а входящие в них коэффициенты R_n^N, T_n^N , представим, пользуясь формулами (14.2.14) и (14.2.15). В результате получаем

$$\sum_{n=1}^N \left(\int_{S_{\text{ш}}} \vec{\epsilon} \vec{e}_n^* dS \right) \vec{h}_n = - \sum_{n=1}^N \left(\int_{S_{\text{ш}}} \vec{\epsilon} \vec{e}_n^* dS - \delta_{nm} \right) \vec{h}_n + \vec{h}_m \quad \text{на } S_{\text{ш}}. \quad (14.2.16)$$

Умножим векторно все члены уравнения (14.2.16) на единичный вектор \vec{z}_0 и учтем, что

$$[\vec{h}_n, \vec{z}_0] = \frac{\vec{e}_n}{Z_n}, \quad (14.2.17)$$

где Z_n — волновое сопротивление для собственной волны n . В результате получаем интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\vec{\epsilon}$ на отверстии $S_{\text{ш}}$ в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{Z_n} \left(\int_{S_{\text{ш}}} \vec{\epsilon} \vec{e}_n^* dS \right) \vec{e}_n = \frac{\vec{e}_m}{Z_m}. \quad (14.2.18)$$

Перепишем интегральное уравнение в форме

$$\int_{S_{\text{ш}}} \tilde{Y}^N(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\epsilon}(\vec{r}') dS' = \frac{\vec{e}_m(\vec{r})}{Z_m}, \quad (14.2.19)$$

где \vec{r}, \vec{r}' — координаты в плоскости $z = 0$, причем интегрирование производится по штрихованным координатам. Ядро интегрального уравнения $\tilde{Y}^N(\vec{r}, \vec{r}')$ есть

$$\tilde{Y}^N(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{n=1}^N \frac{1}{Z_n} \vec{e}_n(\vec{r}) \circ \vec{e}_n^*(\vec{r}'), \quad (14.2.20)$$

где кружок \circ — обозначает диадное произведение векторов. Ядро имеет размерность проводимости, поэтому интегральное уравнение (14.2.19) называют *адмитансным*.

Если изменить порядок и способ наложения граничных условий (14.2.11) и (14.2.12) так, что сначала используется условие (14.2.12) в проекционной форме, то вместо (14.2.19) получается интегральное уравнение относительно поверхностной плотнос-

ти тока $\vec{\eta} = [\vec{z}_0, \vec{H}^{(2)}(0) - \vec{H}^{(1)}(0)]$ на диафрагме:

$$\int_{S_{\text{ш}}} \vec{Z}^N(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\eta}(\vec{r}') dS' = 2 \vec{e}_m, \quad (14.2.21)$$

где

$$\vec{Z}^N(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{n=1}^N Z_n \vec{e}_n(\vec{r}) \circ \vec{e}_n^*(\vec{r}'). \quad (14.2.22)$$

Ядро $\vec{Z}^N(\vec{r}, \vec{r}')$ имеет размерность сопротивления, и уравнение (14.2.21) называется *импедансным*. Нахождение решения $\vec{\eta}(\vec{r})$, как ранее поля $\vec{E}(\vec{r})$, легко приводит к определению элементов матрицы рассеяния.

Адмитансные и импедансные уравнения могут быть решены любым проекционным способом, описанным в разделе 14.1. Ниже отметим два очень важных обстоятельства, связанных с использованием подобных уравнений. Во-первых, оказывается, что полученные интегральные уравнения почти не усложняются при переходе от диафрагмы (рис. 14.3а) к серии родственных задач (рис. 14.3б-г). Во-вторых, надо иметь в виду, что уравнения (14.2.19) и (14.2.21) формулируют электродинамическую задачу в N -приближении. Однако, при наличии острых ребер в области определения уравнений (на поверхностях $S_{\text{ш}}$ и $S_{\text{м}}$) можно показать, что постоянные R_n^N, T_n^N как коэффициенты Фурье в разложениях (14.2.7) и (14.2.8) при $N \rightarrow \infty$ могут не убывать, то есть эти ряды при $N \rightarrow \infty$ не являются сходящимися. Более строгий подход к решению задач с использованием базисов Трефца — это применение математического аппарата теории *сингулярных интегральных уравнений*.

14.3(*). Общие сведения об интегральных уравнениях

14.3.1. Уравнения Фредгольма. *Интегральными* называются уравнения, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла. В дальнейшем будут рассматриваться лишь линейные интегральные уравнения. Такие уравнения могут быть представлены в достаточно общем одномерном виде

$$h(x) y(x) - \lambda \int_L K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (14.3.1)$$

где $K(x, s)$ — заданная функция двух переменных, называемая *ядром интегрального уравнения*; $f(x)$ и $h(x)$ — известные функции; $y(x)$ — искомая функция; L — область интегрирования; λ — числовой множитель (параметр уравнения). Для простоты область L будем предполагать одномерной. Если в уравнении (14.3.1) $h(x) \equiv 1$, а $L \equiv [a, b]$, то уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (14.3.2)$$

где переменные $x, s \in [a, b]$, а ядро $K(x, s)$ в (14.3.2) определено в квадрате $\{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$, называется *неоднородным уравнением Фредгольма второго*

рода. При этом предполагается, что

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)| dx ds < \infty. \quad (14.3.3)$$

Если в уравнении (14.3.2) положить $f(x) \equiv 0$, то получаем *линейное однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода*:

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = 0. \quad (14.3.4)$$

Значения λ , при которых уравнение (14.3.4) имеет ненулевое решение ($y(x) \neq 0$), называются *характеристическими числами уравнения*, а соответствующие им ненулевые решения — *собственными функциями*.

Полагая в уравнении (14.3.1) $h(x) \equiv 0$, $\lambda = -1$, получим *линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода*:

$$\int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x). \quad (14.3.5)$$

Если в (14.3.1) функция $h(x)$ принимает значения, равные нулю лишь в некоторых точках области определения уравнения, то соотношение (14.3.1) называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма третьего рода*.

Частным случаем уравнений Фредгольма являются *линейные уравнения Вольтерра*, ядра которых удовлетворяют условию $K(x, s) \equiv 0$ при $s > x$.

Эти уравнения имеют соответственно вид

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (14.3.2a)$$

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) dx = 0, \quad (14.3.4a)$$

$$\int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x). \quad (14.3.5a)$$

Методы решений интегральных уравнений и основы их теории были заложены в работах Вито Вольтерра, Ивара Фредгольма, Давида Гильберта, Эрхарда Шмидта в начале XX века. Для более полного знакомства с теорией интегральных уравнений можно рекомендовать основополагающие работы [Л14.3-Л14.7].

14.3.2. Интегральные уравнения второго рода с вырожденным ядром. Если ядро $K(x, s)$ интегрального уравнения можно представить в виде

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^N a_n(x) b_n(s), \quad (14.3.6)$$

то функция $K(x, s)$ называется *вырожденным ядром*. Без ограничения общности можно считать, что функции $a_n(x)$ и $b_n(s)$ образуют линейно независимые систе-

мы функций. Будем предполагать, что функции $a_n(x)$ и $b_n(s)$ также непрерывны на отрезке $[a, b]$, тогда ядро $K(x, s)$ будет непрерывным в квадрате $\{a \leq x, s \leq b\}$.

Решение $y(x)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$y(x) - \lambda \int_a^b \sum_{n=1}^N a_n(x) b_n(s) y(s) ds = f(x) \quad (14.3.7)$$

можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^N c_n a_n(x), \quad (14.3.8)$$

где

$$c_n = \int_a^b y(s) b_n(s) ds = (y, b_n). \quad (14.3.9)$$

Следовательно, решение уравнения (14.3.7) сводится к определению постоянных c_n ($n = \overline{1, N}$). Для этого умножив скалярно обе части (14.3.7) на $b_i(x)$ ($i = \overline{1, N}$), запишем

$$(y, b_i) - \lambda \sum_{n=1}^N c_n (a_n, b_i) = (f, b_i).$$

Вводя обозначения $(a_j, b_i) = \alpha_{ij}$, $(f, b_i) = f_i$, получим СЛАУ для определения c_i :

$$c_i - \lambda \sum_{n=1}^N \alpha_{in} c_n = f_i, \quad (i = \overline{1, N}). \quad (14.3.10)$$

Интегральное уравнение (14.3.7) и СЛАУ (14.3.10) эквивалентны. Например, уравнение

$$y(x) - \int_0^1 (1 + 2xs) y(s) ds = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}, \quad x \in [0, 1] \quad (14.3.11)$$

является уравнением с вырожденным ядром, что позволяет переписать его в виде

$$y(x) - c_1 - 2c_2x = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{2},$$

где

$$c_1 = \int_0^1 y(s) ds, \quad c_2 = \int_0^1 s y(s) ds.$$

Следовательно, $y(x) = c_1 + 2c_2x - x/6 - 1/2$. Для определения постоянных c_1, c_2 подставим полученное значение для $y(x)$ в выражение для c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^1 (c_1 + 2c_2x - x/6 - 1/2) dx, \\ c_2 &= \int_0^1 x(c_1 + 2c_2x - x/6 - 1/2) dx. \end{aligned} \quad (14.3.12)$$

Решая систему (14.3.12), находим $c_1 = 1, c_2 = 7/12$. Искомое решение:

$$y(x) = x + \frac{1}{2}.$$

14.3.3. Решение уравнений второго рода с помощью резольвенты. Решение линейного уравнения Фредгольма второго рода (14.3.2) можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s) ds, \quad (14.3.13)$$

где функция $R(x, s; \lambda)$, называемая *резольвентой* уравнения (14.3.2) или его ядра $K(x, s)$, определяется в виде ряда Неймана

$$R(x, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s), \quad (14.3.14)$$

где функции $K_n(x, s)$ представляют собой итерированные ядра:

$$\begin{aligned} K_1(x, s) &= K(x, s), \\ K_n(x, s) &= \int_a^b K(x, t) K_{n-1}(t, s) dt, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (14.3.15)$$

Если удастся определить резольвенту, то это позволяет легко находить решение уравнения (14.3.2) по (14.3.14). Заметим, что ряд Неймана (14.3.14) сходится при

$$\lambda < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds}}.$$

Например, для уравнения

$$y(x) - \lambda \int_0^1 e^{x-s} y(s) ds = f(x) \quad (14.3.16)$$

определяем по формулам (14.3.15)

$$K_1(x, s) = e^{x-s}, \quad K_2(x, s) = \int_0^1 e^{x-t} e^{t-s} dt = e^{x-s}.$$

Нетрудно видеть, что все итерированные ядра совпадают с исходным ядром. Тогда согласно (14.3.14)

$$R(x, s; \lambda) = e^{x-s} (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = \frac{e^{x-s}}{1 - \lambda}$$

и решение уравнения при $\lambda \neq 1$ записывается в виде

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \int_0^1 e^{x-s} f(s) ds.$$

14.3.4. Метод определителей Фредгольма. Для определения резольвенты применяется также соотношение

$$R(x, s; \lambda) = \frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)}, \quad D(\lambda) \neq 0, \quad (14.3.17)$$

где $D(x, s; \lambda)$ — минор Фредгольма, а $D(\lambda)$ — определитель Фредгольма.

Функция $D(\lambda)$ определяется рядом

$$D(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} C_m \lambda^m, \quad (14.3.18)$$

где C_m находятся по формулам

$$C_m = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_m, s_1) & K(s_m, s_2) & \dots & K(s_m, s_m) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_m, \quad (14.3.19)$$

причем $C_0 = 1$. Функция $D(x, s; \lambda)$ определяется рядом Фредгольма:

$$D(x, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!} B_m(x, s), \quad (14.3.20)$$

где

$$B_m = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, s) & K(x, s_1) & \dots & K(x, s_m) \\ K(s_1, s) & K(s_1, s_1) & \dots & K(s_1, s_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_m, s) & K(s_m, s_1) & \dots & K(s_m, s_m) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_m, \quad (14.3.21)$$

причем $B_0(x, s) = K(x, s)$.

Отметим также, что

$$C_m = \int_a^b B_{m-1}(s, s) ds, \quad m > 0. \quad (14.3.22)$$

Формулы Фредгольма (14.3.19) и (14.3.21) позволяют построить резольвенту $R(x, s; \lambda)$ интегрального уравнения (14.3.2). Неудобство применения этих формул в том, что ряды $D(x, s; \lambda)$ и $D(\lambda)$, как правило, сложны для численных расчетов из-за кратных интегралов, определяющих коэффициенты рядов.

Значения λ , для которых существует резольвента уравнения Фредгольма, на-

зываются *регулярными*, а значения λ , для которых резольвенты не существует, — *характеристическими*. Характеристические числа совпадают с полюсами резольвенты, то есть с нулями $D(\lambda)$.

В качестве примера построим резольвенту ядра $K(x, s) = e^{x-s}$ уравнения (14.3.16) методом определителей Фредгольма. Имеем $C_0 = 1$, $B_0 = e^{x-s}$. Используя (14.3.22), находим

$$C_1 = \int_0^1 B_0(s, s) ds = 1.$$

По формуле (14.3.21)

$$B_1(x, s) = \int_0^1 \begin{vmatrix} e^x e^{-s} & e^x e^{-s_1} \\ e^{s_1} e^{-s} & e^{s_1} e^{-s_1} \end{vmatrix} ds_1 = 0.$$

Нетрудно показать, что и все $B_k(x, s)$ и C_k ($k \geq 2$) равны нулю, так что

$$D(\lambda) = 1 - \lambda, \quad D(x, s; \lambda) = e^{x-s}$$

и резольвента Фредгольма будет равна

$$R(x, s; \lambda) = \frac{e^{x-s}}{1 - \lambda}.$$

14.4(*). Приближенные методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

Подавляющее число электродинамических задач, сформулированных в виде интегральных уравнений, не могут быть решены строго. В этом разделе будут рассмотрены методы нахождения приближенных решений уравнений Фредгольма второго рода и оценки их погрешностей.

14.4.1. Замена интегрального уравнения конечной системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Рассмотрим интегральное уравнение второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x). \quad (14.4.1)$$

Входящий в это уравнение интеграл можно с помощью любой формулы приближенного интегрирования заменить на сумму, и тогда

$$y(x) - \lambda \sum_{n=1}^N A_n K(x, x_n) y(x_n) = f(x), \quad (14.4.2)$$

где A_n и x_n — постоянные для данной квадратурной формулы числа.

Например, для формулы прямоугольников

$$x_n = a + (n-1) \frac{b-a}{N}, \quad A_n = \frac{b-a}{N}, \quad n = \overline{1, N};$$

для формулы трапеций

$$x_n = a + (n-1) \left(\frac{b-a}{N-1} \right), \quad A_1 = A_N = \frac{b-a}{2N-2}, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{N-1} = \frac{b-a}{N-1}.$$

Полагая в равенстве (14.4.2) последовательно $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_N$, приходим к следующей СЛАУ, которой удовлетворяют числа $\tilde{y}(x_n)$ — приближенные значения искомой функции $y(x)$ в точках x_n :

$$\begin{aligned} a_{11} \tilde{y}(x_1) + a_{12} \tilde{y}(x_2) + \dots + a_{1n} \tilde{y}(x_n) &= b_1, \\ a_{21} \tilde{y}(x_1) + a_{22} \tilde{y}(x_2) + \dots + a_{2n} \tilde{y}(x_n) &= b_2, \\ \text{-----} & \\ a_{n1} \tilde{y}(x_1) + a_{n2} \tilde{y}(x_2) + \dots + a_{nn} \tilde{y}(x_n) &= b_n, \end{aligned} \quad (14.4.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij} &= -\lambda A_j K(x_i, x_j) \quad \text{при } i \neq j, \\ a_{ii} &= 1 - \lambda A_i K(x_i, x_i), \quad b_i = f(x_i). \end{aligned}$$

Решая СЛАУ (14.4.3), найдем приближенные значения $y(x)$ в точках x_n . Само приближенное решение в любой точке $x \in [a, b]$ записывается в виде

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^N A_n K(x, x_n) \tilde{y}(x_n). \quad (14.4.4)$$

Выбор формулы квадратур определяется следующими соображениями. Прежде всего, желательно использовать наиболее точную из формул, а именно формулу Гаусса или Чебышева. Если функции $f(x)$ и $K(x, s)$ периодичны с периодом $b-a$, то ту же точность дает и формула прямоугольников. Если $a=0$ и ядро является четной или нечетной функцией, а правая часть $f(x)$ — функция той же четности, что и ядро по x , то целесообразно применение специальных формул.

14.4.2. Метод замены произвольного ядра вырожденным. Рассмотрим снова уравнение (14.4.1) с произвольным ядром $K(x, s)$. Так как решение уравнения (14.4.1) с вырожденным ядром находится легко, то естественно заменить данное ядро $K(x, s)$ приближенно на вырожденное $\tilde{K}(x, s)$ и принять решение $\tilde{y}(x)$ уравнения с ядром $\tilde{K}(x, s)$ в качестве приближенного решения исходного уравнения. Построение вырожденного ядра, близкого к данному можно проводить многими способами. В частности, в качестве такого ядра можно принять конечное число членов ряда Тейлора, конечное число членов ряда Фурье по любой полной ортогональной системе функций.

Оценка погрешности приближенного решения определяется с помощью следующей теоремы.

Теорема. Пусть даны два ядра $K(x, s)$ и $\tilde{K}(x, s)$ и известно, что

$$\int_a^b |K(x, s) - \tilde{K}(x, s)| ds < H \quad (14.4.5)$$

и что резольвента $\tilde{R}(x, s; \lambda)$ уравнения с ядром $\tilde{K}(x, s)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b |\tilde{R}(x, s; \lambda)| ds < B. \quad (14.4.6)$$

Тогда, если выполнено условие $1 - |\lambda| H (1 + |\lambda| B) > 0$, то уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x) \quad (14.4.7)$$

имеет единственное решение $y(x)$, и разность между этим решением и решением $\tilde{y}(x)$ уравнения

$$\tilde{y}(x) - \lambda \int_a^b \tilde{K}(x, s) \tilde{y}(s) ds = f(x) \quad (14.4.8)$$

не превосходит

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| < \frac{A |\lambda| H (1 + |\lambda| B)^2}{1 - |\lambda| H (1 + |\lambda| B)}, \quad (14.4.9)$$

где A — верхняя граница функции $|f(x)|$.

В качестве примера найдем решение уравнения

$$y(x) - \int_0^1 (e^{-xt^2} - 1) x y(t) dt = \frac{1}{2} (e^{-x} + 3x - 1). \quad (14.4.10)$$

Раскладывая в степенной ряд ядро $K(x, t)$, получим

$$K(x, t) = -x^2 t^2 + \frac{x^3 t^4}{2} - \frac{x^4 t^6}{6} + \dots$$

Рассмотря в качестве вырожденного ядра $\tilde{K}(x, t)$ первые два члена разложения, будем решать уравнение

$$\tilde{y}(x) - \int_0^1 (-x^2 t^2 + x^3 t^4 / 2) \tilde{y}(t) dt = \frac{1}{2} (e^{-x} + 3x - 1). \quad (14.4.11)$$

Перепишем (14.4.11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) + C_1 x^2 - C_2 \frac{x^3}{2} &= \frac{1}{2} (e^{-x} + 3x - 1), \\ C_1 &= \int_0^1 t^2 \tilde{y}(t) dt, \quad C_2 = \int_0^1 t^4 \tilde{y}(t) dt. \end{aligned}$$

Для определения C_1 и C_2 умножим обе части уравнения (14.4.11) последовательно на x^2 , x^4 и проинтегрируем от 0 до 1. В результате получим систему уравнений относительно C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} 72C_1 - 5C_2 &= 17.31808, \\ 16C_1 - 105C_2 &= -11.88117, \end{aligned}$$

откуда находим: $C_1 = 0.25104$, $C_2 = 0.15136$. Следовательно,

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + 3x - 1) - 0.25104x^2 + 0.0757x^3.$$

Точное решение уравнения: $y(x) = x$. Оценка погрешности решения уравнения по формуле (14.4.9) следующая:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| < 0.016.$$

14.4.3. Метод моментов. Метод заключается в том, что приближенное решение уравнения (14.4.1) ищется в виде суммы $f(x)$ и линейной комбинации заранее выбранных (обычно ортогональных) функций $\{\varphi_n\}$:

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(x). \quad (14.4.12)$$

Для определения неизвестных коэффициентов C_n ($n = \overline{1, N}$) рассмотрим оператор

$$Ly = y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt - f(x).$$

Подставляя в этот оператор вместо функции $y(x)$ разложение (14.4.12), получим:

$$L\tilde{y} = \sum_{n=1}^N C_n \left[\varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt \right] - \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt.$$

Будем считать, что $\varphi_n(x)$ представляют собой первые N функций некоторой полной системы. Для того чтобы $\tilde{y}(x)$ являлось точным решением (14.4.1), необходимо, чтобы $L\tilde{y}(x) = 0$, а это эквивалентно условиям

$$\int_a^b L(\tilde{y}) \varphi_n(x) dx = 0, \quad n = \overline{1, N}. \quad (14.4.13)$$

Из условий (14.4.13) получим систему из N алгебраических уравнений для нахождения постоянных C_n ($n = \overline{1, N}$). Эту систему можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^N C_n (\alpha_{kn} - \lambda \beta_{kn}) = \lambda \gamma_k, \quad k = \overline{1, N},$$

где

$$\alpha_{kn} = \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx, \quad \beta_{kn} = \int_a^b dx \int_a^b K(x, t) \varphi_k(x) \varphi_n(t) dt,$$

$$\gamma_k = \int_a^b dx \int_a^b K(x, t) \varphi_k(x) f(t) dt .$$

Заметим, что применение метода моментов равносильно замене ядра $K(x, t)$ вырожденным ядром:

$$K_N(x, t) = \sum_{n=1}^N U_n(t) \varphi_n(x), \quad U_n(t) = \int_a^b K(x, t) \varphi_n(x) dx .$$

С другими методами решения интегральных уравнений второго рода (метод Бубнова-Галеркина, общие проекционные методы) мы познакомились в разделе 14.1.

14.5(*). Интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Некорректные задачи в электродинамике

14.5.1. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Эти уравнения нашли самое широкое применение при решении различных электродинамических задач на собственные значения и задач дифракции. К интегральным уравнениям Фредгольма первого рода относятся адмитансные и импедансные интегральные уравнения, описанные в разделе 14.3. В частности, они используются при анализе собственных волн и колебаний полосково-щелевых структур (линий передачи и резонаторов). Причем наибольшее распространение при решении интегральных уравнений первого рода (не Фредгольмовского типа), описывающих соответствующую краевую задачу, в последнее время получили так называемые прямые вариационные (проекционные) подходы. Так, с помощью вариационных методов рассмотрено большое количество регулярных полосковых и щелевых линий передачи. Применение вариационных методов основано на использовании интегральных уравнений первого рода, ядра которых в неявном виде содержат логарифмические особенности или сингулярности типа Коши. В принципе, строгие по постановке и весьма простые в численной реализации, такие уравнения первого рода зачастую недостаточно обоснованы в смысле корректности окончательных численных результатов, оценки точности и устойчивости решений, выбора способа усечения (редукции) бесконечных рядов в ядрах и пр. В частности, непосредственное усечение бесконечных рядов в ядрах уравнений первого рода приводит к проблеме решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Поскольку задача их решения является некорректной проблемой, ниже приведем некоторые сведения из теории линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

14.5.2. Определение. *Линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода называется соотношение вида*

$$\int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (14.5.1)$$

где ядро $K(x, s)$ и правая часть $f(x)$ — известные функции, принадлежащие Гильбертову пространству.

Вместо записи (14.5.1) будем использовать более компактную и обладающую большей общностью запись в виде операторного уравнения первого рода:

$$A y = f, \quad y \in Y, \quad f \in F, \quad (14.5.2)$$

где Y, F — некоторые Гильбертовы пространства, A — непрерывное отображение Y в F . Дадим понятие *корректности по Адамару*. Задача определения решения y по заданным входным данным f , связанным между собой некоторой функциональной зависимостью $y = R(f)$, называется *корректной* (корректно поставленной), если [Л14.6]:

- 1) всякому элементу $f \in F$ соответствует решение $y = R(f) \in Y$;
- 2) решение определено однозначно;
- 3) задача $y = R(f)$ устойчива, то есть для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что если $\rho_F(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$, то $\rho_Y(y_1, y_2) \leq \varepsilon$ (где ρ_F и ρ_Y — расстояния в пространствах F и Y ; $y_1 = R(f_1), y_2 = R(f_2)$), или, другими словами, обратный оператор $A^{-1} \equiv R$ непрерывен на F , то есть малым возмущениям входных данных соответствуют малые возмущения решения.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то задача называется *некорректно поставленной*. Задача решения уравнений Фредгольма первого рода является некорректной по причине нарушения условия 3: даже очень малые ошибки правой части $f(x)$, а также ядра $K(x, s)$ и метода решения могут привести к настолько большим ошибкам в решении, что оно не будет иметь практически ничего общего с искомой функцией $y(x)$.

14.5.3. Методы регуляризации. Основным методом исследования уравнения (14.5.1) является так называемый метод регуляризации. В методе *слабой регуляризации* (метод Тихонова) вводится сглаживающий функционал

$$\Phi_\alpha = \int_a^b \left[\int_a^b K(x, t) y(t) dt - f(x) \right]^2 dx + \alpha \int_a^b y^2(t) dt, \quad (14.5.3)$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Из условия минимума функционала Φ_α следует уравнение Эйлера:

$$\alpha y(x) + \int_a^b k(x, t) y(t) dt = F(x), \quad (14.5.4)$$

в котором

$$k(x, t) = \int_a^b K(s, x) K(s, t) ds, \quad F(x) = \int_a^b K(t, x) f(t) dt.$$

В результате вместо уравнения первого рода (14.5.1) необходимо решать уравнение второго рода (14.5.4), которое при оптимальном выборе значения α является устойчивым. Подробно методы регуляризации рассмотрены в [Л14.8].

Многие работы, посвященные алгоритмизации расчетов экранированных полосковых и щелевых структур, основаны на уравнениях Фредгольма первого рода (адмитансные и импедансные уравнения), которые получаются, как правило, в результате простого усечения бесконечных рядов в функциях Грина уравнений первого рода, содержащих в неявном виде логарифмические особенности или сингулярности типа Коши. С математической точки зрения такая процедура равносильна переходу от корректно поставленной задачи (СИУ первого рода не относятся к классу некорректных задач) к некорректной. Остановимся на этом моменте более подробно. Так, например, адмитансное интегральное уравнение относительно тангенциального электрического поля \vec{E}_τ в щелях ($x \in L_n$) полосково-щелевой структуры имеет вид [Л14.9]

$$\int_{L_n} \tilde{G}(x, x') \vec{E}_\tau(x') dx' = 0, \quad x \in L_n. \quad (14.5.5)$$

Элементы функции Грина суть:

$$G_{ij}(x, x') = \sum_{m=0}^{\infty} Y_{mij} \varphi_{mi}(x) \varphi_{mj}(x'), \quad (14.5.6)$$

где $\varphi_{mi}(x)$ ($i = 1, 2$) — тригонометрические функции (синусы или косинусы), а постоянные коэффициенты Y_{mij} при $m \rightarrow \infty$ имеют следующие асимптотические выражения [14.9]:

$$\begin{aligned} t_1 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \{m^{-1} Y_{m11}\}, \quad t_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} Y_{m12} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} Y_{m21}, \quad t_3 = \lim_{m \rightarrow \infty} \{m Y_{m22}\}. \end{aligned} \quad (14.5.7)$$

С учетом соотношений (14.5.7) векторное уравнение (14.5.5) является особым. При ограничении суммирования по m некоторым числом M в рядах (14.5.6) СИУ (14.5.5) переходит в уравнение Фредгольма первого рода. Далее неизвестная функция \vec{E}_τ представляется в виде разложения по базису $\{\vec{e}_n\}$ (берутся первые N членов):

$$\vec{E}_\tau^N = \sum_{n=1}^N C_n^N \vec{e}_n, \quad (14.5.8)$$

где C_n^N — постоянные. В результате точность расчета параметров волноведущей линии передачи зависит от двух параметров — N и M , а также от выбора базиса для определения \vec{E}_τ . Естественно, что при таком подходе остается открытым очень важный вопрос проверки истинности решения и установления его адекватности рассматриваемой физической задаче. Поэтому в настоящее время основным критерием истинности решения является приемлемое совпадение результатов, полученных разными методами.

14.5.4. Относительная сходимость. Проблема анализа. В литературе даже появились примеры, показывающие, что такой подход может привести к заведомо

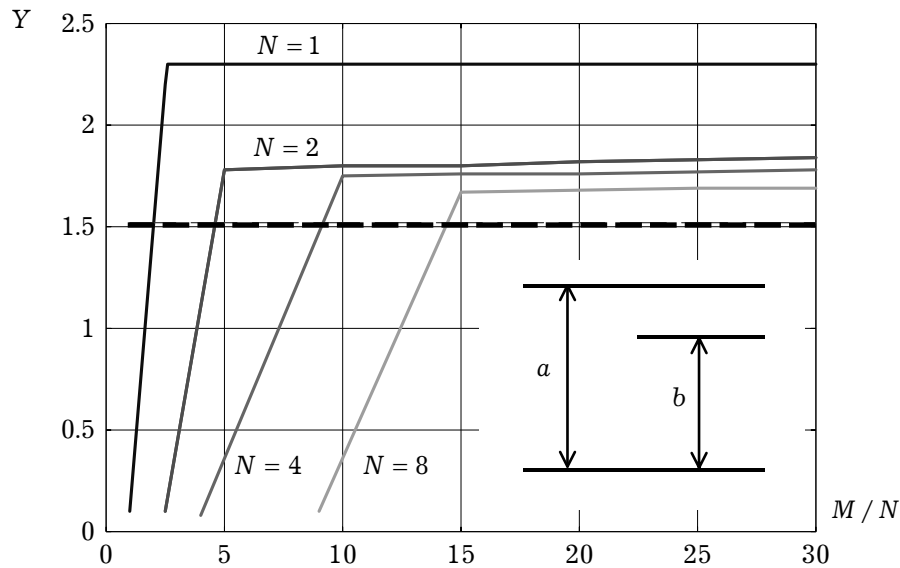


Рис. 14.4

неверным физическим результатам [Л14.10]. Речь идет о так называемом явлении *относительной сходимости* решений уравнений типа (14.5.5) вариационными методами с заменой ядра (14.5.6.) на вырожденное. Так, на примере задачи дифракции волны на разветвлении в плоском волноводе было показано [Л14.10], что правильное решение задачи получается только при наложении на решение условия на ребре, в противном случае может быть получено бесконечное множество математически неверных решений. Там же было показано, что условие на ребре выполняется, если

$$N / M = b / a, \quad (14.5.9)$$

где a, b — поперечные размеры волноводов (рис. 14.4); N — число базисных функций \vec{e}_n в сумме (14.5.8) для волновода с размером b , M — число слагаемых в сумме (14.5.6) для волновода с размером a . На рис. 14.4 показана зависимость входной реактивной проводимости Y плоского волновода с диафрагмой от отношения N/M . Штриховой линией на рисунке показано точное значение входной проводимости Y [14.10].

Дальнейшее изучение явления относительной сходимости было продолжено в [14.11], где на примерах задач о скачкообразных нерегулярностях в волноводах дано определение относительной сходимости. Приведем это определение, справедливое, на наш взгляд, и для краевых задач о собственных волнах полосковых и щелевых структур.

Пусть $\{A_n\}_1^\infty$ — бесконечная последовательность коэффициентов разложения какой-либо компоненты поля в плоскости стыка по ортонормированной системе собственных функций одного из сочлененных волноводов. Пусть также эта последовательность является решением системы линейных алгебраических уравнений СЛАУ.

Решение СЛАУ будем называть физическим, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0. \quad (14.5.10)$$

Пусть $\{A_n\}_1^N$ — решение усеченной (редуцированной) СЛАУ. Будем считать, что СЛАУ обладает относительной сходимостью, если последовательность $\{A_n\}_1^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \{A_n\}_1^N$ отличается от истинного решения данной СЛАУ и удовлетворяет условию (14.5.10). Если условие (14.5.10) не выполняется, то решение не является физическим и относительная сходимость отсутствует. Соотношение (14.5.10) является достаточным для единственности решения СЛАУ.

Подобные особенности алгоритма имеют место и при рассмотрении неоднородностей диафрагменного типа в волноводах. Для случая металлической диафрагмы в волноводе показано, что полученное решение удовлетворяет условию на ребре диафрагмы только при выполнении соотношения: $M/N = a/b$ (a — размер волновода, b — размер диафрагмы).

14.6(*). Сингулярные интегральные уравнения

При решении ряда электродинамических задач в настоящей книге будут систематически использоваться интегральные уравнения, обладающие логарифмическими особенностями или содержащие сингулярности типа Коши. Поэтому в данной главе остановимся на основных результатах теории СИУ и некоторых вопросах, связанных с решением краевых задач Римана–Гильберта [Л14.12, Л14.13].

14.6.1. Аналитические функции. Интегралы типа Коши. Формулы Сохоцкого–Племеля. Дадим вспомогательные определения. Пусть L — гладкая кривая и $\varphi(t)$ — функция точек этой кривой (рис. 14.5). Говорят, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет на кривой условию Гельдера (условие H), если для любых двух точек этой кривой

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A |t_2 - t_1|^\nu, \quad (14.6.1)$$

где A, ν — положительные числа. Число A называется *постоянной Гельдера*, ν — показателем Гельдера, причем

$$0 < \nu \leq 1. \quad (14.6.2)$$

Если $\nu = 1$, то *условие Гельдера совпадает с известным условием Липшица* [Л14.2].

Множество функций, удовлетворяющих условиям (14.6.1), (14.6.2) будем называть классом H . Если функция $\varphi(t)$, заданная на разомкнутом контуре L , удовлетворяет условию H на каждой закрытой части линии L , не содержащей концов, а вблизи любого конца t_k представима в виде

$$\varphi(t) = \varphi^*(t)(t - t_k)^{-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (14.6.3)$$

где $\varphi^*(t)$ — также принадлежит классу H , то по определению $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* на контуре L .

Контур L является по определению кривой Ляпунова, если угол ϑ между положительной касательной к кривой L и осью OX как функции точки t удовлетворяет условию H (рис. 14.5).

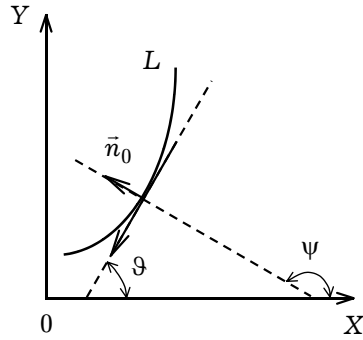


Рис. 14.5

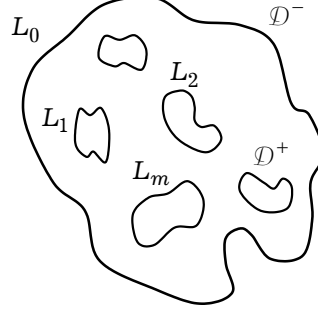


Рис. 14.6

Пусть L — гладкий контур (замкнутый или разомкнутый) в конечной части плоскости комплексного переменного z или совокупность конечного числа таких контуров, не имеющих общих точек, а $\varphi(t)$ — абсолютно интегрируемая функция комплексной координаты точек t контура L . Тогда интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \quad (14.6.4)$$

представляет собой аналитическую функцию на всей плоскости комплексного переменного, кроме точек контура L . Интеграл (14.6.4) называется *интегралом типа Коши*, $\varphi(t)$ — его плотностью, а выражение $(t-z)^{-1}$ — ядром. Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на контуре L , то интеграл (14.6.4) имеет предельные значения $\Phi^+(t_0)$ и $\Phi^-(t_0)$ во всех точках контура L при $z \rightarrow t_0$ соответственно слева (+) и справа (−) по отношению к выбранному направлению. Функции $\Phi^+(t_0), \Phi^-(t_0)$ также удовлетворяют условию Н с тем же показателем ν , что и функция $\varphi(t)$, и для них справедливы *формулы Сохоцкого–Племеля*:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t_0) &= \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}, \\ \Phi^-(t_0) &= -\frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}. \end{aligned} \quad (14.6.5)$$

Вычитая и складывая формулы (14.6.5), получим пару равносильных формул:

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t), \quad \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}. \quad (14.6.6)$$

В (14.6.5), (14.6.6) интегралы понимаются в смысле *главного значения по Коши*, то есть

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L-L_\varepsilon} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in L, \quad (14.6.7)$$

где L_ε — часть кривой L , попадающей в круг $|z - t_0| < \varepsilon$. Интеграл (14.6.7) является *сингулярным* (интегралом типа Коши) при $t = t_0$, но остается *регулярным в смысле главного значения*. Эта особенность отмечается обычно определенным символом. Мы не будем вводить такой символ, так как все интегралы типа Коши, с которыми будем сталкиваться, будут пониматься в смысле главного значения.

14.6.2. Краевая задача Римана для многосвязной области. Сведение к сингулярным уравнениям. Пусть $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$ — совокупность $m + 1$ непересекающихся контуров, причем контур L_0 содержит внутри себя все остальные (рис. 14.6). \mathcal{D}^+ назовем $(m + 1)$ -связную область, лежащую внутри контура L_0 и вне контуров L_1, \dots, L_m . Через \mathcal{D}^- обозначим дополнение $\mathcal{D}^+ + L$ до полной плоскости комплексной переменной. Для определенности положительным обходом контура L будем считать тот, который оставляет область \mathcal{D}^+ слева, то есть контур L_0 нужно обходить против часовой стрелки, а контуры L_1, \dots, L_m — по часовой. Требуется найти две функции: $\Phi^+(z)$ — аналитическую в области \mathcal{D}^+ и $\Phi^-(z)$ — аналитическую в области \mathcal{D}^- , включая $z = \infty$, удовлетворяющие на контуре L линейному соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad (14.6.8)$$

или

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (14.6.9)$$

где известные комплексные функции $G(t)$, $g(t)$, удовлетворяющие условию Гельдера (14.6.1), называются соответственно *коэффициентом задачи Римана* и ее *свободным членом*. В случае выполнения условия (14.6.8) задача Римана называется *однородной*. Если справедливо на контуре L условие (14.6.9), краевая задача Римана является *неоднородной*.

Покажем, что краевая задача Римана сводится к СИУ. Для этой цели введем кусочно-аналитическую функцию, заданную интегралом типа Коши:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - z}. \quad (14.6.10)$$

Подставляя в краевое условие (14.6.9) предельные значения интеграла типа Коши, по (14.6.5) получим особое интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2} [1 + G(t)] \varphi(t) + \frac{1 - G(t)}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = g(t). \quad (14.6.11)$$

Итак, *краевая задача Римана* (14.6.9) свелась к СИУ (14.6.11). Чтобы установить равносильность уравнения (14.6.11) и краевой задачи (14.6.9), необходимо доказать и обратное, то есть особое уравнение

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t) \quad (14.6.12)$$

должно соответствовать краевой задаче (14.6.9).

Согласно формулам Сохоцкого-Племеля (14.6.6)

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \quad (14.6.13)$$

Подставляя соотношения (14.6.13) в уравнение (14.6.12) и решая его относительно $\Phi^+(t)$, получим, что кусочно-аналитическая функция $\Phi(z)$ должна являться решением *краевой задачи Римана* (14.6.9), где

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)} \quad (14.6.14)$$

с дополнительным условием

$$\Phi^-(\infty) = 0. \quad (14.6.15)$$

Таким образом, решение *краевой задачи Римана* (14.6.9) сводится к нахождению решения СИУ (14.6.12), условия разрешимости которого приведены в работах [Л14.12, Л14.13].

14.6.3. Краевая задача Гильберта. Интегральное уравнение задачи. Связь краевых задач Гильберта и Римана. Пусть дан контур L (рис. 14.6) и действительные функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ действительной переменной s контура L , удовлетворяющие условию Гельдера. *Краевой задачей Гильберта* называют следующую проблему. Требуется найти аналитическую в области \mathcal{D}^+ и непрерывную на контуре L функцию

$$F(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad (14.6.16)$$

предельные значения действительной и мнимой части которой удовлетворяют на контуре линейному соотношению

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s). \quad (14.6.17)$$

При $c(s) = 0$ будем иметь однородную задачу, а при $c(s)$, отличной от нуля — неоднородную.

Краевая задача Гильберта имеет существенное отличие от *краевой задачи Римана*. Дело в том, что аналитические функции, определенные в многосвязной области, могут быть неоднозначными. Для задачи Римана краевое условие задается в комплексной форме, и это обстоятельство приводит к однозначному решению. Иначе обстоит дело в задаче Гильберта, в которой аналитическая функция отыскивается по краевому условию, заданному в действительной форме. Здесь также получаются аналитические решения, но неоднозначные.

Неоднозначность решения *задачи Гильберта* следует из того факта, что аналитическая и однозначная в конечной многосвязной области \mathcal{D}^+ функция $\Phi(z)$ может быть представлена интегралом типа Коши с действительной плотностью α с точностью до некоторой произвольной действительной постоянной C :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\alpha(\tau) d\tau}{\tau - z} + iC, \quad (14.6.18)$$

то есть действительная плотность α определяется по функции $\Phi(z)$ неоднозначно.

Постоянную C можно определить следующим образом. Выделим какой-нибудь из внутренних контуров, например, контур L_m , и положим

$$C = \int_{L_m} \alpha(\sigma) d\sigma. \quad (14.6.19)$$

Тогда, беря по формуле Сохоцкого (14.6.5) предельное значение функции (14.6.18) и подставляя в краевое условие (14.6.17), получим для определения плотности $\alpha(s)$ следующее СИУ:

$$\begin{aligned} a(s)\alpha(s) + \operatorname{Re} \left\{ \frac{a(s) - i b(s)}{\pi i} \int_L \frac{\alpha(\tau) d\tau}{\tau - s} \right\} + \\ + 2b(s) \int_{L_m} \alpha(\sigma) d\sigma = 2c(s). \end{aligned} \quad (14.6.20)$$

Сравнивая решение краевой задачи Гильберта с решением задачи Римана можно усмотреть между ними связь. Для простейших контуров (прямая или окружность), может быть установлена прямая сводимость задачи Гильберта к задаче Римана. Для других контуров такой непосредственной связи не существует и ее установление является достаточно сложной задачей.

Ниже мы рассмотрим один частный случай *краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами*, так называемую *смешанную краевую задачу аналитических функций*, которая часто возникает в электродинамике СВЧ структур. Пусть замкнутый контур L точками $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$ разделен на $2m$ частей. Совокупность дуг (a_k, b_k) обозначим через L_1 , а совокупность дуг (b_k, a_{k+1}) — через L_2 ($k = 1, 2, \dots, m; a_{2m+1} = a_1$). Требуется определить аналитическую в \mathcal{D}^+ функцию $F(z)$ (14.6.16), удовлетворяющую краевому условию

$$\begin{aligned} u &= f(s) \quad \text{при } s \in L_1, \\ v &= h(s) \quad \text{при } s \in L_2, \end{aligned} \quad (14.6.21)$$

где $f(s), h(s)$ — заданные функции, удовлетворяющие условию Гельдера. В точках a_k, b_k функция $F(z)$ должна принадлежать некоторому заданному классу.

Для простоты рассмотрим случай, когда контур L есть действительная ось или окружность. Краевые условия (14.6.21) запишем в виде одного краевого условия *задачи Гильберта*, заданного на всем контуре L :

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s), \quad s \in L, \quad (14.6.22)$$

где

$$\begin{aligned} a &= 1, \quad b = 0, \quad c = f(s), \quad s \in L_1, \\ a &= 0, \quad b = 1, \quad c = h(s), \quad s \in L_2. \end{aligned} \quad (14.6.23)$$

Составим соответствующую *краевую задачу Римана*:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (14.6.24)$$

$$\begin{aligned} G(t) &= -1, \quad g(t) = 2f(t); \quad t \in L_1, \\ G(t) &= 1, \quad g(t) = 2ih(t); \quad t \in L_2, \end{aligned}$$

где t — комплексная координата контура L .

Таким образом, соотношения (14.6.22), (14.6.24) устанавливают связь между краевыми задачами Римана и Гильберта.

Приведем решение краевой задачи (14.6.24) для трех наиболее важных классов:

1. Решение, не ограниченное вблизи всех концов a_k, b_k ($\overline{1, m}$):

$$\Phi(z) = \frac{1}{R(z)} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{R(\tau)g(\tau)d\tau}{\tau - z} + P_{m-1}(z) \right],$$

$$R(z) = \prod_{k=1}^m \sqrt{(z - a_k)(z - b_k)}$$
(14.6.25)

при дополнительном условии $\Phi(\infty) = 0$; $P_{m-1}(z)$ — многочлен $(m-1)$ -ой степени.

2. Решение, ограниченное вблизи концов a_k и не ограниченное вблизи концов b_k ($k = \overline{1, m}$):

$$\Phi(z) = \frac{R_a(z)}{2\pi i R_b(z)} \int_L \frac{R_b(\tau)g(\tau)d\tau}{R_a(\tau)(\tau - z)},$$

$$R_a(z) = \prod_{k=1}^m \sqrt{(z - a_k)}, \quad R_b(z) = \prod_{k=1}^m \sqrt{(z - b_k)}.$$
(14.6.26)

3. Решение, ограниченное вблизи всех концов a_k, b_k ($k = \overline{1, m}$):

$$\Phi(z) = \frac{R(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau - z)}$$
(14.6.27)

с дополнительными условиями разрешимости

$$\int_L \frac{g(\tau)\tau^{k-1}d\tau}{R(\tau)} = 0 \quad (k = \overline{1, m}).$$

Формулы (14.6.25)–(14.6.27), дающие решение задачи Римана (14.6.24), будут являться и решением задачи Гильберта (14.6.22), если в них коэффициенты многочлена $P_{m-1}(z)$ считать действительными.

14.6.4. Сингулярные интегральные уравнения. Регуляризация сингулярных уравнений. В настоящем разделе рассмотрим особые интегральные уравнения с ядром Коши типа

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t).$$
(14.6.28)

Интеграл, понимаемый в смысле главного значения, берется по контуру L , состоящему в общем случае из $m+1$ замкнутых гладких кривых $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$, расположенных, как указано на рис.14.6. Заданные на контуре L функции $a(t)$, $b(t)$, $K(t, \tau)$ будем считать удовлетворяющими условию Гельдера, причем функция $K(t, \tau)$ удовлетворяет этому условию по обоим переменным.

Уравнение (14.6.28) называется *полным особым уравнением*. Если функция $f(t) = 0$, будем иметь однородное, в противном случае — неоднородное уравнение.

Уравнение

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t) \quad (14.6.29)$$

называется *характеристическим уравнением*, соответствующим полному уравнению (14.6.28).

Характер уравнения (14.6.29) зависит от его индекса^{*)}

$$\varkappa = \text{Ind} \left\{ \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \right\}, \quad (14.6.30)$$

который определяется следующим образом:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \left[\arg \left\{ \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \right\} \right]_{L_k}, \quad (14.6.31)$$

где контуры L_k обходятся в строго установленном порядке.

Решение уравнения (14.6.29) для $\varkappa \geq 0$ имеет вид:

$$\varphi(t) = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{Z(\tau)(\tau - t)} + b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t), \quad (14.6.32)$$

где

$$Z(t) = [t^{\varkappa} \Pi(t)]^{-1/2} e^{\Gamma(t)}, \quad \Pi(t) = \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\varkappa_k}, \quad (14.6.33)$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L (\tau - t)^{-1} \ln \left[\tau^{-\varkappa} \Pi(t) \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \right] d\tau,$$

$P_{\varkappa-1}(t)$ — многочлен степени $(\varkappa - 1)$, z_k — некоторые точки, лежащие внутри контуров L_k ($k = 1, 2, \dots, m$).

В зависимости от значения индекса \varkappa уравнение (14.6.29) обладает свойствами:

1. Если $\varkappa > 0$, то однородное уравнение (14.6.29) ($f(t) = 0$) имеет \varkappa линейно независимых решений:

$$\varphi_k(t) = b(t)Z(t)t^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, \varkappa).$$

2. Если $\varkappa \leq 0$, то однородное уравнение (14.6.29) неразрешимо.

3. Если $\varkappa > 0$, то неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части $f(t)$ и его общее решение линейно зависит от \varkappa произвольных постоянных.

4. Если $\varkappa < 0$, то неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть $f(t)$ удовлетворяет условиям:

$$\int_L \frac{t^{k-1} f(t) dt}{Z(t)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \varkappa). \quad (14.6.34)$$

При выполнении условий (14.6.34) решение неоднородного уравнения (14.6.29) дается формулой (14.6.32) при $P_{\varkappa-1}(t) \equiv 0$.

*) Коши определил понятие индекса как разность числа случаев перехода функции через бесконечность от положительных значений к отрицательным и от отрицательных к положительным.

Таким образом, простейшие СИУ типа (14.6.29) решаются в замкнутой форме. В общем случае решение особых интегральных уравнений производится приведением их к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Такой процесс приведения СИУ к регулярному уравнению Фредгольма называется *регуляризацией*.

Наиболее распространены *три способа регуляризации*. Первые два основаны на подборе *регуляризующего оператора* (регуляризация слева и справа). Третий способ существенно отличается от первых двух. В нем устранение особого интеграла производится путем решения соответствующего характеристического уравнения. Заметим, что регуляризация слева может привести к появлению посторонних решений, а справа — к потере решений.

14.6.5. Регуляризация решением характеристического уравнения (способ Карлемана–Векуа). Остановимся на этом подходе чуть более подробно. Переносим регулярный член особого уравнения (14.6.28) в правую часть, запишем его в следующем виде:

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t) - \int_L K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau. \quad (14.6.35)$$

Будем решать последнее уравнение как характеристическое, рассматривая правую часть как известную функцию. Применяя формулу (14.6.32), получим уравнение Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t) + \int_L G(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f_1(t), \quad (14.6.36)$$

где

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= a(t)K(t, \tau) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{K(\tau_1, \tau) d\tau_1}{Z(\tau_1)(\tau_1 - t)}, \\ f_1(t) &= a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{Z(\tau)(\tau - t)} + b(t)Z(t)P_{\kappa-1}(t). \end{aligned} \quad (14.6.37)$$

Если индекс уравнения (14.6.36) $\kappa < 0$, то в (14.6.37) нужно положить $P_{\kappa-1}(t) \equiv 0$. При этом дополнительно должны удовлетворяться условия (14.6.34), в которых функция $f(t)$ заменяется на

$$f(t) - \int_L K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau. \quad (14.6.38)$$

Вопросы эквивалентности СИУ (14.6.35) и уравнения Фредгольма (14.6.36) рассмотрены в [Л14.12, Л14.13].

Рассмотрим теперь практически важную задачу обращения интеграла типа Коши (частный случай СИУ (14.6.35)):

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad (14.6.39)$$

где контур L состоит из m разомкнутых кривых (a_k, b_k) ($k = 1, 2, \dots, m$).

1. Решение, не ограниченное вблизи всех концов a_k, b_k :

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi R(t)} \int_L \frac{R(\tau) f(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{P_{m-1}(t)}{R(t)}, \quad (14.6.40)$$

где $P_{m-1}(t)$ — некоторый многочлен $(m-1)$ степени.

2. Решение, ограниченное на концах a_k и не ограниченное на концах b_k :

$$\varphi(t) = -\frac{R_a(t)}{\pi R_b(t)} \int_L \frac{R_b(\tau) f(\tau) d\tau}{R_a(\tau)(\tau - t)}. \quad (14.6.41)$$

3. Решение, ограниченное на всех концах a_k, b_k :

$$\varphi(t) = -\frac{R(t)}{\pi} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{R(\tau)(\tau - t)} \quad (14.6.42)$$

при условии, что функция $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_L \frac{f(\tau) \tau^{k-1} d\tau}{R(\tau)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (14.6.43)$$

Функции $R(t), R_a(t), R_b(t)$ определяются соотношениями (14.6.25), (14.6.26).

14.7(*). Метод частичных областей расчета продольно-однородных линий передачи

На практике часто встречаются продольно-однородные линии передачи со сложной формой поперечного сечения. Одним из эффективных методов анализа таких волноведущих структур является метод частичных областей (МЧО), согласно которому поперечное сечение линии передачи разбивается на ряд простых координатных граничных задач, для которых может быть получено решение двумерного уравнения Гельмгольца. Затем проводится «сшивание» (припасовывание) полей на границах частичных областей.

14.7.1. Г-образный волновод с продольно-однородным заполнением. Конкретное рассмотрение МЧО проведем на примере Е-волн Г-образного волновода, поперечное сечение которого показано на рис. 14.7. В соответствии с МЧО разобьем поперечное сечение на две области, как показано на рис. 14.7. Для Е-волн, распространяющихся вдоль оси OZ :

$$\vec{E} = \vec{e}(x, y) e^{-i\gamma z}, \quad \vec{H} = \vec{h}(x, y) e^{-i\gamma z} \quad (14.7.1)$$

и отличны от нуля составляющие e_x, e_y, e_z, h_x, h_y .

Для продольной составляющей электрического поля e_z справедливо уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} + \chi^2 e_z = 0, \quad \chi^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \gamma^2. \quad (14.7.2)$$

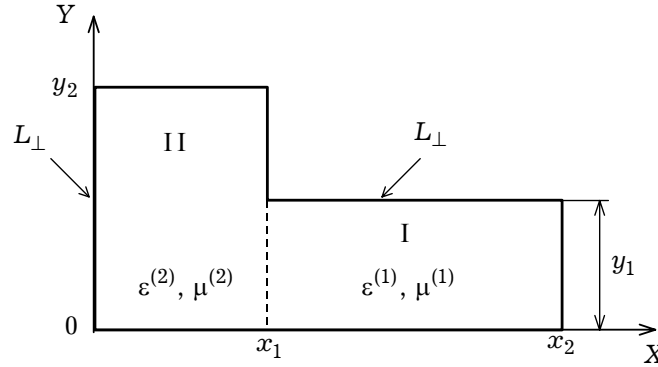


Рис. 14.7

Уравнение (14.7.2) для каждой из выделенных областей на рис. 14.7 можно решить методом разделения переменных. Общее решение (14.7.2), справедливое для обеих областей, можно представить в тригонометрической форме:

$$e_z = (A \cos(r_x x) + B \sin(r_x x))(C \cos(r_y y) + D \sin(r_y y)), \quad (14.7.3)$$

где A, B, C, D, r_x, r_y — неизвестные постоянные.

Для того, чтобы решение (14.7.3) можно было использовать для расчета собственных волн Г-образного волновода, необходимо наложить соответствующие граничные условия на граничном контуре L_\perp поперечного сечения волновода. Пусть для определенности на контуре L_\perp справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} e_z^{(1)} &= 0 \quad \text{при } y = 0, y = y_1; \\ e_z^{(1)} &= 0 \quad \text{при } x = x_2 \end{aligned} \quad (14.7.4a)$$

для области I и

$$\begin{aligned} e_z^{(2)} &= 0 \quad \text{при } y = 0, y = y_2; \\ e_z^{(2)} &= 0 \quad \text{при } x = 0 \end{aligned} \quad (14.7.4б)$$

для области II.

С учетом граничных условий (14.7.4)

$$\begin{aligned} e_z^{(1)} &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(1)} \sin[r_m^{(1)}(x_2 - x)] \sin \frac{m\pi y}{y_1}, \\ e_z^{(2)} &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2)} \sin(r_m^{(2)} x) \sin \frac{m\pi y}{y_2}, \end{aligned} \quad (14.7.5)$$

где $r_m^{(i)} = \sqrt{\chi_i^2 - (m\pi/y_i)^2}$, $\chi_i^2 = k_0^2 \epsilon^{(i)} \mu^{(i)} - \gamma^2$, $A_m^{(1)}, A_m^{(2)}$ — неизвестные постоянные.

Электрическое поле $e_z^{(1)}$ в первой области разложено по системе функций $\{\sin(m\pi y/y_1)\}$, ортогональных на отрезке $[0, y_1]$, а поле $e_z^{(2)}$ — по системе функций $\{\sin(m\pi y/y_2)\}$, ортогональных на отрезке $[0, y_2]$.

Так как при $x = x_1$, $e_z^{(1)}(y) = e_z^{(2)}(y) \equiv f_z(y)$, то выразим постоянные $A_m^{(i)}$ ($i = 1, 2$) как коэффициенты Фурье в рядах (14.7.5) через неизвестное поле

$f_z(y)$ в плоскости $x = x_1$:

$$\begin{aligned}\sin[r_m^{(1)}(x_2 - x_1)] A_m^{(1)} &= \frac{2}{y_1} \int_0^{y_1} f_z(y') \sin \frac{m\pi y'}{y_1} dy', \\ \sin[r_m^{(2)} x_1] A_m^{(2)} &= \frac{2}{y_2} \int_0^{y_1} f_z(y') \sin \frac{m\pi y'}{y_2} dy'.\end{aligned}\quad (14.7.6)$$

Заметим, что при записи второй формулы из (14.7.6) было использовано условие, что $e_z = 0$ при $x = x_1$, $y \in [y_1, y_2]$.

С помощью соотношения

$$h_y = -\frac{i\omega\varepsilon_a}{\chi^2} \frac{\partial e_z}{\partial x}, \quad (14.7.7)$$

следующего из уравнений Максвелла, запишем выражения для составляющих h_y в I и II областях в следующем виде:

$$\begin{aligned}h_y^{(1)} &= \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon^{(1)}}{\chi_1^2} \sum_{m=1}^{\infty} r_m^{(1)} A_m^{(1)} \cos[r_m^{(1)}(x_2 - x)] \sin \frac{m\pi y}{y_1}, \\ h_y^{(2)} &= -\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon^{(2)}}{\chi_2^2} \sum_{m=1}^{\infty} r_m^{(2)} A_m^{(2)} \cos[r_m^{(2)} x] \sin \frac{m\pi y}{y_2}.\end{aligned}\quad (14.7.8)$$

Учтем теперь граничное условие при $x = x_1$:

$$h_y^{(1)} = h_y^{(2)} \quad \text{при } y \in [0, y_1]. \quad (14.7.9)$$

14.7.2. Сингулярное интегральное уравнение. Подставляя разложения (14.7.8) в граничное условие (14.7.9) с учетом выражений для коэффициентов $A_m^{(i)}$ ($i = 1, 2$) (14.7.6), получим интегральное уравнение первого рода относительно неизвестной функции $f_z(y)$ ($y \in [0, y_1]$):

$$\begin{aligned}\int_0^{y_1} f_z(y') K_1(y, y') dy' &= 0, \\ K_1(y, y') &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\varepsilon^{(2)} r_m^{(2)}}{y_2 \chi_2^2} \operatorname{ctg}[r_m^{(2)} x_1] \sin \frac{m\pi y'}{y_2} \sin \frac{m\pi y}{y_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon^{(1)} r_m^{(1)}}{y_1 \chi_1^2} \operatorname{ctg}[r_m^{(1)}(x_2 - x_1)] \sin \frac{m\pi y'}{y_1} \sin \frac{m\pi y}{y_1} \right\}.\end{aligned}\quad (14.7.10)$$

Для улучшения сходимости ряда в функции Грина $K_1(y, y')$ перейдем от функции $f_z(y)$ к ее производной $f'_z(y) = df_z(y)/dy$ с помощью соотношений ($i = 1, 2$):

$$\int_0^{y_1} f_z(y') \sin \frac{m\pi y'}{y_i} dy' = \frac{y_i}{m\pi} \int_0^{y_1} f'_z(y') \cos \frac{m\pi y'}{y_i} dy',$$

которое следует из формулы интегрирования по частям ($f_z(y) = 0$ при $y = 0, y_1$).

Таким образом, вместо интегрального уравнения (14.7.10) имеем

$$\int_0^{y_1} f'_z(y') K_2(y, y') dy' = 0, \quad (14.7.11)$$

где

$$K_2(y, y') = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\varepsilon^{(2)} r_m^{(2)}}{m \chi_2^2} \operatorname{ctg}[r_m^{(2)} x_1] \cos \frac{m \pi y'}{y_2} \sin \frac{m \pi y}{y_2} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^{(1)} r_m^{(1)}}{m \chi_1^2} \operatorname{ctg}[r_m^{(1)} (x_2 - x_1)] \cos \frac{m \pi y'}{y_1} \sin \frac{m \pi y}{y_1} \right\}. \quad (14.7.12)$$

Соотношение (14.7.11) является сингулярным интегральным уравнением относительно неизвестной функции $f'_z(y)$ с ядром, имеющим особенность типа Коши. Это утверждение просто доказать, если рассмотреть асимптотическое поведение рядов (14.7.12) при $m \rightarrow \infty$. Так как при $m \rightarrow \infty$ ($k = 1, 2$)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m^{(k)} = i \frac{m \pi}{y_k}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{ctg}[r_m^{(k)} x_k] = -i,$$

то функцию Грина (14.7.12) можно заменить на ее асимптотический ряд

$$K_2^{\infty}(y, y') = -i \pi \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\varepsilon^{(2)}}{y_2 \chi_2^2} \cos \frac{m \pi y'}{y_2} \sin \frac{m \pi y}{y_2} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^{(1)}}{y_1 \chi_1^2} \cos \frac{m \pi y'}{y_1} \sin \frac{m \pi y}{y_1} \right\}. \quad (14.7.13)$$

С учетом известного соотношения [Л14.14]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m \pi y'}{y_i} \sin \frac{m \pi y}{y_i} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi y}{y_i}}{\cos \frac{\pi y}{y_i} - \cos \frac{\pi y'}{y_i}}$$

ядро (14.7.12) интегрального уравнения (14.7.11) имеет особенность типа Коши.

Уравнение (14.7.11) можно решать различными способами. Ниже используется метод Галеркина, согласно которому неизвестную функцию $f'_z(y)$ можно представить в виде разложения по некоторому базису $\{\varphi_n\}$:

$$f'_z(y) = \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(y), \quad (14.7.14)$$

где C_n — неизвестные постоянные. После подстановки (14.7.14) в интегральное уравнение (14.7.11) получается СЛАУ из N уравнений для нахождения постоянных C_n . Лучшая сходимость ряда в решении (14.7.14) достигается в случае, если базисные функции $\{\varphi_n\}$ будут учитывать поведение вблизи ребра (высту-

па) внутри волновода. Такая модификация метода, при которой решение уравнения (14.7.11) ищется в виде (14.7.14) с учетом поведения поля вблизи ребер, получила самое широкое распространение в практике анализа и проектирования волноведущих структур со сложной формой поперечного сечения.

Если суммирование по m в ядре (14.7.13) интегрального уравнения (14.7.11) ограничим некоторым числом M , то мы получим адмитансное уравнение, для которого характерно явление относительной сходимости. Наиболее строгий подход к решению уравнения (14.7.11) заключается в применении математического аппарата теории СИУ.

14.8(*). Вариационный метод расчета постоянных распространения сложных частично заполненных волноводов

Наряду с пустыми и слоистыми волноводами в технике СВЧ находят применение сложные волноведущие структуры с частичным заполнением ферритом или диэлектриком, отличающиеся сложной формой поперечного сечения. К их числу относятся линии передачи, у которых поверхности раздела различных сред либо криволинейные, либо являются плоскостями, не параллельными стенкам волновода, либо поверхностями, одни участки которых параллельны, а другие — перпендикулярны стенкам волновода. Ни для одного из этих волноводов не найдено точных решений. Настоящий раздел посвящен описанию алгоритма определения постоянных распространения собственных волн сложных частично заполненных волноводов вариационными методами.

14.8.1. Вариационные принципы для регулярных волноводов. Вариационный принцип для постоянной распространения γ формулируется для регулярного по длине волновода, содержащего в общем случае изотропную среду с разрывами. Он получается из уравнений Гельмгольца (2.4.13), записанных в компактном виде для функций $\vec{e}(x, y)$ и $\vec{h}(x, y)$ в (14.7.1):

$$\nabla_{\perp} \times \vec{e} - i\gamma [\vec{z}_0, \vec{e}] = -i\omega\mu_a \vec{h}, \quad \nabla_{\perp} \times \vec{h} - i\gamma [\vec{z}_0, \vec{h}] = i\omega\varepsilon_a \vec{e}. \quad (14.8.1)$$

Умножая первое уравнение на \vec{h}^* , а второе на \vec{e}^* и вычитая из первого второе уравнение, получим

$$\begin{aligned} \vec{h}^* (\nabla_{\perp} \times \vec{e}) - \vec{e}^* (\nabla_{\perp} \times \vec{h}) - i\gamma \vec{h}^* [\vec{z}_0, \vec{e}] + i\gamma \vec{e}^* [\vec{z}_0, \vec{h}] = \\ = -i\omega\mu_a \vec{h} \vec{h}^* - i\omega\varepsilon_a \vec{e} \vec{e}^*. \end{aligned} \quad (14.8.2)$$

Интегрируя (14.8.2) по поперечному сечению волновода S_{\perp} , получим следующее выражение для постоянной распространения:

$$\gamma = \frac{\omega\varepsilon_0 \int_{S_{\perp}} \vec{e} \vec{e}^* dS + \omega\mu_0 \int_{S_{\perp}} \vec{h} \vec{h}^* dS + i \int_{S_{\perp}} \vec{e}^* (\nabla_{\perp} \times \vec{h}) dS - i \int_{S_{\perp}} \vec{h}^* (\nabla_{\perp} \times \vec{e}) dS}{\int_{S_{\perp}} \{[\vec{e}, \vec{h}^*] + [\vec{e}^*, \vec{h}]\} \vec{z}_0 dS}. \quad (14.8.3)$$

Рассматривая (14.8.3) как функционал и оценивая вариацию γ , можно показать, что она обращается в нуль при условии, что \vec{e} и \vec{h} удовлетворяют уравнениям (14.8.1) и граничному условию $[\vec{n}_0, \vec{e}] = 0$ на стенках волновода, где \vec{n}_0 — единичный нормальный вектор, направленный внутрь волновода.

Выражение (14.8.3) определяет *вариационный принцип* в смешанной формулировке, так как предполагает знание как электрического, так и магнитного полей.

Иногда более удобно использовать Е-формулировку вариационного принципа. Для этого, исключив поле \vec{h} из первого уравнения (14.8.1) и подставив его во второе, после преобразований получаем следующее соотношение, справедливое при $\mu = \text{const}$:

$$\gamma^2 [\vec{z}_0, [\vec{z}_0, \vec{e}]] + i\gamma \{ \nabla_{\perp} \times [\vec{z}_0, \vec{e}] + [\vec{z}_0, \nabla_{\perp} \times \vec{e}] \} - \nabla_{\perp} \times \nabla_{\perp} \times \vec{e} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{e} = 0. \quad (14.8.4)$$

Умножая (14.8.4) скалярно на \vec{e}^* и интегрируя по сечению волновода S_{\perp} , получаем

$$A\gamma^2 + iB\gamma - C = 0, \quad (14.8.5)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \int_{S_{\perp}} [\vec{z}_0, \vec{e}^*] [\vec{z}_0, \vec{e}] dS, \\ B &= \int_{S_{\perp}} \{ [\vec{z}_0, \vec{e}] \nabla_{\perp} \times \vec{e}^* + [\vec{z}_0, \vec{e}^*] \nabla_{\perp} \times \vec{e} \} dS, \\ C &= - \int_{S_{\perp}} (\nabla_{\perp} \times \vec{e}) (\nabla_{\perp} \times \vec{e}^*) dS + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \int_{S_{\perp}} \epsilon \mu \vec{e} \vec{e}^* dS. \end{aligned} \quad (14.8.6)$$

Учитывая, что в декартовой системе координат

$$\nabla_{\perp} \times \vec{e} = \left[\vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y}, \vec{e} \right],$$

можно записать следующие выражения для коэффициентов A , B , C :

$$\begin{aligned} A &= \int_{S_{\perp}} (e_x e_x^* + e_y e_y^*) dx dy, \\ B &= - \int_{S_{\perp}} \left(e_y \frac{\partial e_z^*}{\partial y} + e_x \frac{\partial e_z^*}{\partial x} + e_y^* \frac{\partial e_z}{\partial y} + e_x^* \frac{\partial e_z}{\partial x} \right) dx dy, \\ C &= - \int_{S_{\perp}} \left[\frac{\partial e_z}{\partial y} \frac{\partial e_z^*}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial x} \frac{\partial e_z^*}{\partial x} + \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial e_y^*}{\partial x} - \frac{\partial e_x^*}{\partial y} \right) \right] dx dy + \\ &\quad + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \int_{S_{\perp}} \epsilon \mu (e_x e_x^* + e_y e_y^* + e_z e_z^*) dx dy. \end{aligned} \quad (14.8.7)$$

Постоянную распространения находим из уравнения

$$\gamma = -i \frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{C}{A} - \left(\frac{B}{2A} \right)^2}. \quad (14.8.8)$$

Таким образом, аппроксимируя электрическое поле \vec{e} какой-либо пробной функцией, мы можем получить выражение для постоянной распространения γ .

Рассмотрим случай использования формулы (14.8.8) для слоистого прямоугольного волновода, собственными функциями которого являются ЛЕ- и ЛМ-волны. В этом случае целесообразно электрический и магнитный векторные потенциалы \vec{A} и \vec{A}^m представить в виде линейной суперпозиции

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \bar{y}_0 \sum_{j,k} \Phi_{jk}^{(m)}(x, y) e^{-i\gamma z}, \\ \vec{A}^m &= \bar{y}_0 \sum_{j,k} \Phi_{jk}^{(e)}(x, y) e^{-i\gamma z},\end{aligned}\quad (14.8.9)$$

где $\Phi_{jk}^{(m)}$ и $\Phi_{jk}^{(e)}$ — мембранные функции собственных волн слоистого волновода.

Для ЛЕ- и ЛМ-волн коэффициент $B = 0$ и (14.8.8) значительно упрощается: $\gamma = \sqrt{C/A}$. С физической точки зрения (14.8.8) целесообразно представить в виде

$$\gamma = \sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_\perp^2}, \quad (14.8.10)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_z^2 &= \frac{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}{A} \int_{S_\perp} \epsilon \mu (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) dx dy, \\ \gamma_\perp^2 &= \frac{1}{A} \int_{S_\perp} \left[\left(\frac{\partial e_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial e_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \\ A &= \int_{S_\perp} (e_x^2 + e_y^2) dx dy.\end{aligned}$$

Эквивалентное волновое число γ_z определяется распределением электрического поля между средами, имеющими различные параметры, а поперечный коэффициент γ_\perp зависит от производных электрического поля только по поперечным координатам.

14.8.2. Прямоугольный волновод с диэлектрическим стержнем. Рассмотрим прямоугольный симметричный волновод с расположенным в центре диэлектрическим стержнем прямоугольного сечения (рис. 14.8). Для определения постоянной распространения основной волны линии передачи будем исходить из (14.8.10). В качестве пробной функции для \vec{e} выберем простейшую

$$\vec{e} = \bar{y}_0 \cos \frac{\pi x}{2a}, \quad (14.8.11)$$

которая соответствует распределению электрического поля основной волны типа H_{10} . Тогда

$$\gamma_\perp^2 = \frac{\int_{S_\perp} \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} \right)^2 dS}{\int_{S_\perp} e_y^2 dS} = \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2, \quad \gamma_z^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{\int_S \epsilon e_y^2 dS + \int_{S_\perp - S} e_y^2 dS}{\int_{S_\perp} e_y^2 dS},$$

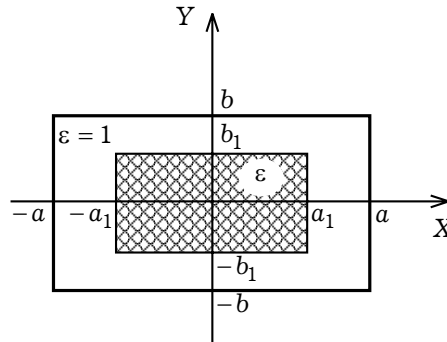


Рис. 14.8

где S — площадь поперечного сечения диэлектрического стержня с диэлектрической проницаемостью ε .

Так как

$$\gamma_{\varepsilon}^2 = k_0^2 \left[1 + \frac{b_1}{b} (\varepsilon - 1) \left(\frac{a_1}{a} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi a_1}{a} \right) \right],$$

то для постоянной распространения имеем

$$\gamma = k_0 \sqrt{1 + \frac{b_1}{b} (\varepsilon - 1) \left(\frac{a_1}{a} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi a_1}{a} \right) - \left(\frac{\lambda}{4a} \right)^2}. \quad (14.8.12)$$

Рассмотрим полученную формулу в трех предельных случаях:

а) $a_1 \ll a$, $b_1 \gg a_1$ (тонкий слой диэлектрика, параллельный линиям электрического поля). Тогда

$$\gamma - \gamma_0 = \left(\frac{k_0}{\gamma_0} \right)^2 \frac{a_1 b_1}{ab} (\varepsilon - 1), \quad (14.8.13)$$

где $\gamma_0 = k_0 \sqrt{1 - (\lambda / (4a))^2}$ — постоянная распространения H_{10} в пустом волноводе;

б) $b_1 \ll b$, $a_1 \gg b_1$ (тонкий слой диэлектрика, перпендикулярный линиям электрического поля). В этом случае

$$\gamma - \gamma_0 = \frac{k_0^2}{2\gamma_0} \frac{b_1}{b} (\varepsilon - 1) \left(\frac{a_1}{a} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi a_1}{a} \right); \quad (14.8.14)$$

в) $b = b_1$. Для этого случая существует строгое дисперсионное уравнение, поэтому этот случай важен для оценки вариационной формулы (14.8.10), которая дает следующее приближенное значение для постоянной распространения:

$$\gamma = k_0 \sqrt{\gamma_0^2 + (\varepsilon - 1) \left(\frac{a_1}{a} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi a_1}{a} \right)}. \quad (14.8.15)$$

На рис. 14.9 приведены зависимости γ от параметра a_1 / a , полученные по (14.8.15) (штриховые линии) при различных значениях ε ($a = 23$ мм; $b = 10$ мм; $\lambda = 3.2$ см). Здесь же построены кривые, полученные с помощью точного дисперсионного уравнения (сплошные линии). Нетрудно видеть, что при $\varepsilon < 5$ формула (14.8.15) дает неплохое приближение; при возрастании ε ошибка растет.

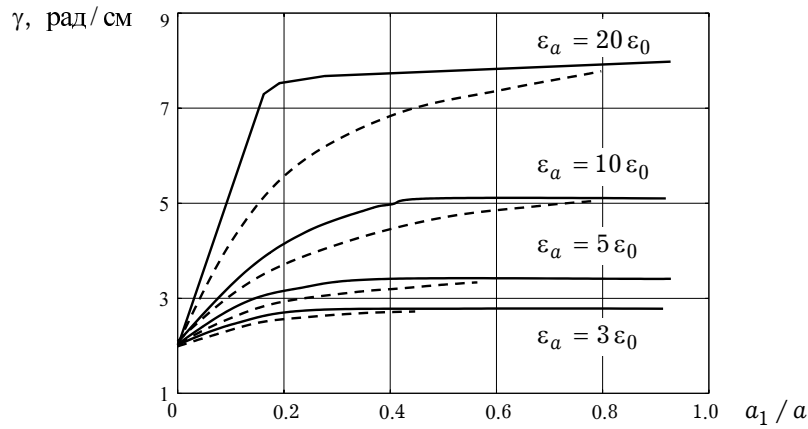


Рис. 14.9

Выбор пробной функции для \vec{e} в виде (14.8.11) позволяет получить выражение для постоянной распространения в первом приближении. Для получения формулы во втором приближении можно использовать аппроксимацию в виде

$$\vec{e} = \vec{y}_0 \left(\cos \frac{\pi x}{a} + p \cos \frac{3\pi x}{a} \right),$$

где p — некоторый оптимизационный параметр.

Описанная выше процедура вычисления постоянных распространения регулярных волноводов есть *метод Ритца*, который имеет ряд преимуществ по сравнению с теорией возмущений волноводов. Прежде всего метод Ритца позволяет получить любое приближение и оценить внутреннюю сходимость численных результатов. В ряде случаев возможна и аналитическая оценка погрешности полученных решений. Применение же метода возмущений не позволяет, как правило, получить оценки точности решений. Тем не менее применение метода возмущений для решения некоторых двумерных задач оправдано тем обстоятельством, что он позволяет получить более простые формулы для постоянной распространения.

Раздел 14.8 написан на основе работы [Л14.15]

14.9(*). Волноводно-щелевая линия передачи. Метод сингулярного интегрального уравнения

Среди различных ЛП, предложенных и исследованных за последнее время, наибольшее распространение получили волноводно-щелевые линии (ВЩЛ), на основе которых разработано большое количество активных и пассивных функциональных элементов СВЧ диапазона. ВЩЛ представляет собой диэлектрическую подложку с металлическим покрытием, образующим определенную конфигурацию проводника, размещенную внутри прямоугольного волновода, параллельно его узким стенкам (в Е-плоскости). В данном разделе рассмотрим простейшую ВЩЛ.

14.9.1. Постановка задачи. Поперечное сечение ВЩЛ приведено на рис. 14.10. Металлический экран и токопроводящие полосы на границе диэлектрика при

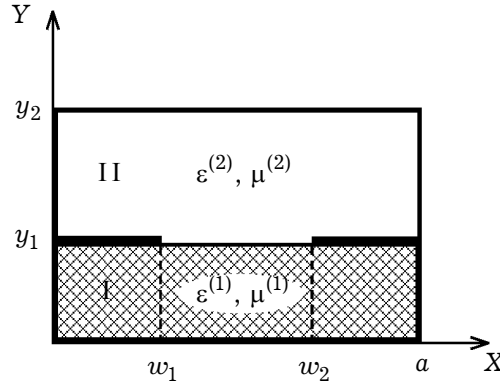


Рис. 14.10

$y = y_1$ будем считать бесконечно тонкими и идеально-проводящими. Вдоль оси OZ структура предполагается регулярной. Будем искать собственные волны ВЦЛ, которые вдоль оси OZ должны иметь зависимость $\exp\{-i\gamma z\}$, где γ — неизвестная пока постоянная распространения какой-либо собственной волны (в общем случае γ — бесконечный набор комплексных неизвестных постоянных). Требуется найти постоянную распространения γ и структуру (распределение векторных функций \vec{E} и \vec{H}) полей собственных волн ВЦЛ.

Введём на полосках вектор поверхностной плотности тока $\vec{\eta}_\tau$:

$$\vec{\eta}_\tau(x) = [\vec{y}_0, \vec{H}(x, y = y_1 + 0) - \vec{H}(x, y = y_1 - 0)], \quad (14.9.1)$$

$$x \in [0, w_1] \cup [w_2, a],$$

где $\vec{H}(x, y = y_1 + 0)$ и $\vec{H}(x, y = y_1 - 0)$ — вектора напряжённости магнитного поля на верхних границах полосок (при $y = y_1 + 0$) и на нижних границах полосок (при $y = y_1 - 0$) соответственно. Из (14.9.1) следует, что вектор $\vec{\eta}_\tau$ имеет составляющие η_z и η_x .

Разложим касательные составляющие векторов $\vec{\eta}_\tau$, \vec{E} и \vec{H} какой-либо собственной волны в плоскости $y = y_1$ в ряды Фурье на отрезке $[0, a]$ (с учётом граничных условий при $x = 0, a$):

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau(x, y_1 \pm 0) &= \vec{e}_\tau(x, y_1 \pm 0) e^{-i\gamma z} = \\ &= e^{-i\gamma z} \sum_{m=0}^{+\infty} [\tilde{x}_0 \mathcal{E}_{mx}^\pm \cos(\beta_m x) + \tilde{z}_0 \mathcal{E}_{mz}^\pm \sin(\beta_m x)], \\ \vec{H}_\tau(x, y_1 \pm 0) &= \vec{h}_\tau(x, y_1 \pm 0) e^{-i\gamma z} = \\ &= e^{-i\gamma z} \sum_{m=0}^{+\infty} [\tilde{x}_0 \mathcal{H}_{mx}^\pm \sin(\beta_m x) + \tilde{z}_0 \mathcal{H}_{mz}^\pm \cos(\beta_m x)], \\ \vec{\eta}_\tau(x) &= [\vec{y}_0, \vec{h}(x, y_1 + 0) - \vec{h}(x, y_1 - 0)] e^{-i\gamma z} = \\ &= e^{-i\gamma z} \sum_{m=0}^{+\infty} [\tilde{x}_0 \mathcal{F}_{mx}^\pm \cos(\beta_m x) + \tilde{z}_0 \mathcal{F}_{mz}^\pm \sin(\beta_m x)], \end{aligned} \quad (10.9.2)$$

где

$$\begin{aligned}
 (1 + \delta_{m0}) \mathcal{E}_{mx}^{\pm} &= \frac{2}{a} \int_0^a E_x(x', y_1 \pm 0) \cos(\beta_m x') dx', \\
 \mathcal{E}_{mz}^{\pm} &= \frac{2}{a} \int_0^a E_z(x', y_1 \pm 0) \sin(\beta_m x') dx', \\
 \mathcal{H}_{mx}^{\pm} &= \frac{2}{a} \int_0^a H_x(x', y_1 \pm 0) \sin(\beta_m x') dx', \\
 (1 + \delta_{m0}) \mathcal{H}_{mz}^{\pm} &= \frac{2}{a} \int_0^a H_z(x', y_1 \pm 0) \cos(\beta_m x') dx', \\
 (1 + \delta_{m0}) \mathcal{F}_{mx} &= \frac{2}{a} \int_0^a \eta_x(x') \cos(\beta_m x') dx', \\
 \mathcal{F}_{mz} &= \frac{2}{a} \int_0^a \eta_z(x') \sin(\beta_m x') dx'; \quad \beta_m = \frac{m\pi}{a}.
 \end{aligned} \tag{14.9.2a}$$

Для решения краевой задачи необходимо учесть граничные условия при $y = y_1$:

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_{\tau}(x, y_1 + 0) &= \bar{E}_{\tau}(x, y_1 - 0), \quad x \in [0, a], \\
 \bar{E}_{\tau}(x, y_1 + 0) &= 0, \quad x \in [0, w_1] \cup [w_2, a], \\
 [\bar{y}_0, \bar{H}_{\tau}(x, y_1 + 0) - \bar{H}_{\tau}(x, y_1 - 0)] &= \bar{\eta}_{\tau}, \quad x \in [w_1, w_2].
 \end{aligned} \tag{14.9.3}$$

14.9.2. Тензор входного адмитанса области для m -Фурье-гармоники. Плоскость с токопроводящими полосками $y = y_1$ разбивает линию передачи на две области: $y < y_1$ и $y > y_1$. Определим тензоры входных адмитансов m -Фурье-гармоники $[Y_{mij}^+]$ области $y > y_1$ и $[Y_{mij}^-]$ области $y < y_1$ следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_{mx}^{\pm} \\ \mathcal{H}_{mz}^{\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{m11}^{\pm} & Y_{m12}^{\pm} \\ Y_{m21}^{\pm} & Y_{m22}^{\pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{mz}^{\pm} \\ \mathcal{E}_{mx}^{\pm} \end{bmatrix}, \tag{14.9.4}$$

где знаки «+» и «-» относятся соответственно к областям $y > y_1$ и $y < y_1$. Заметим, что элементы Y_{mij}^+ ($i, j = 1, 2$) несут всю информацию о свойствах области $y > y_1$ для m -Фурье-гармоники. В частности, они должны быть записаны с учётом граничных условий при $y = y_2$. Соответственно, для элементов Y_{mij}^- ($i, j = 1, 2$) выполняются граничные условия при $y = 0$.

Из условий (14.9.3) следует, что

$$\mathcal{E}_{mx}^+ = \mathcal{E}_{mx}^- = \mathcal{E}_{mx}, \quad \mathcal{E}_{mz}^+ = \mathcal{E}_{mz}^- = \mathcal{E}_{mz}. \tag{14.9.5}$$

Получим выражения для элементов тензоров входных адмитансов m -Фурье-гармоники $[Y_{mij}^{\pm}]$. Исходя из уравнений Максвелла, с учётом граничных условий при $x = 0, a$ ($E_y = E_z = 0$), поля внутри каждого n -слоя ($n = 1, 2$) можно предста-

ВИТЬ В ВИДЕ

$$E_z^{(n)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(C_{m1}^{(n)} \cos(r_m^{(n)} y) + C_{m2}^{(n)} \sin(r_m^{(n)} y) \right) \sin(\beta_m x) e^{-i\gamma z}, \quad (14.9.6)$$

$$E_x^{(n)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^4 A_{mi}^{(n)}(y) C_{mi}^{(n)} \cos(\beta_m x) e^{-i\gamma z},$$

$$H_x^{(n)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^4 D_{mi}^{(n)}(y) C_{mi}^{(n)} \sin(\beta_m x) e^{-i\gamma z}, \quad (14.9.7)$$

$$H_z^{(n)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(C_{m3}^{(n)} \cos(r_m^{(n)} y) + C_{m4}^{(n)} \sin(r_m^{(n)} y) \right) \cos(\beta_m x) e^{-i\gamma z},$$

где

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_{m1}^{(n)} \\ A_{m2}^{(n)} \end{Bmatrix} &= - \begin{Bmatrix} D_{m3}^{(n)} \\ D_{m4}^{(n)} \end{Bmatrix} = - \frac{i\gamma\beta_m}{[k_c^{(n)}]^2} \begin{Bmatrix} \cos(r_m^{(n)} y) \\ \sin(r_m^{(n)} y) \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} A_{m3}^{(n)} \\ A_{m4}^{(n)} \end{Bmatrix} &= - \frac{ir_m^{(n)}\omega\mu_0\mu^{(n)}}{[k_c^{(n)}]^2} \begin{Bmatrix} -\sin(r_m^{(n)} y) \\ \cos(r_m^{(n)} y) \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} D_{m1}^{(n)} \\ D_{m2}^{(n)} \end{Bmatrix} &= - \frac{\varepsilon_0\varepsilon^{(n)}}{\mu_0\mu^{(n)}} \begin{Bmatrix} A_{m3}^{(n)} \\ A_{m4}^{(n)} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} B_{m1}^{(n)} \\ B_{m2}^{(n)} \end{Bmatrix} &= - \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon^{(n)}}{\gamma} \begin{Bmatrix} A_{m1}^{(n)} \\ A_{m2}^{(n)} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} B_{m3}^{(n)} \\ B_{m4}^{(n)} \end{Bmatrix} = - \frac{\gamma}{\omega\mu_0\mu^{(n)}} \begin{Bmatrix} A_{m3}^{(n)} \\ A_{m4}^{(n)} \end{Bmatrix}, \\ [k_c^{(n)}]^2 &= k_0^2 \varepsilon^{(n)} \mu^{(n)} - \gamma^2, \quad r_m^{(n)} = \sqrt{[k_c^{(n)}]^2 - \beta_m^2}, \end{aligned}$$

$C_{mi}^{(n)}$ ($i = \overline{1, \dots, 4}$) — неизвестные постоянные.

Сравнивая (14.9.6) и (14.9.7) с (14.9.2) при $y = y_1 \pm 0$ можно записать:

$$\mathcal{E}_{mz}^{\pm} = C_{m1}^{(n)} \cos(r_m^{(n)} y_1) + C_{m2}^{(n)} \sin(r_m^{(n)} y_1),$$

$$\mathcal{E}_{mx}^{\pm} = \sum_{i=1}^4 A_{mi}^{(n)}(y_1) C_{mi}^{(n)}, \quad (14.9.6a)$$

$$\mathcal{H}_{mx}^{\pm} = \sum_{i=1}^4 D_{mi}^{(n)}(y_1) C_{mi}^{(n)}, \quad (14.9.7a)$$

$$\mathcal{H}_{mz}^{\pm} = C_{m3}^{(n)} \cos(r_m^{(n)} y_1) + C_{m4}^{(n)} \sin(r_m^{(n)} y_1).$$

Верхнему знаку «+» в левых частях соотношений (14.9.6a) и (14.9.7a) соответствует значение $n = 2$, а «-» соответствует значение $n = 1$.

Получим теперь выражения в явном виде для элементов Y_{mij}^{-} ($i, j = \overline{1, 2}$) области $y < y_1$. Область $y < y_1$ представляет собой изотропный слой диэлектрика толщиной y_1 , лежащий на идеально проводящей металлической плоскости при $y = 0$

(см. область I на рис. 14.10). Учитывая граничные условия при $y = 0$ ($E_x = E_z = 0$), получаем в соотношениях (14.9.6) и (14.9.7) $C_{m1}^{(1)} = C_{m4}^{(1)} = 0$. Затем, выражая неизвестные коэффициенты $C_{m2}^{(1)}$ и $C_{m3}^{(1)}$ из (14.9.6a) при $n = 1$ через \mathcal{E}_{mz}^- и \mathcal{E}_{mx}^- и подставляя в (14.9.7a) при $n = 1$, приходим к следующим выражениям для элементов тензора $[Y_{mij}^-]$ для области $y < y_1$:

$$\begin{aligned} Y_{m11}^- &= \frac{i[k_m^{(1)}]^2}{\omega\mu_0\mu^{(1)}r_m^{(1)}} \operatorname{ctg}(r_m^{(1)}y_1), & Y_{m22}^- &= -\frac{i\epsilon_m[k_c^{(1)}]^2}{\omega\mu_0\mu^{(1)}r_m^{(1)}} \operatorname{ctg}(r_m^{(1)}y_1), \\ Y_{m12}^- &= Y_{m21}^- = \frac{\gamma\beta_m}{\omega\mu_0\mu^{(1)}r_m^{(1)}} \operatorname{ctg}(r_m^{(1)}y_1), \end{aligned} \quad (14.9.8)$$

где $[k_m^{(1)}]^2 = k_0^2\epsilon^{(1)}\mu^{(1)} - \beta_m^2$; $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_2 = 2$ при $m > 0$.

Получим теперь выражения для элементов тензора $[Y_{mij}^+]$ области $y > y_1$. Применяя граничные условия при $y = y_2$ ($E_z = 0$, $\partial H_z / \partial y = 0$), из соотношений (14.9.6a) и (14.9.7a) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_{m1}^{(2)} \cos r_m^{(2)}y_2 + C_{m2}^{(2)} \sin r_m^{(2)}y_2 &= 0, \\ -C_{m3}^{(2)} \sin r_m^{(2)}y_2 + C_{m4}^{(2)} \cos r_m^{(2)}y_2 &= 0, \end{aligned}$$

из которой следует, что

$$\begin{aligned} C_{m1}^{(2)} &= -\operatorname{tg} r_m^{(2)}y_2 C_{m2}^{(2)}, \\ C_{m4}^{(2)} &= \operatorname{tg} r_m^{(2)}y_2 C_{m3}^{(2)}. \end{aligned} \quad (14.9.9)$$

Для получения элементов тензора входного адмитанса $[Y_{mij}^+]$ области $y > y_1$ необходимо из соотношений (14.9.6a) при $n = 2$ с учётом (14.9.9) выразить неизвестные постоянные $C_{m2}^{(n)}$, $C_{m3}^{(n)}$ через Фурье-составляющие \mathcal{E}_{mz}^+ и \mathcal{E}_{mx}^+ :

$$\begin{aligned} C_{m2}^{(2)} &= \frac{\cos r_m^{(2)}y_2}{\sin[r_m^{(2)}(y_2 - y_1)]} \mathcal{E}_{mz}^{(2)}(y_1), \\ C_{m3}^{(2)} &= \frac{\cos r_m^{(2)}y_2}{\omega\mu_0\mu^{(2)}r_m^{(2)} \sin[r_m^{(2)}(y_2 - y_1)]} \times \\ &\times \left\{ i[k_c^{(2)}]^2 \mathcal{E}_{mx}^{(2)}(y_1) - \gamma\beta_m \mathcal{E}_{mz}^{(2)}(y_1) \right\}. \end{aligned} \quad (14.9.10)$$

Подставляя выражения (14.9.10) для неизвестных постоянных $C_{m2}^{(2)}$, $C_{m3}^{(2)}$ в соотношения (14.9.7a) и учитывая определение тензора входного адмитанса (14.9.4), нетрудно записать следующие формулы для элементов тензора $[Y_{mij}^+]$:

$$\begin{aligned} Y_{m11}^+ &= -\frac{i[k_m^{(2)}]^2 \operatorname{ctg}[r_m^{(2)}(y_2 - y_1)]}{\omega\mu_0\mu^{(2)}r_m^{(2)}}, \\ Y_{m12}^+ &= Y_{m21}^+ = -\frac{\gamma\beta_m}{\omega\mu_0\mu^{(2)}r_m^{(2)}} \operatorname{ctg}[r_m^{(2)}(y_2 - y_1)], \\ Y_{m22}^+ &= \frac{i\epsilon_m[k_c^{(2)}]^2 \operatorname{ctg}[r_m^{(2)}(y_2 - y_1)]}{\omega\mu_0\mu^{(2)}r_m^{(2)}}. \end{aligned} \quad (14.9.11)$$

14.9.3. Адмитансные интегральные уравнения. Анализируя процедуру вывода элементов тензоров входных адмитансов $[Y_{mij}^+]$ и $[Y_{mij}^-]$, можно сделать замечание, что при их выводе учтены все граничные условия на экране ВЩЛ. Обратимся теперь к граничным условиям при $y = y_1$. Нетрудно заметить, что первые два граничных условия из (14.9.3) выполняются при (14.9.5). Подставим теперь в третье граничное условие из (14.9.3) выражение \vec{H}_τ из (14.9.2) с учётом (14.9.4). В результате нетрудно получить следующую систему функциональных соотношений ($x \in [0, a]$):

$$\begin{aligned}\eta_z &= \sum_m^{\infty} [Y_{m11}e_{mz} + Y_{m12}e_{mx}] \sin \beta_m x, \\ \eta_x &= \sum_m^{\infty} [Y_{m21}e_{mz} + Y_{m22}e_{mx}] \cos \beta_m x,\end{aligned}\quad (14.9.12)$$

где e_{mz} , e_{mx} в нашем случае определяются выражениями:

$$\begin{aligned}(1 + \delta_{m0})e_{mx} &= \frac{2}{a} \int_{w_1}^{w_2} E_x(x', y = y_1) \cos \beta_m x' dx', \\ e_{mz} &= \frac{2}{a} \int_{w_1}^{w_2} E_z(x', y = y_1) \sin \beta_m x' dx' .\end{aligned}\quad (14.9.13)$$

Тензорную матрицу $[Y_{mij}]$ будем называть *матрицей адмитансов*, элементы которой выражаются через элементы тензоров входных адмитансов Y_{mij}^+ и Y_{mij}^- областей $y > y_1$ и $y < y_1$ следующим образом:

$$Y_{mij} = Y_{mij}^+ - Y_{mij}^- . \quad (14.9.14)$$

Очевидно, что при записи (14.9.13) учтено и второе граничное условие из (14.9.3).

Функциональные соотношения (14.9.12) при $x \in [w_1, w_2]$ переходят в следующее векторное интегральное уравнение первого рода (после перестановки порядка суммирования и интегрирования):

$$\int_{w_1}^{w_2} \vec{E}_\tau(x') \vec{K}(x, x') dx' = 0; \quad x \in [w_1, w_2], \quad (14.9.15)$$

записанного относительно вектора тангенциального электрического поля в щели $\vec{E}_\tau = \{f_z, f_x\}^T$, $f_z = E_z(x, y = y_1)$, $f_x = E_x(x, y = y_1)$; символ «Т» означает транспонирование вектора-строки в вектор-столбец. Элементы функции Грина суть:

$$\begin{aligned}K_{ij}(x, x') &= \sum_m^{\infty} Y_{mij} \varphi_{mi}(x) \varphi_{mj}(x'), \\ \varphi_{m1}(x) &= \sin \beta_m x, \quad \varphi_{m2}(x) = \cos \beta_m x .\end{aligned}\quad (14.9.15a)$$

Векторное интегральное уравнение (14.9.15) согласно терминологии раздела (14.2.3) называется *адмитансным интегральным уравнением* (см. (14.2.19)).

14.9.4. Сингулярные интегральные уравнения. Определим характер сходимости рядов (14.9.15a). Для этой цели определим асимптотики коэффициентов Y_{mij} при $m \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \{Y_{m11}\} &= t_1 m, & \lim_{m \rightarrow \infty} \{Y_{m21}\} &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \{Y_{m12}\} = t_2, & \lim_{m \rightarrow \infty} \{Y_{m22}\} &= \frac{t_3}{m}, \end{aligned}$$

где постоянные коэффициенты t_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{i\pi}{\mu_0 \omega \mu^3 a}, & t_2 &= -\frac{\gamma}{\mu^3 \mu_0 \omega}, \\ t_3 &= \frac{i \varepsilon_0 \omega a}{\pi} \left[\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} - \frac{1}{\mu^3} (\gamma / k_0)^2 \right], \\ \frac{1}{\mu^3} &= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}}. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд с коэффициентами Y_{m11} является расходящимся, а другие ряды в неявном виде содержат логарифмические особенности и особенности типа Коши.

Для устранения расходимости ряда с коэффициентами Y_{m11} перейдем от функции f_z к ее производной $f'_z = df_z / dx$ с помощью соотношения

$$\int_{w_1}^{w_2} f_z(x') \sin \beta_m x' dx' = \frac{1}{\beta_m} \int_{w_1}^{w_2} f'_z(x') \cos \beta_m x' dx', \quad (14.9.16)$$

которое получается из формулы интегрирования по частям с учетом того, что $f_z(w_1) = f_z(w_2) = 0$. Кроме этого введем новые переменные (*переменные Швингера*):

$$\begin{aligned} u &= s^{-1} [\cos(\pi x / a) - c], \\ v &= s^{-1} [\cos(\pi x' / a) - c], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c &= \cos \frac{\pi(w_1 + w_2)}{2a} \cos \frac{\pi(w_2 - w_1)}{2a}, \\ s &= \sin \frac{\pi(w_1 + w_2)}{2a} \sin \frac{\pi(w_2 - w_1)}{2a} \end{aligned}$$

и улучшим сходимость рядов (14.9.15a) в интегральном уравнении (14.9.15) путем вычитания из них соответствующих асимптотических рядов.

После упомянутых преобразований векторное уравнение (14.9.15) переходит в следующие два сингулярных интегральных уравнения:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \varphi_z(v) \sum_{m=1}^{\infty} (m^{-1} Y_{m11} - t_1) T_m(sv + c) U_{m-1}(su + c) dv + \\ &+ \frac{t_1}{2s} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_z(v) dv}{v - u} + \int_{-1}^1 \varphi_x(v) \sum_{m=1}^{\infty} (Y_{m12} - t_2) T_m(sv + c) \times \\ &\times U_{m-1}(su + c) dv + \frac{t_2}{2s} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_x(v) dv}{v - u} = 0, \end{aligned} \quad (14.9.17a)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \varphi_z(v) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(Y_{m21} - t_2)}{m} T_m(sv + c) T_m(su + c) dv - \\
& - \frac{t_2}{2} \int_{-1}^1 \varphi_z(v) \ln|s(v - u)| dv + Y_{022} \int_{-1}^1 \varphi_x(v) dv + \\
& + \int_{-1}^1 \varphi_x(v) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(mY_{m22} - t_3)}{m} T_m(sv + c) T_m(su + c) dv - \\
& - \frac{t_3}{2} \int_{-1}^1 \varphi_x(v) \ln|s(v - u)| dv = 0,
\end{aligned} \tag{14.9.17б}$$

где введены новые неизвестные функции

$$\begin{aligned}
\varphi_z(v) &= \frac{a}{\pi} f'_z(v) \frac{dx'}{dv}, \\
\varphi_x(v) &= f_x(v) \frac{dx'}{dv}.
\end{aligned} \tag{14.9.18}$$

В (14.9.17) $T_m(z)$ — полиномы Чебышева первого рода порядка m , $U_m(z)$ — полиномы Чебышева второго рода порядка m .

При выводе уравнений (14.9.17) были использованы соотношения

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x'}{a} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\cos \frac{\pi x'}{a} - \cos \frac{\pi x}{a}}, \tag{14.9.19}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x'}{a}}{m} = -\frac{1}{2} \ln 2 \left| \cos \frac{\pi x'}{a} - \cos \frac{\pi x}{a} \right|. \tag{14.9.20}$$

Для получения системы сингулярных интегральных уравнений продифференцируем второе уравнение системы (14.9.17) по u :

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \varphi_z(v) \sum_{m=1}^{\infty} (Y_{m21} - t_2) T_m(sv + c) U_{m-1}(su + c) dv - \\
& - \frac{t_2}{2s} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_z(v) dv}{v - u} + \int_{-1}^1 \varphi_x(v) \sum_{m=1}^{\infty} (mY_{m22} - t_3) \times \\
& \times T_m(sv + c) U_{m-1}(su + c) dv - \frac{t_3}{2s} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_x(v) dv}{v - u} = 0
\end{aligned} \tag{14.9.21}$$

и запишем соотношения (14.9.17) в векторном виде

$$\int_{-1}^1 \frac{\vec{\mathcal{P}}(v) dv}{v - u} + s \int_{-1}^1 \vec{\mathcal{P}}(v) \vec{T}(v, u) dv = 0 \tag{14.9.22}$$

относительно неизвестной векторной функции

$$\vec{\mathcal{P}}(u) = \left\{ \frac{ia}{\pi} f'_z(x) \frac{dx}{du}, f_x(x) \frac{dx}{du} \right\}^T.$$

Элементы тензора $\vec{T}(v, u)$ равны:

$$T_{ij}(v, u) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{mij}(\gamma) T_m(c + sv) U_{m-1}(c + vu), \quad (14.9.23)$$

$$\delta_{m1i} = (it_3 \Delta_{m1i} - t_2 \Delta_{m2i}) \Delta_t^{-1}, \quad \delta_{m2i} = -(t_2 \Delta_{m1i} + it_1 \Delta_{m2i}) \Delta_t^{-1},$$

$$\Delta_t = t_1 t_3 - t_2^2, \quad \Delta_{m11} = -i(m^{-1} Y_{m11} - t_1),$$

$$\Delta_{m12} = \Delta_{m21} = Y_{m12} - t_2, \quad \Delta_{m22} = i(m Y_{m22} - t_3).$$

Для получения решения уравнения (14.9.22) могут быть использованы формулы обращения интеграла типа Коши (15.6.40) для случая, когда контур L_n представляет собой отрезок $[-1, 1]$, неизвестный вектор $\vec{\mathcal{P}}(u)$ неограничен вблизи его концов: $u = \pm 1$. Такое поведение вектора $\vec{\mathcal{P}}(u)$ следует из условий на рёбрах для электрического поля (см. главу 3). В результате можно записать интегральное уравнение Фредгольма второго рода в виде

$$\vec{\mathcal{P}}(u) = s \int_{-1}^1 \vec{G}(v, u) \vec{\mathcal{P}}(v) dv + (1 - u^2)^{-1/2} \vec{A}, \quad (14.9.24)$$

где

$$G_{ij}(v, u) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{mij}(\gamma) T_m(c + sv) \gamma_m(u),$$

$$\gamma_m(u) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - u^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - y^2} U_{m-1}(c + sy) dy}{y - u},$$

\vec{A} — неизвестный вектор.

При симметричном расположении щели относительно вертикальной плоскости $x = a/2$ интегральное уравнение (14.9.24) распадается на два независимых интегральных уравнения Фредгольма второго рода. Физически это означает, что в такой структуре существуют две группы волн: четные и нечетные типы. Причем, под нечетным типом понимается волна, которая возбуждает электрическое поле с несимметричной относительно оси симметрии поперечной составляющей. Четный тип возбуждает электрическое поле с симметричной составляющей E_x .

Так как коэффициенты δ_{mi} достаточно быстро убывают при возрастании m ($\delta_{mi} \sim 1/m^2$), то суммирование в этих рядах можно ограничить некоторым числом M . В этом случае ядро интегрального уравнения Фредгольма (14.9.24) становится вырожденным и может быть просто получено приближенное решение краевой задачи о собственных волн ВЩЛ. В качестве примера рассмотрим нулевое приближение ($M = 0$) для четных типов волн ($s = 0$). В этом приближении мы должны пренебречь разностью в суммах ядер (14.9.24) между действительными и их асимптотическими членами для $m > 0$, то есть $\vec{G}(v, u) = 0$. Тогда из (14.9.24) следует, что

$$\varphi_z(u) = \frac{A_1}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad \varphi_x(u) = \frac{A_2}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (14.9.25)$$

где A_1, A_2 — неизвестные постоянные.

Для определения A_1 обратимся к граничному условию для

$$E_z(u) = \frac{\pi}{a} \int_{-1}^u \varphi_z(u) du \quad (14.9.26)$$

при $x = w_2$.

Граничному условию $E_z = 0$ при $x = w_2$ соответствует равенство

$$\int_{-1}^1 \varphi_z(u) du = 0, \quad (14.9.27)$$

из которого следует, что $A_1 = 0$.

Постоянная A_2 определяется из второго уравнения в (14.9.17) при $\varphi_z(v) = 0$:

$$\left(Y_{022} - \frac{t_3}{2} \ln s \right) \int_{-1}^1 \varphi_x(v) dv - \frac{t_3}{2} \int_{-1}^1 \varphi_x(v) \ln|v - u| dv = 0. \quad (14.9.28)$$

При записи последнего уравнения мы также пренебрегли разностью в суммах ядер между действительными и их асимптотическими членами для $m > 0$.

Подстановка решения (14.9.25) в интегральное уравнение (14.9.28) приводит к дисперсионному уравнению

$$Y_{022} - t_3 \frac{\ln s}{2} = 0. \quad (14.9.29)$$

В этом приближении

$$E_x(x, y = y_1) = -\frac{\pi A_2}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \left\{ s^2 - \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right\}^{-1/2}, \quad (14.9.30)$$

$$E_z(x, y = y_1) = 0.$$

Для второго приближения для четных типов волн полагаем $\delta_{mij} = 0$ в суммах ядер $G_{ij}(v, u)$ в (14.9.24) для $m > 2$. Заметим, что для четных типов волн суммирование в (14.9.25) проводится по четным m . В этом случае

$$G_{ij}(v, u) = \frac{2}{\pi} \frac{\delta_{2ij} T_2(sv)}{\sqrt{1 - u^2}} \alpha_2(u), \quad (14.9.31)$$

где

$$\alpha_2(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - y^2} U_1(sy) dy}{y - u}.$$

Так как $T_2(v) = 2v^2 - 1$ и $U_1(y) = 2y$, то

$$T_2(sv) = s^2 T_2(v) + (s^2 - 1),$$

$$\alpha_2(u) = -s T_2(u),$$

и для четных типов волн

$$G_{ij}(v, u) = \frac{2s \delta_{2ij}}{\pi \sqrt{1 - u^2}} \left[(1 - s^2) - s^2 T_2(v) \right] T_2(u). \quad (14.9.32)$$

Поэтому решение уравнения (14.9.24) во втором приближении будем искать в виде

$$\varphi_z(u) = \frac{A_1 + b_2 T_2(u)}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \varphi_x(u) = \frac{A_2 + a_2 T_2(u)}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (14.9.33)$$

где A_1, A_2, b_2, a_2 — неизвестные постоянные.

Для определения постоянной A_1 обратимся к граничному условию для E_z (14.9.27), из которого с учетом соотношения

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(v) T_n(v) dv}{\sqrt{1-v^2}} = - \begin{cases} \pi, & m = n = 0 \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (14.9.34)$$

следует, что $A_1 = 0$.

Подстановка решений (14.9.33) в уравнение (14.9.24) приводит к следующим соотношениям для неизвестных постоянных:

$$\begin{aligned} b_2 &= 2s^2(1-s^2)\delta_{212}A_2 - s^2\delta_{211}b_2 - s^4\delta_{212}a_2, \\ a_2 &= 2s^2(1-s^2)\delta_{222}A_2 - s^2\delta_{221}b_2 - s^4\delta_{222}a_2. \end{aligned}$$

Выразив a_2, b_2 через постоянную A_2 , получим

$$\begin{aligned} b_2 &= 2s^2(1-s^2)S_1A_2, \\ a_2 &= 2s^2(1-s^2)S_2A_2, \end{aligned} \quad (14.9.35)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{t_3 \Delta_{212} - t_2 \Delta_{222}}{\Delta S}, \\ S_2 &= \frac{\Delta_{222}(s^4\Delta_{211} + t_1) - \Delta_{212}(s^4\Delta_{221} + t_2)}{\Delta S}, \\ \Delta S &= (s^4\Delta_{211} + t_1)(s^4\Delta_{222} + t_2) - (s^4\Delta_{212} + t_2)(s^4\Delta_{221} + t_2). \end{aligned}$$

Для получения дисперсионного уравнения воспользуемся вторым уравнением из (14.9.17), подставив в него решение (14.9.33), положив при этом постоянную $A_1 = 0$:

$$\begin{aligned} T_2(u) \{ & t_2b_2 + t_3a_2 + s^4[\Delta_{221}b_2 + \Delta_{222}a_2] + 2s^2(s^2-1)\Delta_{222}A_2 \} + \\ & + (2Y_{022} - t_3 \ln s)A_2 + 2s^2(s^2-1)\Delta_{222}A_2 + \\ & + s^2(s^2-1)[\Delta_{221}b_2 + \Delta_{222}a_2] = 0. \end{aligned} \quad (14.9.36)$$

Так как полиномы Чебышева ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, то уравнение (14.9.36) распадается на два независимых

$$\begin{aligned} b_2(s^4\Delta_{221} + t_2) + a_2(s^4\Delta_{222} + t_3) + 2s^2(s^2-1)\Delta_{222}A_2 &= 0, \\ (2Y_{022} - t_3 \ln s)A_2 - s^2(1-s^2)(\Delta_{221}a_2 + \Delta_{222}b_2) + \\ + 2s^2(s^2-1)\Delta_{222}A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (14.9.37)$$

Первое уравнение следует из системы уравнений (14.9.35), поэтому мы его отбросим. А во второе уравнение подставим соотношения (14.9.35). В результате получим искомое дисперсионное уравнение

$$2Y_{022} - t_3 \ln s + (1 - s^2)^2 \left\{ \Delta_{222} - s^4 [\Delta_{221}S_1 + \Delta_{222}S_2] \right\} = 0. \quad (14.9.38)$$

Подстановка (14.9.35) в решение (14.9.33) приводит к следующим выражениям для составляющих E_x и E_z в области щели:

$$\begin{aligned} E_z(x, y = y_1) &= \frac{2\pi}{a} A_2 (1 - s^2) S_1 \cos \frac{\pi x}{a} \left(s^2 - \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right)^{1/2}, \\ E_x(x, y = y_1) &= -\frac{\pi}{a} A_2 \sin \frac{\pi x}{a} \left[1 - 2s^2 (1 - s^2) S_2 + \right. \\ &\quad \left. + 4(1 - s^2) S_1 \cos \frac{2\pi x}{a} \right] \left(s^2 - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (14.9.39)$$

Рассмотрим частные случаи дисперсионного уравнения (14.9.38) для волноводно-щелевой линии. При $\Delta w \rightarrow a$ (частично заполненный волновод) получаем уравнение ($s = 1$):

$$\begin{aligned} &\sqrt{\varepsilon^{(1)} - (\gamma/k)^2} \operatorname{ctg} \left\{ ky_1 \sqrt{\varepsilon^{(1)} - (\gamma/k)^2} \right\} + \\ &+ \sqrt{\varepsilon^{(2)} - (\gamma/k)^2} \operatorname{ctg} \left\{ k(y_2 - y_1) \sqrt{\varepsilon^{(2)} - (\gamma/k)^2} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (14.9.40)$$

которое является известным уравнением для LE_{01} — волны двухслойного волновода. При $\Delta w \rightarrow 0$ (узкая щель) имеем

$$\frac{\gamma}{k} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}}{2}}, \quad (14.9.41)$$

что совпадает с результатом при $\varepsilon^{(2)} = 1$, известным из теории щелевых антенн.

На рис. 14.11 показаны качественные распределения продольной и поперечной составляющих электрического поля в щели для основной волны (четный тип ВЩЛ). Для малых размеров щели поперечная компонента E_x по модулю намного больше продольной составляющей: $|E_x| \gg |E_z|$.

Запишем решение уравнения (14.9.24) для нечетных типов волн в первом приближении. Первое приближение заключается в учете слагаемых с δ_{mij} в (14.9.25) при $m = 1$. В этом случае ядра $G_{ij}(v, u)$ записываются в форме ($i, j = 1, 2$):

$$G_{ij}(v, u) = \frac{2s \delta_{1ij} T_1(v) T_1(u)}{\pi \sqrt{1 - u^2}}. \quad (14.9.42)$$

Тогда решение уравнения (14.9.24) будем искать в виде

$$\varphi_z(u) = \frac{b_1 T_1(u)}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad \varphi_x(u) = \frac{a_1 T_1(u)}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (14.9.43)$$

где a_1, b_1 — неизвестные постоянные.

Подставляя решение (14.9.43) в интегральное уравнение (14.9.24), нетрудно записать следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[s^2 Y_{112} + (1 - s^2) t_2 \right]^2 - \left[s^2 Y_{111} + (1 - s^2) t_1 \right] \times \\ & \times \left[s^2 Y_{122} + (1 - s^2) t_3 \right] = 0 \end{aligned} \quad (14.9.44)$$

и выражения для составляющих электрического поля в щели

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{ib_1\pi}{as} \left[s^2 - \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right]^{1/2}, \\ E_x &= \frac{b_1\pi p}{as} \sin \frac{\pi x}{a} \left[s^2 - \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (14.9.45)$$

где $p = -i \left[s^2 Y_{111} + (1 - s^2) t_1 \right] \left[s^2 Y_{112} + (1 - s^2) t_2 \right]^{-1}$.

На рис. 14.12 показаны качественные распределения продольной и поперечной составляющих электрического поля в щели для волны нечётного типа.

Таким образом, метод частичного обращения сингулярного оператора интегральных уравнений позволил получить достаточно простые приближенные аналитические решения краевой задачи о собственных волнах ВЩЛ. Полученные решения переходят в известные формулы при предельных переходах при $s \rightarrow 0$ (бесконечно узкая щель) и $s \rightarrow 1$ (частично заполненный волновод). В таблице 14.1 приведены результаты исследования внутренней сходимости приближенных решений для четных типов собственных волн ВЩЛ, из которых следует, что для получения значений постоянных распространения рассматриваемым методом с точностью до второго знака после запятой, достаточно использовать дисперсионное уравнение (14.9.38) (второе приближение: $M = 2$). Расчеты были проведены при следующих геометрических размерах и физических параметрах волноводно-щелевой линии передачи (рис. 14.10): $y_1 = 0.5$ мм; $y_2 = 2$ мм; $a = 3.5$ мм; $w_2 - w_1 = 1$ мм; $\varepsilon^{(1)} = 9$; $\varepsilon^{(2)} = 1$; $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 1$.

Раздел 14.9 на основе работ [Л14.1, Л14.16].

14.10(*). Дифракция основной волны прямоугольного волновода на индуктивной диафрагме, расположенной на стыке двух диэлектриков. Метод ортогонализирующей подстановки

14.10.1. Постановка задачи. На рис. 14.13 показана индуктивная диафрагма на стыке двух диэлектриков в прямоугольном волноводе шириной a . Отверстие диафрагмы равно $\Delta w = w_2 - w_1$; координату центра отверстия обозначим через $x_0 = (w_2 + w_1) / 2$. Диафрагма расположена на стыке двух диэлектриков с различными диэлектрическими и магнитными проницаемостями (см. рис. 14.13). Стенки волновода и металлические полоски предполагаем идеально проводящими; толщиной металлических полосок пренебрегаем.

Рассмотрим случай дифракции на диафрагме основной волны H_{10} единичной амплитуды в предположении, что ширина волновода достаточно мала так, что в областях I и II (рис. 14.13) гарантируется одномодовое распространение. Последнее ограни-

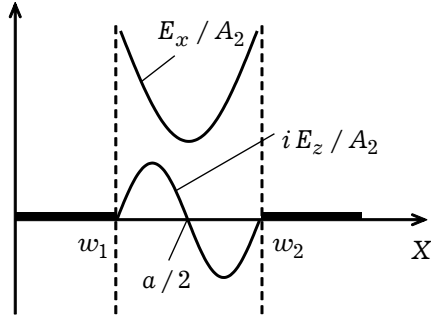


Рис. 14.11

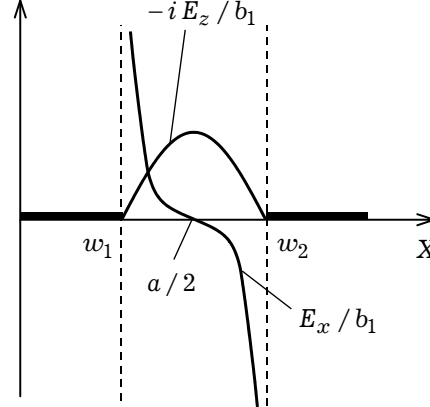


Рис. 14.12

чение не является существенным, однако сказывается на погрешности аппроксимации, если только другие распространяющиеся моды не учитываются точно.

Положим, что падающая волна H_{10} набегаёт на диафрагму из $z = -\infty$ и волновод согласован при $z = +\infty$. При этой геометрии поле падающей волны возбуждает отражение и прохождение основной волны H_{10} и высших H_{m0} волн. Поэтому рассматриваемая задача дифракции описывается составляющими E_y , H_x , H_z , причем из уравнений Максвелла следует, что $(\partial/\partial y \equiv 0)$

$$H_x^{(k)} = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu^{(k)}} \frac{\partial E_y^{(k)}}{\partial z}, \quad H_z^{(k)} = -\frac{1}{i\omega\mu_0\mu^{(k)}} \frac{\partial E_y^{(k)}}{\partial x}, \quad (14.10.1)$$

где индекс $k = 1, 2$ указывает на принадлежность поля к той или иной области.

Поле в частичных областях I и II (рис. 14.13) может быть представлено в виде суперпозиции отраженных и проходящих волн H_{m0} :

$$E_y^{(1)} = \left[e^{-i\gamma_0^{(1)}z} + R_1 e^{i\gamma_0^{(1)}z} \right] \sin \frac{\pi x}{a} + \sum_{m=2}^{\infty} R_m e^{\Gamma_m^{(1)}z} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad z < 0$$

$$E_y^{(2)} = T_1 e^{-i\gamma_0^{(2)}z} \sin \frac{\pi x}{a} + \sum_{m=2}^{\infty} T_m e^{-\Gamma_m^{(2)}z} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad z > 0, \quad (14.10.2)$$

где

$$\gamma_0^{(k)} = \sqrt{k_0^2 \epsilon^{(k)} \mu^{(k)} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_B^{(k)}}, \quad \Gamma_m^{(k)} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k_0^2 \epsilon^{(k)} \mu^{(k)}}.$$

14.10.2. Коэффициенты отражения и прохождения. Неизвестные постоянные R_m , T_m ($m = 1, \infty$) в разложениях (14.10.2) являются соответственно коэффициентами отражения и прохождения для волн H_{m0} .

Таблица 14.1

f , ГГц	γ , мм ⁻¹		
	$M = 0$	$M = 2$	$M = 4$
20	—	0.452049	0.455336
22	—	0.665847	0.669739
24	0.285094	0.844863	0.849683
26	0.526929	1.008473	1.0114418
28	0.701020	1.163660	1.170891
30	0.850209	1.313713	1.322371

Обозначив через $e(x)$ функцию E_y при $z = 0$ (поле в раскрыве диафрагмы): $e(x) = E_y^{(1)}(x, z = 0) = E_y^{(2)}(x, z = 0)$, запишем разложения (14.10.2) при $z = 0$ в виде

$$e(x) = (1 + R_1) \sin \frac{\pi x}{a} + \sum_{m=2}^{\infty} R_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad z < 0. \quad (14.10.3)$$

$$e(x) = T_1 \sin \frac{\pi x}{a} + \sum_{m=2}^{\infty} T_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad z > 0.$$

Рассматривая постоянные R_m, T_m как коэффициенты рядов Фурье (14.10.3), определенных на отрезке $[0, a]$, нетрудно записать для них следующие выражения:

$$1 + R_1 = T_1 = \frac{2}{a} \int_{w_1}^{w_2} e(x') \sin \frac{\pi x'}{a} dx', \quad (14.10.4)$$

$$R_m = T_m = \frac{2}{a} \int_{w_1}^{w_2} e(x') \sin \frac{m\pi x'}{a} dx' \quad (m > 1).$$

При записи (14.10.4) было учтено, что поле вне раскрыва диафрагмы равно нулю: $e(x) = 0$ при $x \in [0, w_1]$ и $x \in [w_2, a]$.

14.10.3. Интегральное уравнение. Составляющие напряжённости магнитного поля $H_x^{(k)}$ ($n = 1, 2$) могут быть определены из первой формулы в (14.10.1):

$$H_x^{(1)} = -\frac{\gamma_0^{(1)}}{\omega \mu_0 \mu^{(1)}} \left[e^{-i\gamma_0^{(1)}z} - R_1 e^{i\gamma_0^{(1)}z} \right] \sin \frac{\pi x}{a} +$$

$$+ \frac{1}{i\omega \mu_0 \mu^{(1)}} \sum_{m=2}^{\infty} R_m \Gamma_m^{(1)} e^{\Gamma_m^{(1)}z} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad z < 0 \quad (14.10.5)$$

$$H_x^{(2)} = -\frac{\gamma_0^{(2)}}{\omega \mu_0 \mu^{(2)}} T_1 e^{-i\gamma_0^{(2)}z} \sin \frac{\pi x}{a} -$$

$$- \frac{1}{i\omega \mu_0 \mu^{(2)}} \sum_{m=2}^{\infty} T_m \Gamma_m^{(2)} e^{-\Gamma_m^{(2)}z} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad z > 0$$

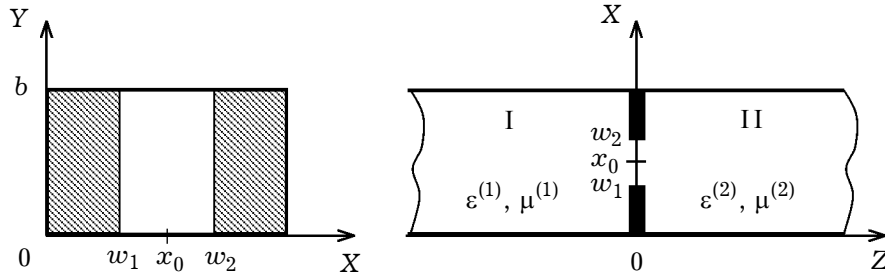


Рис. 14.13

Из условия непрерывности составляющей H_x в раскрые диафрагмы ($H_x^{(1)} = H_x^{(2)}$ при $z = 0$, $x \in [w_1, w_2]$) вытекает равенство

$$\begin{aligned} & -\frac{i\gamma_0^{(1)}}{\mu^{(1)}}(1-R_1)\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{\mu^{(1)}}\sum_{m=2}^{\infty} R_m \Gamma_m^{(1)} \sin\frac{m\pi x}{a} = \\ & = -\frac{i\gamma_0^{(2)}}{\mu^{(2)}}T_1\sin\frac{\pi x}{a} - \frac{1}{\mu^{(2)}}\sum_{m=2}^{\infty} T_m \Gamma_m^{(2)} \sin\frac{m\pi x}{a}, \quad (w_1 \leq x \leq w_2). \end{aligned} \quad (14.10.6)$$

Подставляя выражения (14.10.4) для коэффициентов R_m, T_m и используя равенство $1+R_1=T_1$, после некоторых упрощений имеем ($x \in [w_1, w_2]$)

$$\begin{aligned} & \frac{(2\gamma_0 R_1 - \Delta\gamma_0)}{1+R_1} \sin\frac{\pi x}{a} \int_{w_1}^{w_2} e(x') \sin\frac{\pi x'}{a} dx' = \\ & = i2 \sum_{m=2}^{\infty} \Gamma_m \sin\frac{m\pi x}{a} \int_{w_1}^{w_2} e(x') \sin\frac{m\pi x'}{a} dx', \end{aligned} \quad (14.10.7)$$

где

$$2\gamma_0 = \frac{\gamma_0^{(1)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\gamma_0^{(2)}}{\mu^{(2)}}, \quad \Delta\gamma_0 = \frac{\gamma_0^{(1)}}{\mu^{(1)}} - \frac{\gamma_0^{(2)}}{\mu^{(2)}}, \quad 2\Gamma_m = \frac{\Gamma_m^{(1)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\Gamma_m^{(2)}}{\mu^{(2)}}.$$

Функция $e(x)$ равна нулю при $x = w_1$ и $x = w_2$, так как электрическое поле касательно к краям диафрагмы. Поэтому

$$\int_{w_1}^{w_2} e(x') \sin\frac{m\pi x'}{a} dx' = \frac{a}{m\pi} \int_{w_1}^{w_2} e'(x') \cos\frac{m\pi x'}{a} dx',$$

где $e'(x) = de(x)/dx$, так как при выполнении интегрирования по частям внеинтегральное слагаемое обращается в нуль на обоих пределах интегрирования.

14.10.4. Реактивная проводимость. Окончательно полагая

$$\frac{\pi x}{a} = \Theta, \quad \frac{\pi x'}{a} = \varphi, \quad \delta_m = 1 - \frac{a\Gamma_m}{\pi m},$$

можно переписать (14.10.7) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{a\gamma_0 B}{2\pi} \sin \Theta \int e'(\varphi) \cos \varphi d\varphi = \\ & = - \sum_{m=2}^{\infty} (1 - \delta_m) \sin(m\Theta) \int e'(\varphi) \cos m\varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (14.10.8)$$

где по аналогии с индуктивной диафрагмой в пустом волноводе введена нормированная реактивная проводимость B в сечении $z = 0$:

$$B = \frac{i(2\gamma_0 R_1 - \Delta\gamma_0)}{(1 + R_1)\gamma_0},$$

переменные Θ и φ изменяются в пределах от $\pi w_1/a$ до $\pi w_2/a$.

14.10.5. Метод ортогонализирующей подстановки. Полученное соотношение (14.10.8) является интегральным уравнением первого рода. Для его решения используем метод ортогонализирующей подстановки. Этот метод основан на введении новых переменных u и v , которые изменяются от 0 до π . В данном случае введем новые переменные с помощью соотношений

$$\cos \Theta = c + s \cos u, \quad \cos \varphi = c + s \sin v, \quad (14.10.9)$$

где

$$c = \cos \frac{\pi x_0}{a} \cos \frac{\pi \Delta w}{2a}, \quad s = \sin \frac{\pi x_0}{a} \sin \frac{\pi \Delta w}{2a}.$$

При применении преобразований (14.10.9) к уравнению (14.10.8) удобно применять равенства, которые следуют из (14.9.19) и (14.9.20):

$$s \sin u \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\Theta) \cos(m\varphi) = \sin \Theta \sum_{m=1}^{\infty} \sin(mu) \cos(mv), \quad (14.10.10)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\Theta) \cos m\varphi}{m} = -\frac{1}{2} \ln s + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mu) \cos(mv)}{m}. \quad (14.10.11)$$

С учетом (14.10.10) интегральное уравнение (14.10.8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{a\gamma_0 B}{2\pi} \right) s^2 \sin u \int_0^{\pi} e'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \cos v dv = \\ & = \int_0^{\pi} e'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \left[(1 - s^2) \sin u \cos v + \sum_{m=2}^{\infty} \sin(mu) \cos(mv) \right] dv - \\ & - \frac{s \sin u}{\sin \Theta} \int_0^{\pi} e'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \sum_{m=2}^{\infty} \delta_m \sin(m\Theta) \cos(m\varphi) dv, \quad 0 \leq u \leq \pi. \end{aligned} \quad (14.10.12)$$

Так как $\delta_m \rightarrow 0$ при достаточно больших m , то второй из бесконечных рядов в (14.10.12) можно рассматривать как некоторую поправку к остальной части урав-

нения, имеющей квазистатический вид. Можно получить различные по точности решения, если в уравнении (14.10.12) пренебречь всеми δ_m , кроме нескольких первых. В каждом из сохраняемых слагаемых осуществляется замена переменных в соответствии с (14.10.9), и сделать это можно только почленно. Демонстрацию метода ортогонализирующей подстановки начнем, сохраняя только квазистатическое ядро ($\delta_m = 0$ для $m > 0$).

Пренебрегая всеми поправочными членами в правой части уравнения (14.10.12) ($\delta_m = 0$ для $m > 0$), замечаем, что его можно представить в виде

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin(mu) = 0; \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad (14.10.13)$$

где

$$D_1 = -\left[\frac{\alpha\gamma_0 B}{2\pi} s^2 + (1 - s^2) \right] \int_0^{\pi} e'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \cos v dv, \quad (14.10.14)$$

$$D_m = \int_0^{\pi} e'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \cos(mv) dv, \quad m > 1.$$

Соотношение (14.10.13) является рядом Фурье по полной ортогональной системе функций $\{\sin(mu)\}$ на интервале $[0, \pi]$. Поэтому из равенств (14.10.13) следует, что

$$-\frac{\alpha\gamma_0 B}{2\pi} s^2 = 1 - s^2, \quad (14.10.15)$$

$$\int_0^{\pi} e'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} \cos(mv) dv = 0, \quad m > 1. \quad (14.10.16)$$

14.10.6. Квазистатика. Из (14.10.15) вытекает квазистатическая формула для реактивной проводимости индуктивной диафрагмы на стыке двух диэлектриков:

$$B = \frac{2\pi}{\alpha\gamma_0} \left(1 - \frac{1}{s^2} \right), \quad (14.10.17)$$

которая в предельном переходе при $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} \rightarrow 1$, $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} \rightarrow 1$, (диафрагма в пустом прямоугольном волноводе) переходит в известное выражение

$$B = \frac{\lambda_B}{a} (1 - s^{-2}), \quad \lambda_B = \frac{2\pi}{\sqrt{k_0^2 - (\pi/a)^2}}. \quad (14.10.18)$$

В этом случае коэффициенты отражения R_1 и прохождения T_1 для волны H_{10} в прямоугольном волноводе выражаются через реактивную проводимость B следующим образом:

$$R_1 = -\frac{iB}{2 + iB}, \quad T_1 = \frac{2}{2 + iB}. \quad (14.10.19)$$

В соответствии с условием (14.10.16)

$$e'(\varphi) \frac{d\varphi}{dv} = A \cos v,$$

где A — некоторая постоянная. Следовательно,

$$e(\varphi) = A \sin v = \frac{A}{s} \sqrt{s^2 - [c - \cos(\pi x / a)]^2}, \quad (14.10.20)$$

так как постоянная интегрирования исчезает в силу того, что $e(\varphi) = 0$ при $x = w_1$ и $x = w_2$. Постоянная A определяется из условия нормировки.

14.11(*). Дифракция основной волны прямоугольного волновода на индуктивной полоске, расположенной на стыке двух диэлектриков.
Метод сингулярного интегрального уравнения

14.11.1. Схема анализа. Расчет индуктивной полоски на стыке двух диэлектриков (рис. 14.14) проще всего выполнить, если ввести в рассмотрение ток на полоске. Стенки волновода и металлическую полоску по-прежнему будем считать идеально проводящими и бесконечно тонкими.

Рассмотрим случай дифракции на полоске основной волны H_{10} единичной амплитуды. В этом случае поле в частичных областях I и II (рис. 14.14) может быть представлено в виде суперпозиции отраженных и проходящих волн H_{m0} , в частности, для составляющих справедливы соотношения (10.10.2) и (10.10.5). Незвестные коэффициенты R_m, T_m удобнее для данной задачи выразить через поверхностную плотность тока η_y ($x \in [w_1, w_2]$) при $z = 0$:

$$\eta_y = H_x^{(1)} - H_x^{(2)}. \quad (14.11.1)$$

Представляя разложения (10.10.5) для составляющих $H_x^{(n)}$ ($n = 1, 2$) при $z = 0$ в выражение для тока (14.11.1), нетрудно записать следующее функциональное уравнение ($x \in [w_1, w_2]$):

$$i w \mu_0 \eta_y = i (2 \gamma_0 R_1 - \Delta \gamma_0) \sin \frac{\pi x}{a} + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \Gamma_m R_m \sin \frac{m \pi x}{a}, \quad (14.11.2)$$

где обозначения γ_0, Γ_m соответствуют разделу 14.10. При выводе уравнения (14.11.2) было использовано, что, $1 + R_1 = T_1$, $R_m = T_m$, которые следуют из граничного условия $E_y^{(1)} = E_y^{(2)}$ для электрического поля при $z = 0$ ($x \in [0, a]$).

Рассматривая (14.11.2) как ряд Фурье по системе функций $\{\sin(m \pi x / a)\}$ на отрезке $[0, a]$, нетрудно определить его неизвестные коэффициенты:

$$2 \gamma_1 R_1 - \Delta \gamma_0 = \frac{2 w \mu_0}{a} \int_{w_1}^{w_2} \eta_y(x') \sin \frac{m \pi x'}{a} dx',$$

$$R_m = \frac{i w \mu_0}{a \Gamma_m} \int_{w_1}^{w_2} \eta_y(x') \sin \frac{m \pi x'}{a} dx'. \quad (14.11.3)$$

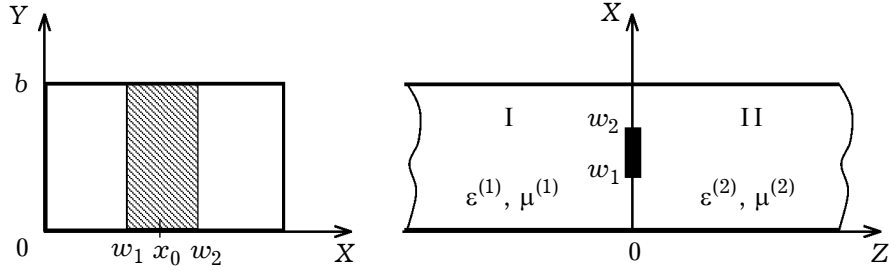


Рис. 14.14

Далее необходимо учесть граничное условие для тангенциального электрического поля на полоске: $E_y^{(1)} = 0$ при $z = 0$. В результате имеем

$$(1 + R_1) \sin \frac{\pi x}{a} + \sum_{m=2}^{\infty} R_m \sin \frac{m\pi x}{a} = 0, \quad x \in [w_1, w_2]. \quad (14.11.4)$$

Полагая, как и ранее, $\Theta = \pi x / a$, $\varphi = \pi x' / a$ и подставляя (14.11.3) для неизвестных коэффициентов R_m в последнее уравнение, получим интегральное уравнение для поверхностной плотности тока η_y

$$\frac{X}{\gamma_0} \sin \Theta \int \eta_y(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \int \eta_y(\varphi) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin(m\Theta) \sin(m\varphi)}{2\Gamma_m} d\varphi, \quad (14.11.5)$$

где по аналогии с индуктивной полоской в пустом волноводе введено нормированное реактивное сопротивление в сечении $z = 0$:

$$X = i \frac{(1 + R_1)\gamma_0}{2\gamma_0 R_1 - \Delta\gamma_0}. \quad (14.11.6)$$

Переменные Θ и φ в (14.11.5) изменяются в пределах от $\pi w_1 / a$ до $\pi w_2 / a$.

Так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2\Gamma_m = \frac{m\pi}{a\mu_{\text{эф}}}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{\mu_{\text{эф}}} = \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}},$$

то интегральное уравнение (14.11.5) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\pi X}{a\mu_{\text{эф}}} \sin \Theta \int \eta_y(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \\ = \int (1 + \delta_m) \eta_y(\varphi) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin(m\Theta) \sin(m\varphi)}{m} d\varphi, \end{aligned} \quad (14.11.7)$$

где

$$\delta_m = \frac{m\pi}{2a\mu_{\text{эф}} \Gamma_m} - 1, \quad m \geq 2.$$

С учетом известного соотношения

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\Theta) \sin(m\varphi)}{m} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \cos(\Theta + \varphi)}{1 - \cos(\Theta - \varphi)} \right|, \quad (14.11.8)$$

можно сделать вывод, что интегральное уравнение (14.11.7) обладает в неявном виде логарифмической особенностью.

14.11.2. Сингулярное интегральное уравнение. Для получения СИУ необходимо (14.11.7) продифференцировать по переменной Θ и перейти к новым переменным u, v по формулам

$$\cos \Theta = su + c, \quad \cos \varphi = sv + c, \quad (14.11.9)$$

где

$$c = \cos \frac{\pi x_0}{a} \cos \frac{\pi \Delta w}{2a}, \quad s = \frac{\sin \pi x_0}{a} \sin \frac{\pi \Delta w}{2a}.$$

Используя равенство, которое следует из (14.9.19):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\varphi) \cos(m\Theta) = \frac{\sin \varphi}{2s(u-v)}, \quad (14.11.10)$$

нетрудно записать следующее сингулярное интегральное уравнение ($u \in [-1, 1]$):

$$\begin{aligned} 2s[1 + \pi X / (a\mu_{\text{эф}})](su + c) \int_{-1}^1 \eta_y(v) dv = \int_{-1}^1 \frac{\eta_y(v) dv}{u-v} + \\ + 2s \int \eta_y(\varphi) \sum_{m=2}^{\infty} \delta_m \sin(m\Theta) \sin(m\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (14.11.11)$$

14.11.3. Квазистатистическое решение. В квазистатистике в уравнении (14.11.11) $\delta_m = 0$ при $m \geq 2$. В этом случае решение (14.11.11) необходимо искать в виде

$$\eta_y(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \sum_{n=0}^2 A_n T_n(u), \quad (14.11.12)$$

где $T_n(u)$ — полиномы Чебышева первого рода, A_n — постоянные, подлежащие определению.

Подставим решение (14.11.12) в СИУ (14.11.11) при $\delta_m = 0$ ($m \geq 2$). С учетом известных интегралов:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(v) dv}{\sqrt{1-v^2}(v-u)} = \pi U_{m-1}(u), \quad (14.11.13)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-v^2} U_{m-1}(v)}{v-u} dv = -\pi T_m(u), \quad (14.11.14)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(v) dv}{\sqrt{1-v^2}} = \begin{cases} \pi & \text{при } m = 0 \\ 0 & \text{при } m > 0, \end{cases} \quad (14.11.15)$$

где $U_{m-1}(v)$ — полиномы Чебышева второго рода, имеем ($u \in [-1, 1]$)

$$\begin{aligned} s[\pi X / (a\mu_{\text{эф}}\gamma_0) + 1][sU_1(u) + 2c]A_0 = \\ = A_1U_0(u) + A_2U_1(u). \end{aligned} \quad (14.11.16)$$

Так как система функций $\{U_m(u)\}$ является полной и ортогональной на отрезке $[-1, 1]$, то из (14.11.16) следует, что

$$A_1 = 2sc \left(\frac{\pi X}{a\mu_{\text{эф}}\gamma_0} + 1 \right) A_0, \quad A_2 = s^2 \left(\frac{\pi X}{a\mu_{\text{эф}}\gamma_0} + 1 \right) A_0. \quad (14.11.17)$$

14.11.4. Реактивное сопротивление. Для определения нормированного реактивного сопротивления X необходимо еще одно уравнение, так как при дифференцировании интегрального уравнения (14.11.7) по переменной Θ была потеряна постоянная, присутствующая в нем в неявном виде. Поэтому воспользуемся уравнением (14.11.7) с $\delta_m = 0$ ($m \geq 2$) при $\Theta = \pi/2$:

$$\left(\frac{\pi X}{a\mu_{\text{эф}}\gamma_0} + 1 \right) \int \eta_y(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int \eta_y(\varphi) \ln \left| \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right| d\varphi,$$

где интегрирование по φ проводится от $\pi w_1/2$ до $\pi w_2/a$. Вводя переменные u, v по (14.11.9), нетрудно переписать последнее интегральное уравнение в виде

$$\left(\frac{\pi X}{a\mu_{\text{эф}}\gamma_0} + 1 \right) \int_{-1}^1 \eta_y(v) dv = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{\eta_y(v)}{\sin \varphi} \ln \left| \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right| dv. \quad (14.11.18)$$

Подставляя решение (14.11.12) в уравнение (14.11.18), имеем

$$\left(\frac{\pi X}{a\mu_{\text{эф}}\gamma_0} + 1 \right) A_0 = \frac{1}{4} (A_0 I_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2), \quad (14.11.19)$$

где

$$I_k = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(v)}{\sin \varphi \sqrt{1-v^2}} \ln \left| \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right| dv.$$

С учетом (14.11.17) получаем выражение для нормированного реактивного сопротивления X

$$\frac{\pi X}{a\mu_{\text{эф}}} = -1 + \frac{I_0}{4 - s^2 I_2 - 2sc I_1}. \quad (14.11.20)$$

14.11.5. Индуктивная полоска в пустом волноводе. Рассмотрим частный случай последней формулы: индуктивная полоска в пустом волноводе ($\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = 1$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 1$). В этом случае

$$X = i \frac{1 + R_1}{2R_1} \quad (14.11.21)$$

и (14.11.20) принимает вид

$$X = \frac{a}{\lambda_B} \left\{ -1 + \frac{K(m) \operatorname{cosec}^2(\pi x_0 / a)}{2E(m) - K(m) \sin^2[\pi \Delta w / (2a)]} \right\}, \quad (14.11.22)$$

где

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m^2t^2)}}, \quad E(m) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-m^2t^2}{1-t^2}} dt,$$

$$m = \sqrt{1 - \sin^2[\pi \Delta w / (2a)] \operatorname{cosec}^2(\pi x_0 / a)},$$

$K(m)$, $E(m)$ — соответственно полные эллиптические интегралы первого и второго родов.

Заметим, что при выводе (14.11.22) использовалось интегральное представление для логарифма:

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = 2t \int_0^1 \frac{dw}{1-t^2w^2}. \quad (14.11.23)$$

Раздел 14.11 написан на основе работы [Л14.17].

14.12(*). Электродинамическая теория трубчатого электрического вибратора. Уравнение Поклингтона

Электрическим вибратором называют излучатель электромагнитных волн в виде тонкого проводника длиной $2l$ и радиуса a , возбуждаемого в области разрыва генератором высокой частоты (рис. 14.15). Под воздействием ЭДС генератора в вибраторе возникают электрические токи, которые распределяются по его поверхности таким образом, что создаваемое ими электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла, граничным условиям на поверхности проводника и условию излучения на бесконечности. Вследствие осевой симметрии для тонкого вибратора электрические токи на боковой поверхности проводника вибратора имеют только продольные составляющие η_z^e , а на торцевых поверхностях — радиальные составляющие η_p^e . На цилиндрической поверхности радиуса a , затягивающего зазор вибратора, существуют фиктивные продольные электрические токи эквивалентно заменяющие внутреннюю область зазора вместе с возбуждающим генератором.

При теоретическом исследовании вибратора, прежде всего, следует установить закон распределения излучающих токов по его поверхности, то есть решить

внутреннюю задачу анализа. После этого можно приступить к внешней задаче анализа — определению ДН вибратора и других вторичных параметров.

Ниже рассмотрим трубчатый вибратор. Для тонких вибраторов ($a \ll l, \lambda$) электродинамическая модель трубчатого электрического вибратора для внутренней задачи анализа строится на основании следующих предположений:

1. Вибратор предполагается узким ($2a \ll l, \lambda$) так, что поперечной составляющей электрического тока по сравнению с продольной можно пренебречь.

2. Трубчатый вибратор считается идеально проводящим, при этом продольная составляющая поверхностной плотности тока вместе с эквивалентным магнитным током в зазоре заменяется неизвестной функцией $\eta(z)$, непрерывной в области зазора и обращающейся в нуль на концах вибратора: $z = \pm l$.

3. Касательная составляющая вектора электрического поля $E_z(z)$, создаваемая током на боковой поверхности вибратора, обращается в нуль всюду, кроме области зазора длиной $2b$, где она приравняется некоторой возбуждающей функции $E^{\text{CT}}(z)$. Для узких зазоров функцию $E^{\text{CT}}(z)$ можно считать постоянной.

В областях, содержащих электрические токи, уравнения Максвелла для комплексных амплитуд электромагнитного поля имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -i\omega\mu_a \vec{H}, \\ \text{rot } \vec{H} &= i\omega\epsilon_a \vec{E} + \vec{j}^{\text{CT}}, \end{aligned}$$

где \vec{j}^{CT} — объемная плотность электрического тока.

Векторы электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} выражаются через электродинамический потенциал \vec{A} следующим образом (магнитные токи отсутствуют):

$$\vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{A} + \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \text{grad div } \vec{A}, \quad (14.12.1)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad (14.12.2)$$

где

$$\vec{A} = \iiint_V \frac{\vec{j}^{\text{CT}} e^{-ikR}}{4\pi R} dV', \quad (14.12.3)$$

R — расстояние между точкой наблюдения (x, y, z) и точкой, где расположен источник (x', y', z') : $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

Если электрические токи параллельны оси OZ , то векторный потенциал \vec{A} также имеет лишь z -составляющую. Первое уравнение из (14.12.2) в этом случае принимает вид:

$$E_z = \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right). \quad (14.12.4)$$

Создаваемое элементом тока $j_z^{\text{CT}} dV'$ поле равно:

$$dE_z = \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] j_z^{\text{CT}} dV', \quad (14.12.5)$$

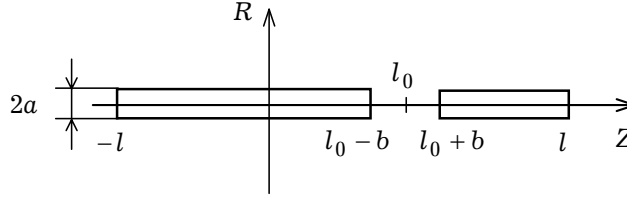


Рис. 14.15

где

$$G(z, z') = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \quad (14.12.6)$$

— функция Грина свободного пространства.

Следовательно, поле, возбуждаемое током с объёмной плотностью j_z^{CT} , параллельным оси OZ , равно:

$$E_z = \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \iiint_V \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z'^2} + k^2 G(z, z') \right] j_z^{\text{CT}} dV', \quad (14.12.7)$$

где интегрирование в (14.12.7) производится по объёму, содержащему электрический ток.

Если ток распределён по поверхности кругового цилиндра, ось которого совпадает с осью OZ , это выражение сводится к поверхностному интегралу. Более того, для цилиндра радиуса a при $a \ll \lambda$ можно считать, что ток распределён по поверхности цилиндра равномерно. Если точка наблюдения находится на оси цилиндра, то выражение для R принимает вид:

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}. \quad (14.12.8)$$

Таким образом, выражение (14.12.7) принимает более простой вид:

$$\int_{-l}^l I_z(z') \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z'^2} + k^2 G(z, z') \right] dz' = i\omega\epsilon_a E_z(z) \quad (14.12.9)$$

относительно тока $I_z(z) = 2\pi a \eta_z(z)$.

Представим полную касательную составляющую E_z^{Π} на боковой поверхности вибратора в виде суммы $E_z^{\Pi} = E_z + E_z^{\text{CT}}$, где E_z — поле, порождаемое током I_z вибратора, E_z^{CT} — наведённое поле за счёт сторонних источников. Под E_z^{CT} можно понимать как напряжённость сторонних полей в зазоре при возбуждении вибратора, так и напряжённость поля волны, падающей на вибратор при его использовании в качестве приёмной антенны. Очевидно, что полное поле на боковой идеально-проводящей поверхности вибратора равно нулю:

$$E_z + E_z^{\text{CT}} = 0. \quad (14.12.10)$$

С учётом (14.12.10) интегральное уравнение (14.12.9) переходит в *интегральное уравнение Поклингтона*:

$$\int_{-l}^l I_z(z') \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] dz' = -i\omega \varepsilon_a E_z^{\text{CT}}(z). \quad (14.12.11)$$

Интегральное уравнение Поклингтона (14.12.11) при расчёте тонких вибраторных антенн является общепринятым в научной литературе ключевым математическим моментом.

Однако, соотношение (14.12.11) с учётом (14.12.6) и (14.12.8), является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, нахождение решений которых относится к некорректно поставленным задачам. Поэтому в следующем параграфе описывается альтернативный подход, разработанный одним из авторов книги, позволяющий подойти математически корректно к анализу тонкого трубчатого электрического вибратора.

14.13(*). Вывод сингулярного интегрального уравнения для трубчатого электрического вибратора

В рамках описанной выше физической модели будем рассматривать излучение тонкого трубчатого электрического вибратора (рис. 14.15), не зависящее от угла φ . Исходной для получения СИУ является однородная система уравнений Максвелла, записанная в цилиндрической системе координат. В предположении отсутствия вариации поля вдоль оси φ , последняя распадается на две независимые системы относительно составляющих $\{E_\rho, E_z, H_\varphi\}$ и $\{E_\varphi, H_\rho, H_z\}$. Очевидно, что при рассмотрении поля излучения вибратора необходимо исходить из системы, описывающей поведение составляющих E_ρ, E_z и H_φ .

Из уравнений Максвелла при отсутствии вариации поля вдоль координаты φ следуют формулы

$$E_\rho = -\frac{1}{i\omega \varepsilon_a} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{i\omega \varepsilon_a} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) \right\} \quad (14.13.1)$$

и уравнение Гельмгольца для составляющей H_φ :

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} \right) + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) H_\varphi = 0. \quad (14.13.2)$$

Рассмотрим решение уравнения (14.13.2) для цилиндрической области $\rho > a$ (см. рис. 14.15), не содержащей источников. Разлагая функцию H_φ по координате z в интеграл Фурье

$$H_\varphi(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\rho, h) e^{-ihz} dh, \quad (14.13.3)$$

перепишем соотношение (14.13.2) для Фурье-амплитуды $R(\rho, h)$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \left(k^2 - h^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (14.13.4)$$

Из теории функций Бесселя с учетом свойств функций Ханкеля и условия излучения на бесконечности решение уравнения (14.13.4) (уравнения Бесселя) можно записать следующим образом:

$$R(\rho, h) = A(h) H_1^{(2)}(-i\rho\sqrt{h^2 - k^2}), \quad (14.13.5)$$

где $H_1^{(2)}(-i\rho\sqrt{h^2 - k^2})$ — функция Ханкеля второго рода первого порядка, $A(h)$ — неизвестный множитель. Таким образом,

$$H_\varphi(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(h) H_1^{(2)}(-i\rho\sqrt{h^2 - k^2}) e^{-ihz} dh, \quad (14.13.6)$$

и из второго соотношения из (14.13.1) следует, что

$$i\omega\epsilon_a E_z(\rho, z) = -i \int_{-\infty}^{\infty} A(h) \sqrt{h^2 - k^2} H_0^{(2)}(-i\rho\sqrt{h^2 - k^2}) e^{-ihz} dh. \quad (14.13.7)$$

Обратимся теперь к граничным условиям на поверхности вибратора (при $\rho = a$). Они имеют вид

$$H_\varphi = \begin{cases} \eta_z = I_z / (2\pi a), & z \in [-l, l]; \\ 0, & z \notin [-l, l], \end{cases} \quad (14.13.8)$$

$$E_z = \begin{cases} -E^{\text{CT}}(z), & z \in [l_0 - b, l_0 + b]; \\ 0, & z \notin [l_0 - b, l_0 + b], \end{cases} \quad (14.13.9)$$

где η_z — неизвестная поверхностная плотность тока по вибратору, I_z — введенный в предыдущем разделе ток, $E^{\text{CT}}(z)$ — заданная функция источника в щели вибратора.

Для определения неизвестного коэффициента $A(h)$ в (14.13.6) воспользуемся граничным условием (14.13.8) ($z \in [-l, l]$, $\rho = a$):

$$I_z(z) = 2\pi a \int_{-\infty}^{\infty} A(h) H_1^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - k^2}) e^{-ihz} dh, \quad (14.13.10)$$

откуда с учетом свойств интеграла Фурье следует, что

$$A(h) = \frac{1}{4\pi^2 a H_1^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - k^2})} \int_{-l}^l I_z(z') e^{ihz'} dz'. \quad (14.13.11)$$

Подставляя выражение (14.13.11) в соотношение (14.13.7) при $\rho = a$, с учетом граничного условия (14.13.9) нетрудно получить интегральное уравнение для опре-

деления функции $I_z(z)$:

$$-i\omega\varepsilon_a E^{\text{CT}}(z) = \int_{-l}^l I_z(z') G_1(z, z') dz', \quad z \in [-l, l], \quad (14.13.12)$$

где

$$T_1(z, z') = \frac{-i}{4\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{h^2 - k^2} H_0^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - k^2}) e^{-ih(z-z')}}{H_1^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - k^2})} dh. \quad (14.13.13)$$

Заметим, что соотношение (14.13.12) с ядром (14.13.13) является неоднородным интегральным уравнением первого рода. Ниже подробно исследуем поведение ядра $T_1(z, z')$.

Очевидно, подынтегральная функция в ядре $T_1(z, z')$ при $|h| \rightarrow \infty$ возрастает как $|h|$ и интеграл (14.13.13) является расходящимся. Для устранения расходимости в ядре (14.13.13) перейдем в интегральном уравнении (14.13.12) от функции $I_z(z)$ к её производной $I'_z = \partial I_z / \partial z$. Так как на концах вибратора поверхностная плотность тока η_z обращается в нуль, то $I_z(-l) = I_z(l) = 0$ и можно записать соотношение

$$\int_{-l}^l I_z(z') e^{ihz'} dz' = \frac{i}{h} \int_{-l}^l I'_z(z') e^{ihz'} dz', \quad (14.13.14)$$

которое следует из формулы интегрирования по частям.

С учетом соотношения (14.13.14) интегральное уравнение (14.13.12) переписывается следующим образом:

$$-i\omega\varepsilon_a E^{\text{CT}}(z) = \int_{-l}^l I'_z(z') T_2(z, z') dz', \quad (14.13.15)$$

где

$$T_2(z, z') = \frac{1}{4\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{h^2 - k^2} H_0^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - k^2}) e^{-ih(z-z')}}{h H_1^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - k^2})} dh. \quad (14.13.16)$$

Рассмотрим более подробно поведение ядра $T_2(z, z')$. С этой целью перепишем для него выражение в более удобном виде:

$$T_2(z, z') = \int_{-\infty}^{\infty} g(h) e^{-ih(z-z')} dh, \quad (14.13.17)$$

где

$$g(h) = \frac{\sqrt{h^2 - k^2} H_0^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - k^2})}{4\pi^2 a h \sqrt{h^2 - k^2} H_1^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - k^2})}.$$

Определим асимптотическое поведение функции $g(h)$ при $|h| \rightarrow \infty$. С учетом того, что достаточно больших h функция $\sqrt{h^2 - k^2} \rightarrow |h|$, воспользуемся форму-

лой для мнимого аргумента функций Ханкеля:

$$H_v^{(2)}(-ix) = \frac{2i}{\pi} e^{iv\pi/2} K_v(x), \quad (14.13.18)$$

где $K_v(x)$ — модифицированная функция Ханкеля v -го порядка.

Так как при $x \rightarrow \infty$ $K_0(x) \rightarrow \sqrt{\pi/2} e^{-x}$, $K_1(x) \rightarrow \sqrt{\pi/(2x)} e^{-x}$, то

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} g(h) = \frac{-i}{4\pi^2 a} \operatorname{sgn}(h) = g_\infty(h), \quad (14.13.19)$$

где

$$\operatorname{sgn}(h) = \begin{cases} 1, & h > 0; \\ -1, & h < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь соответствующее асимптотическое ядро

$$T_{2\infty}(z, z') = \frac{-i}{4\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(h) e^{-ih(z-z')} dh. \quad (14.13.20)$$

С учетом известного соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x) e^{ixz} dx = \frac{2i}{z}, \quad (14.13.21)$$

получим

$$T_{2\infty}(z, z') = -\frac{1}{2\pi^2 a(z-z')}. \quad (14.13.22)$$

Таким образом, ядро $T_2(z, z')$ в интегральном уравнении (14.13.15) в неявном виде содержит сингулярность типа Коши (14.13.22) и поэтому оно является *сингулярным*.

Выделим сингулярность в уравнении (14.13.15). С этой целью в подынтегральном выражении (14.13.17) для ядра $T_2(z, z')$ прибавим и вычтем слагаемое $g_\infty(h) \exp\{-ih(z-z')\}$. В результате несложных преобразований нетрудно записать следующее СИУ:

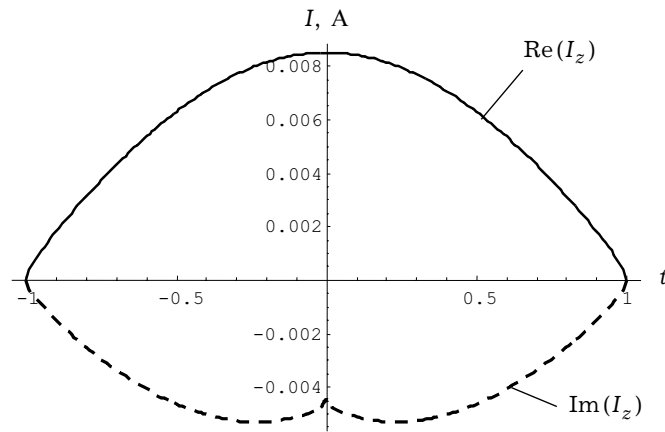
$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{J(t')}{t' - t} dt' = \sigma E^{\text{CT}}(z) + \int_{-1}^1 J(t') K(t, t') dt' \quad (14.13.23)$$

относительно неизвестной функции $J(t) = dI_z(t)/dt$;

$$K(t, t') = -\frac{l}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(l/a)(t-t')} \Delta g(x) dx, \quad (14.13.24)$$

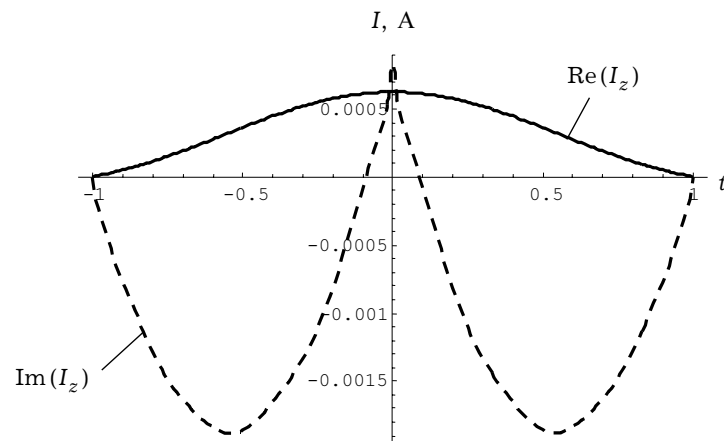
$$\Delta g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - (ka)^2} H_0^{(2)}(-i\sqrt{x^2 - (ka)^2})}{x H_0^{(2)}(-i\sqrt{x^2 - (ka)^2})} + i \operatorname{sgn}(x), \quad (14.13.25)$$

где $\sigma = 2i\pi\omega\epsilon_a al$.



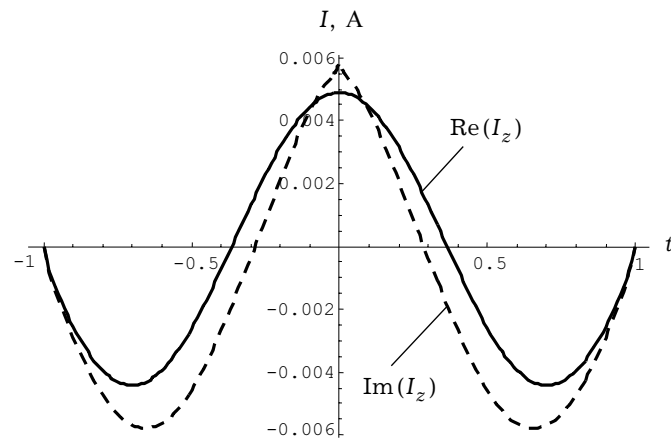
$$\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{4}, \quad \frac{a}{\lambda} = \frac{1}{400}, \quad \frac{b}{l} = \frac{1}{100}, \quad l_0 = 0, \quad N = 20, \quad x_{\max} = 10$$

Рис. 14.16



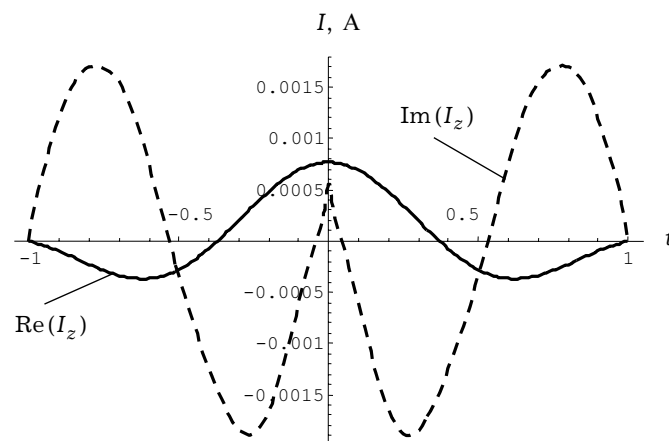
$$\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a}{\lambda} = \frac{1}{400}, \quad \frac{b}{l} = \frac{1}{100}, \quad l_0 = 0, \quad N = 20, \quad x_{\max} = 10$$

Рис. 14.17



$$\frac{l}{\lambda} = \frac{7}{10}, \quad \frac{a}{\lambda} = \frac{1}{400}, \quad \frac{b}{l} = \frac{1}{100}, \quad l_0 = 0, \quad N = 20, \quad x_{\max} = 10$$

Рис. 14.18



$$\frac{l}{\lambda} = 1, \quad \frac{a}{\lambda} = \frac{1}{400}, \quad \frac{b}{l} = \frac{1}{100}, \quad l_0 = 0, \quad N = 20, \quad x_{\max} = 10$$

Рис. 14.19

При записи СИУ (14.13.23) были введены новые безразмерные координаты

$$t = \frac{z}{l}, \quad t' = \frac{z'}{l},$$

а в интегралах (14.13.24), (14.13.25) введена новая переменная интегрирования $x = ah$.

Соотношение (14.13.23) является СИУ первого рода для нахождения неизвестной функции производной тока $dI_z(t)/dt$ и не имеет аналогов в научной литературе. Подынтегральное выражение в ядре $K(t, t')$ при $|x| \rightarrow \infty$ стремится к нулю: $\Delta g(x) \rightarrow 0$.

В разделе 7.8 приведено несколько другое СИУ (7.8.6), более удобное для численных расчетов производной тока на вибраторе [Л14.1].

При решении СИУ (14.13.23) проекционным методом неизвестная функция $J(t)$ представлялась в виде:

$$J(t) = \sum_{n=0}^N A_n \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (14.13.26)$$

где $T_n(t)$ — полиномы Чебышева первого рода; A_n — неизвестные постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

На рисунках 14.16–14.19 представлены результаты расчета тока по вибратору при различных параметрах. На этих рисунках приведены и значения для параметров N и x_{\max} , при которых были проведены эти расчеты. Напомним, что N — число функций Чебышева первого рода в сумме в разложении (14.13.26), x_{\max} — верхний и нижний пределы интегрирования в ядре $K(t, t')$ СИУ (14.13.25). Следует отметить, что для симметричного электрического вибратора число слагаемых в суммах в (14.13.26) в два раза меньше, так как распределение тока должно быть четным, а следовательно, слагаемые в этих суммах, содержащие функции Чебышева четного (нечетного) порядка, должны быть равны нулю.

Величину входного сопротивления вибратора $Z_{\text{вх}}$ можно определить по формуле

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U}{I(0)}, \quad (14.13.27)$$

где U — напряжение в зазоре вибратора, $I(0)$ — значение тока в центре зазора ($z = l_0 = 0$) симметричного электрического вибратора.

Приведенные расчеты хорошо согласуются с данными, приведенными в других работах. Все вычисления проводились в системе Mathematica 4.0.

14.14(*). Электродинамический анализ электромагнитного поля в промежуточной и ближней зонах полуволнового электрического вибратора

В настоящее время существующие и описанные в различных учебниках и справочниках методики расчета электромагнитного поля (ЭМП) в ближних зонах антенн являются некорректными (см., например, [Л14.18–Л14.20]). Основная причина некорректности заключается в несамосогласованности метода расчета — существо-

вание разрыва между тангенциальным ЭМП (поверхностной плотности тока) на поверхности антенны и ЭМП вблизи этой поверхности [Л14.25–Л14.29].

Для волноведущих [Л14.30] и излучающих структур [Л14.25–Л14.29] описан метод сингулярных интегральных представлений (СИП) ЭМП, позволяющий корректно описать его в ближней зоне. При его рассмотрении на поверхности вибратора СИП (7.8.4) переходит в СИУ (7.8.6). Для описания ЭМП в ближней зоне вибратора необходимо исходить из самосогласованной физической модели в виде трубчатого вибратора (см. раздел 7.8) [Л14.28].

Ниже приведем некоторые результаты электродинамического анализа трансформации структуры ЭМП полуволнового электрического вибратора непосредственно с поверхности вибратора до дальней зоны [Л14.29]. В основе анализа лежит самосогласованная физическая модель трубчатого вибратора (см. п.7.8) и сингулярные интегральные представления ЭМП (7.8.4). Анализ проведен при следующих размерах: $l/\lambda = 1/4$, $a/\lambda = 1/400$, $b/\lambda = 1/100$ и при напряжении $U = 1$ В. При таких параметрах численное решение СИУ (7.8.6) было получено в [Л14.26]. На рис. 14.16 приведено комплексное распределение тока I_z от координаты $t = z/l$: сплошная кривая соответствует $\text{Re}\{I_z\}$, пунктирная линия — $\text{Im}\{I_z\}$.

На рис. 14.20 приведены, в сферической системе координат, распределения величин $F_\theta = (r/\lambda)aE_\theta$, $F_r = (r/\lambda)aE_r$, $F_\phi = (r/\lambda)aH_\phi$ от координаты θ при различных нормированных расстояниях r/λ от центра вибратора. На этих рисунках сплошными кривыми обозначены реальные части величин, точками — мнимые части величин, штрихами — модули величин. На рис. 14.20в показаны распределения величин F_θ , F_r , F_ϕ на расстоянии от вибратора $r = 1.83\lambda$, что соответствует дальней зоне [Л14.18]. Как показали расчеты, дальнейшее увеличение r приводит лишь к незначительным изменениям амплитуды ЭМП (полная стабилизация наступает на $r = 10\lambda$), не изменяя качественный характер излучения. Поэтому распределения ЭМП электрического вибратора на больших расстояниях не показано.

Напомним, что верхняя граница промежуточной зоны определяется соотношением: $r \leq (2D^2)/\lambda$, где D — максимальный размер антенны [Л14.18]. Для электрического полуволнового вибратора $D = 2l = \lambda/2$. Поэтому верхняя граница промежуточной зоны для полуволнового вибратора определяется как $r/\lambda = 0.5$.

Из анализа этих графиков можно сделать следующие основные выводы:

1. В промежуточной зоне ЭМП не является чисто поперечным: продольное электрическое поле E_r по модулю даже несколько больше составляющей E_θ . Этот вывод находится в противоречии с общепринятым положением теории антенн: ЭМП в промежуточной зоне является чисто поперечным (см., например, [Л14.18]).

2. Максимальное излучение соответствует азимутальной плоскости $\theta = \pi/2$ сферической системы координат. Вдоль этого же направления происходит и максимальное излучение H_ϕ — магнитного поля. Максимум составляющей E_r соответствует оси вибратора при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, причем на этой оси $H_\phi = 0$. Поэтому вектор Умова–Пойнтинга $S = [\vec{E}, \vec{H}^*]/2$ на оси вибратора равен нулю и перенос энергии вдоль оси вибратора не происходит. Максимальный перенос энергии соответствует $\theta = \pi/2; 3\pi/2$, причем в этом направлении участвует только E_θ ($E_r = 0$).

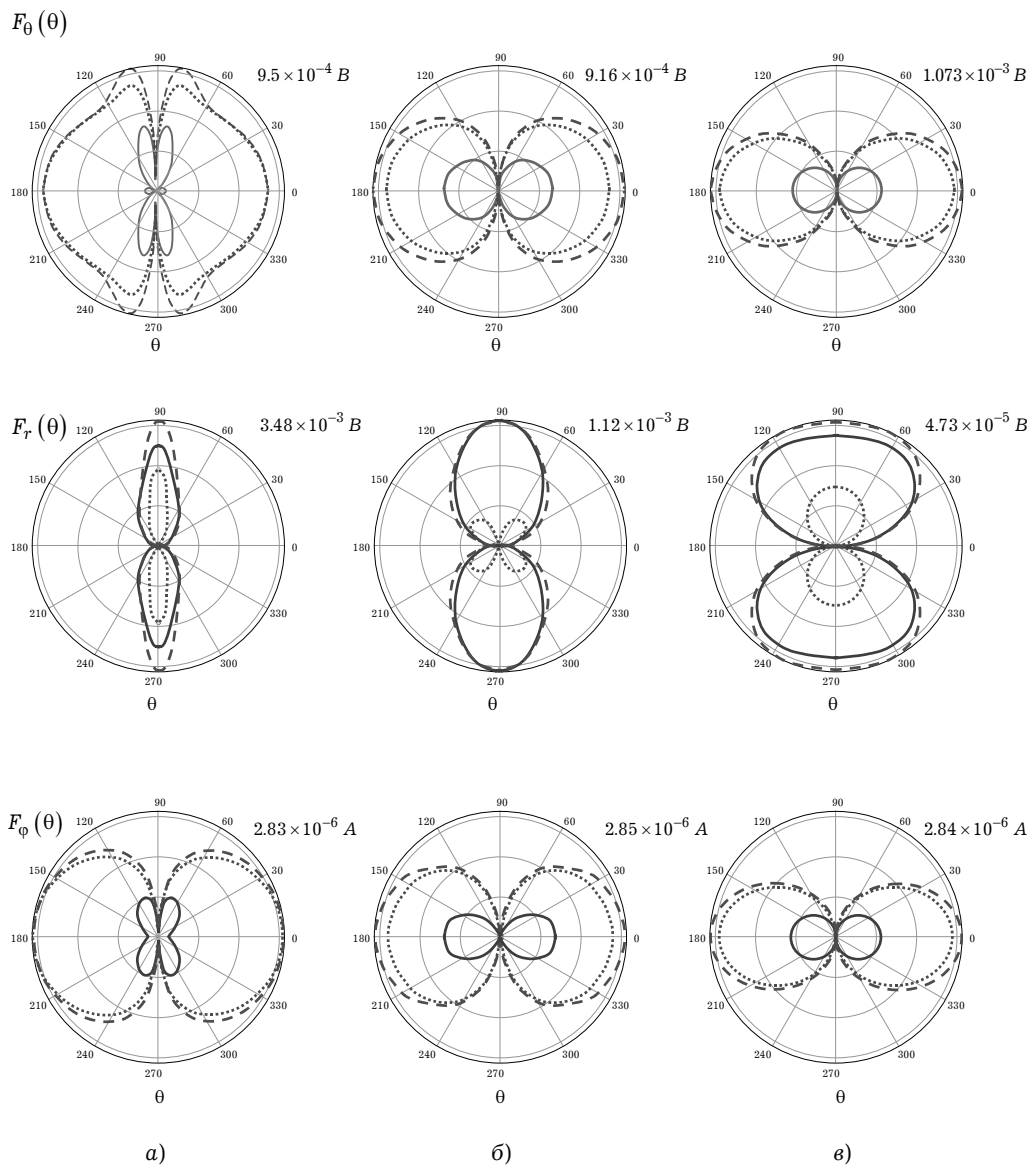


Рис. 14.20 — Распределение величин F_θ, F_r, F_ϕ для полуволнового вибратора в сферической системе координат от координаты θ на различных нормированных расстояниях r/λ от центра вибратора: а) $r/\lambda = 0.3$, б) $r/\lambda = 0.4$, в) $r/\lambda = 1.83$
(сплошные линии — $\text{Re}\{F(\theta)\}$; точками — $\text{Im}\{F(\theta)\}$; штриховые линии — $|F(\theta)|$)

при $\theta = \pi/2; 3\pi/2$). Составляющая E_r обеспечивает колебательный процесс ЭМП около вибратора вдоль координаты θ попеременно во времени от одного конца вибратора к другому, тем самым вибратор как бы образует открытый колебательный контур. В таком контуре вблизи ребер вибратора наблюдается максимальная концентрация электрического поля; максимальная концентрация магнитного поля находится в азимутальной плоскости $\theta = \pi/2$.

3. Были приведены расчеты по установлению границы пространства, в котором можно считать, что поле излучения является чисто поперечным. За такую границу было принято значение r/λ , при котором $|E_\theta|_{\max} (|E_r|_{\max})^{-1} > 10$, где индекс «max» означает максимальное значение модуля соответствующей составляющей поля. Оказалось, что при $r/\lambda = 0.4$ $|E_\theta|_{\max} (|E_r|_{\max})^{-1} \approx 0.822$, при $r/\lambda = 1.83$ $|E_\theta|_{\max} (|E_r|_{\max})^{-1} \approx 7.23$, при $r/\lambda = 5$ $|E_\theta|_{\max} (|E_r|_{\max})^{-1} \approx 20.4$, при $r/\lambda = 10$ $|E_\theta|_{\max} (|E_r|_{\max})^{-1} \approx 41$. Таким образом, за нижнюю границу зоны излучения полуволнового электрического вибратора, в которой ЭМП можно считать чисто поперечным, принято соотношение $r/\lambda \geq 2$.

Таким образом, проведен электродинамический анализ структуры электромагнитного поля непосредственно с поверхности полуволнового электрического вибратора до дальней зоны. Выявлены особенности поведения электромагнитного поля в ближней и промежуточной зонах полуволнового электрического вибратора. Установлено, что в промежуточной зоне, в отличие от общепринятого мнения, электромагнитное поле не является чисто поперечным. Сделан вывод о нецелесообразности деления пространства на ближнюю и промежуточную зоны. Приведенные результаты говорят о непосредственной связи тока на вибраторе с напряженностями электрического и магнитного полей излучения в пространстве, в отличие от утверждения [Л14.31], что напряженности \vec{E} и \vec{H} есть лишь удобный математический аппарат для описания свойств электрического вибратора в дальней зоне и они непосредственно не связаны с током $I_z(t)$ на поверхности вибратора.

Материал раздела 14.14 написан на основе работ [Л14.25–Л14.29].

14.15(*). Несамоспряженные краевые задачи электродинамики

14.15.1. Самоспряженные и несамоспряженные электродинамические операторы. Электродинамический оператор образуется совокупностью дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений) и системы граничных условий, то есть, по существу, понятие «электродинамический оператор» можно отождествлять с краевой задачей. В широком смысле электродинамические операторы подразделяются на самоспряженные и несамоспряженные.

Собственные значения самоспряженных краевых задач являются действительными, несамоспряженных — в общем случае комплексными величинами. Собственные значения краевых задач определяют волновые числа дискретного спектра волн направляющей структуры.

До сравнительно недавнего времени [Л14.32] при рассмотрении направляющих структур интересовались, как правило, волнами лишь двух видов: распространяющимися и реактивно-затухающими, которым в структурах без диссипации энергии соответствуют действительные собственные значения краевых задач. Эти волны в подавляющем большинстве случаев и использовались на практике.

Поскольку действительные собственные значения присущи как сопряженным, так и несамосопряженным краевым задачам, принципиально интереса к классу несамосопряженных краевых задач не проявлялось, тем более, что большинство однородных по поперечному сечению продольно-регулярных направляющих структур описывается самосопряженными краевыми задачами.

Вопрос классификации операторов оказался злободневным после того, как было показано, что доминирующую часть спектра неоднородных направляющих структур составляют так называемые комплексные волны, которые являются принципиальной «принадлежностью» несамосопряженных краевых задач.

Самосопряженными краевыми задачами описывается лишь очень ограниченный набор направляющих структур канонических поперечных сечений: прямоугольный, круглый и эллиптический однородно заполненные волноводы, коаксиальная линия, прямоугольный волновод с плоско-параллельными слоями. И, пожалуй, практически это все. Остальное многообразие направляющих структур описывается несамосопряженными краевыми задачами, которые имеют свою специфику, определяющую особенности спектров волн структур.

Эти особенности должны учитываться при формировании базисов дифракционных задач, связанных с расчетом линий связи и функциональных узлов СВЧ-, КВЧ- и оптического диапазонов волн при их проектировании, при поиске новых подходов к их практической реализации. Все это определяет интерес к неоднородным направляющим структурам, описываемым несамосопряженными операторами, рассматриваемым в настоящем разделе.

Выше были рассмотрены различные методы электродинамического расчета устройств СВЧ и антенн. Все они так или иначе используют декомпозицию сложных функциональных узлов на базовые элементы, которые, как правило, представляют собой отрезки различных неоднородных направляющих структур.

Неоднородные по поперечному сечению металло-диэлектрические волноводы [Л14.32] являются базовыми структурами различных функциональных узлов СВЧ-, КВЧ- и оптического диапазонов волн [Л14.33, Л14.34]. Неоднородность (многопараметричность) поперечного сечения позволяет существенно расширить возможности волноводных систем [Л14.35–Л14.40], значительно повысить технические характеристики устройств, выполняемых на их основе, создать принципиально новые (по конструктивному исполнению) функциональные узлы [Л14.41–Л14.45].

Расчет базовых направляющих и резонансных структур и функциональных узлов на их основе сводится, как правило, к решению различных краевых электродинамических задач, особенности которых определяются спецификой рассматриваемых структур. Одним из важнейших вопросов, возникающих при постановке и решении краевых задач электродинамики, является определение типа оператора, соответствующего рассматриваемой задаче.

Обычно [Л14.47] самосопряженность оператора L устанавливается на основе проверки выполнения равенства $(Lu, v) = (u, Lv)$, где u — решение прямой задачи, v — решение сопряженной задачи. Однако такой подход является апостериорным: установить тип оператора с помощью приведенного равенства можно, как правило, лишь решив краевую задачу. С точки зрения определения предмета исследований представляет значительный интерес предварительно (до решения краевой задачи) классифицировать оператор. Это позволяет предсказать возможные типы решений, области их существования и качественный характер, благодаря чему последующие исследования будут целенаправленными.

Известно [Л14.46], что собственные значения самосопряженной краевой задачи являются действительными, несамосопряженной — как действительными, так и комплексными величинами. В краевых электродинамических задачах собственные значения определяют волновые числа. Таким образом, по характеру априорно определенных возможных собственных значений можно судить о спектре волн, которые могут существовать в рассматриваемой структуре. Следовательно, после постановки краевой задачи для целенаправленного поиска ее решений требуется первоначально определить тип оператора, соответствующего ей.

Тип электродинамического оператора определяет спектр возможных решений краевой задачи. В силу того, что собственные значения несамосопряженных краевых задач в общем случае — комплексные величины, главной особенностью направляющих структур, описываемых этими задачами, являются волны с комплексными волновыми числами. При этом в структурах с диссипацией энергии это обычные волны, затухание которых вызвано активными потерями, в структурах без диссипации — это так называемые комплексные волны (КВ) [Л14.32, Л14.36, Л14.48, Л14.49], являющиеся принципиальным «продуктом несамосопряженности» краевой задачи.

Помимо существования различных видов КВ направляющим структурам, описываемым несамосопряженными операторами, присущи такие явления, как аномальная дисперсия [Л14.50–Л14.51], инверсия критических частот собственных волн [Л14.53], образование в пределах поперечного сечения встречных потоков мощности [Л14.54–Л14.56], существование на дисперсионных характеристиках точек жордановой кратности волновых чисел нормальных волн, возникновение в этих точках присоединенных волн [Л14.57] и т.д.

Таким образом, характеристики любой направляющей структуры, особенности волн, распространяющихся в ней, неразрывно связаны с типом электродинамического оператора, описывающего структуру. При расчете функциональных узлов СВЧ-, КВЧ- и оптического диапазонов волн всегда так или иначе производится их декомпозиция, в результате чего выделяются элементы базовых структур, для каждой из которых решается (решена) краевая задача. Если хотя бы одна из базовых структур описывается несамосопряженной краевой задачей, краевая задача для функционального узла в целом оказывается несамосопряженной со всеми присущими ей особенностями. В связи с этим можно сказать, что специфика решений

несамосопряженных краевых электродинамических задач сказывается как на характеристиках отдельных направляющих структур, описываемых этими задачами, так и на дифракционных базисах функциональных узлов, компонуемых из элементов этих структур, определяя характеристики функциональных узлов в целом. Это указывает на необходимость исследования специфики несамосопряженных краевых задач, учета ее при разработке методов расчета канонических функциональных узлов и создании функциональных узлов нового типа, использующих принципиальные особенности структур, описываемых несамосопряженными операторами.

В настоящее время становится все более очевидным, что эффективные расчет и проектирование СВЧ-, КВЧ-, оптических устройств, интегральных схем возможны лишь в том случае, если в основу системы проектирования закладываются адекватные электродинамические модели как базовых элементов, так и функциональных узлов в целом. Построение адекватных электродинамических моделей невозможно без предварительного исследования особенностей базовых структур, «порождаемых» несамосопряженностью описывающих их (структур) операторов.

Исследованию типов электродинамических операторов и особенностей решений краевых задач, им соответствующих, до последнего времени должного внимания не уделялось. Упор на специфику несамосопряженных краевых электродинамических задач, по-видимому, впервые стал делаться в работах [Л14.58–Л14.60]. Развитие это направление получило в исследованиях, результаты которых опубликованы в [Л14.32, Л14.61–Л14.65].

14.15.2. Классификация краевых электродинамических задач. Классификация краевых задач (типов операторов) заключается [Л14.32, Л14.46, Л14.58] в следующем. Предполагается, что однородная краевая задача образуется дифференциальным уравнением:

$$L(u) = \sum_{v=0}^l f_v u^{(v)} = 0,$$

где l — порядок дифференциального уравнения, и системой граничных условий:

$$U_m = 0; m = 1, 2, \dots, N.$$

Сопряженная ей краевая задача образуется [Л14.66] дифференциальным уравнением:

$$L^*(u) = \sum_{v=0}^l (-1)^v (\bar{f}_v u)^{(v)} = 0$$

(черта над функцией f означает комплексную сопряженность) и системой граничных условий:

$$U_k = 0; k = 1, 2, \dots, N^*.$$

Однородная краевая задача называется [Л14.66] *самосопряженной*, если:

1. $L(u) = L^*(u)$.
2. Краевые условия прямой и сопряженной задач эквивалентны.

В диссипативных структурах первое условие самосопряженности в силу комплексности f_v не выполняется. Поэтому все диссипативные направляющие структуры описываются несамосопряженными электродинамическими операторами и, как следствие, волны в них (структурах) имеют комплексные волновые числа. Когда в направляющих структурах без диссипации энергии поле описывается однородным уравнением Гельмгольца (уравнением четного порядка), первое условие самосопряженности для всех краевых задач, получающихся после разделения переменных, как правило, удовлетворяется.

Для выполнения второго условия необходимо [Л14.32, Л14.58], чтобы имело место равенство: $N^* = N$. Таким образом, это равенство является необходимым условием самосопряженности краевой задачи. Если хотя бы одна из краевых задач на уравнениях, полученных после разделения переменных в уравнении Гельмгольца, оказывается несамосопряженной, несамосопряженной является [Л14.60] краевая задача для направляющей структуры в целом. В соответствии со сформулированными правилами классификации краевых задач подавляющему большинству электродинамических структур соответствуют [Л14.32, Л14.58] несамосопряженные краевые задачи.

Повсеместное использование в СВЧ- и КВЧ-технике неоднородных направляющих структур делает задачу исследования спектров волн последних исключительно актуальной. По крайней мере, применение проекционных методов невозможно без наличия полной информации о спектрах волн базовых структур. При этом, если сведения об обычных распространяющихся и реактивно затухающих волнах представлены достаточно исчерпывающе, спектр комплексных волн (КВ), являющихся принципиальным «продуктом» несамосопряженности краевых задач, до недавнего времени [Л14.32] был мало исследован, несмотря на указанное выше его преобладание и принципиальную роль в дифракционных задачах.

Исследование спектров волн (колебаний) базовых электродинамических структур преследует своей целью создание математической основы для решения с использованием различных проекционных методов [Л14.47, Л14.67–Л14.69] дифракционных задач [Л.14.40–Л.14.47], связанных с расчетом функциональных узлов, планарных и объемных интегральных схем СВЧ-, КВЧ- и оптического диапазонов волн [Л14.34].

Система уравнений Максвелла в случае однородных и ступенчато-неоднородных электродинамических структур, заполненных взаимной средой (первый случай), как правило, сводится к уравнению Гельмгольца относительно той или иной функции поля, а краевые задачи при этом в зависимости от записи граничных условий классифицируются как задачи Дирихле, Неймана или Штурма–Лиувилля [Л14.66, Л14.79–Л14.81]. В случае невзаимного заполнения из системы уравнений Максвелла можно получить [Л14.82] уравнение Гельмгольца относительно скалярной комплексной функции, связывающей электрическое и магнитное поля. В первом случае несамосопряженность краевой задачи при действительных ϵ и μ является следствием отсутствия тождественного совпадения граничных условий прямой и сопряженной задач [Л14.66]. Во втором случае краевая задача является принципиально (при любых условиях) несамосопряженной.

Основной особенностью несамосопряженных краевых задач, как уже отмечалось, является [Л14.46] комплексность (в общем случае) ее собственных значений. В случае полуоднородных краевых электродинамических задач (задач на однородных уравнениях с неоднородными граничными условиями) это утверждение должно быть скорректировано: следует говорить уже не о комплексности собственных значений как таковых, а о комплексности волновых чисел, являющихся решениями дисперсионного уравнения, получаемого из граничных условий. При этом комплексность волновых чисел, имеющая четкую физическую подоплеку, правильно обнаруживается лишь при корректной формулировке граничных условий. Необоснованная приближенность их записи чревата потерей решений, являющихся принципиальными для несамосопряженных задач. В этом смысле последние являются очень «чувствительными» к записи граничных условий. Несамосопряженные краевые задачи в рамках одной рассматриваемой электродинамической структуры могут давать принципиально различные решения в зависимости от записи граничных условий, выбора математической модели, описывающей структуру.

Стремление дать трактовку физических явлений, являющихся прямым следствием несамосопряженности краевых задач, в рамках устоявшихся концепций теории самосопряженных операторов часто приводило [Л14.83] к ошибочным представлениям. Примером этого является неверная трактовка феномена комплексных волн с позиции взаимодействия волн, «порождаемых» самосопряженными операторами [Л14.84].

Принципиальной особенностью решений несамосопряженных краевых электродинамических задач является (в отличие от самосопряженных) частотная зависимость их пространственных распределений. В связи с этим, в частности, классификация волн, описываемых решениями несамосопряженных краевых задач, по структурам их полей (как это делается в случае волн, описываемых самосопряженными операторами) оказывается неправомерной.

В несамосопряженных краевых задачах в общем случае отсутствует [Л14.85] непрерывность ветвей решений, соответствующих распространяющимся и запердежным волнам. Дисперсионные характеристики указанных волн соединяются [Л14.86] ветвями решений дисперсионных уравнений, соответствующих комплексным волнам.

14.15.3. Определение типов электродинамических операторов, описывающих поперечно-неоднородные направляющие структуры. Как было отмечено выше, волны в однородных и кусочно-однородных электродинамических структурах, заполненных взаимной средой, обычно описываются краевыми задачами на трехмерном уравнении Гельмгольца относительно скалярных функций электромагнитного поля, в частности, продольных компонент электрического и магнитного векторов Герца:

$$\Delta \Pi_z^{e,m} + \omega^2 \epsilon \mu \Pi_z^{e,m} = 0, \quad (14.15.1)$$

где ϵ и μ — параметры сред, образующих структуру.

После разделения в (14.15.1) переменных образуются краевые задачи на уравнениях вида:

$$L(u) = \sum_{v=0}^{\bar{n}} f_v u^{(v)} = 0 \quad (14.15.2)$$

с граничными условиями:

$$U_m = 0; \quad m = 1; 2; \dots N. \quad (14.15.3)$$

Краевая задача (14.15.2), (14.15.3) является, как отмечалось выше, самосопряженной при выполнении двух условий:

1. Дифференциальные уравнения, соответствующие прямой и сопряженной задачам [Л14.66], совпадают, то есть

$$L(u) = L^*(u). \quad (14.15.4)$$

2. Краевые условия прямой и сопряженной задач эквивалентны.

$L^*(u)$ в (14.15.4) — дифференциальное выражение, соответствующее сопряженной задаче [Л14.66], образуемой уравнением:

$$L^*(u) = \sum_{v=0}^{\bar{n}} (-1)^v (\bar{f}_v u)^{(v)} = 0 \quad (14.15.5)$$

и граничными условиями:

$$V_k = 0; \quad k = 1; 2; \dots N^*.$$

В (14.15.2) и (14.15.5) \bar{n} — порядок дифференциального уравнения; черта над функцией f_v означает комплексную сопряженность. Число граничных условий N^* сопряженной краевой задачи, когда область определения функции u разделена на q подобластей, определяется [Л14.28] выражением

$$N^* = 2\bar{n}q - N. \quad (14.15.6)$$

Если указанные условия не выполняются (хотя бы одно из них) краевая задача (14.15.2), (14.15.3) является несамосопряженной. При этом несамосопряженной является и краевая задача на уравнении (14.15.1) для всей электродинамической структуры в целом. Следствием несамосопряженности краевой задачи является [Л14.46] комплексность, в общем случае, ее собственных значений.

Для направляющих структур без диссипации энергии (когда ε и μ — действительные величины) уравнение (14.15.1), записанное в одной из ортогональных систем координат, приводит после разделения переменных к уравнениям, для которых первое условие самосопряженности выполняется. Для выполнения второго условия необходимо [Л14.32, Л14.46], чтобы имело место равенство $N^* = N$. Как показывают результаты математического моделирования направляющих электродинамических структур, это равенство выполняется лишь в весьма ограниченном ряде случаев. В общем же случае электродинамические операторы (как было отмечено, под электродинамическим оператором понимается совокупность системы дифференциальных уравнений и граничных условий), как правило, оказываются несамосопряженными.

Таким образом, условие:

$$N^* \neq N \quad (14.15.7)$$

можно определять как достаточное условие несамосопряженности электродинамического оператора.

Рассмотрим конкретные примеры, соответствующие рассматриваемым электродинамическим структурам.

Направляющие структуры без диссипации энергии. В таких структурах параметры ϵ и μ — действительные величины, экранирующие поверхности — идеально проводящие. Рассмотрим металло-диэлектрические волноводы круглого, рис. 14.21, и прямоугольного, рис. 14.22, поперечных сечений, экранированные полосковую, рис. 14.23, и щелевую линии, рис. 14.24, открытый круглый диэлектрический волновод, рис. 14.25, в общем случае многослойный.

Функции, описывающие радиальную зависимость поля в волноводах круглого поперечного сечения (рис. 14.21, 14.25), удовлетворяют уравнению:

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \psi = 0, \quad (14.15.8)$$

эквивалентному в данном случае уравнению (14.15.2). В (14.15.8) $m = 0, 1, 2, \dots$

Сделав в (14.15.8) замену

$$\psi(\rho) = u(\rho)/\sqrt{\rho},$$

приходим к уравнению

$$L(u) = \frac{d^2u}{d\rho^2} + \left(\alpha^2 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{\rho^2} \right) u = 0. \quad (14.15.9)$$

Нетрудно показать, что дифференциальный оператор $L(u)$ удовлетворяет первому условию самосопряженности (14.15.4). Следовательно, для выяснения вопроса самосопряженности (несамосопряженности) той или иной краевой задачи для цилиндрических структур (рис. 14.15.1, 14.15.5) необходимо проверить выполнение эквивалентности граничных условий прямой и сопряженной задач. Рассмотрим различные варианты краевых задач для волноводов круглого поперечного сечения.

Простейшая структура — круглый экранированный однородно заполненный волновод, рис. 14.21а. Краевая задача для волн в таком волноводе содержит два граничных условия: условие ограниченности поля на оси волновода (при $\rho = 0$) и условие Дирихле (либо Неймана) на экране. В результате имеем

$$U_m = 0; \quad m = 1, 2; \quad N = 2.$$

Для сопряженной краевой задачи

$$N^* = 2\bar{n} - N = 2; \quad N^* = N$$

(здесь $\bar{n} = 2$ — порядок дифференциального уравнения), то есть имеет место эквивалентность граничных условий. Таким образом, краевая задача — самосопряженная.

Краевая задача для волн в круглом двухслойном волноводе, рис. 14.21б, при отсутствии угловой зависимости поля содержит 4 граничных условия: условие ограниченности поля при $\rho = 0$, два условия непрерывности его тангенциальных компонент на границе между слоями и нулевое граничное условие (либо Дирихле

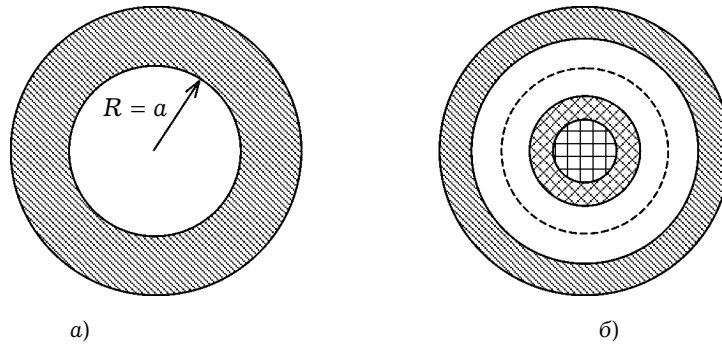


Рис. 14.21

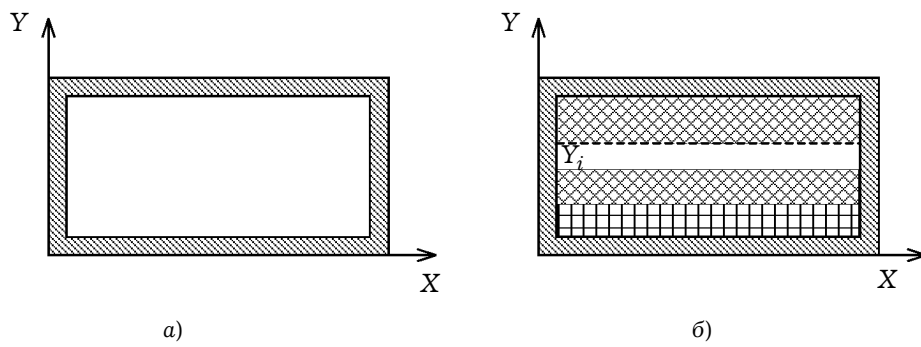


Рис. 14.22

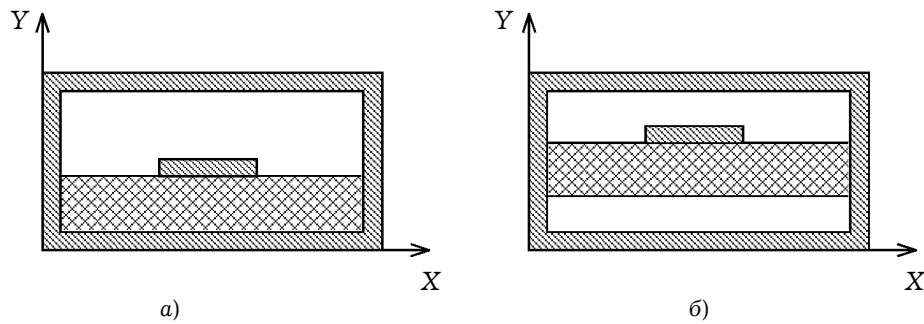


Рис. 14.23

для волн типа Е, либо Неймана для волн типа Н) на экране. В результате для симметричных волн

$$U_m = 0; \quad m = 1, 2, 3, 4; \quad N = 4,$$

$$N^* = 2(2\bar{n}) - N = 4; \quad N^* = N,$$

откуда следует, что краевая задача самосопряженная.

При наличии у волн круглого двухслойного волновода угловой зависимости поля они становятся гибридными: краевые задачи ставятся для двух (электрического и магнитного) векторов Герца, связанных между собой граничными условиями

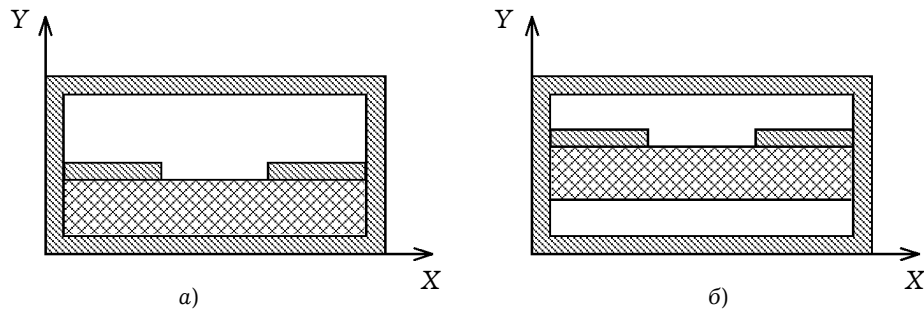


Рис. 14.24

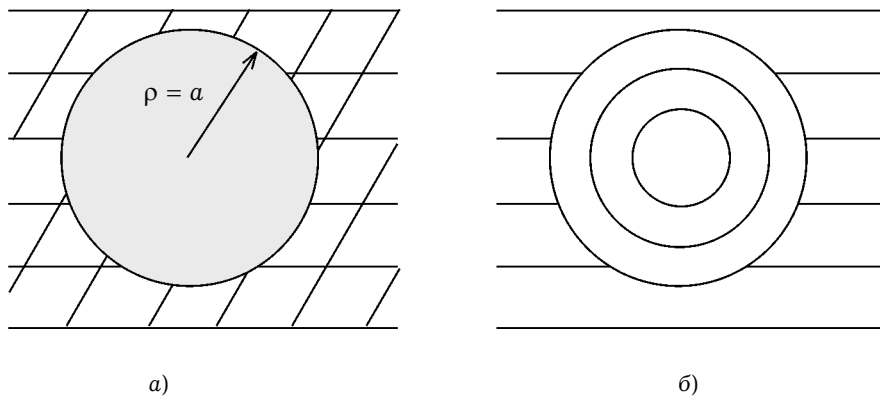


Рис. 14.25

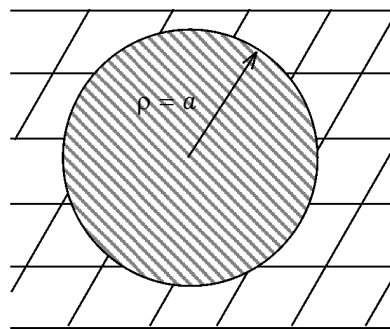


Рис. 14.26

на поверхности, разделяющей слои направляющей структуры. Поперечные компоненты поля E_ϕ и H_ϕ , тангенциальные по отношению к границе раздела, выражаются через оба вектора Герца. В результате для каждого из них имеем: условие ограниченности при $\rho = 0$, три явных граничных условия на поверхности, разде-

ляющей слои, и нулевое граничное условие (Дирихле для электрического вектора Герца, Неймана — для магнитного) на экранирующей поверхности. Тогда

$$U_m = 0; \quad m = 1, 2, \dots, 5; \quad N = 5,$$

$$N^* = 2(2\bar{n}) - N = 3; \quad N^* \neq N,$$

то есть краевая задача для несимметричных волн несамосопряженная.

Краевая задача для симметричных волн в волноводе с произвольным q числом слоев самосопряженная. Действительно, при этом

$$N = 2(q - 1) + 2 = 2q;$$

$$N^* = q(2\bar{n}) - N = 2q; \quad N^* = N.$$

Краевая задача для несимметричных волн в волноводе с произвольным q числом слоев несамосопряженная потому, что в этом случае

$$N = 3(q - 1) + 2 = 3q - 1;$$

$$N^* = q(2\bar{n}) - N = q + 1; \quad N^* \neq N.$$

Аналогичное рассмотрение можно провести для краевых задач, описывающих волны в открытом круглом диэлектрическом волноводе (ДВ), рис. 14.25. Разница будет лишь в том, что вместо граничного условия на экране будет задаваться граничное условие на бесконечности (при $\rho \rightarrow \infty$). Если это условие задано, то так же, как и для экранированного волновода, краевая задача, описывающая симметричные волны (при произвольном q числе слоев), будет самосопряженной, краевая задача, описывающая несимметричные волны, будет несамосопряженной. В том случае, когда граничное условие при $\rho \rightarrow \infty$ не задается, краевая задача для волн круглого ДВ всегда несамосопряженная.

Краевая задача для волн прямоугольного волновода с плоско-параллельными слоями, рис. 14.22б, ввиду эквивалентности граничных условий:

$$E_{x_i}(y = y_i) = E_{x_{i+1}}(y = y_i) \quad \text{и} \quad E_{z_i}(y = y_i) = E_{z_{i+1}}(y = y_i); \quad (14.15.10a)$$

$$H_{x_i}(y = y_i) = H_{x_{i+1}}(y = y_i) \quad \text{и} \quad H_{z_i}(y = y_i) = H_{z_{i+1}}(y = y_i), \quad (14.15.10б)$$

где i — номер слоя, является самосопряженной. Действительно, функция описывающая зависимость поля от координаты y , удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \alpha_y^2 u = 0 \quad (14.15.11)$$

и системе граничных условий

$$U_m = 0; \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

состоящей из условий Дирихле или Неймана на верхней и нижней экранирующих поверхностях и граничных условий (14.15.10). В результате имеем

$$N = 2(q - 1) + 2 = 2q,$$

$$N^* = 2q\bar{n} - N = 2q$$

($\bar{n} = 2$ — порядок дифференциального уравнения). Следовательно, выполняется равенство $N^* = N$, обеспечивающее эквивалентность граничных условий прямой и сопряженной краевых задач, что делает краевую задачу для волн прямоугольного волновода с плоско-параллельными слоями самосопряженной.

В случае однородно заполненного прямоугольного волновода, рис. 14.22а, краевые задачи по осям x и y образуются уравнениями типа (14.15.11) и двумя граничными условиями (либо Дирихле, либо Неймана), соответственно, на левой и правой, на верхней и нижней экранирующих поверхностях. В результате

$$N = 2; \quad N^* = 2\bar{n} - N = 2; \quad N^* = N,$$

что говорит о самосопряженности краевой задачи для волн однородно заполненного прямоугольного волновода.

На рис. 14.23, 14.24 показаны по две разновидности экранированных полосковых и щелевых линий. Функции, описывающие зависимости поля в выделенных слоях (частичных областях) от координаты y , удовлетворяют уравнению (14.15.1) и системе граничных условий, число которых ввиду гибридности поля определяется как

$$N = 4(q - 1) + 2 = 2(2q - 1),$$

(q — число слоев) и включает в себя условия Дирихле или Неймана на верхней и нижней экранирующих поверхностях и равенства на границах между слоями тангенциальных компонент поля:

$$\begin{aligned} E_{x_i}(y_i) &= \begin{cases} E_{x_{i+1}}(y_i); \\ 0; \end{cases} \quad E_{z_i}(y_i) = \begin{cases} E_{z_{i+1}}(y_i); \\ 0; \end{cases} \\ H_{x_i}(y_i) &= H_{x_{i+1}}(y_i); \quad H_{z_i}(y_i) = H_{z_{i+1}}(y_i). \end{aligned} \quad (14.15.12)$$

Число граничных условий сопряженной задачи определяется как

$$N^* = 2q\bar{n} - N = 2.$$

Поскольку $N^* \neq N$, краевые задачи для волн полосковых и щелевых линий являются несамосопряженными.

В тех случаях, когда краевые задачи для полосковых и щелевых линий сводятся к интегральным уравнениям относительно токов на поверхностях внутренних проводников, граничные условия для магнитного поля в (14.15.12) включают в себя равенства тангенциальных компонент магнитного поля соответствующим компонентам плотности тока на поверхностях внутренних проводников. При этом $N^* \neq N$, и краевая задача является несамосопряженной.

Диссипативные направляющие структуры. В том случае, когда направляющая структура образована средами с комплексными ϵ и μ , краевые задачи являются заведомо несамосопряженными ввиду невыполнения условия (14.15.4). Действительно, в этом случае, как следует из (14.15.2) и (14.15.5), дифференциальные операторы прямой и сопряженной задач ввиду комплексности коэффициентов f_v и \bar{f}_v не совпадают. В уравнении Гельмгольца комплексным оказывается коэффициент $\omega^2 \epsilon \mu$ при функции, относительно которой решается это уравнение.

Собственные значения краевых задач для волноводов, содержащих диссипативную среду, в общем случае являются комплексными величинами. Соответственно, волновые числа собственных волн являются комплексными функциями частоты. Комплексность волновых чисел приводит к затуханию собственных волн, связанному с тепловыми потерями в диссипативной среде.

Если между диэлектрическими слоями рассмотренных выше слоистых волноводов поместить резистивные пленки и рассматривать их как самостоятельные слои с комплексными ϵ , краевые задачи, как отмечено выше, будут заведомо несамосопряженными. Однако, если для резистивных пленок выполняется условие $\delta \gg \Delta$, где Δ — толщина пленки, δ — толщина скин-слоя ее материала, при решении краевых задач можно [Л14.32] использовать метод поверхностного тока (МПТ), учитывающий наличие резистивных пленок введением разрывных граничных условий для тангенциальных компонент магнитного поля. Правомерность использования МПТ в задачах подобного типа доказана в [Л14.32].

Покажем, что краевая задача для слоистых волноводов с резистивными пленками, формулируемая на основе МПТ, является несамосопряженной. Вопрос о типе оператора, соответствующего такой краевой задаче, возникает из-за того, что во всех выделенных частичных областях при использовании МПТ параметры ϵ и μ — действительные величины, однако наличие резистивных пленок должно привести к диссипативности направляющей структуры и, следовательно, к комплексности волновых чисел ее собственных волн, то есть направляющая структура должна [Л14.46] описываться несамосопряженной краевой задачей. Посмотрим, следует ли несамосопряженность краевой задачи из самой ее постановки при использовании МПТ.

Обратимся к граничным условиям (14.15.10). Нетрудно видеть, что разрывные граничные условия для тангенциальных компонент магнитного поля, записанные в соответствии с МПТ в месте расположения резистивных пленок, уже не эквивалентны. В результате равенство $N^* = N$ перестает выполняться. Следовательно, краевая задача при использовании МПТ, несмотря на недиссипативность выделенных слоев структуры, является несамосопряженной.

Таким образом, любой учет диссипативности направляющей структуры при постановке краевой задачи (и через комплексность параметров ϵ, μ сред, образующих структуру, и путем введения поверхностных токов) делают эту задачу несамосопряженной. При этом комплексность волновых чисел (соответственно, собственных значений) связана с тепловыми потерями.

Для рассмотрения одной и той же электродинамической структуры могут быть выбраны различные математические модели. Выбор математической модели влияет на тип электродинамического оператора, описывающего структуру. Покажем это на конкретных примерах. Рассмотрим круглый экранированный волновод, рис. 14.25а, с неидеально проводящей внутренней поверхностью и металлический цилиндр, материал которого имеет конечную проводимость, рис. 14.26. И та, и другая структуры могут рассматриваться с позиций двух различных математических моделей: на основе импедансного метода и на основе метода согласования полей.

В первом случае на проводящих поверхностях записывается импедансное граничное условие, учитывающее параметры проводящей среды. Во втором случае проводящая среда рассматривается как слой цилиндрической направляющей структуры, и на границе между слоями записываются условия непрерывности тангенциальных компонент поля.

Краевая задача для круглого экранированного волновода, заполненного недиссипативной средой, поставленная на основе импедансного метода, содержит два граничных условия: условие ограниченности функции поля при $\rho = 0$ и импедансное граничное условие на поверхности $\rho = a$, записываемое как $E_\varphi/H_z = W$ для волн типа H и $E_z/H_\varphi = -W$ для волн типа E , где W — поверхностный импеданс. В результате имеем: $N = 2$; $N^* = 2\bar{n} - N = 2$; $N^* = N$.

Таким образом, краевая задача, поставленная на основе импедансной модели, с учетом того, что уравнение Гельмгольца при этом описывает поле лишь в области с действительными ε и μ , является самосопряженной.

Аналогичным образом можно поставить краевую задачу для проводящего цилиндра. Разница лишь в том, что в этом случае два граничных условия образуются из нулевого граничного условия на бесконечности, что соответствует поверхностным волнам, и импедансного граничного условия на поверхности цилиндра $\rho = a$. Краевая задача также оказывается самосопряженной.

Комплексность волновых чисел, поскольку обе рассмотренные структуры диссипативные, является следствием комплексности поверхностных импедансов. Используемые импедансные граничные условия являются, вообще говоря, приближенными и становятся строгими лишь для симметричных волн.

В математической модели, использующей метод согласованных полей, рассматриваемые структуры разбиваются на соосные цилиндрические области (слои), на границах между которыми «сшиваются» тангенциальные компоненты полей. В этом случае при отсутствии угловой зависимости поля (симметричные волны) имеем: $N = 4$ (два граничных условия при $\rho = a$, нулевое граничное условие в толще металла и условие ограниченности поля при $\rho = 0$ в экранированном волноводе или нулевое граничное условие на бесконечности в открытом); $N^* = 2\bar{n}q - N = 4(q = 2)$. При отсутствии угловой зависимости поля краевая задача (с позиции второго признака самосопряженности) самосопряженная так же, как и при использовании импедансной модели. Неслучайно выше было отмечено, что импедансное граничное условие является строгим лишь в случае симметричных волн.

При наличии угловой зависимости поля краевая задача, поставленная в соответствии с методом согласованных полей, становится несамосопряженной. Действительно, в этом случае на границе между областями записываются условия непрерывности 4-х тангенциальных компонент поля. В результате: $N = 6$; $N^* = 2$; $N^* \neq N$.

В краевой задаче, формулируемой на основе математической модели, использующей метод согласованных полей, не выполняется первое условие самосопряженности, поскольку в проводящем слое (экран или цилиндр) ε — комплексная величина. Поэтому краевая задача в любом случае (и для симметричных, и для несимметричных волн) является несамосопряженной.

Таким образом, две различные математические модели рассмотрения одних и тех же направляющих структур могут приводить к принципиально различным типам краевых задач, что в общем случае влечет за собой получение различных спектров волн.

На тип оператора краевой задачи могут влиять дополнительные граничные условия, в частности, условия, учитывающие геометрические сингулярности электродинамических структур [Л14.67]. Введение дополнительных граничных условий, изменяя тип оператора, может изменять спектр волн направляющей структуры.

14.15.4. Условия существования в направляющих структурах КВ. *Комплексными волнами* (КВ) принято [Л14.48, Л14.49] называть волны направляющих структур без диссипации энергии, имеющие комплексные волновые числа. В экранированных структурах КВ являются собственными. В открытых структурах могут существовать как собственные, так и несобственные комплексные волны. Из самой классификации понятно, что собственные КВ описываются решениями однородных краевых задач, несобственные — решениями задач, которые выше были определены как полуюднородные.

Главной особенностью собственных КВ является нулевой (по полному поперечному сечению) поток мощности, средний за период. Связано это с распределенным разворотом потока энергии, возникающим за счет сложных дифракционных явлений на естественных границах неоднородных и продольно-нерегулярных направляющих структур.

Как было отмечено выше, поля волн взаимных направляющих структур описываются уравнениями Гельмгольца относительно электрического и магнитного векторов Герца, разделение переменных в которых приводит к краевым задачам относительно функций соответствующих ортогональных координат. Поскольку дифференциальные уравнения этих краевых задач имеют четный ($n = 2$) порядок, первое условие самосопряженности для недиссипативных структур выполняется [Л14.46]. Таким образом, тип оператора в этом случае определяется на основе второго условия самосопряженности. В результате неравенство:

$$N^* \neq N \quad (14.15.13)$$

можно рассматривать как достаточное условие несамосопряженности электродинамического оператора. В свою очередь несамосопряженность электродинамического оператора является необходимым условием [Л14.46] того, что собственные значения краевых задач в общем случае будут комплексными величинами.

Таким образом, равенство (14.15.13) можно рассматривать как необходимое условие существования в направляющей структуре волн с комплексными волновыми числами при отсутствии диссипации энергии, то есть комплексных волн.

Волновые числа всех волн направляющей структуры (в том числе и комплексных) находятся как решения дисперсионных уравнений, получающихся приравнованием нулю главных определителей систем линейных однородных алгебраических уравнений, получающихся из граничных условий.

Равенство их нулю следует из условия нетривиальности решений систем ли-

нейных однородных алгебраических уравнений. Указанным образом получаются дисперсионные уравнения и в случае полуднородных краевых задач, если не конкретизировать то или иное ненулевое граничное условие, а рассматривать его как естественно образующееся в результате решения задачи.

Несамосопряженность электродинамического оператора, соответствующего той или иной структуре, говорит лишь о возможности существования в ней комплексных волн, однако не гарантирует обязательного присутствия той или иной КВ при любых параметрах этой структуры.

Достаточное условие существования в той или иной направляющей структуре КВ можно получить, используя тот факт, что ветви решений дисперсионных уравнений, соответствующие комплексным волнам, начинаются [Л14.36, Л14.48, Л14.50, Л14.51] в точках жордановой кратности волновых чисел нормальных волн [Л14.57], в которых возникают так называемые присоединенные волны [Л14.86].

Таким образом, достаточное условие существования в той или иной конкретной (с заданными параметрами) направляющей структуре КВ заключается в наличии общих решений у дисперсионных уравнений нормальных волн и присоединенных волн, описываемых решениями краевых задач на уравнениях, присоединенных к уравнениям вида (14.15.2), получающихся после разделения переменных в уравнении Гельмгольца. Дисперсионные уравнения присоединенных волн образуются приравниванием нулю главных и дополнительных определителей систем, в общем случае, неоднородных линейных алгебраических уравнений, получаемых из граничных условий краевой задачи.

14.15.5. Свойства собственных комплексных волн. Было показано [Л14.54, Л14.56], что собственные комплексные волны в неоднородных направляющих структурах мощности в среднем за период через поперечное сечение структуры не переносят, то есть их собственные потоки мощности равны нулю. Наличие в любом реальном тракте нерегулярностей по продольной оси приводит к возникновению встречных комплексных волн, взаимодействие которых делает актуальным вопрос о взаимном потоке мощности. Выясним, может ли быть взаимный поток мощности двух комплексных волн отличным от нуля.

Как показано в [Л14.87–Л14.89], существование в плоскостях поперечных волновых чисел $(\alpha_{1,2})$ комплексно сопряженных решений дисперсионного уравнения обеспечивает существование в круглом двухслойном экранированном волноводе четырех комплексных волн, которые условно можно представить как:

$$(I) e^{-i(\beta_1 + i\beta_2)z} ; (II) e^{i(\beta_1 - i\beta_2)z} ; \quad (14.15.14a)$$

$$(III) e^{-i(\beta_1 - i\beta_2)z} ; (IV) e^{i(\beta_1 + i\beta_2)z} , \quad (14.15.14б)$$

где $\beta_1 > 0$; $\beta_2 < 0$; z — продольная координата в направляющей структуре.

Являясь собственными волнами экранированного волновода, комплексные волны (14.15.14) удовлетворяют условию ортогональности в энергетическом смысле [Л14.87]:

$$\int_S \left\{ \left[\vec{E}_n \vec{H}_k \right] - \left[\vec{E}_k \vec{H}_n \right] \right\} d\vec{S} = \begin{cases} N, & k = -n; \\ 0, & k \neq -n, \end{cases} \quad (14.15.15)$$

где S — поперечное сечение волновода.

Понимая в (14.15.15) под \vec{E}_n и \vec{H}_n поля комплексной волны I, а под \vec{E}_k и \vec{H}_k — поля волны II и учитывая связи этих полей [Л.14.32]:

$$\vec{E}_k = \vec{E}_n^*; \vec{H}_k = -\vec{H}_n^*, \quad (14.15.16)$$

которые следуют из комплексной сопряженности в плоскостях поперечных волновых чисел решений дисперсионного уравнения, соответствующих указанным волнам, получаем:

$$\operatorname{Re} \int_S [\vec{E}_n \vec{H}_n^*] d\vec{S} = 0. \quad (14.15.17)$$

Аналогичным образом из совместного рассмотрения волн I и III (им также соответствуют комплексно сопряженные в плоскостях поперечных волновых чисел решения дисперсионного уравнения) получаем:

$$\operatorname{Im} \int_S [\vec{E}_n \vec{H}_n^*] d\vec{S} = 0. \quad (14.15.18)$$

Равенства (14.15.17) и (14.15.18) демонстрируют известный [Л14.32, Л14.54] факт: комплексные волны не переносят мощности в среднем за период, то есть:

$$\int_S [\vec{E}_n \vec{H}_n^*] d\vec{S} = 0. \quad (14.15.19)$$

С учетом (14.15.16) из равенства (14.15.19) следует, что поля двух комплексных волн I и II удовлетворяют математическому условию ортогональности, записываемому в виде:

$$\int_S [\vec{E}_n \vec{H}_k] d\vec{S} = 0 \text{ при } k \neq -n, \quad (14.15.20)$$

из которого, однако, не следует отсутствие взаимных потоков мощности комплексных волн, которым соответствуют комплексно сопряженные решения дисперсионного уравнения на плоскостях поперечных волновых чисел.

Действительно, поскольку для этих волн

$$\vec{H}_k^* \neq f(z) \vec{H}_n^*,$$

из равенства (14.15.20) не следует равенство:

$$\int_S [\vec{E}_n \vec{H}_k^*] d\vec{S} = 0.$$

Таким образом, взаимный поток мощности комплексных волн, «порождаемых» комплексно сопряженными (в плоскостях поперечных волновых чисел) решениями дисперсионного уравнения, в общем случае может быть отличен от нуля.

Что касается комплексных волн, которым на комплексных плоскостях поперечных волновых чисел $(\alpha_{1,2})$ соответствуют одни и те же точки, являющиеся решениями дисперсионного уравнения, например, волны I и IV, то для них справедливо равенство:

$$\vec{H}_k^* = f(z) \vec{H}_n^*,$$

из которого следует, что их взаимный поток мощности должен быть равен нулю:

$$\int_S S_{z_{I,II}} dS = 0, \quad (14.15.21)$$

Аналогичное равенство для волн I и II в общем случае не выполняется. В результате взаимный поток мощности комплексных волн I и II оказывается отличным от нуля. При этом возникает ситуация, аналогичная той, которая имеет место при взаимодействии двух запердельных затухающих волн обычной экранированной направляющей структуры [Л14.84].

Волны I и II каждая сама по себе так же, как и запердельные волны, мощности (в среднем за период) не переносят, однако, их совместное существование приводит к возникновению переноса энергии. Взаимный поток мощности двух комплексных волн может возникать вследствие распределенного отражения комплексной волны I, например, от периодически расположенных по длине направляющей структуры нерегулярностей. Это имеет место, в частности, в диафрагмированном волноводе [Л14.90], в котором, как показано в [Л14.91], также могут существовать комплексные волны. В этом случае при совместном существовании волн I и II возникает поток мощности, изменяющийся по продольной координате. При этом экспериментально обнаруживается [Л14.92] экспоненциально затухающее поле с расстояниями между узлами, определяемыми как $l = \pi/\beta_1$.

В том случае, когда для волн I, II вдоль всей ветви решений дисперсионного уравнения выполняется условие, аналогичное (14.15.21), возникает стоячая волна, поле которой локализовано вблизи источника. С существованием такой волны связано явление комплексного резонанса [Л14.87]. В этом случае экспериментально обнаруживается экспоненциально убывающее поле стоячей волны с расстояниями между узлами: $l = 2\pi/\beta_1$.

14.15.6. Комплексные волны неоднородных экранированных направляющих структур. Как было отмечено выше, комплексные волны (КВ) могут существовать в принципе в любой экранированной направляющей структуре, описываемой несамосопряженной краевой электродинамической задачей. Рассмотрим на предмет особенностей КВ две таких структуры: круглый двухслойный экранированный волновод в том числе с аксиальным ферритовым стержнем и экранированную полосковую линию с внутренним проводником на диэлектрической подложке.

Комплексные волны в круглом двухслойном экранированном волноводе. На рис. 14.27 приведены дисперсионные характеристики и характеристики затухания первых 16 волн круглого двухслойного экранированного волновода, полученные на основе численного решения дисперсионного уравнения.

В общем случае (комплексные волны) продольное волновое число комплексное: $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, в случае обычных распространяющихся волн оно имеет только действительную часть $\beta_1 > 0$ (прямая волна), в случае запердельных реактивно затухающих — мнимую $\beta_2 < 0$. Характеристики, приведенные на рис. 14.27, соответствуют волноводу с параметрами: $\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1 = 84$; $a/b = 0.26$ ($\rho_1 = a$; $\rho_2 = b$).

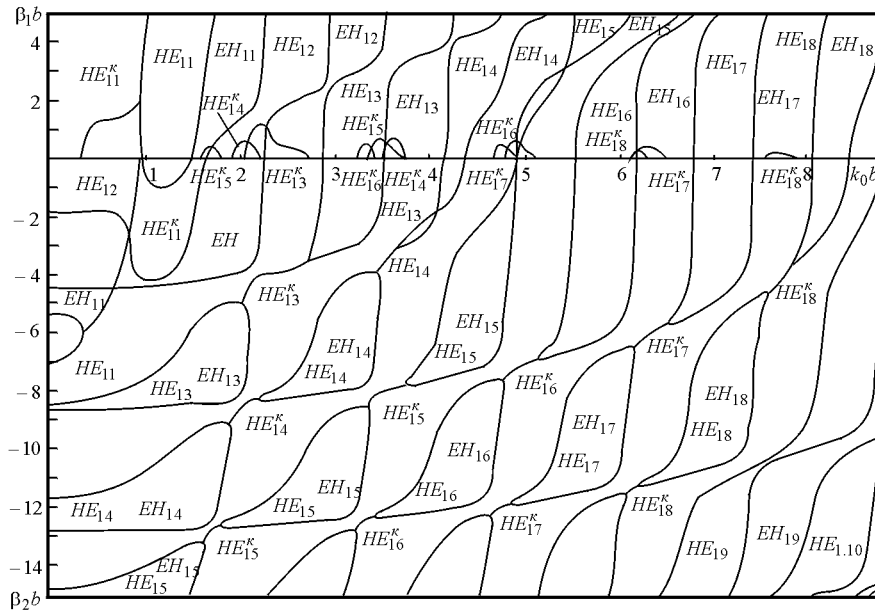


Рис. 14.27

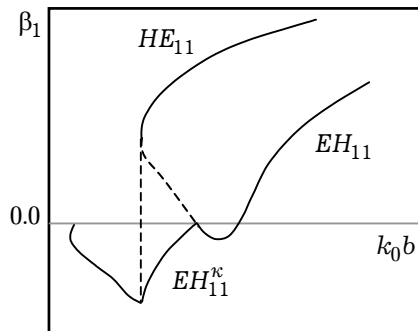


Рис. 14.28

Как видно из рис. 14.27, комплексные волны HE_{nm}^K составляют значительную часть спектра собственных волн двухслойного экранированного волновода, являясь в одном случае продолжениями распространяющихся волн (HE_{11}^K), в другом — реактивно затухающих (HE_{13}^K ; HE_{14}^K ; HE_{15}^K ; ..., HE_{18}^K). Во втором случае частотные области существования КВ одного и того же типа оказываются разделенными замкнутыми ветвями характеристик затухания соответствующих запердельных волн.

Поскольку в плоскости поперечных волновых чисел решения дисперсионного уравнения, соответствующие КВ, располагаются комплексно-сопряженными парами, для всех характеристик $\beta_1(k_0 b)$ комплексных волн можно построить зеркальные отображения относительно частотной оси $k_0 b$, $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Таким обра-

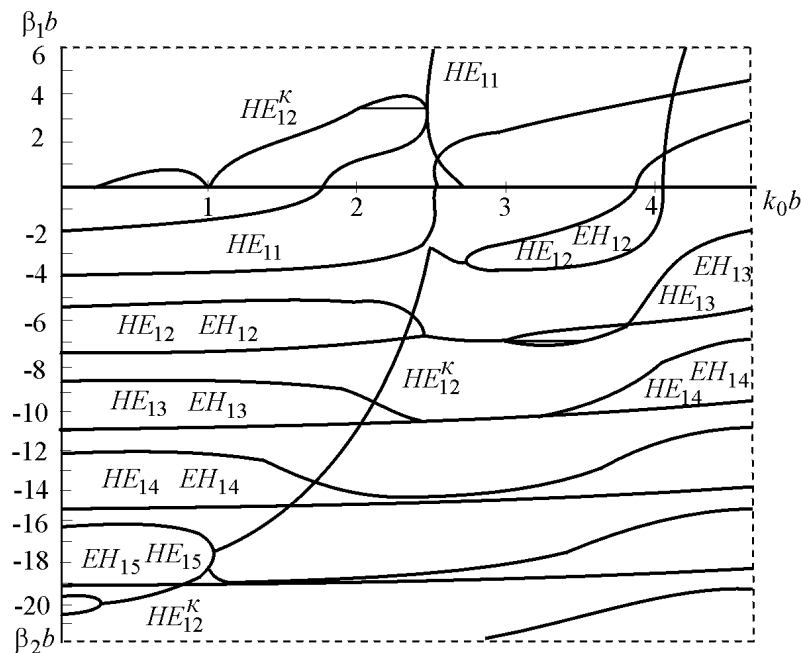


Рис. 14.29

зом, с обеих сторон от источника существуют по две комплексные волны. Естественно, связывая дисперсионные характеристики распространяющихся волн с групповыми скоростями последних, участок аномальной дисперсии волны HE_{11} в предположении, что источник электромагнитного поля находится при $z = 0$, следует изображать так, как показано на рис. 14.28. При этом волну на этом участке следует классифицировать как EH_{11} , переходящую в точке, где $v_{zp} = 0$, в комплексную волну.

При определенных параметрах волновода может наблюдаться ситуация (см. рис. 14.29, где $\epsilon = 84$; $a/b = 0.1$), когда комплексная волна HE_{11}^K прекращает свое существование, в то время как волны HE_{12} , EH_{12} , дважды претерпев вырождение (в области распространения и в запредельной области), дают протяженную ветвь комплексной волны. При этом характеристика затухания комплексной волны HE_{12}^K заканчивается на двузначном участке характеристики запредельной волны HE_{15} . На втором двузначном участке характеристики этой волны возникает еще одна ветвь комплексных решений, которую ввиду возможности предельного перехода следует отнести к волне HE_{12}^K . Отметим, что в диапазоне существования комплексной волны HE_{12}^K ее характеристика затухания пересекает целый ряд характеристик запредельных волн.

Общей интересной закономерностью в поведении дисперсионных характеристик волн двухслойного волновода является, рис. 14.27, наличие в запредельной области замкнутых петель кривых затухания, располагающихся между частотными интервалами существования КВ.

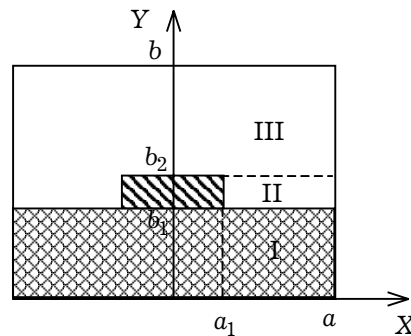


Рис. 14.30

Характерными особенностями волн волновода с большой диэлектрической проницаемостью внутреннего слоя ($\epsilon > 43$) являются, рис. 14.29, объединение ветвями комплексных решений характеристик волн с различными радиальными индексами и наличие на дисперсионных кривых низших гибридных волн точек трехкратного вырождения. Параметрическая трансформация дисперсионных характеристик низших гибридных волн при сравнительно малых значениях относительной диэлектрической проницаемости рассмотрена в [Л14.32]. Дисперсионные зависимости для волн HE_{nm} (EH_{nm}) с $n > 1$ подобны вышеописанным.

Комплексные волны в экранированной полосковой линии. Дисперсионное уравнение полосковой линии с внутренним проводником на диэлектрической подложке, рис. 14.30, составляется методом частичных областей (МЧО). На границах раздела областей I и II, II и III записываются условия непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей, из которых получаются системы функциональных уравнений. Использование условий ортогональности собственных функций краевых задач для выделенных частичных областей приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений бесконечно высокого порядка относительно неизвестных коэффициентов разложений полей в областях I, II, III. Выразив амплитудные коэффициенты областей I и III через амплитудные коэффициенты области II, понизив тем самым порядок системы, получаем систему уравнений относительно амплитудных коэффициентов разложений полей во 2-ой области. Запись условия нетривиальности решений этой системы приводит к дисперсионному уравнению собственных волн полосковой линии, которое в общем случае является детерминантным уравнением бесконечно высокого порядка. Уравнение решается методом редукции. Номер приближения определяется числом n собственных функций краевой задачи для области II, учитываемых в представлении электромагнитного поля. При этом число собственных функций, учитываемых в разложениях полей областей I и III, может быть неограниченным.

Результаты расчета характеристик спектра собственных волн полосковой линии при учете в областях I и III по 30 собственных функций и $n = 4$ приведены на рис. 14.31, 14.32. На них изображены зависимости продольного волнового числа

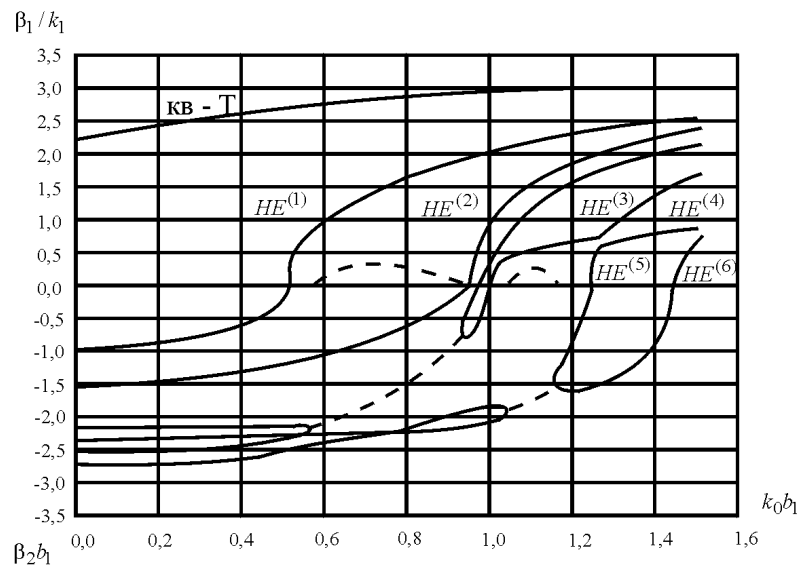


Рис. 14.31

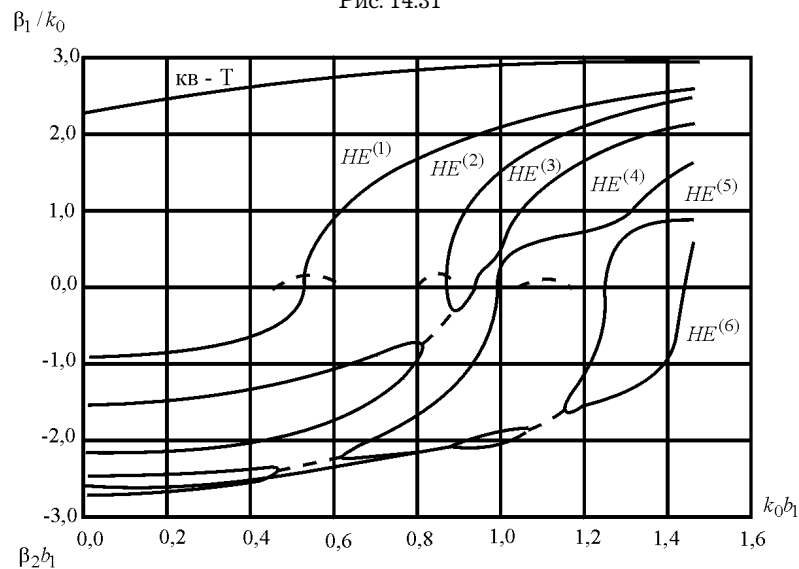


Рис. 14.32

$\beta = \beta_1 + i\beta_2$, которое в общем случае является комплексным, от k_0b_1 . Волны, характеристики которых изображены на рисунках, классифицированы как $HE^{(1)}, \dots, HE^{(i)}$ по порядку следования их критических частот.

Характеристики, приведенные на рис. 14.31, соответствуют параметрам $\varepsilon = 9.6$, $2a_1 = 0.6a$, $b_1 = 0.4b$. Из рисунка видно, что дисперсионные характеристики волн $HE^{(3)}$ и $HE^{(4)}$ в запредельной области соединяются, образуя характеристику комплексной волны, существующей в широком диапазоне частот. Волны $HE^{(5)}$ и $HE^{(6)}$ также образуют КВ, но область частот, в которой она существует, значительно уже по сравнению с предыдущей КВ. Комплексные волны (их характеристики изображены пунктиром) являются быстрыми: для них $\beta/k_0 < 1$.

При уменьшении ширины полоски ($2a_1 = 0.25a$, рис. 14.32) спектр волн полосковой линии трансформируется таким образом, что характеристика волны $HE^{(3)}$ в мнимой области удаляется от характеристики волны $HE^{(4)}$ и сближается с характеристикой волны $HE^{(2)}$, образуя отправную точку характеристики комплексной волны. Волна $HE^{(4)}$ образует КВ, объединяясь с волнами $HE^{(5)}$ и $HE^{(6)}$.

Рассмотрение двух экранированных направляющих структур позволяет установить общие закономерности. И в той, и в другой структуре КВ образуют значительную часть спектра собственных волн. И в том, и в другом случае появление КВ связано с возникновением на дисперсионных характеристиках нормальных волн точек жордановой кратности волновых чисел. И в том, и в другом случае характеристики КВ связывают характеристики обычных волн (волн либо с действительными, либо с чисто мнимыми волновыми числами).

Круглый волновод с аксиальным ферритовым стержнем. В направляющей структуре, заполненной невзаимной средой с параметрами (внешнее постоянное магнитное поле \vec{H}_0 направлено вдоль оси z)

$$\vec{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon & -i\epsilon_s & 0 \\ i\epsilon_s & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix}; \quad \vec{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & -i\mu_s & 0 \\ i\mu_s & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix},$$

электромагнитное поле описывается [Л14.93] уравнениями

$$\begin{aligned} \Delta H_z + \left(k_0^2 \epsilon \mu_z - \frac{\mu_z}{\mu} \beta^2 - k_0^2 \frac{\epsilon_s^2}{\epsilon} \mu_z \right) H_z &= i\omega \epsilon_0 \beta \epsilon_z \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon} + \frac{\mu_s}{\mu} \right) E_z, \\ \Delta E_z + \left(k_0^2 \epsilon_z \mu - \frac{\epsilon_z}{\epsilon} \beta^2 - k_0^2 \frac{\mu_s^2}{\mu} \epsilon_z \right) E_z &= -i\omega \mu_0 \beta \mu_z \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon} + \frac{\mu_s}{\mu} \right) H_z, \end{aligned} \quad (13.14.22)$$

получаемыми непосредственно из уравнений Максвелла. В (14.15.22) ϵ_0 и μ_0 — параметры свободного пространства, β — продольное волновое число.

Исключением E_z или H_z уравнения (14.15.22) можно свести к одному уравнению 4-го порядка либо относительно H_z , либо относительно E_z соответственно. Однако в таком уравнении из-за наличия смешанных производных нельзя произвести разделение переменных. Поэтому при постановке краевой задачи используется следующий искусственный прием.

Вводится функция

$$\Psi = E_z + i\xi H_z, \quad (14.15.23)$$

являющаяся линейной комбинацией продольных компонент поля направляющей структуры. Полагая для волновода с ферритовым стержнем (рис. 14.33)

$$\epsilon_z = \epsilon, \quad \epsilon_s = 0$$

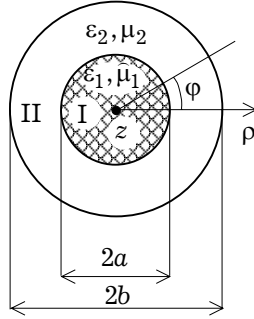


Рис. 14.33

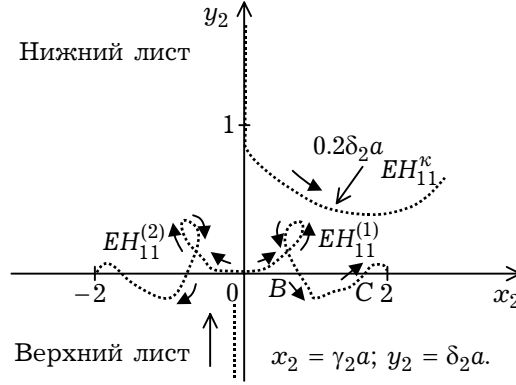


Рис. 14.34

и вводя обозначения:

$$\chi^2 = k_0^2 \epsilon \mu - \beta^2 - \mu_s^2 \frac{\epsilon}{\mu} k_0^2 + \omega \epsilon_0 \beta \xi \mu_s \frac{\epsilon}{\mu},$$

$$a = \omega \beta \epsilon_0 \epsilon \frac{\mu_s}{\mu}, \quad b = k_0^2 \left(\epsilon \mu_z + \mu_s^2 \frac{\epsilon}{\mu} - \epsilon \mu \right) + \beta^2 \left(1 - \frac{\mu_z}{\mu} \right),$$

$$c = \omega \beta \mu_0 \mu_z \frac{\mu_s}{\mu},$$

при условии, что величина ξ является решением уравнения:

$$a \xi^2 - b \xi - c = 0, \quad (14.15.24)$$

для функции (14.15.23) из (14.15.22) получаем уравнение Гельмгольца

$$\Delta \Psi + \chi^2 \Psi = 0, \quad (14.15.25)$$

где величину χ можно рассматривать как поперечное волновое число.

Поскольку квадратное уравнение (14.15.24) имеет два решения, в соответствии с записью (14.15.23) имеем две функции $\Psi_{1,2}$, через которые выражаются продольные компоненты поля внутреннего слоя:

$$E_{z1} = \frac{\xi_2 \Psi_1 - \xi_1 \Psi_2}{\xi_2 - \xi_1}, \quad H_{z1} = i \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\xi_2 - \xi_1}. \quad (14.15.26)$$

Поперечные компоненты поля выражаются через продольные (14.15.26).

К дисперсионному уравнению собственных волн круглого волновода с аксиальным ферритовым стержнем приводит запись условия нетривиальности решений системы линейных однородных алгебраических уравнений, получаемых из равенств тангенциальных компонент поля, на границе между областями I и II, рис. 14.33.

Важной интересной особенностью рассматриваемой невзаимной направляющей структуры является то, что резонансные «всплески» фазовой постоянной на частоте f_0 ферромагнитного резонанса наблюдаются у тех волн, характеристики которых имеют точки жордановой кратности волновых чисел, то есть у тех волн, которые в определенных участках частотного диапазона могут становиться комплексными. Это объясняется тем, что распространение указанных волн сопровождается образованием встречных (в пределах поперечного сечения структуры) потоков мощности, по-разному взаимодействующих с намагниченным ферритом. В результате в области запредельного затухания волн возникает частотный интервал (вблизи f_0), в котором фазовая постоянная β' оказывается отличной от нуля и имеет резонансный всплеск. Волны, характеристики которых не имеют вблизи f_0 точек жордановой кратности волновых чисел, не проявляют указанной особенности. Возникновение отмеченного «всплеска» β' фактически говорит о комплексном характере волны.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что резонансное взаимодействие волн с намагниченным ферритом создает еще один «механизм» образования волн с комплексными волновыми числами. Это можно было предположить из общих физических соображений. Дело в том, что резонансное взаимодействие поля с ферритом приводит к участию волны в перемагничивании последнего, что в свою очередь вызывает возникновение потерь и задержку передачи энергии, то есть, в конечном итоге, комплексность β . В результате волны, взаимодействующие на частоте ферромагнитного резонанса с ферритом, становятся комплексными.

Отмеченная особенность характерна для тех случаев, когда f_0 находится в области реактивного затухания волн. В том случае, когда f_0 оказывается в области распространения, резонансное взаимодействие с ферритом и в отсутствии на характеристиках указанных выше точек жордановой кратности приводит к резонансному всплеску β' и резкому увеличению затухания. Характерно, что в этом случае волны правого и левого вращения плоскости поляризации по-разному взаимодействуют с ферритом.

Как показали исследования [Л14.94], в двухслойном экранированном волноводе с продольно-намагниченным аксиальным ферритовым слоем могут существовать комплексные волны, переносящие в среднем за период мощность вдоль волновода, не удовлетворяющие условию ортогональности и взаимодействующие между собой. Комплексность волновых чисел этих волн объясняется их парным взаимодействием и перекачкой энергии внутри взаимодействующей пары.

14.15.7. Комплексные волны круглого открытого диэлектрического волновода.

Одним из наиболее широко используемых и хорошо изученных типов открытых направляющих структур является круглый ДВ, который удобен для теоретического исследования в силу возможности строгого решения краевых задач, связанных с расчётом его спектра волн. Для круглого ДВ получается точная запись (в замкнутой форме) дисперсионных уравнений, гарантирующая адекватность используемой математической модели реальной направляющей структуры. Математическая модель круглого регулярного ДВ позволяет выявить основные особенности волн, направляемых диэлектрическими волноводами.

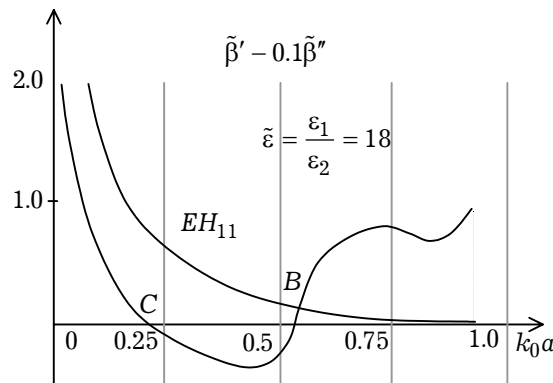


Рис. 14.35

Общая постановка краевой задачи для круглого открытого ДВ была дана в П.4.10.1, где диэлектрический волновод рассматривался как структура, направляющая поверхностные волны, поля которых экспоненциально убывают в радиальном направлении. Теория именно этих волн получила наиболее полное развитие. Поверхностные волны — основной тип волн, на которых осуществляется перенос энергии в волоконных световодах. Однако, в целом ряде устройств (это, в первую очередь, относится к плавным переходам линий передач с малым замедлением и к антеннам неосевого излучения) поверхностные волны используются лишь для возбуждения, подвергаясь затем преобразованию в волны, слабо связанные с направляющей структурой, имеющие большую поперечную протяжённость поля. При этом возникают задачи о расчёте поля излучения и характеристик передачи нерегулярных участков тракта, при решении которых неизбежно приходится учитывать полный спектр волн диэлектрического волновода.

В отличие от экранированных направляющих структур, полный спектр открытых волноводов, помимо дискретной (в силу отсутствия на внешней границе краевого условия, соответствующего задаче Штурма-Лиувилля [Л14.81]), имеет непрерывную часть, представляемую интегралом по одному из волновых чисел. Волновые числа непрерывного спектра изменяются в пределах от нуля до бесконечности и соответствуют полю излучения из волновода и полю вблизи источника. Эти поля частично описываются также различными типами комплексных волн (КВ), входящих в дискретную часть спектра.

На рис. 14.34 показано поведение корней дисперсионного уравнения в частотном диапазоне $\omega \in [0, \infty)$ на комплексной плоскости поперечного волнового числа области II. Как видно из рисунка, на высоких частотах поперечные волновые числа χ_2 , соответствующие поверхностным волнам, располагаются на отрицательной мнимой полуоси χ_2 на левом берегу разреза $\beta'' = 0$ (β'' — мнимая часть продольного волнового числа $\beta = \beta' + i\beta''$). При понижении частоты (стрелки направлены в сторону уменьшения частоты) решения дисперсионного уравнения сначала переходят в первый квадрант плоскости χ_2 , где соответствуют вытекающим волнам с полем, нарастающим в радиальном направлении, а затем в четвёртый квадрант

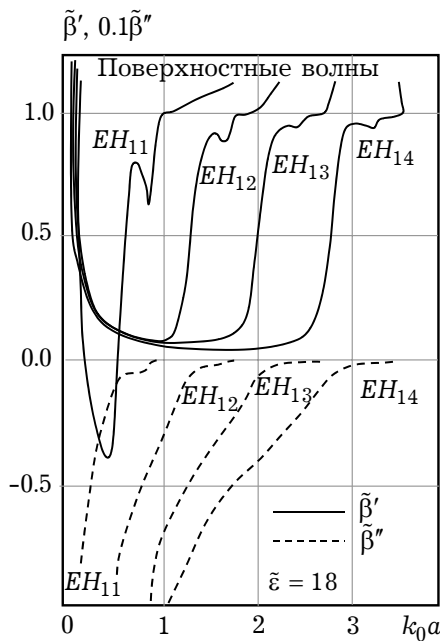


Рис. 14.36

существуют две ветви решений дисперсионного уравнения. Первая ветвь, соответствующая волне EH_{1m}^1 , лежит условно на верхнем листе римановой поверхности функции Ханкеля в первом квадранте плоскости χ_2 , переходя при уменьшении частоты в четвёртый квадрант. Вторая ветвь лежит на нижнем листе римановой поверхности функции Ханкеля во втором квадранте плоскости χ_2 , переходя с уменьшением частоты через разрез $y_2 = 0$ на верхний лист указанной римановой поверхности в третий квадрант плоскости χ_2 . Эта ветвь решений соответствует волне EH_{1m}^2 , рис. 14.34. По продольному волновому числу решения дисперсионного уравнения, соответствующие первой волне, лежат на верхнем листе римановой поверхности ($\beta'' < 0$), второй — на нижнем. При дальнейшем уменьшении частоты решения, соответствующие второй волне, вновь переходят через разрез функции Ханкеля на нижний лист её римановой поверхности во второй квадрант плоскости χ_2 , рис. 14.34.

Волны EH_{1m} в первом квадранте плоскости χ_2 являются вытекающими [Л14.32]. Убывание их амплитуд в направлении распространения поля объясняется частичным излучением энергии в окружающее пространство. Волны EH_{1m}^2 во втором квадранте плоскости χ_2 — втекающие. Нарастание их амплитуд в направлении распространения поля объясняется притоком энергии из окружающего пространства.

Отметим, что не случайно именно поверхностные волны EH_{1m} имеют своим продолжением в закритической области комплексные волны. В работе [Л14.95] показано, что в точках, определяемых уравнением $J_1(\chi_1 a) = 0$, только волны EH_{1m} имеют критические частоты. Ветви же решения дисперсионного уравнения, соот-

(точка В), где соответствуют собственным КВ, удовлетворяющим условию излучения Зоммерфельда. При дальнейшем уменьшении частоты, решения возвращаются в первый квадрант плоскости χ_2 (точка С).

Дисперсионная характеристика $\tilde{\beta}'(\kappa_0)$ и характеристика затухания $\tilde{\beta}''(\kappa_0)$, соответствующие вышеуказанным решениям, приведены на рис. 14.35, где $\tilde{\beta}' = \beta'/\kappa_0$, $\tilde{\beta}'' = \beta''/\kappa_0$. Как видно из рисунка, почти во всём частотном диапазоне комплексная волна является быстрой ($v_\phi > c$) и лишь в области частот, прилегающей к $\omega = 0$, она становится медленной. В интервале, заключённом между точками В и С, рис. 14.34, её поле экспоненциально убывает при удалении от ДВ.

Таким образом, в ДВ с действительными $\epsilon_{1,2}$ поверхностные волны EH_{1m} на критических частотах переходят в комплексные (вытекающие) волны того же типа. При этом

ветствующие волнам HE_{1m} ($m > 1$), лишь стремятся к указанным точкам, никогда не достигая их. Таким образом, ветвь решений дисперсионного уравнения, соответствующая вытекающим волнам, объединяет решения двух однородных краевых задач, соответствующих поверхностным и собственным комплексным волнам. В работе [Л14.96] показано, что при введении потерь поверхностные волны HE_{1m} также при понижении частоты переходят в вытекающие.

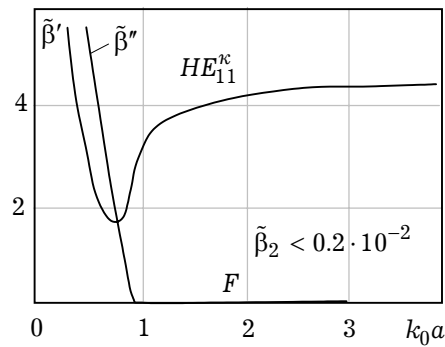


Рис. 14.37

Численные исследования [Л14.32] показывают, что частотные интервалы, в которых существуют быстрые комплексные волны, удовлетворяющие условию излучения (собственные КВ), возникают лишь при достаточно больших значениях $\tilde{\epsilon} = \epsilon_1/\epsilon_2$. Так результаты, приведённые на рис. 14.34, 14.35, соответствуют $\tilde{\epsilon} = 18$. При этом чем выше номер m волны, тем больше должно быть $\tilde{\epsilon}$. Так комплексная волна EH_{12} , удовлетворяющая условию излучения, обнаруживается лишь при $\tilde{\epsilon} > 50$.

На рис. 14.36 приведены дисперсионные характеристики и характеристики затухания спектра комплексных волн EH_{1m} при $\tilde{\epsilon} = 18$. Как видно из рисунка, при таком значении диэлектрической проницаемости лишь у волны EH_{11} существует частотный диапазон, в котором её поле убывает при удалении от волновода, рис. 14.37.

Таким образом, поверхностные волны HE_{1m} ($m > 1$) в ДВ без потерь не имеют продолжения в виде комплексных волн. Поверхностные волны EH_{1m} на своих критических частотах переходят в быстрые комплексные волны с полем, нарастающим при удалении от волновода (вытекающие волны), которые на более низких частотах при достаточно большой относительной диэлектрической проницаемости ДВ могут переходить в комплексные волны, удовлетворяющие условию излучения. Помимо перечисленных волн, в круглом ДВ существуют медленные, комплексные во всём частотном диапазоне волны, поле которых нарастает при удалении от волновода.

Собственные комплексные волны в направляющих структурах источниками, являющимися действительными функциями координат, возбуждаются [Л14.98] комплексно сопряженными парами, образуя поле стоячей волны, локализованное вблизи источника. В результате возникает явление, называемое комплексным резонансом [Л14.32, Л14.98]. Как показали исследования [Л14.99, Л14.100], комплексно сопряженные пары КВ играют принципиальную роль в задачах дифракции. Неправильный их учет в дифракционных базисах приводит к принципиально неверным (не только количественно, но и качественно) результатам.

Раздел написан совместно с профессором А.С. Раевским.

Приложения

П.1. Операции векторного анализа	597
П.2. Интегральные формулы векторного анализа	599
П.3. Дифференциальные формулы векторного анализа	599
П.4(*). Четырёхмерные векторы	600
П.5. Дельта-функция Дирака	601
П.6. Цилиндрические функции	602
П.7. Решение двумерного уравнения Гельмгольца методом разделения переменных для координатных граничных задач	605

Приложения

П.1. Операции векторного анализа

Пусть имеются скалярная функция $\Phi(q_1, q_2, q_3)$ и векторная функция $\vec{A}(q_1, q_2, q_3)$. Переменные q_1, q_2 и q_3 представляют собой либо декартовы, либо ортогональные криволинейные (цилиндрические или сферические) координаты. В декартовой системе координат: $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$; в цилиндрической системе координат: $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$; в сферической системе координат: $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$. Обозначим через $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ — единичные векторы декартовой системы; $\vec{\rho}_0, \vec{\varphi}_0, \vec{z}_0$ — единичные векторы цилиндрической системы; $\vec{r}_0, \vec{\theta}_0, \vec{\varphi}_0$ — единичные векторы сферической системы координат.

Градиент.

А. Декартова система координат.

$$\text{grad } \Phi \equiv \nabla \Phi = \vec{x}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (\text{П.1.1})$$

Б. Цилиндрическая система координат.

$$\text{grad } \Phi \equiv \nabla \Phi = \vec{\rho}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \vec{z}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (\text{П.1.2})$$

В. Сферическая система координат.

$$\text{grad } \Phi \equiv \nabla \Phi = \vec{r}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \quad (\text{П.1.3})$$

Дивергенция.

А. Декартова система координат.

$$\text{div } \vec{A} \equiv \nabla \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{П.1.4})$$

Б. Цилиндрическая система координат.

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{П.1.5})$$

В. Сферическая система координат.

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (\text{П.1.6})$$

Ротор.**А. Декартова система координат.**

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv \nabla \times \vec{A} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \\ + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.1.7})$$

Б. Цилиндрическая система координат.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\rho}_0 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{\varphi}_0 \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \\ + \vec{z}_0 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.1.8})$$

В. Сферическая система координат.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{r}_0 \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right\} + \\ + \vec{\theta}_0 \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right\} + \vec{\varphi}_0 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.9})$$

Оператор Лапласа $\nabla^2 \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad}$.**А. Декартова система координат.**

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (\text{П.1.10})$$

Б. Цилиндрическая система координат.

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (\text{П.1.11})$$

В. Сферическая система координат.

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{П.1.12})$$

П.2. Интегральные формулы векторного анализа

Теорема Остроградского-Гаусса. Поток вектора \vec{A} , являющегося непрерывной функцией радиус-вектора $\vec{r}(x, y, z)$ точки через произвольную замкнутую поверхность S , равен интегралу от дивергенции этого вектора по объёму V , ограниченному данной поверхностью:

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV, \quad (\text{П.2.1})$$

где $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$; \vec{n}_0 — единичный вектор внешней нормали к поверхности S .

Теорема Стокса. Циркуляция произвольного вектора \vec{A} по замкнутому контуру L равна потоку ротора данного вектора через произвольную поверхность S , опирающуюся на данный контур:

$$\int_S \text{rot } \vec{A} \, d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \, d\vec{l}, \quad (\text{П.2.2})$$

где $d\vec{l} = \vec{\tau}_0 \, dl$; $\vec{\tau}_0$ — единичный вектор касательной к элементу dl .

Теорема Грина.

$$\int_V (\nabla \Psi \nabla \Phi + \Psi \nabla^2 \Phi) \, dV = \oint_S \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS, \quad (\text{П.2.3})$$

где Ψ, Φ — скалярные функции; n — нормальная координата.

П.3. Дифференциальные формулы векторного анализа

$$\text{grad}(\Phi\Psi) = \Phi \, \text{grad } \Psi + \Psi \, \text{grad } \Phi, \quad (\text{П.3.1})$$

$$\text{div}(\Psi\vec{A}) = \vec{A} \, \text{grad } \Psi + \Psi \, \text{div } \vec{A}, \quad (\text{П.3.2})$$

$$\text{div}[\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{B} \, \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \, \text{rot } \vec{B}, \quad (\text{П.3.3})$$

$$\text{div rot } \vec{A} = 0, \quad (\text{П.3.4})$$

$$\text{rot grad } \Phi = 0, \quad (\text{П.3.5})$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}, \quad (\text{П.3.6})$$

$$\text{rot}(\Psi\vec{A}) = [\nabla\Psi \times \vec{A}] + \Psi \, \text{rot } \vec{A}. \quad (\text{П.3.7})$$

Формула для градиента сложной функции $\Phi(\xi)$:

$$\text{grad } \Phi(\xi) = \Phi'(\xi) \, \text{grad } \xi. \quad (\text{П.3.8})$$

П.4. Четырёхмерные векторы

Контра- и ковариантные компоненты векторов. При релятивистском подходе к описанию электромагнитного поля базовым является математический аппарат тензорной алгебры в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве. Приведём основные положения этого аппарата.

Координаты точки в четырёхмерном пространстве нумеруются верхними индексами 0, 1, 2, 3 и определяются следующим образом:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (\text{П.4.1})$$

где c — скорость света.

Эти величины при переходе к другой системе координат преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} x^{0'} &= x^0 \text{ch } \psi - x^1 \text{sh } \psi, & x^{1'} &= -x^0 \text{sh } \psi + x^1 \text{ch } \psi, \\ x^{2'} &= x^2, & x^{3'} &= x^3, \end{aligned} \quad (\text{П.4.2})$$

где $\text{th } \psi = v/c = \beta$.

Вектором в четырёхмерном пространстве (или 4-вектором) называется совокупность четырёх величин $\{A^0, A^1, A^3, A^4\}$, преобразующихся при переходе в другую систему отсчёта так же, как и 4-координаты (П.4.2):

$$\begin{aligned} A^{0'} &= A^0 \operatorname{ch} \psi - A^1 \operatorname{sh} \psi, & A^{1'} &= -A^0 \operatorname{sh} \psi + A^1 \operatorname{ch} \psi, \\ A^{2'} &= A^2, & A^{3'} &= A^3. \end{aligned} \quad (\text{П.4.3})$$

Для того, чтобы определить квадрат 4-вектора и скалярное произведение двух 4-векторов, вводят в рассмотрение два типа компонент одного и того же 4-вектора — ковариантные и контравариантные. Контравариантные компоненты обозначаются индексом сверху A^i ; ковариантные — индексом снизу A_i . Ковариантные и контравариантные компоненты связаны между собой следующим образом:

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (\text{П.4.4})$$

Преобразования Лоренца для ковариантного вектора имеют вид:

$$\begin{aligned} A_0' &= A_0 \operatorname{ch} \psi + A_1 \operatorname{sh} \psi, & A_1' &= A_0 \operatorname{sh} \psi + A_1 \operatorname{ch} \psi, \\ A_2' &= A_2, & A_3' &= A_3. \end{aligned} \quad (\text{П.4.5})$$

Квадрат 4-вектора определяется как

$$A_i A^i = A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 \quad (\text{П.4.6})$$

и является инвариантом преобразования.

Скалярное произведение 4-векторов A и B определяется следующим образом:

$$A_i B^i = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3. \quad (\text{П.4.7})$$

Несложно заметить, что в скалярном произведении (П.4.7) безразлично, какой вектор ковариантный, а какой — контравариантный.

Выражения (П.4.6) и (П.4.7) являются инвариантами преобразования Лоренца. Заметим, что суммы, аналогичные правым частям (П.4.6) и (П.4.7), но составленные только из ковариантных или контравариантных компонент, не имеют смысла.

П.5. Дельта-функция Дирака

Дельта-функцией Дирака $\delta(x - x')$ называется обобщённая математическая функция, для которой справедливо следующее интегральное соотношение:

$$\int_L f(x) \delta(x - x') dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x' \text{ вне } L, \\ f(x') & \text{при } x' \text{ внутри } L, \end{cases} \quad (\text{П.5.1})$$

где $f(x)$ — некоторая произвольная необобщённая функция.

Если интегрирование в соотношении (П.5.1) распространить на бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$, то результатом будет $f(x')$.

Важным соотношением является формула для интегрирования дельта-функции:

$$\int_L \delta(x - x') dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x' \text{ вне } L, \\ 1 & \text{при } x' \text{ внутри } L. \end{cases} \quad (\text{П.5.2})$$

Соотношения (П.5.1) можно обобщить на случай трёхмерных областей:

$$\int_L f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \begin{cases} 0 & \text{при } M(\vec{r}') \text{ вне } V, \\ f(\vec{r}') & \text{при } M(\vec{r}') \text{ внутри } V, \end{cases} \quad (\text{П.5.3})$$

где M — некоторая точка пространства.

Аналогично можно обобщить на трёхмерный случай и формулу (П.5.2):

$$\int_L \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \begin{cases} 0 & \text{при } M(\vec{r}') \text{ вне } V, \\ 1 & \text{при } M(\vec{r}') \text{ внутри } V. \end{cases} \quad (\text{П.5.4})$$

Для дельта-функции справедливо следующее дифференциальное представление:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right). \quad (\text{П.5.5})$$

П.6. Цилиндрические функции

А. Уравнение Бесселя и цилиндрические функции. Обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (\text{П.6.1})$$

называется *уравнением цилиндрических функций*, или *уравнением Бесселя n -го порядка*. Его решения, называемые *цилиндрическими функциями*, можно записать в одном из двух видов:

$$y(x) = A J_n(x) + B Y_n(x), \quad (\text{П.6.2})$$

или

$$y(x) = C H_n^{(1)}(x) + D H_n^{(2)}(x), \quad (\text{П.6.3})$$

где присутствуют следующие цилиндрические функции:

$J_n(x)$ — функция Бесселя 1-го рода n -го порядка;

$Y_n(x)$ — функция Бесселя 2-го рода n -го порядка (функция Неймана);

$H_n^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля 1-го рода n -го порядка;

$H_n^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля 2-го рода n -го порядка.

Для функций Ханкеля справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + i Y_n(x), \\ H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - i Y_n(x). \end{aligned} \quad (\text{П.6.4})$$

Обычно требуется, чтобы решение (П.6.2) было ограниченным. Поэтому если в рассматриваемую область входит точка $x = 0$, в которой функция Неймана $Y_n(x) \rightarrow -\infty$, решение (П.6.2) должно записываться следующим образом:

$$y(x) = A J_n(x). \quad (\text{П.6.5})$$

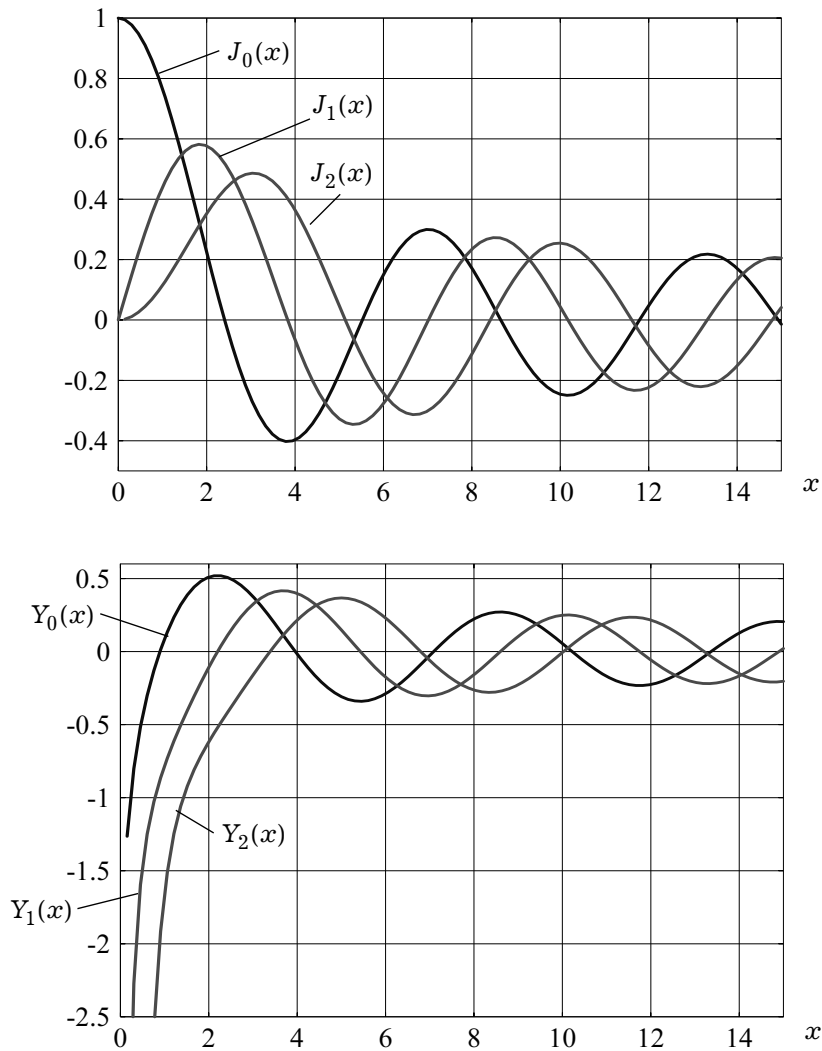


Рис. П.1

При рассмотрении процессов во внешней области (например, в задачах об излучении) необходимо, чтобы решение представлялось только в виде расходящейся волны. В этом случае решение (П.6.3) необходимо записать, положив постоянную $C = 0$ (зависимость от времени $\exp(i\omega t)$):

$$y(x) = D H_n^{(2)}(x). \quad (\text{П.6.6})$$

На рис. П.1 представлены графики цилиндрических функций 0-го, 1-го и 2-го порядков.

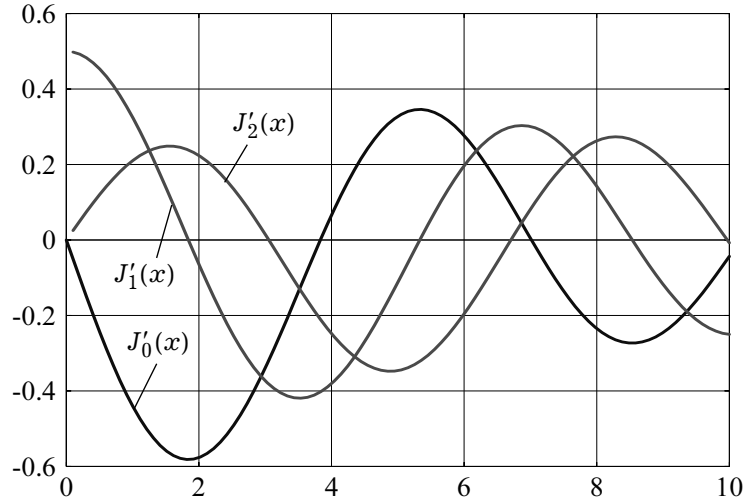


Рис. П.2

Б. Асимптотические представления цилиндрических функций. При неограниченном возрастании аргумента цилиндрические функции переходят в тригонометрические или, соответственно, в экспоненциальные:

$$\begin{cases} J_n(x) \\ Y_n(x) \end{cases} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] + O[x^{-3/2}], \quad (\text{П.6.7})$$

$$\begin{cases} H_n^{(1)}(x) \\ H_n^{(2)}(x) \end{cases} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[\begin{cases} \pm \\ \mp \end{cases} i x \right] \frac{i \pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) + O[x^{-3/2}]. \quad (\text{П.6.8})$$

В. Функциональные соотношения для цилиндрических функций.

Обозначим через $Z(x)$ любую из упомянутых выше четырёх цилиндрических функций. Для натурального n справедливы следующие функциональные соотношения:

$$Z_{-n}(x) = (-1)^n Z_n(x), \quad (\text{П.6.9})$$

$$\frac{dZ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} Z_n(x) + Z_{n-1}(x) = \frac{n}{x} Z_n(x) - Z_{n+1}(x), \quad (\text{П.6.10})$$

$$Z_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Z_n(x) - Z_{n-1}(x), \quad (\text{П.6.11})$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} Z_n(\alpha x)] = -\alpha x^{-n} Z_{n+1}(\alpha x), \quad (\text{П.6.12})$$

$$\frac{d}{dx} [x^n Z_n(\alpha x)] = \alpha x^n Z_{n-1}(\alpha x), \quad (\text{П.6.13})$$

$$\frac{dZ_0(x)}{dx} = -Z_1(x), \quad \frac{dZ_1(x)}{dx} = Z_0(x) - \frac{Z_1(x)}{x}, \quad (\text{П.6.14})$$

$$\int x^{n+1} Z_n(x) dx = x^{n+1} Z_{n+1}(x), \quad (\text{П.6.15})$$

$$\int x^{-n+1} Z_n(x) dx = -x^{-n+1} Z_{n+1}(x). \quad (\text{П.6.16})$$

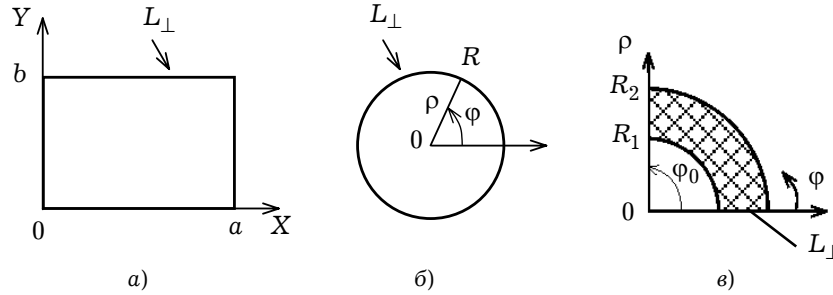


Рис. П.3

На рис. П.2 представлены графики производных функций $J'_0(x)$, $J'_1(x)$ и $J'_2(x)$, рассчитанные с использованием соотношения (П.6.10).

П.7. Решение двумерного уравнения Гельмгольца методом разделения переменных для координатных граничных задач

При рассмотрении линий передачи приходится находить решения двумерного уравнения Гельмгольца и решать соответствующие краевые задачи на этом уравнении. Ниже на примерах линий передачи с простейшей геометрией поперечного сечения проиллюстрируем *метод разделения переменных*.

П.7.1. Метод в декартовой системе координат. В декартовых координатах двумерное уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y^2} + \chi^2 \Psi_i = 0, \quad (\text{П.7.1})$$

где через Ψ_i обозначена одна из составляющих векторов \vec{e} или \vec{h} ; χ — поперечное волновое число. Применение метода разделения переменных подразумевает, что неизвестное решение Ψ_i можно представить в виде произведения функций разных координат:

$$\Psi_i = X(x)Y(y). \quad (\text{П.7.2})$$

Подстановка решения (П.7.2) в уравнение (П.7.1) приводит к соотношению:

$$-\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \chi^2. \quad (\text{П.7.3})$$

Так как слева и справа стоят функции различных аргументов, то они должны быть независимы, а, следовательно, левая и правая часть равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим через постоянную r_x^2 . Тогда вместо (П.7.3) получаем два дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + r_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + r_y^2 Y = 0, \quad (\text{П.7.4})$$

в которых

$$r_y^2 = \chi^2 - r_x^2. \quad (\text{П.7.5})$$

Общие решения уравнений (П.7.4) можно выразить, например, в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} X &= A \cos(r_x x) + B \sin(r_x x), \\ Y &= C \cos(r_y y) + D \sin(r_y y), \end{aligned} \quad (\text{П.7.6})$$

где A, B, C, D — неизвестные постоянные.

Поставим *краевую задачу Дирихле* для волновода с поперечным сечением в виде прямоугольника: $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$. (рис. П.3а). Граничное условие $\Psi_i = 0$ на L_\perp (то есть при $x = 0, a$; $y = 0, b$) приводит к решению

$$\Psi_i = N \sin(r_x x) \sin(r_y y), \quad (\text{П.7.7})$$

где

$$r_x = \frac{m\pi}{a}; \quad m = \overline{1, \infty}, \quad r_y = \frac{n\pi}{b}; \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (\text{П.7.8})$$

N — новая неизвестная постоянная.

Таким образом, мы получили систему решений краевой задачи Дирихле на двумерном уравнении Гельмгольца в случае прямоугольной области. Решениями являются собственные функции $\Psi_{imn}^{(1)}$ с собственными значениями χ_{mn}^2 :

$$\begin{aligned} \Psi_{imn}^{(1)} &= N_{mn}^{(1)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \\ \chi_{mn}^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad (m = \overline{1, \infty}, n = \overline{1, \infty}), \end{aligned} \quad (\text{П.7.9})$$

где $N_{mn}^{(1)}$ — неопределенные постоянные.

В случае *краевой задачи Неймана* на решение (П.7.6) следует наложить граничные условия:

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, a; \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b. \quad (\text{П.7.10})$$

В результате получим систему решений краевой задачи Неймана для прямоугольной области в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi_{imn}^{(2)} &= N_{mn}^{(2)} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \\ \chi_{mn}^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad (m = \overline{0, \infty}, n = \overline{0, \infty}), \end{aligned} \quad (\text{П.7.11})$$

где $N_{mn}^{(2)}$ — неопределенные постоянные.

П.7.2. Метод в цилиндрической системе координат. Двумерное уравнение Гельмгольца в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi_i}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \varphi^2} + \chi^2 \Psi_i = 0. \quad (\text{П.7.12})$$

Решение будем искать в виде произведения $\Psi_i = R(\rho) \Phi(\varphi)$, после подстановки которого в (П.7.12), имеем:

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \rho^2 \chi^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}. \quad (\text{П.7.13})$$

Так как слева и справа в соотношении (П.7.13) стоят функции разных аргументов, то они должны быть независимы, а, следовательно, левая и правая часть равны одной постоянной, которую мы обозначим через ν^2 . Тогда вместо (П.7.13) получаем два дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\chi^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (\text{П.7.14})$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \nu^2 \Phi = 0, \quad (\text{П.7.15})$$

где ν — некоторая постоянная, в общем случае не целое число.

Дифференциальное уравнение (П.7.14) — это *уравнение Бесселя* типа (П.6.1). Его общее решение можно записать в одном из возможных видов (см. П.6):

$$\begin{aligned} R(r) &= A J_\nu(\chi r) + B Y_\nu(\chi r), \\ R(r) &= \tilde{A} H_\nu^{(1)}(\chi r) + \tilde{B} H_\nu^{(2)}(\chi r), \end{aligned} \quad (\text{П.7.16})$$

где $J_\nu(\chi r)$, $Y_\nu(\chi r)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго родов; $H_\nu^{(k)}(\chi r)$ — функции Ханкеля; $A, B, \tilde{A}, \tilde{B}$ — неопределенные постоянные.

Решение уравнения (П.7.15) имеет вид:

$$\Phi(\varphi) = C \cos(\nu \varphi) + D \sin(\nu \varphi), \quad (\text{П.7.17})$$

где C, D — неизвестные постоянные.

Итак, найден общий вид решения $\Psi_i = R \Phi$ уравнения (П.7.12) в цилиндрической системе координат, содержащий ряд неопределенных постоянных.

Перейдем к решению краевых задач Дирихле и Неймана для круговой области (рис. П.3б). Так как $\Psi_i(\rho, \varphi) = \Psi_i(\rho, \varphi + 2\pi n)$, то ν в уравнениях (П.7.14), (П.7.15) — целое число или нуль: $\nu \equiv n (n = 0, \infty)$.

П.7.3. Краевые задачи для круговой области. Рассмотрим вначале краевую задачу Дирихле. Выбирая решение уравнения (П.7.14) в первой формуле (П.7.16), мы должны положить $B = 0$, так как при $\rho \rightarrow 0$ $Y_n(\rho) \rightarrow -\infty$, а мы будем искать ограниченное решение при $\rho = 0$. Таким образом,

$$\Psi_i(\rho, \varphi) = J_n(\chi \rho) \Phi(\varphi). \quad (\text{П.7.18})$$

Из граничного условия $\Psi_i = 0$ на L_\perp ($\rho = R$) следует, что

$$J_n(\chi R) = 0, \quad (\text{П.7.19})$$

то есть

$$\chi = \mu_{nm} / R, \quad (\text{П.7.20})$$

где μ_{nm} — m -корень уравнения $J_n(\mu) = 0$ ($m = 1, 2, 3, \dots$).

В результате мы можем записать собственные функции краевой задачи Дирихле в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} \Psi_{inm}^{(1)} &= N_{nm}^{(1)} J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{R} \rho\right) \cos(n\varphi), \quad \Psi_{inm}^{(1)} = N_{nm}^{(1)} J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{R} \rho\right) e^{in\varphi}, \\ \Psi_{inm}^{(1)} &= N_{nm}^{(1)} J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{R} \rho\right) \sin(n\varphi), \quad \Psi_{inm}^{(1)} = N_{nm}^{(1)} J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{R} \rho\right) e^{-in\varphi}, \end{aligned} \quad (\text{П.7.21})$$

и $\chi_{nm}^2 = (\mu_{nm} / R)^2$, $N_{nm}^{(1)}$ — неопределенные постоянные.

Решая для той же области граничную задачу Неймана, опять приходим к формуле (П.7.18). Однако постоянная χ теперь определяется из условия $\partial \Psi_i / \partial \rho = 0$ при $\rho = R$:

$$J'_n(\chi R) = 0. \quad (\text{П.7.22})$$

Откуда следует, что $\chi_{nm} = \lambda_{nm} / R$, λ_{nm} — m -корень уравнения $J'_n(\lambda) = 0$.

Окончательно получаем систему собственных функций для краевой задачи Неймана в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_{inm}^{(2)} &= N_{nm}^{(2)} J_n\left(\frac{\lambda_{nm}}{R} \rho\right) \cos(n\varphi), \quad \Psi_{inm}^{(2)} = N_{nm}^{(2)} J_n\left(\frac{\lambda_{nm}}{R} \rho\right) e^{in\varphi}, \\ \Psi_{inm}^{(2)} &= N_{nm}^{(2)} J_n\left(\frac{\lambda_{nm}}{R} \rho\right) \sin(n\varphi), \quad \Psi_{inm}^{(2)} = N_{nm}^{(2)} J_n\left(\frac{\lambda_{nm}}{R} \rho\right) e^{-in\varphi}, \end{aligned} \quad (\text{П.7.23})$$

где $\chi_{nm}^2 = (\lambda_{nm} / R)^2$, $N_{nm}^{(2)}$ — неопределенные постоянные.

П.7.4. Краевые задачи для части секториальной области. В качестве второго примера рассмотрим краевые задачи для области, представляющей собой часть сектора с углом φ_0 (рис. П.3в). В этом случае решение отличается от решения (П.7.18) для круга тем, что нет оснований отбрасывать член с функцией $Y_v(\chi\rho)$. Кроме того, параметр v не может быть целым числом, так как структура поля в линии передачи с поперечным сечением в виде сектора неинвариантна при повороте на угол $2\pi n$ ($n = \overline{1, \infty}$).

Таким образом, вместо (П.7.18) имеем

$$\Psi_i = [A J_v(\chi\rho) + B Y_v(\chi\rho)] \Phi(\varphi). \quad (\text{П.7.24})$$

Рассмотрим вначале краевую задачу Дирихле. Для нее справедливы граничные условия:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, & \Psi_i &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_2, \\ \Psi_i &= 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, & \Psi_i &= 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_0, \end{aligned} \quad (\text{П.7.25})$$

Два последних граничных условия при $\varphi = 0; \varphi_0$ из (П.7.25) определяют вид функции $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi(\varphi) = D \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right), \quad v = \frac{n\pi}{\varphi_0}; \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (\text{П.7.26})$$

Первые два граничных условия из (П.7.25) приводят к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A J_v(\chi R_1) + B Y_v(\chi R_1) &= 0, \\ A J_v(\chi R_2) + B Y_v(\chi R_2) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{П.7.27})$$

где параметр v определяется из (П.7.26). Выполняя условие совместимости этой системы уравнений, обратим в нуль её главный определитель:

$$J_v(\chi R_1) Y_v(\chi R_2) - J_v(\chi R_2) Y_v(\chi R_1) = 0. \quad (\text{П.7.28})$$

Из (П.7.28) можно определить собственные значения параметра χ . Обозначим через χ_{vm} корни уравнения (П.7.28) ($m = \overline{1, \infty}$). Тогда, подставив их в первое уравнение (П.7.16) и найдя отношение коэффициентов A и B из первого уравнения в системе (П.7.27), получим:

$$R(\rho) = A \left[J_v(\chi_{vm}\rho) - \frac{J_v(\chi_{vm}R_1)}{Y_v(\chi_{vm}R_1)} Y_v(\chi_{vm}\rho) \right], \quad (\text{П.7.29})$$

где χ_{vm} определяются из уравнения (П.7.28). Окончательно, собственные функции краевой задачи Дирихле для геометрии, представленной на рис. П.3в, записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}^{(1)} &= N_{nm}^{(1)} \left[J_v(\chi_{vm}\rho) - \frac{J_v(\chi_{vm}R_1)}{Y_v(\chi_{vm}R_1)} Y_v(\chi_{vm}\rho) \right] \times \\ &\times \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right), \quad (n = \overline{1, \infty}), \end{aligned} \quad (\text{П.7.30})$$

где $v = n\pi/\varphi_0$; собственные значения χ_{vm} определяются из уравнения (П.7.28); $N_{nm}^{(1)}$ — неопределенные постоянные.

П.7.5. Краевая задача Неймана для части секториальной области. Рассмотрим краевую задачу Неймана для геометрии, показанной на рис. П.3в. Решение по-прежнему представляется в виде (П.7.24). Для определения неизвестных постоянных в данном случае необходимо воспользоваться граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \rho} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, & \frac{\partial \Psi_i}{\partial \rho} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_2, \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial \varphi} &= 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, & \frac{\partial \Psi_i}{\partial \varphi} &= 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_0, \end{aligned} \quad (\text{П.7.31})$$

Два последних условия (П.7.31) при $\varphi = 0; \varphi_0$ определяют вид функции $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi(\varphi) = C \cos\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right), \quad (\text{П.7.32})$$

$$\nu = \frac{n\pi}{\varphi_0}; \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (\text{П.7.33})$$

Из двух первых граничных условий (П.7.31) следует система однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A J'_\nu(\chi R_1) + B Y'_\nu(\chi R_1) &= 0, \\ A J'_\nu(\chi R_2) + B Y'_\nu(\chi R_2) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.7.34})$$

Равенство нулю главного определителя системы (П.7.34) соответствует уравнению для определения собственных значений χ :

$$J'_\nu(\chi R_1) Y'_\nu(\chi R_2) - J'_\nu(\chi R_2) Y'_\nu(\chi R_1) = 0. \quad (\text{П.7.35})$$

В результате собственные функции краевой задачи Неймана для геометрии на рис. П.3в имеют следующий вид:

$$\Psi_{inm}^{(2)} = N_{nm}^{(2)} \left[J_\nu(\chi_{\nu m} \rho) - \frac{J'_\nu(\chi_{\nu m} R_1)}{Y'_\nu(\chi_{\nu m} R_1)} Y_\nu(\chi_{\nu m} \rho) \right] \cos\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right), \quad (\text{П.7.36})$$

где $\nu = n\pi/\varphi_0$, $(n = \overline{0, \infty})$, собственные значения $\chi_{\nu m}$ определяются из уравнения (П.7.35) ($m = \overline{1, \infty}$); $N_{nm}^{(2)}$ — неопределенные постоянные.

Список литературы

Основная литература

1. Бочкарёва Т.С., Неганов В.А., Осипов О.В., Соболев В.А. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебное пособие для вузов / Под ред. Неганова В.А. — М.: Радио и связь, 2003. — 324 с.

2. Неганов В.А., Осипов О.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Неганова В.А. и Раевского С.Б. — М.: Радио и связь, 2005. — 648 с.

Л.1. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Высшая школа, 1992. — 416 с.

Л.2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики: Пер. с англ. / Под ред. Г.П. Мотулевича. — М.: Наука, 1973. — 720 с.

Л.3. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. Учеб. пособие / Под ред. И.Н. Топтыгина. — Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2003. — 400 с.

Л.4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. — 344 с.

Л.5. Бухгольц Г. Расчёт электрических и магнитных полей: Пер. с нем. / Под ред. М.С. Рабиновича и Л.Л. Сабсовича. — М.: ИЛ, 1961. — 712 с.

Л.6. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988. — 440 с.

Л.7. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957. — 581 с.

Л.8. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. — М.: Наука, 1979. — 383 с.

Л.9. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. — М.: Связь, 1971. — 487 с.

Л.10. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. — М.: Сов. Радио, 1971. — 664 с.

Л.11. Джерксон Дж. Классическая электродинамика: Пер. с англ. / Под ред. Э.Л. Буриштейна. — М.: Мир, 1965.

Л.12. Духов В.М. Электродинамика. — М.: Высшая школа, 1975. — 248 с.

Л.13. Завадский В. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. — М.: Наука, 1972. — 558 с.

Л.14. Зоммерфельд А. Электродинамика: Пер. с нем. / Под ред. С.А. Элькинда. — М.: ИЛ, 1958. — 501 с.

Л.15. Калинеевский Н.И. Волновая оптика: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. шк., 1995. — 463 с.

Л.16. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. — М.: Наука, 1966. — 240 с.

Л.17. Ковалёв И.С. Прикладная электродинамика. — Минск: Наука и техника, 1978. — 344 с.

Л.18. Кравченко И.Т. Теория волновых процессов. — Минск: Высшая школа, 1985. — 237 с.

- Л.19. Кугушев А.М., Голубева Н.С., Митрохин В.Н. Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн. Учеб. пособие для вузов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 368 с.
- Л.20. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 532 с.
- Л.21. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля. — М.: Физматлит, 2001. — 536 с.
- Л.22. Лебедев А.Н. Моделирование. — М.: Радио и связь, 1989. — 224 с.
- Л.23. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Сов. радио, 1979. — 374 с.
- Л.24. Матвеев А.Н. Электродинамика: Учеб. пособие. — М.: Высшая школа, 1980. — 383 с.
- Л.25. Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. Методы расчёта электростатических полей. — М.: Высшая школа, 1963. — 415 с.
- Л.26. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики: Пер. с англ. Т.1., Т.2. — М.-Л.: ИЛ, 1958. — 930+846 с.
- Л.27. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайневых частот. Учебное пособие для вузов. — М.: Педагогика-Пресс, 1998. — 328 с.
- Л.28. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Электродинамические методы расчёта устройств СВЧ и антенн. / Под ред. В.А. Неганова — М.: Радио и связь, 2002. — 416 с.
- Л.29. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. Т.1 / Под ред. В.А. Неганова — М.: Радио и связь, 2000. — 509 с.
- Л.30. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. Т.2 / Под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского — М.: Радио и связь, 2001. — 575 с.
- Л.31. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1973. — 606 с.
- Л.32. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебное пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 544 с.
- Л.33. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика: Пер. с англ. / Под ред. С.П. Капицы. — М.: Физматгиз, 1963.
- Л.34. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебник для вузов. М.: Радио и связь, 2000. — 559 с.
- Л.35. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Учебное пособие для вузов / Под ред. Ю.В. Пименова — М.: Радио и связь, 2000. — 536 с.
- Л.36. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн» / Под ред. С.И. Баскакова. — М.: Высшая школа, 1981.
- Л.37. Семенов А.А. Теория электромагнитных волн. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1962. — 256 с.
- Л.38. Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма: Пер. с англ. / Под ред. С.М. Рытова. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. — 540 с.
- Л.39. Тамм И.Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976. — 616 с.

Л40. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика: Учебное пособие для студентов физ. спец. университетов. — М.: Высшая школа, 1990. — 352 с.

Л41. Фёдоров Н.Н. Основы электродинамики. — М.: Высшая школа, 1980. — 399 с.

Л42. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм: Пер. с англ. / Под ред. Я.А. Смородинского. — М.: Мир, 1966. — Т. 5.

Л43. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика: Пер. с англ. / Под ред. Я.А. Смородинского. — М.: Мир, 1966. — Т. 6.

Литература к главе 1

Л1.1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988. — 440 с.

Л1.2. Голин Г.М., Филонович С.Р. Классики физической науки. — М.: Высшая школа, 1989. — 576 с.

Л1.3. Григорьян А.Т., Вальцев А.Н. Генрих Герц. — М.: Изд-во «Наука», 1968. — 308 с.

Л1.4. Карцев В. Приключения великих уравнений. — М.: Знание, 1986. — 288 с.

Л1.5. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. — М.: Наука, 1966. — 240 с.

Л1.6. Кугушев А.М., Голубева Н.С., Митрохин В.Н. Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн. Учебное пособие для вузов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 368 с.

Л1.7. Максвелл Дж.К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. — М.: Гос. изд. технико-теоретич. литературы, 1954. — 688 с.

Л1.8. Матвеев А.Н. Электродинамика: Учебное пособие. — М.: Высшая школа, 1980. — 383 с.

Л1.9. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. Т.1 / Под ред. В.А. Неганова. — М.: Радио и связь, 2000. — 509 с.

Л1.10. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебное пособие для вузов. — М.: Наука, 1989. — 544 с.

Л1.11. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика / Под ред. Ю.В. Пименова: Учебное пособие для вузов. — М.: Радио и связь, 2002. — 536 с.

Л1.12. Суханов А.Д. Фундаментальный курс физики. Т. 2. Континуальная физика. — М.: Издательство «Агар», 1998. — 388 с.

Л1.13. Тамм И.Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989. — 616 с.

Л1.14. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика: Учебное пособие для студентов физ. спец. университетов. — М.: Высшая школа, 1990. — 352 с.

Л1.15. Туоров Е.А. Материальные уравнения электродинамики. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 160 с.

Литература к главе 2

- Л2.1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Пер. с англ. / Под ред. Г.П. Матулевича. — М.: Наука, 1973. — 720 с.
- Л2.2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957. — 581 с.
- Л2.3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. — М.: Наука, 1979. — 383 с.
- Л2.4. Горелик Г.С. Колебания и волны. — М.: Гостехиздат, 1950.
- Л2.5. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. — М.: Наука, 1966. — 240 с.
- Л2.6. Кравченко И.Т. Теория волновых процессов. — Минск: Вышэйшая школа, 1985. — 237 с.
- Л2.7. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. Т.1 / Под ред. В.А. Неганова. — М.: Радио и связь, 2000. — 509 с.
- Л2.8. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1989. — 544 с.
- Л2.9. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебник для вузов. М.: Радио и связь, 2000. — 559 с.
- Л2.10. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Учебное пособие для вузов / Под ред. Ю.В. Пименова. — М.: Радио и связь, 2000. — 536 с.
- Л2.11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.

Литература к главе 3

- Л3.1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957. — 581 с.
- Л3.2. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М.-Л.: Энергия, 1967. — 376 с.
- Л3.3. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов: Пер. с англ. / Под ред. Г.В. Воскресенского. — М.: Мир, 1974. — 323 с.
- Л3.4. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. Т.1 / Под ред. В.А. Неганова. — М.: Радио и связь, 2000. — 509 с.
- Л3.5. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1989. — 544 с.
- Л3.6. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебник для вузов. М.: Радио и связь, 2000. — 559 с.
- Л3.7. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Учебное пособие для вузов / Под ред. Ю.В. Пименова. — М.: Радио и связь, 2000. — 536 с.

Литература к главе 4

- Л4.1. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966. — 475 с.
- Л4.2. Введение в интегральную оптику / Под ред. М. Барноски. — М.: Мир, 1977. — 367 с.
- Л4.3. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металлодиэлектрические волноводы. — М.: Радио и связь, 1988. — 247 с.
- Л4.4. Взятышев В.Ф. Диэлектрические волноводы. — М.: Сов. радио, 1970. — 216 с.
- Л4.5. Гвоздев В.И., Нефедов Е.И. Объемные интегральные схемы СВЧ. — М.: Наука, 1985. — 255 с.
- Л4.6. Гроднев И.И., Ларин Ю.Т., Теумин И.И. Оптические кабели. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 263 с.
- Л4.7. Гуревич А.Г. Полые резонаторы и волноводы. — М.: Сов. радио, 1952. — 632 с.
- Л4.8. Дерюгин Л.Н. Расчёт критической частоты П и Н-образных волноводов // Радиотехника, 1948. — Т. 3. — № 6. — 49 с.
- Л4.9. Диденко А.Н. Сверхпроводящие волноводы и резонаторы. — М.: Сов. радио, 1973. — 256 с.
- Л4.10. Егоров Ю.В. Частично заполненные прямоугольные волноводы. — М.: Советское радио, 1967. — 216 с.
- Л4.11. Ефимов И.Е. Радиочастотные линии передачи. — М.: Сов. радио, 1964. — 600 с.
- Л4.12. Ефимов И.Е., Шермина Г.А. Волноводные линии передачи. — М.: Связь, 1979. — 232 с.
- Л4.13. Заргано Г.Ф., Ляпин В.П., Михалевский В.С. и др. Волноводы сложных сечений. — М.: Радио и связь, 1986. — 124 с.
- Л4.14. Заргано Г.Ф., Лерер А.М., Ляпин В.П., Синявский Г.П. Линии передачи сложных сечений. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1983. — 320 с.
- Л4.15. Иларионов Ю.А., Раевский С.Б., Сморгонский В.Я. Расчёт гофрированных частично заполненных волноводов. — М.: Сов. радио, 1980. — 200 с.
- Л4.16. Интегральная оптика: Пер. с англ. / Под ред. Т. Тамира. — М.: Мир, 1978. — 460 с.
- Л4.17. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем. — Ленинград: Изд-во ВКАС, 1949. — 426 с.
- Л4.18. Когтев А.С., Раевский С.Б. О комплексных волнах в слоистых экранированных волноводах // Радиотехника и электроника, 1991. — Т. 36. — № 4. — С. 652-658.
- Л4.19. Конструирование и расчёт полосковых устройств / Под ред. И.С. Ковалёва. — М.: Сов. радио, 1974. — 296 с.
- Л4.20. Маркузе Д. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974. — 576 с.

- Л4.21. Микроэлектронные устройства СВЧ: Учеб. пособие для радиотехнических специальностей вузов / Г.И. Веселов, Е.Н. Егоров, Ю.Н. Алехин и др.; Под ред. Г.И. Веселова. — М.: Высшая школа, 1988. — 280 с.
- Л4.22. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов: Пер. с англ. / Под ред. Г.В. Воскресенского. — М.: Мир, 1974. — 323 с.
- Л4.23. Михалевский В.С. Элементы теории сверхвысокочастотных замедляющих систем. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1964.
- Л4.24. Неганов В.А. Электродинамическая теория полосково-щелевых структур СВЧ. — Самара: Изд-во Самарск. ун-та, 1991. — 240 с.
- Л4.25. Неганов В.А., Нефёдов Е.И., Яровой Г.П. Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневых частот. — М.: Наука, 1996. — 304 с.
- Л4.26. Неганов В.А., Нефёдов Е.И., Яровой Г.П. Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайневых частот. — М.: Педагогика-Пресс, 1998. — 328 с.
- Л4.27. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. Т. 2 / Под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. — М.: Радио и связь, 2001. — 575 с.
- Л4.28. Нефёдов Е.И., Саидов А.С., Тагилаев А.Р. Широкополосные микрополосковые управляющие устройства СВЧ. — М.: Радио и связь, 1994. — 168 с.
- Л4.29. Нефёдов Е.И., Сивов А.Н. Электродинамика периодических структур. — М.: Наука, 1977. — 208 с.
- Л4.30. Нефёдов Е.И., Фиалковский А.Т. Полосковые линии передачи. — М.: Наука, 1974. — 127 с.
- Л4.31. Раевский С.Б. Решение внутренних задач электродинамики с использованием непрерывного спектра в одной из частных областей // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1980. — Т. 23. — № 9. — С. 27-32.
- Л4.32. Силин Р.А., Сазонов В.П. Замедляющие системы. — М.: Сов. радио, 1966. — 632 с.
- Л4.33. Содха М.С., Гхатак А.К. Неоднородные оптические волноводы: Пер. с англ. / Под ред. В.А. Кислёва. — М.: Связь, 1980. — 216 с.
- Л4.34. Справочник по расчёту и конструированию СВЧ полосковых устройств / С.И. Бахарев, В.И. Вольман, Ю.Н. Либ и др.; Под ред. В.И. Вольмана. — М.: Радио и связь, 1982. — 328 с.
- Л4.35. Унгер Х.Г. Планарные и волоконные оптические волноводы. — М.: Мир, 1980. — 656 с.
- Л4.36. Чео П.К. Волоконная оптика. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 279 с.
- Л4.37. Шевченко В.В. Плавные переходы в открытых волноводах. — М.: Наука, 1969. — 190 с.

Литература к главе 5

- Л5.1. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966. — 476 с.

Л5.2. Григорьев А.Д., Янкевич В.Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. — М.: Радио и связь, 1984. — 248 с.

Л5.3. Диэлектрические резонаторы / М.Е. Ильченко, В.Ф. Взятышев, Л.Г. Гассанов и др.; Под ред. М.Е. Ильченко. — М.: Радио и связь, 1989. — 328 с.

Л5.4. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем. — Ленинград: Изд-во ВКАС, 1994. — 426 с.

Л5.5. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. Т. 2 / Под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. — М.: Радио и связь, 2001. — 575 с.

Л5.6. Нефёдов Е.И. Открытые коаксиальные резонаторные структуры. — М.: Наука, 1982. — 220 с.

Л5.7. Нефёдов Е.И., Козловский В.В., Згурский А.В. Широкополосные излучающие и резонансные устройства. — Киев: Техника, 1990. — 160 с.

Литература к главе 6

Л6.1. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Советское радио, 1966. — 475 с.

Л6.2. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. — М.: Наука, 1966. — 240 с.

Л6.3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 216 с.

Л6.4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 304 с.

Л6.5. Забрейко П.П., Кошелев А.И. и др. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 448 с.

Л6.6. Квазиоптика. Избранные доклады на международном симпозиуме. Под редакцией Б.З. Каценеленбаума и В.В. Шевченко. — М.: Мир, 1966. — 504 с.

Л6.7. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. — М.: Издательство иностранной литературы, 1958. — 930 с.

Л6.8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.

Литература к главе 7

Л7.1. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М.-Л.: Энергия, 1967. — 376 с.

Л7.2. Нефёдов Е.И., Козловский В.В., Згурский А.В. Широкополосные излучающие и резонансные устройства. — Киев: Техника, 1990. — 160 с.

Л7.3. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн.: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука, 1989. — 544 с.

Л7.4. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебник для вузов. М.: Радио и связь, 2000. — 559 с.

- Л7.5. Сазонов Д.М. Антенны и устройства СВЧ: Учебник для радиотехнических вузов. — М.: Высшая школа, 1988. — 432 с.
- Л7.6. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. — М.: Мир, 1978. — 550 с.
- Л7.7. Сазонов Д.М. Антенны и устройства СВЧ: Учебник для радиотехнических специальностей вузов. — М.: Высшая школа, 1988. — 432 с.
- Л7.8. Воскресенский Д.И., Гостюхин В.Л., Максимов В.М., Пономарев Л.И. Устройства СВЧ и антенны: Учебник для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки 654200 «Радиотехника» / Под ред. Д.И. Воскресенского. — М.: Радиотехника, 2006. — 376 с.
- Л7.9. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры: Пер. с англ. под ред. Э.Л. Бурштейна. — М.: Мир, 1977. — 485 с.
- Л7.10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
- Л7.11. Неганов В.А., Осипов О.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. / Под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. — М.: Радио и связь, 2005. — 648 с.
- Л7.12. Неганов В.А., Матвеев И.В., Медведев С.В. Метод сведения уравнения По-клингтона для электрического вибратора к сингулярному интегральному уравнению // Письма в ЖТФ. — 2000. — Т. 26. — № 12. — С. 86-94.
- Л7.13. Неганов В.А., Матвеев И.В. Применение сингулярного интегрального уравнения для расчета тонкого электрического вибратора // ДАН. — 2000. — Т. 371. — № 1.
- Л7.14. Неганов В.А., Нефёдов Е.И., Яровой Г.П. Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн / Под ред. В.А. Неганова. — М.: Радио и связь, 2002. — 416 с.
- Л7.15. Неганов В.А., Павловская Э.А., Яровой Г.П. Излучение и дифракция электромагнитных волн / Под ред. В.А. Неганова. — М.: Радио и связь, 2004. — 264 с.
- Л7.16. Неганов В.А. Сингулярное интегральное представление электромагнитного поля электрического вибратора в его ближней зоне // ДАН. — 2004. — Т. 399. — № 5. — С. 617-619.
- Л7.17. Неганов В.А., Клюев Д.С., Ефремова А.А. Сингулярные интегральные представления электромагнитного поля в ближней зоне электрического вибратора // Антенны. — 2005. — Вып. 95. — С. 22-27.
- Л7.18. Неганов В.А. Самосогласованный метод расчета электромагнитных полей в ближних зонах излучающих структур, описываемых координатными поверхностями // ДАН. — 2006. — Т. 408. — № 5. — С. 234-237.
- Л7.19. Неганов В.А. Сингулярные интегральные уравнения как метод физической регуляризации некорректных электродинамических задач радиотехники и связи. — В трудах IV МНТК «Физика и технические приложения волновых процессов». — Н. Новгород, 2005. — С. 7-18.

Л7.20. Неганов В.А., Лемжин М.И., Святкин Н.М. Электромагнитное поле в ближней зоне электрического вибратора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2006. — Т. 9. — № 4 — С. 25-35.

Л7.21. Неганов В.А. Метод сингулярных интегральных представлений полей в задачах о собственных волнах экранированных полосково-щелевых структур СВЧ // Радиотехника и электроника. — 1989. — Т. 34. — № 11. — С. 2251-2260.

Л7.22. Харченко К.П., Сухарев В.Н. «Электромагнитная волна», энергия — поток реальных фотонов. — М.: КомКнига, 2005. — 128 с.

Литература к главе 8

Л8.1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988 — 440 с.

Л8.2. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. Т. 2 / Под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского — М.: Радио и связь, 2001. — 575 с.

Л8.3. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 544 с.

Л8.4. Семенов А.А. Теория электромагнитных волн. — М.: Наука, 1966. — 240 с.

Литература к главе 9

Л9.1. Аналитические методы в теории дифракции и распространения радиоволн / Под ред. С.Б. Бутаковой. — М.: Научный совет по акустике АН СССР, 1970. — 452 с.

Л9.2. Бабич В.А., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972. — 456 с.

Л9.3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики: Пер. с англ. / Под ред. Г.П. Мотулевича. — М.: Наука, 1973. — 720 с.

Л9.4. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. — М.: Радио и связь, 1978. — 247 с.

Л9.5. Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З. Основы теории дифракции. — М.: Наука, 1982. — 271 с.

Л9.6. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. — М.: Сов. радио, 1966.

Л9.7. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988 — 440 с.

Л9.8. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. — М.: Радио и связь, 1987. — 272 с.

Л9.9. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. — Минск: Изд-во «Наука и техника», 1968. — 584 с.

Л9.10. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. — М.: Высшая школа, 1991. — 224 с.

- Л9.11. *Нефёдов Е.И.* Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. — М.: Наука, 1979. — 272 с.
- Л9.12. *Потехин А. И.* Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1948. — 135 с.
- Л9.13. *Уфимцев П.Я.* Метод краевых волн в физической теории дифракции. — М.: Радио и связь, 1978. — 247 с.
- Л9.14. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 1. — М.: Мир, 1978. — 550 с.
- Л9.15. *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970. — 517 с.
- Л9.16. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции: Пер с нем. / Под ред. Г.Д. Малюжинца. — М.: Мир, 1964.

Литература к главе 10

- Л10.1. *Вамберский М.В., Абрамов В.П., Казанцев В.И.* Конструирование ферритовых развязывающих приборов СВЧ. — М.: Радио и связь, 1982. — 136 с.
- Л10.2. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967. — 684 с.
- Л10.3. *Гуревич А.Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. — М.: Наука, 1973. — 560 с.
- Л10.4. *Гуревич А.Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. — М.: Физматгиз, 1960. — 407 с.
- Л10.5. *Гуревич А.Г., Мелков Г.А.* Магнитные колебания и волны. — М.: Физматлит, 1994. — 464 с.
- Л10.6. *Курушин Е.П., Нефёдов Е.И.* Электродинамика анизотропных волноведущих структур. — М.: Наука, 1983. — 224 с.
- Л10.7. *Лакс Б., Баттон К.* Сверхвысокочастотные ферромагнетики: Пер. с англ. / Под ред. А.Г. Гуревича. — М.: Мир, 1965. — 676 с.
- Л10.8. *Микаэлян А.Л.* Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. — 684 с.
- Л10.9. *Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П.* Линейная макроскопическая электродинамика. Т. 1 / Под ред. В.А. Неганова — М.: Радио и связь, 2000. — 509 с.
- Л10.10. *Сул Г., Уокер Л.* Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах. — М.: Изд-во ИЛ, 1955. — 189 с.
- Л10.11. *Lindell I.V., Sihvola A.H., Tretyakov S.A., Viitanen A.J.* Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media. London: Artech House, 1994. — 291 p.
- Л10.12. *Каценеленбаум Б.З., Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д.* Киральные электродинамические объекты // *Успехи физических наук*, 1997. — Т. 167. — № 11. — С. 1201-1212.
- Л10.13. *Lakhtakia A., Varadan V.K., Varadan V.V.* Time-harmonic electromagnetic fields in chiral media. Lecture Notes in Physics. Berlin: Heidelberg and Boston: Springer-Verlag, 1989. — 121 p.

Л10.14. Шевченко В.В. Киральные электромагнитные объекты и среды // Соросовский образовательный журнал, 1998. — № 2. — С. 109-114.

Л10.15. Неганов В.А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами — М.: Радио и связь, 2006. — 280 с.

Л10.16. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. — Минск: Наука и техника, 1976. — 254 с.

Литература к главе 11

Л11.1. Альперт Я.Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера. М.: Наука, 1972. — 563 с.

Л11.2. Андрушко Л.М., Вознесенский В.А., Катоков В.Б. и др. Справочник по волоконно-оптическим линиям связи. — К.: Техника, 1988. — 240 с.

Л11.3. Антенно-фидерные устройства и распространение радиоволн: Учебник для вузов / Г.А. Ерохин, Д.В. Чернышев, И.Д. Козырев, В.Г. Кочержевский; Под ред. Г.А. Ерохина. М.: Радио и связь, 1996. — 352 с.

Л11.4. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.

Л11.5. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989. — 412 с.

Л11.6. Бутусов М.М., Верник С.Л., Галкин В.Н. и др. Волоконно-оптические системы передачи. — М.: Радио и связь, 1992. — 416 с.

Л11.7. Введенский Б.А. Основы теории распространения радиоволн. — М.-Л.: ОНТИ, 1934. — 227 с.

Л11.8. ГОСТ 23872-79. Совместимость РЭС электромагнитная.

Л11.9. Гроднев И.И., Верник С.М. Линии связи. — М.: Радио и связь, 1988. — 544 с.

Л11.10. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. — М.: Высшая школа, 1975. — 280 с.

Л11.11. Дальнее тропосферное распространение ультракоротких радиоволн / Под ред. Б.А. Введенского, М.А. Колосова, А.И. Калинина, А.С. Шифрина. — М.: Сов. радио, 1965.

Л11.12. Долуханов М.П. Распространение радиоволн. — М.: Связь, 1972. — 336 с.

Л11.13. Долуханов М.П. Флуктуационные процессы при распространении радиоволн. — М.: Связь, 1971. — 184 с.

Л11.14. Егоров Е.И., Калашников Н.И., Михайлов А.С. Использование радиочастотного спектра и радиопомех. — М.: Радио и связь. — 1986. — 304 с.

Л11.15. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. — М.: Радио и связь, 1982. — 184 с.

Л11.16. Защита от радиопомех / Под ред. М.В. Максимова. — М.: Сов. радио, 1976. — 496 с.

- Л11.17. Зуев В.Е., Кабанов М.В. Перенос оптических сигналов в земной атмосфере (в условиях помех). — М.: Связь, 1977. — 368 с.
- Л11.18. Зуев В.Е., Кабанов М.В. Перенос оптических сигналов в земной атмосфере (в условиях помех). — М.: Сов. радио, 1977. — 368 с.
- Л11.19. Зуев В.Е., Фадеев В.Я. Лазерные навигационные системы. — М.: Радио и связь, 1987. — 160 с.
- Л11.20. Ипполито Л.Дж. Влияние условий атмосферного распространения радиоволн на космические системы связи. // ТИИЭР. — 1981. — Т. 69. — № 6.
- Л11.21. Калинин А.И. Распространение радиоволн на трассах наземных и космических радиолиний. — М.: Связь, 1979. — 259 с.
- Л11.22. Кашировский В.Е., Кузубов В.А. Распространение средних радиоволн земным лучом. — М.: Связь, 1971. — 220 с.
- Л11.23. Козанне А., Флере Ж., Мэтр Г., Руссо М. Оптика и связь: Пер. с франц. / Под ред. В.К. Соколова. — М.: Мир, 1984. — 504 с.
- Л11.24. Колосов М.А., Арманд Н.А., Яковлев О.И. Распространение волн при космической связи. — М.: Связь, 1969. — 155 с.
- Л11.25. Колосов М.А., Шабельников А.В. Рефракция электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры и Марса. — М.: Сов. радио, 1976. — 220 с.
- Л11.26. Корсунский Л.Н. Распространение радиоволн при связи с искусственными спутниками Земли. — М.: Сов. радио, 1971. — 207 с.
- Л11.27. Кравцов Ю.Л., Орлов Б.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. — 304 с.
- Л11.28. Краснушкин П.Е. Метод нормальных волн в применении к проблеме радиосвязей. — М.: МГУ, 1947. — 57 с.
- Л11.29. Михайлов М.И., Разумов И.Д., Соколов С.А. Электромагнитные влияния на сооружения связи. — М.: Связь, 1979. — 264 с.
- Л11.30. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. Т.1 / Под ред. В.А. Неганова. — М.: Радио и связь, 2000. — 509 с.
- Л11.31. Основы волоконно-оптической связи: Пер. с англ. / Под ред. Е.М. Дианова. — М.: Сов. радио, 1980. — 230 с.
- Л11.32. Основы технического проектирования систем связи через ИСЗ / А.Д. Фортуненко, Г.Б. Аскинази, В.Л. Быков и др. — М.: Связь, 1970. — 330 с.
- Л11.33. Пономарев Г.А., Куликов А.Н., Тельпуховский Е.Д. Распространение УКВ в городе. Томск: МП «Раско», 1991. — 222 с.
- Л11.34. Радиотехнические системы / Под ред. Ю.М. Казаринова. — М.: Высшая школа, 1990. — 496.
- Л11.35. Связь с подвижными объектами в диапазоне СВЧ: Пер. с англ. / Под ред. М.С. Ярлыкова и М.В. Чернякова. — М.: Связь, 1979. — 520 с.
- Л11.36. Семенов А.С., Смирнов В.Л., Шмалько А.В. Интегральная оптика для систем передачи и обработки информации. — М.: Радио и связь, 1990. — 224 с.
- Л11.37. Справочник по спутниковой связи и вещанию / Под ред. Л.Я. Кантора. — М.: Радио и связь, 1983. — 288 с.

- Л11.38. Теория и методы оценки электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств / Под ред. Ю.А. Феоктистова. — М.: Радио и связь, 1988 — 216 с.
- Л11.39. Унгер Г.Г. Оптическая связь. М.: Связь, 1979. — 264 с.
- Л11.40. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. — М.: АН СССР, 1961 — 546 с.
- Л11.41. Фок В.А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. — М.: Изд-во АН СССР, 1946. — 80 с.
- Л11.42. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. Радио, 1970. — 517 с.
- Л11.43. Хмельницкий Е.А. Оценка реальной помехозащищенности приема сигналов в КВ диапазоне. — М.: Связь. — 232 с.
- Л11.44. Черенкова Е.Л., Чернышев О.В. Распространение радиоволн. — М.: Радио и связь, 1984. — 272 с.
- Л11.45. Черный Ф.Б. Распространение радиоволн. — М.: Сов. связь, 1972. — 463 с.
- Л11.46. Щукин А.Н. Распространение радиоволн. — М.: Связьиздат, 1940. — 299 с.
- Л11.47. Электромагнитная совместимость радиотехнических средств и систем / Под ред. Н.М. Царькова. — М.: Радио и связь, 1985. — 272 с.
- Л11.48. Энергетические характеристики космических радиолиний / Под ред. О.А. Зенкевича. — М.: Сов. радио, 1972. — 436 с.
- Л11.49. Яковлев О.И. Распространение радиоволн в солнечной системе. — М.: Сов. радио, 1974. — 192 с.
- Л11.50. Ямпольский В.Г., Фролов О.П. Оптимизация антенных систем линий связи. — М.: Радио и связь, 1991. — 272 с.

Литература к главе 12

- Л12.1. Неганов В.А., Яровой Г.П. Теория и применение устройств СВЧ. Учебное пособие для вузов / Под ред. В.А. Неганова — М.: Радио и связь, 2006. — 720 с.
- Л12.2. Будурис Ж., Шеневье П. Цепи сверхвысоких частот / Пер с франц./ Под ред. А.Л. Зиновьева. — М.: Советское радио, 1979. — 288 с.
- Л12.3. Альтман Дж. Л. Устройства сверхвысоких частот / Пер. с англ./ Под ред. И.В. Лебедева. — М.: Мир. 1968. — 488 с.
- Л12.4. Неганов В.А., Нефёдов Е.И., Яровой Г.П. Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн / Под ред. В.А. Неганова. — М.: Радио и связь, 2002. — 416 с.
- Л12.5. Сазонов Д.М. Антенны и устройства СВЧ: Учебник для радиотехнич. спец. вузов. — М.: Высшая школа, 1988. — 432с.
- Л12.6. Сазонов Д.М., Гридин А.Н., Мишустин Б.А. Устройства СВЧ: Учебное пособие / Под ред. Д.М. Сазонова. — М.: Высшая школа, 1981. — 295 с.

Л12.7. Конструирование экранов и СВЧ устройств: Учебник для вузов / А.М. Чернушенко, Б.В. Петров, Л.Г. Малорацкий и др. / Под ред. А.М. Чернушенко. — М.: Радио и связь, 1990. — 352 с.

Л12.8. Микроэлектронные устройства СВЧ: Учеб. пособие для радиотехнических специальностей вузов / Г.И. Веселов, Е.Н. Егоров, Ю.Н. Алехин и др. / Под ред. Г.И. Веселова. — М.: Высшая школа, 1988. — 280 с.

Л12.9. Воскресенский Д.И., Гостюхин В.Л., Максимов В.М., Пономарев Л.И. Устройства СВЧ и антенны: Учебник для студентов по направлению подготовки «Радиотехника» / Под ред. Д.И. Воскресенского. Изд. 2-е, доп. и перераб. — М.: Радиотехника, 2006. — 376 с.

Л12.10. Гупта К., Гардис Р., Чадха Р. Машинное проектирование СВЧ устройств: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1987. — 432 с.

Л12.11. Хелзайн Дж. Пассивные и активные цепи СВЧ: Пер. с англ. / Под ред. А.С. Галина. — М.: Радио и связь, 1981. — 200 с.

Литература к главе 13

13.1. Антенны и устройства СВЧ. Проектирование фазированных антенных решеток. Учебное пособие / Под ред. Д.И. Воскресенского. — М.: Радио и связь, 1994. — 592 с.

13.2. Гупта К., Гардис Р., Чадха Р. Машинное проектирование СВЧ устройств: Пер. с англ. / Под ред. В.Г. Шейкмана. — М.: Радио и связь, 1987. — 432 с.

13.3. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ / В.В. Никольский, В.П. Орлов, В.Г. Феоктистов и др. / Под ред. В.В. Никольского. — М.: Радио и связь. — 272 с.

13.4. Ильин В.Н., Коган В.Л. Разработка и применение программ автоматизации схемотехнического проектирования. — М.: Радио и связь, 1984. — 368 с.

13.5. Норенков И.П. Принципы построения и структура. — М.: Высшая школа, 1986. — Кн. 1. — 127 с. — (Системы автоматизированного проектирования).

Литература к главе 14

Л14.1. Неганов В.А., Нефёдов Е.И., Яровой Г.П. Электродинамические методы расчета устройств СВЧ и антенн / Под ред. В.А. Неганова. — М.: Радио и связь, 2002. — 416 с.

Л14.2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 624 с.

Л14.3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: ГИФНЛ, 1962. — 708 с.

Л14.4. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966. — 176 с.

- Л14.5. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 216 с.
- Л14.6. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. — Киев: Наукова думка, 1978. — 292 с.
- Л14.7. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 304 с.
- Л14.8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
- Л14.9. *Неганов В.А., Нефёдов Е.И., Яровой Г.П.* Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневых частот. — М.: Физматлит, 1996. — 315 с.
- Л14.10. *Ву Чень-пан.* Вариационные и итерационные методы решения задач о волноводах и решетках // Вычисл. методы в электродинамике / Под ред. *Р. Митры*. — М.: Мир, 1977. — С. 310-358.
- Л14.11. *Веселов Г.И., Темнов В.М.* О решении некоторых систем уравнений в электродинамике и явление «относительной сходимости» // Радиотехника и электроника. — 1981. — Т.26. — № 10. — С. 2034-2043.
- Л14.12. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
- Л14.13. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 512 с.
- Л14.14. *Левин Л.* Теория волноводов. Пер. с англ. / Под ред. *В.И. Вольмана*. — М.: Радио и связь, 1981. — 312 с.
- Л14.15. *Егоров Ю.В.* Частично заполненные прямоугольные волноводы. — М.: Сов. радио, 1967. — 216 с.
- Л14.16. *Неганов В.А.* Метод сингулярных интегральных уравнений для расчета собственных волн экранированных щелевых структур // Радиотехника и электроника, 1986. — Т. 31. — № 3. — С. 479-484.
- Л14.17. *Неганов В.А.* Метод ортогонализирующей подстановки для расчета собственных волн экранированных щелевых структур // Известия высших учебных заведений. Радиофизика, 1985. — Т. 28. — № 2. — С. 222-228.
- Л14.18. *Сазонов Д.М.* Антенны и устройства СВЧ: Учебник для радиотехнических специальностей вузов. — М.: Высшая школа, 1988. — 432 с.
- Л14.19. *Воскресенский Д.И., Гостюхин В.Л., Максимов В.М., Пономарев Л.И.* Устройства СВЧ и антенны: Учебник для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки 654200 «Радиотехника» / Под ред. *Д.И. Воскресенского*. — М.: Радиотехника, 2006. — 376 с.
- Л14.20. *Вычислительные методы в электродинамике* / Под ред. *Р. Митры*: Пер. с англ. / Под ред. *Э.Л. Бурштейна*. — М.: Мир, 1977. — 485 с.
- Л14.21. *Неганов В.А., Осипов О.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П.* Электродинамика и распространение радиоволн. / Под ред. *В.А. Неганова и С.Б. Раевского*. — М.: Радио и связь, 2005. — 648 с.

Л14.22. Неганов В.А., Матвеев И.В., Медведев С.В. Метод сведения уравнения По-клингтона для электрического вибратора к сингулярному интегральному уравнению // Письма в ЖТФ. — 2000. — Т. 26. — № 12. — С. 86-94.

Л14.23. Неганов В.А., Матвеев И.В. Применение сингулярного интегрального уравнения для расчета тонкого электрического вибратора // ДАН. — 2002. — Т. 371. — № 1. — С. 36-38.

Л14.24. Неганов В.А., Павловская Э.А., Яровой Г.П. Излучение и дифракция электромагнитных волн / Под ред. В.А. Неганова. — М.: Радио и связь, 2004. — 264 с.

Л14.25. Неганов В.А. Сингулярное интегральное представление электромагнитного поля электрического вибратора в его ближней зоне // ДАН. — 2004. — Т. 399. — № 5. — С. 617-619.

Л14.26. Неганов В.А., Клюев Д.С., Ефремова А.А. Сингулярные интегральные представления электромагнитного поля в ближней зоне электрического вибратора // Антенны. — 2005. — Вып. 95. — С. 22-27.

Л14.27. Неганов В.А. Самосогласованный метод расчета электромагнитных полей в ближних зонах излучающих структур, описываемых координатными поверхностями // ДАН. — 2006. — Т. 408. — № 5. — С. 234-237.

Л14.28. Неганов В.А. Сингулярные интегральные уравнения как метод физической регуляризации некорректных электродинамических задач радиотехники и связи. — В трудах IV МНТК «Физика и технические приложения волновых процессов». — Н. Новгород, 2005. — С. 7-18.

Л14.29. Неганов В.А., Лемжин М.И., Святкин Н.М. Электромагнитное поле в ближней зоне электрического вибратора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2006. — Т. 9. — № 4 — С. 25-35.

Л14.30. Неганов В.А. Метод сингулярных интегральных представлений полей в задачах о собственных волнах экранированных полосково-щелевых структур СВЧ // Радиотехника и электроника. — 1989. — Т. 34. — № 11. — С. 2251-2260.

Л14.31. Харченко К.П., Сухарев В.Н. «Электромагнитная волна», энергия — поток реальных фотонов. — М.: КомКнига, 2005. — 128 с.

Л14.32. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металло-диэлектрические волноводы. — М.: Радио и связь, 1988. — 247 с.

Л14.33. Воскресенский Д.И., Гостюхин В.Л., Максимов В.М., Пономарев Л.И. Антенны и устройства СВЧ. — М. Изд-во МАИ, 1999. — 526 с.

Л14.34. Иванов А.Б. Волоконная оптика: приборы, компоненты, методика измерений. — М.: «Сайрус Системс». — 1999 — 407 с.

Л14.35. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайневых частот. — М.: Педагогика-Пресс, 1998. — 328с.

Л14.36. Иларионов Ю.А., Раевский С.Б., Сморгонский В.Я. Расчет гофрированных и частично заполненных волноводов. — М.: Советское радио, 1980. — 200 с.

Л14.37. Курушин Е.П., Нефёдов Е.И. Электродинамика анизотропных волноведущих структур. — М.: Наука, 1983. — 223 с.

Л14.38. Беланов А.С. Трехслойные волноводы для широкополосных оптических линий связи. // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. — 1978. — Т. 42. — № 12. — С. 1522-1533.

Л14.39. Беланов А.С., Дианов Е.М. Предельные скорости передачи информации по волоконным световодам // Радиотехника. — 1982. — Т. 37. — № 2. — С. 35-43.

Л14.40. Беланов А.С., Белов А.В., Дианов Е.М., Кривенков В.В., Раевский А.С., Харитонova К.Ю. О возможности компенсации материальной дисперсии в трехслойных волоконных световодах в диапазоне $\lambda < 1,3$ мкм // Квантовая электроника. — 2002. — Т.32 — № 5. — С. 426-435.

Л14.41. Горячев Ю.А., Раевская О.И. Предельные аттенюаторы с малым начальным ослаблением. // Техника средств связи. Серия РТ. — 1977. — Вып. 5(9). — С. 40-43.

Л14.42. Веселов Г.И., Марчев А.Г., Раевский С.Б., Щербаков В.В. Расчет добротности СВЧ резонатора на отрезке круглого двухслойного экранированного волновода. // Техника средств связи. Серия РТ. — 1981. — Вып. 2. — С. 25-29.

Л14.43. Раевский С.Б. О комплексном резонансе, его особенностях. Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот. — 2002. — Т. 10. — № 2(34). — С. 32-36.

Л14.44. Раевская О.И., Калмык В.А., Горячев Ю.А. Предельный аттенюатор на основе круглого двухслойного волновода. // Изв. вузов СССР — Радиоэлектроника, 1975. — Т. 18. — № 2. — С. 104-106.

Л14.45. А.С. Раевский, С.Б. Раевский, О.Т. Цинин. Комплексный резонанс в круглом двухслойном экранированном волноводе // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2002. — Т. 5. — № 2. — С. 40-45.

Л14.46. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 526 с.

Л14.47. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. — М.: Наука, 1967. — 460 с.

Л14.48. Раевский С.Б. Комплексные волны в двухслойном круглом экранированном волноводе // Изв. вузов СССР. — Радиофизика. — Т. 15. — № 1. — 1972. — С. 112-116.

Л14.49. Раевский С.Б. О существовании комплексных волн в некоторых двухслойных изотропных структурах // Изв. вузов СССР. — Радиофизика. — Т. 15. — № 12. — 1972. — С. 1926-1931.

Л14.50. Веселов Г.И., Любимов Л.А. К теории двухслойного диэлектрического волновода в цилиндрическом экране // Радиотехника и электроника, 1963. — Т. 8. — № 9. — С. 1530-1541.

Л14.51. Clarricoats P.J.B., Taylor B.C. Evanescent and propagating modes of dielectric-loaded circular waveguide // Proc. IEEE., 1964. — V. 111. — № T-6. — P. 1951-1956.

Л14.52. Раевский С.Б., Сморгонский В.Я. Анализ дисперсионных характеристик эллиптического волновода с диэлектрическим стержнем для волны HE_{11} . Радиотехника и электроника, 1971. — Т.16. — № 6. — С. 941-945.

- Л14.53. *Tsandonlas G.H., Inc.W.J.* Modal inversion in circular waveguides. // IEEE Trans. — МТТ-19, 1971. — № 4. — Р. 386-391.
- Л14.54. *Веселов Г.И., Платонов Н.И., Семенов С.Г.* Замечание к статье С.Б. Раевского «О некоторых свойствах комплексных волн в двухслойном экранированном круглом волноводе» // Радиотехника и электроника, 1980. — Т.25. — № 4. — С. 887-888.
- Л14.55. *Веселов Г.И., Семенов С.Г., Благовещенский В.А.* Особенности распространения гибридных волн в круглом волноводе с диэлектрическим стержнем // Радиотехника и электроника, 1983. — Т. 28. — № 11. — С. 2116-2122.
- Л14.56. *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* О встречных потоках мощности в некоторых двухслойных изотропных структурах // Изв. вузов СССР—Радиофизика, 1983. — Т. 26. — № 9. — С. 1041-1044.
- Л14.57. *Краснушкин П.Е., Федоров Е.Н.* О кратности волновых чисел нормальных волн в слоистых средах // Радиотехника и электроника, 1972. — Т. 17. — № 6. — С. 1129-1140.
- Л14.58. *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* Комплексные волны в поперечно-неоднородных направляющих структурах // Радиотехника, 1987. — Т. 42. — № 8. — С. 64-67.
- Л14.59. *Моденов В.П.* Метод Галеркина в несамосопряженных краевых задачах теории волноводов // ЖВМ и МФ, 1987. — Т. 27. — № 1. — С. 144-149.
- Л14.60. *Раевский С.Б.* К вопросу об операторах электродинамических задач // Электромагнитная совместимость. Межвуз. тематический сборник научных трудов. Изд-во ГГУ, г. Горький, 1987. — С. 67-76.
- Л14.61. *Моденов В.П.* Несамосопряженные краевые задачи теории волноводов. Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.03 — Радиофизика. // ГГУ им. А.М. Горького, 1990.
- Л14.62. *Шевченко В.В.* Вырождение и квазивырождение спектра и преобразование волн в диэлектрических волноводах и световодах // Радиотехника и электроника, 2000. — Т. 45. — № 10. — С. 1157-1167.
- Л14.63. *Моденов В.П.* Собственные волны аксиально-слоистого диэлектрического волновода с азимутально-ребенчатым экраном // Радиотехника и электроника, 1996. — Т. 41. — № 6. — С. 695-697.
- Л14.64. *Моденов В.П.* Собственные колебания электромагнитного резонатора с импедансной сферической поверхностью // Радиотехника и электроника, 2000. — Т. 45. — № 10. — С. 1198-1201.
- Л14.65. *Моденов В.П.* Дифференциально-параметрический метод расчета спектральных характеристик волноводов и резонаторов // Физика волновых процессов и радиотехнических систем, 2001. — Т. 4. — № 3. — С. 6-9.
- Л14.66. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 443 с.
- Л14.67. *Митра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. — М.: Мир, 1974. — 323 с.
- Л14.68. *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. — М.: Наука, 1983. — 304 с.

- Л14.69. Микроэлектронные устройства СВЧ / Под ред. Г.И. Веселова. — М.: Высшая школа, 1988. — 280 с.
- Л14.70. Нефёдов Е.И., Фиалковский А.Т. Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на поперечных структурах. — М.: Наука, 1972. — 204 с.
- Л14.71. Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л. Спектральные операторы рассеяния дифракции волн на плоских экранах. — Киев: Наукова думка, 1984. — 240 с.
- Л14.72. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. — М.: Радио и связь, 1987. — 271 с.
- Л14.73. Баринова В.Ф., Раевский С.Б., Рудоясова Л.Г. Расчет волноводного резонатора, перестраиваемого металлическим стержнем // Радиотехника и электроника, 1975. — Т. 20. — № 12. — С. 2621-2624.
- Л14.74. Раевский С.Б., Рудоясова Л.Г. Расчет волноводного резонатора, перестраиваемого металлическим стержнем, на основе метода частичных областей // Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1976. — Т. 19. — № 9. — С. 1391-1396.
- Л14.75. Раевский С.Б., Рудоясова Л.Г. Применение дифракционного метода возмущений для расчета колебательной системы генератора СВЧ на диоде Ганна // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1979. — Т. 22. — № 11. — С. 70-73.
- Л14.76. Раевская О.И. Метод расчета предельного аттенюатора емкостного типа // Техника средств связи. Серия РТ, 1977. — Вып. 5. — С. 47-52.
- Л14.77. Балабанова Т.Н., Кукушкин А.В., Раевский С.Б. Расчет характеристик передачи равномерноизогнутого прямоугольного волновода в широком диапазоне частот // Радиотехника и электроника, 1977. — Т. 22. — № 3. — С. 606-609.
- Л14.78. Гвоздев В.И., Нефёдов Е.И. Объемные интегральные схемы СВЧ — элементная база аналоговой и цифровой радиоэлектроники. — М.: Наука, 1987. — 112 с.
- Л14.79. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 546 с.
- Л14.80. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.
- Л14.81. Маделунг Э. Математический аппарат физики. — М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961. — 618 с.
- Л14.82. Г. Сул, Л. Уоккер. Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в изотропных средах. — М.: Изд-во ИЛ, 1955. — 189 с.
- Л14.83. Rhodes J.D. General constraints on propagation characteristics of electromagnetic waves in uniform inhomogeneous waveguides // Proc IEE, 1971. — V. 118. — № 7. — P. 849-857.
- Л14.84. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988. — 440 с.
- Л14.85. Когтев А.С., Раевский С.Б. О комплексных волнах в слоистых экранированных волноводах // Радиотехника и электроника, 1991. — Т. 36. — № 10. — С. 652-658.
- Л14.86. Раевский С.Б. Присоединенные волны в слоистых цилиндрических направляющих структурах // Вестник ВВО АТН РФ. Серия: Высокие технологии в радиоэлектронике, 1995. — № 1. — С. 57-60.

- Л14.87. Веселов Г.И., Калмык В.А., Раевский С.Б. Исследование комплексных волн двухслойного экранированного волновода // Радиотехника, 1980. — Т. 35. — № 9. — С. 59-61.
- Л14.88. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Комплексные волны круглого диэлектрического волновода // Радиотехника и электроника, 1983. — Т. 28. — № 2. — С. 230-232.
- Л14.89. Раевский С.Б. О некоторых свойствах комплексных волн в двухслойном круглом экранированном волноводе // Радиотехника и электроника, 1976. — Т. 21. — № 5. — С. 952-962.
- Л14.90. Калмык В.А., Раевский А.С. Опыты по изучению комплексных волн в круглом диафрагмированном волноводе // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ, 1994. — Вып. 4. — С. 6-9.
- Л14.91. Барина В.Ф., Павловская Г.В., Раевский С.Б. К вопросу о спектре волн диафрагмированного волновода // Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1990. — Т. 33. — № 6. — С. 466-470.
- Л14.92. Калмык В.А., Раевский С.Б., Угрюмов В.П. Экспериментальное исследование комплексных волн в двухслойном круглом экранированном волноводе // Радиотехника и электроника, 1978. — Т. 23. — № 4. — С. 699-702.
- Л14.93. Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. — М.: Радио и связь, 2001. — Т. 2. — 575 с.
- Л14.94. Виприцкий Д.Д., Назаров А.В., Раевский С.Б. О комплексных волнах в невязимых направляющих структурах // Письма в ЖТФ, 2007. — Т. 33. — Вып. 5. — С. 1-11.
- Л14.95. Раевский А.С. Волны НЕ и ЕН круглого диэлектрического волновода // Радиотехника и электроника, 1999. — Т. 44. — № 5. — С. 517-519.
- Л14.96. Раевский А.С., Раевский С.Б. О комплексных волнах круглого диэлектрического волновода в поглощающей среде // Радиотехника и электроника, 1998. — Т. 43. — № 12. — С. 1409-1412.
- Л14.97. Раевский А.С., Раевский С.Б. Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами. — М.: Радиотехника, 2004. — 110 с.
- Л14.98. Веселов Г.И., Калмык В.А., Раевский С.Б. Полосовой фильтр на двухслойном круглом экранированном волноводе в режиме комплексных волн // Изв. вузов СССР — Радиофизика, 1983. — Т. 26. — № 8. — С. 900-903.
- Л14.99. Бударлагин Р.В., Раевский С.Б., Титаренко А.А. Учет комплексных волн в волноводных задачах дифракции // Антенны, 2004. — Вып. 6(85). — С. 47-53.
- Л14.100. Раевский А.С., Раевский С.Б., Титаренко А.А. Комплексные волны во внутренних задачах дифракции // Радиотехника и электроника, 2003. — Т. 48. — № 12. — С. 1427-1435.

Справочники и математическая литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. — М.: Наука, 1974. — 296 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. — М.: Наука, 1986. — 544 с.
3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения. — Киев: Наукова Думка, 1986. — 544 с.
4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. — Киев: Наукова думка, 1978. — 292 с.
5. Вычислительные методы в электродинамике / Под редакцией Р. Митры: Пер. с англ. / Под ред. Э.Л. Буриштейна. — М.: Мир, 1977. — 485 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.Н. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Изд. физ.-мат. лит., 1962. — 1100 с.
8. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Пер. с англ. Н.В. Леви. — М.: Наука, 1983. — 176 с.
9. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: ГИФНЛ, 1962. — 708 с.
10. Князев П.Н. Интегральные преобразования / Под ред. Ф.Д. Гахова. — Минск: Вышэйшая школа, 1969. — 200 с.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 624 с.
12. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 216 с.
13. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Т. 2 — М.: Наука, 1977. — 400 с.
14. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. — М.-Л.: Изд. физ.-мат. лит., 1963. — 358 с.
15. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби) / Под ред. Л.А. Люстерника и А.Р. Янпольского. — М.: Физматлит, 1961. — 440 с.
16. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. — 512 с.
17. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 512 с.
18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983. — 752 с.
19. Рихтмайер. Принципы современной математической физики. — М.: Мир, 1982. — 486 с.
20. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. — М.: Наука, Физматлит, 1979. — 832 с.
21. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс; Пер. с англ. В.И. Агошкова и др. / Под ред. Г.И. Марчука. — М.: Мир, 1977. — 349 с.

22. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
23. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1953. — 680 с.
24. Янке Е., Эмде Ф., Лем Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1968. — 344 с.

Предметный указатель

А

Амплитуда
 комплексная 87
Антенна 297
 апертурная 326
 поверхностная 386
 идеальная 386
 рупорная 360
аффино́р «импедансов» 147

Б

Базис
 Трефца 586
Баланс
 фаз 283
Бинормаль
 кристалла 439

В

Вектор
 Герца
 магнитный 85, 123
 электрический 84
 напряжённости
 магнитного поля 53
 электрического поля 28
 Умова-Пойнтинга 63
 электрического смещения 51
 электрической индукции 50
 электрической поляризации 49
Ветвь
 магнитостатическая 462
Взаимодействие
 магнитокристаллическое 447
 магнитоупругое 447
 обменное 447
Вибратор
 активный 333
 Герца 297

 пассивный 333
 проволочный
 криволинейный 325
 трубчатый 643
 целевой
 элементарный 320
 электрический
 элементарный 325

Возбуждение
 волн линий передачи 350
 колебаний резонаторов 357
 открытых направляющих структур 366

Волна

 Е (ТМ) - типа 171
 Н (ТЕ) - типа 171
 ЛЕ-типа 171
 LM-типа 171
 бегущая 174
 Бриллюэна 281
 гибридная 171
 затухающая 97
 земная 479
 Зоммерфельда 219
 ионосферная 479
 комплексная 668
 магнитная 111, 306
 магнитостатическая 71
 медленная 461
 необыкновенная 438, 460
 неоднородная 95
 плоская 115, 172
 нормальная 456
 обыкновенная 438
 однородная 95
 основная 171, 187
 поверхностная 479, 507
 поперечная 73
 поперечно магнитная 306
 поперечно электрическая 306
 продольная 73
 рассеянная 480
 собственная 171
 классификация 171
 стоячая 105, 237
 сферическая 133
 расходящаяся 311
 Т-типа 171
 типа Е 171, 178, 306

типа EH 171
типа H 171, 178, 306
типа HE 171
типа LE 171
типа LM 171, 201
типа TE 171
типа TM 171
типа T 171, 195
фронт 174
Ценнека 507
цилиндрическая 122
"шепчущей галерей" 263
электрическая 306
Волновод 169
Г-образный 612
запредельный 176
круглый
 Е-волны 189
 Н-волны 192
 металлический 188
оптический
 градиентный 207
 плоский 202
прямоугольный 180
 Е-волны 181
 Н-волны 184
 с плоскопараллельными слоями 199
электрическая прочность 188
Волокно
 оптическое
 SM 216
 многомодовое 215
 одномодовое 216
Восприимчивость
 диэлектрическая 51, 56
 магнитная 53, 56
 магнитная, динамическая 448
Вырождение
 колебаний
 двухкратное 248

Г

Гамильтониан
 магнитной системы 447
Гиротропия 451
Глубина
 проникновения 115, 240

Граница
 порядка сингулярности
 верхняя 145
 экранирующая 62

Д

Диаграмма
 направленности по мощности
 нормированная 312
 направленности по полю
 нормированная 312
Диполь
 Герца 314
 магнитный 316
 электрический 314
Директор 332
Дисперсия 175
 временная 57
 межмодовая 207, 215
 направляемой волны 175
 нормальная 121
 отрицательная 220
 пространственная 57
Диссипация 455
Дифракция 369
 Фраунгофера 373
 Френеля 388
Длина
 волны 93, 97
 в волноводе 175
 критическая 176
Длина волны 175
Добротность
 резонатора 232, 244
 внешняя 233
 нагруженная 233
 ненагруженная 232
 собственная 232, 237

З

Задача
 Зоммерфельда 503
 краевая 65
 Гильберта 607
 Дирихле 178, 181, 189
 Неймана 179, 184, 192
 Римана 606

- Римана-Гильберта 604
 самосопряженная 657
 линейного программирования 575
 электродинамики
 внешняя 66
 внутренняя 66
- Закон**
 Био-Савара 70
 для прямолинейного
 бесконечного тока 37
 Гаусса 30, 31
 в дифференциальной форме 41
 инвариантный 31
 Кулона 27
 Снеллиуса 108
 сохранения 23
 числа частиц 24
 электрического заряда 25
 сохранения заряда 427
 Фарадея 44
 в дифференциальной форме 45
 электромагнитной индукции 44
- Замыкание**
 короткое 544
- Заряд**
 закон сохранения 25, 31
 инвариантность 30
 плотность 25
- Зеркало**
 фокусирующее 284
- Зона**
 ближняя 313
 видимости РЛС 491
 дальняя. См. Зона: Фраунгофера
 запыления 222
 Фраунгофера 310
 Френеля 487, 312, 390
- И**
- Излучатель**
 Гюйгенса
 элементарный 322
 магнитный
 элементарный 316
- Излучение**
 условие 66
- электромагнитное 39, 295
- Импеданс**
 среды 95
- Инвариант** 39
- Индекс**
 преломления 497
- Индукция**
 электромагнитная 45
- Интеграл**
 типа Коши 605
 Френеля 389
- Интенсивность** 373
- Интерференция** 371
- Ионосфера** 477
- Источник**
 когерентный 369
 положительный 21
- К**
- Кабель**
 оптический 210
- Калибровка**
 Кулона 80
 Лоренца 79, 296
- Канал**
 волновой 561
- Картина**
 дифракционная 373
- Каустика** 288
- Киральность** 467
- КНД. См. Коэффициент: направленного действия**
- Колебание** 73
 вынужденное 231
 вырожденное 231
 намагниченности, однородное 448
 намагниченности, свободное 448
 намагниченности, собственной 448
 собственное 448
- Колебания**
 магнитные, малые 450
- Коррекция**
 фазовая 282, 284
- Коэффициент**
 задачи Римана 606
 затухания 89, 97, 174
 направленного действия 489
 направленности действия 489, 387

распространения 174
связи 233
усиления
 антенны 489
 фазы 174
Френеля 112
Кривая
 Берроуза 514
Кристалл
 оптически отрицательный 437
 оптически положительный 437

Л

Лемма
 Лоренца 530
Линия
 зеркальная 270, 277
 линзовая 270, 275
 передачи 169
 коаксиальная 195
 однородная 169
 открытая 169
 регулярная 169
 экранированная 169
Линия передачи
 волноводно-щелевая 620
 коаксиальная 169
 однородная 169
 открытая 169
 регулярная 169
 экранированная 169
Луч 492, 369

М

магнитные волны 306
Магнитостатика 70
Матрица
 передачи 545
 проводимостей 528
 нормированная 565
 рассеяния 527, 538, 545, 564
 сопротивлений 528
 нормированная 565
Мезопауза 478
Мезосфера 477
Метод
 Бубнова-Галеркина 584

Галёркина. См. Метод: моментов
Гюйгенса-Кирхгофа 381
комплексных амплитуд 87
Мейкснера 143
моментов 582, 599
разделения переменных 411
Ритца 620
сингулярных интегральных
 представлений 652
слабой регуляризации. См. Метод:
 Тихонова
Тихонова 601
Трефца. См. Процесс: Трефца
физической оптики 369
частичных областей 587, 199

Микроплотность

заряда 48
тока 48

Множитель

интерференционный 518
поляризации 436, 444
радиационный 272
системы излучателей 329

Мода

волноводная 204
излучательная 204
 подложки 204
спиральная 215

Модель

двух сред 50

Молекула

полярная 50

Момент

магнитный 52

Мощность

излучения
 антенны 489

Н

Намагниченность 52, 447
 насыщения 447
 равновесная 450
Напряжённость
 магнитного поля 53
Напряженность
 электрического поля 28

Насыщение
ферромагнетика 462

О

Область
доминантная
радиолинии 484
промежуточная. См. Зона:
Френеля
реактивного ближнего поля 315

Объект
единый физический
инвариантный 39

Оператор
регуляризующий 611
симметричный 580
электродинамический
самосопряженный 654
несамосопряженный 654

Оптика
геометрическая 492, 369

Отражение
полное внутреннее 109

П

Параметр
киральности 468, 470

Пауза 478

Переменная
Швингера 626

Период
колебания 87

Плоскость
отсчета фаз 525, 537

Плотность
заряда 25
магнитного момента 447
энергии
электромагнитного поля 65

Площадь
приёмной антенны
эффективная 490
рассеяния
эффективная 490

Плунжер 250, 260

Поверхность
эквипотенциальная 18

Показатель
преломления 94
эффективный 205
эффективный нормированный 205

Поле
безвихревое 22
вихревое 22
гармоническое 86
магнитное
стационарное 68
магнитное, эффективное 447
монохроматическое 86
потенциальное 22, 67
с источником 20
соленоидальное 20, 365
стационарное 66
физическое 17
электрическое 28
системы зарядов 29
электромагнитное 39

Полином
Лежандра 135
присоединённый 135
Эрмита 208, 276

Полнота 581

Полуширина
резонансной кривой 455

Поляризация
вещества 49
ионная 50
ориентационная 50
электронная 50
волны 100
вертикальная 103
горизонтальная 103
круговая 101
линейная 100
параллельная 111
перпендикулярная 111
типа Е 111

Поляризованность
вещества 49

Поляризуемость
магнитоэлектрическая 469
электромагнитная 469

Постоянная
Гельдера 604

- распространения 97, 172, 174
- фазовая 97
- электрическая 51
- Постоянная распространения 174
- Потенциал
 - магнитостатический 70
 - электродинамический 78
 - векторный 78
 - скалярный 78
 - электростатический 67
- Поток
 - векторного поля 18
 - мощности 64
- Преломление
 - двойное 461
- Преобразование
 - Фурье-Бесселя 133
- Приближение
 - Гюйгенса-Кирхгофа 369, 397
 - Кирхгофа 397
 - лучевое. См. Оптика:
 - геометрическая
- Принцип
 - Бабине 387
 - вариационный 616
 - взаимности 325
 - Гюйгенса 322, 370
 - двойственности 317
 - декомпозиции 559
 - параметрического синтеза 574
- Проводимость
 - удельная
 - тензор 56
- Проводник
 - магнитный 301
 - электрический 301
- Проектирование
 - автоматическое 557
- Проницаемость
 - абсолютная диэлектрическая 51
 - абсолютная магнитная 54
 - диэлектрическая
 - тензор 56
 - магнитная
 - тензор 56
 - магнитная, эффективная 458
 - относительная диэлектрическая 51
 - относительная магнитная 54
- Процесс
 - Трефца 585
- Пучность
 - стоячей волны 105
- Р**
- Радиоволна 476
 - диапазоны 476
- Радиолиния
 - доминантная область 484
- Радиус Земли
 - эквивалентный 497
- Разность хода
 - лучей 310
- Разрежение
 - спектра 233
- Рамка
 - элементарная 318
- Распространение
 - дальнее тропосферное 480
- Рассеяние
 - дифракционное 369
- Расстояние
 - численное 514
- Регуляризация 611
- Режим
 - отсечки 176
- Резольвента 594
- Резонанс
 - в режиме бегущей волны 265
 - ферромагнитный 452, 460
 - ферромагнитный, поперечный 461
 - ферромагнитный, продольный 459
- Резонатор
 - волноводно-диэлектрический 260, 265
 - на основе запердельного волновода 266
 - волноводный
 - ферритовый 268
 - диэлектрический
 - закрытый 260
 - на азимутальных типах колебаний 262
 - на низших типах колебаний 261
 - открытый 260

- экранированный 260
- закрытый 234
- коаксиальный 254
 - Е-колебания 257
 - Н-колебания 258
 - Т-колебания 254
- конфокальный 283
- круглый 250
 - Е-колебания 252
 - Н-колебания 253
- металлодиэлектрический 260
- объёмный 230
- открытый 230, 280
- прямоугольный 244
 - Е-колебания 246
 - Н-колебания 247
- с двугранными отражателями 288
- с цилиндрическими зеркалами 284
- Рефлектор 332
- Рефракция 479, 493
 - критическая 497
 - нормальная 496
 - отрицательная 497
 - положительная 497
 - пониженная 497
 - тропосферная 497
- Решётка
 - дифракционная 378
- Рупор 360
- Ряд
 - ортогональный 581
 - Фредгольма 595
 - Фурье 581
- С**
 - Сверхрефракция 498
 - Световод
 - волоконный 210
 - канальный 209
 - плёночный 209
 - планарный 209
 - полосковый 209
 - Сечение
 - критическое 291
 - рассеяния
 - эффективное поперечное 416
 - Система
 - уравнений
 - магнитостатики 70
 - Максвелла 46, 54
 - Скин-эффект 116
 - Скорость
 - групповая 121, 175
 - фазовая 93, 97, 174
 - Сопротивление
 - волновое 552, 553, 95
 - поверхностное
 - металла 239
 - характеристическое 95
 - Составляющие
 - циркулярные 453
 - Способ
 - Карлемана–Векуа 611
 - Среда
 - анизотропная 56
 - диамагнитная 53
 - диспергирующая 57
 - диэлектрическая
 - неоднородная 493
 - изотропная 56
 - киральная 467
 - кусочно-однородная 57
 - нелинейная 57
 - неоднородная 56
 - однородная 56
 - парамагнитная 53
 - стационарная 24
 - ферритовая, продольно намагниченная 458, 460
 - ферромагнитная 53
 - Стенка
 - магнитная 422
 - Стратопауза 478
 - Стратосфера 477
 - Сходимость
 - относительная 603
 - Сшивание
 - полей 199
- Т**
 - Тензор
 - входного адмитанса 622

- комплексной диэлектрической проницаемости 427
- Теорема
 - Кирхгофа–Гельмгольца интегральная 396
 - Умова–Пойнтинга 529
 - Фостера 532
- Термосфера 477
- Ток
 - магнитный 298
 - намагничивания 52
 - поверхностный
 - в стенках волновода 187
 - смещения 41
 - стационарный 26
 - сторонний 298
 - электрический 25
- Тройник
 - волноводный 549
- Тропопауза 478
- Тропосфера 477
- У**
- Угол
 - Брюстера 114
 - диэлектрических потерь 89
 - магнитных потерь 89
 - полной поляризации 114
- Узел
 - стоячей волны 105
- Упорядочение
 - антиферромагнитное 447
 - гелиомагнитное 447
 - спиральное 447
 - ферромагнитное 447
- Уравнение
 - баланса
 - в дифференциальной форме 24
 - в интегральной форме 23
 - энергии 63, 65
- Бесселя 125, 190
- волновое 74
 - неоднородное 78
- Вольтерра 592
- Гельмгольца
 - обобщённое для гиротропной среды 434
 - однородное 90
- Даламбера
 - векторное 78
- движения, вынужденное 450
- движения, линеаризованное 450
- интегральное
 - адмитансное 588
 - второго рода с вырожденным ядром 592
 - импедансное 588
 - сингулярное 604, 609
- каустических поверхностей 288
- Ландау–Лившица 447
- Лапласа 68, 70
- непрерывности 24, 40, 427, 150
- параболического типа 286
- переноса 492
- Пуассона 67
- радиолокации 490
- телеграфное 169
- Уокера 463
- Фредгольма
 - второго рода 591
 - первого рода 592
 - третьего рода 592
- Фредгольма 1-го рода
 - интегральное 410
- Фредгольма 2-го рода
 - интегральное 406
- Шредингера 208
- эйконала 492
- эллиптического типа 286
- Уравнения
 - Максвелла 46
 - для электростатики 67
 - с магнитными токами 297
 - Максвелла–Лоренца 48
 - материальные 56
 - для киральной среды 470
 - телеграфные 169
- Уровень
 - электродинамический 169
- Условие
 - Гельдера 604
 - граничное 58
 - импедансное 509
 - Леонтовича–Щукина 508, 116

излучения 138
 Зоммерфельда 66
 излучения Зоммерфельда 397
 квазистационарности 74
 Липшица 604
 на ребре 65, 146
 ортогональности
 собственных волн 347
 собственных колебаний 356
 подобия 167
 поперечного резонанса 205
 самосогласования 205

Ф

Ферромагнетизм 447
 Формула
 Введенского 515
 квадратичная 522
 Грина
 векторная 400
 вторая. См. Формула: Грина:
 скалярная 394
 третья 396
 интерференционная 518
 отражательная. См. Формула:
 интерференционная
 Рэлея–Джинса 233, 280
 Сохоцкого–Племеля 605
 Стреттона–Чу 402
 интегральная 402
 Френеля 113
 Формулы
 Полдера 451
 Фронт
 волновой
 геометрический 493
 Функция
 Грина 366
 Функция
 Бесселя
 второго рода 125
 первого рода 125
 сферическая 135
 Грина 602

в цилиндрической системе координат 305
 для свободного пространства 304
 свободного пространства 644
 Матье 286
 ортогональная 580
 ослабления 508
 параболического цилиндра 287
 поверхностная 135
 потенциальная 343
 Риккати–Ханкеля 135
 сферическая
 бесселева 136
 Эрмита–Гаусса 208

Х

Характеристика
 дисперсионная 175
 направленности по мощности
 нормированная 312
 направленности по напряжённости
 нормированная 312
 Ход
 холостой 543

Ц

Циркуляция 21

Ч

Частица
 электромагнитная 467
 Частота
 критическая 171
 максимальная применяемая 481
 частота
 колебания 87
 критическая 171
 нормированная 205
 резонансная 232
 собственная 238
 Число
 характеристическое 592
 число
 волновое
 поперечное 173
 продольное 172

Э

Эйконал 491

Экран

дополнительный 387

Электростатика 67

Элемент

Гюйгенса 323

потока 19

Энергия

магнитная 64

магнитокристаллическая 448

электрическая 64

Эффект

Фарадея 444

Я

Явление

магнитострикции 448

продольного ферромагнитного

резонанса 459

Фарадея 459

Ядро

вырожденное 592

интегрального уравнения 591

Оглавление

Предисловие ко второму изданию	3
Предисловие к первому изданию	4
Введение	6
Список используемых сокращений	11
Список используемых обозначений	12
ГЛАВА 1. Понятие об электромагнитном поле.	
Уравнения Максвелла	15
1.1. Корпускулярный и континуальный подходы в описании материальных объектов. Физические поля	16
1.2. Характеристики физических полей. Понятие о потоках и циркуляциях	18
1.3. Уравнения непрерывности в модели сплошной среды. Законы сохранения массы, числа частиц и электрического заряда	23
1.4. Переход от «дальнодействия» к «близкодействию» в системе неподвижных зарядов. Понятие об электрическом поле	26
1.5. Электрическое поле движущихся зарядов. Инвариантность закона Гаусса	29
1.6. Релятивистская природа магнитного поля	32
1.6.1. Сила взаимодействия между покоящейся заряженной нитью и покоящимся точечным зарядом	32
1.6.2. Преобразование плотности заряда	33
1.6.3. Необходимость существования магнитного поля в релятивистской физике	33
1.6.4. Закон Био-Савара для прямого бесконечного тока	37
1.6.5. Формулы преобразования полей	38
1.6.6. Единое электромагнитное поле и его инвариантные характеристики	38
1.7. Уравнение непрерывности и ток смещения	40
1.7.1. Уравнение непрерывности	40
1.7.2. Линии токов проводимости	40
1.7.3. Закон Гаусса в дифференциальной форме	41
1.7.4. Ток смещения	41

1.8. Система уравнений Максвелла в вакууме	42
1.8.1. Обобщение закона полного тока	42
1.8.2. Дифференциальная форма закона электромагнитной индукции	44
1.8.3. Уравнение Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	45
1.8.4. Система уравнений Максвелла в вакууме	46
1.8.5. Полнота системы	46
1.9. Векторы электромагнитного поля в сплошной среде	47
1.9.1. Микроскопические уравнения Максвелла–Лоренца. Макроскопические (усреднённые) электромагнитные поля	47
1.9.2. Приближённые представления средней плотности связанных зарядов. Поляризованность вещества	49
1.9.3. Приближённые представления для средней плотности тока. Намагниченность вещества	51
1.10. Система уравнений Максвелла для сплошной среды	54
1.11. Электродинамическая классификация материальных сред	55
1.12. Электромагнитные поля на границе раздела материальных сред	58
1.12.1. Граничные условия для нормальных компонент векторов поля	59
1.12.2. Граничные условия для тангенциальных компонент векторов поля	60
1.13. Уравнение баланса мощностей в электромагнитном поле. Энергия электромагнитного поля	62
1.14. Внутренние и внешние задачи электродинамики	65
1.15. Стационарное поле, электростатика и магнитостатика	66
1.15.1. Электростатика	67
1.15.2. Стационарное магнитное поле	68
1.15.3. Магнитостатика	70

Глава 2. Общие сведения о волновых процессах 72

2.1. Волновые процессы	73
2.1.1. Общие определения	73
2.1.2. Волновые уравнения	74
2.1.3. Гармонические волны	75
2.1.4. Плоские, цилиндрические, сферические волны	76
2.2. Волновые уравнения для однородной изотропной среды	77
2.3. Электродинамические потенциалы и вектор Герца	78
2.3.1. Электродинамические потенциалы	78

2.3.2. Векторы Герца	84
2.4. Метод комплексных амплитуд	86
2.5. Плоские однородные электромагнитные волны в однородной изотропной среде	90
2.6. Плоские однородные электромагнитные волны в однородной изотропной среде с потерями	96
2.7. Поляризация электромагнитных волн	100
2.7.1. Линейная поляризация	100
2.7.2. Круговая и эллиптическая поляризация волн	101
2.7.3. Вертикальная и горизонтальная поляризация	103
2.8. Стоячая электромагнитная волна	104
2.9. Электромагнитные процессы на границе раздела сред	106
2.9.1. Законы отражения и преломления	106
2.9.2. Преломление волн при наличии поглощения в среде	109
2.9.3. Формулы Френеля и структура электромагнитного поля	110
2.9.4. Поляризация волны при отражении и преломлении. Угол Брюстера	114
2.10. Падение электромагнитной волны на плоскую проводящую среду	115
2.10.1. Приближенные граничные условия Щукина–Леонтовича	115
2.11*. Распространение сигналов (волновых пакетов) в диспергирующей среде	116
2.11.1*. Краевая задача для распространения волнового пакета	117
2.11.2*. Распространение волнового пакета	120
2.11.3*. Групповая скорость	121
2.12*. Цилиндрические волны	122
2.12.1*. Решение волнового уравнения в цилиндрических координатах	122
2.12.2*. Построение цилиндрических волн из плоских	127
2.12.3*. Интегральные представления цилиндрических функций	129
2.12.4*. Представления плоской волны через цилиндрические функции	131
2.12.5*. Преобразование Фурье–Бесселя	133
2.13*. Сферические волны	133

Глава 3. Основные принципы и теоремы электродинамики 137

3.1. Поведение волновых полей на бесконечности	138
3.2*. Условие на ребре для электромагнитного поля. Метод Мейкснера	142
3.3. Теоремы единственности	147

) Символом «» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

3.4. Понятие магнитного тока	150
3.4.1. Уравнения Максвелла с магнитными токами	150
3.4.2. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд поля. Граничные условия	152
3.5. Лемма Лоренца для изотропных и анизотропных сред	154
3.6*. Теоремы (соотношения) взаимности	156
3.7*. Теоремы эквивалентности. Магнитные токи	159
3.8. Принцип двойственности	162
3.9*. Метод эквивалентных электрических и магнитных токов поляризации	165
3.10*. Принцип электродинамического подобия для материальных сред	166

Глава 4. Электромагнитные волны в направляющих системах 168

4.1. Общие сведения о регулярных линиях передачи	169
4.1.1. Типы линий передачи	169
4.1.2. Классификация направляемых волн	171
4.2. Общий метод исследования собственных волн регулярных линий передачи	172
4.3. Основные характеристики волн в линии передачи	174
4.4. Особенности направляемых волн	175
4.4.1. Дисперсия направляемых волн	175
4.4.2. Условие распространения волны	175
4.4.3. Т-волны	176
4.4.4. Е- и Н-волны	178
4.5. Прямоугольный волновод	180
4.5.1. Е-волны	181
4.5.2. Н-волны	184
4.5.3. Поверхностные токи на стенках волновода	187
4.5.4. Электрическая прочность волновода	188
4.6. Круглый волновод	188
4.6.1. Е-волны	189
4.6.2. Н-волны	192
4.7. Коаксиальная линия передачи	195
4.7.1. Т-волна	195
4.7.2. Е- и Н-волны	196

4.8. Прямоугольные волноводы с плоскопараллельными слоями	199
4.9*. Плоские оптические волноводы	202
4.9.1*. Геометрическая оптика	202
4.9.2*. Электромагнитная теория плоских оптических волноводов	205
4.9.3*. Плоские диэлектрические волноводы с изменяющимся профилем показателя преломления	207
4.9.4*. Параболический профиль показателя преломления	208
4.9.5*. Типы плоских оптических волноводов	209
4.10*. Волоконные световоды	210
4.10.1*. Собственные волны круглого диэлектрического волновода	210
4.10.2*. Типы волоконных световодов	215
4.11*. Замедляющие системы	216
4.11.1*. Распространение электромагнитного поля вдоль импедансного цилиндра	216
4.11.2*. Периодические замедляющие системы	219
4.11.3*. Открытая гребенчатая направляющая структура	220
4.11.4*. Открытый спиральный волновод	224

Глава 5. Электромагнитные колебания в объёмных резонаторах 229

5.1. Основные характеристики объёмных резонаторов	230
5.1.1. Общие сведения об объёмных резонаторах	230
5.1.2. Основные характеристики резонаторов. Тип колебания, структура электромагнитного поля и собственная частота	232
5.1.3. Разрежение спектра собственных частот	233
5.2. Свободные незатухающие колебания в объёмных закрытых резонаторах СВЧ	234
5.3. Свободные колебания в объёмных закрытых резонаторах СВЧ при наличии потерь	237
5.3.1. Собственная (ненагруженная) добротность резонатора. Понятие «комплексной» частоты	237
5.3.2. Колебания при наличии потерь в стенках резонатора	238
5.3.3. Колебания при наличии потерь в среде-заполнителе	240
5.3.4. Колебания при наличии потерь на излучение	241
5.3.5. Электромагнитное поле в реальном резонаторе с потерями	242
5.4. Общая электродинамическая теория объёмных резонаторов	242
5.5. Собственные колебания прямоугольного волноводного резонатора	244
5.6. Собственные колебания круглого волноводного резонатора	250
5.7. Коаксиальный резонатор	254

5.7.1. Т-колебания коаксиального резонатора	254
5.7.2. Е-колебания коаксиального резонатора	257
5.7.3. Н-колебания коаксиального резонатора	258
5.8*. Диэлектрические резонаторы	260
5.8.1*. Классификация диэлектрических резонаторов СВЧ	260
5.8.2*. Диэлектрические резонаторы, работающие на низших типах колебаний (ДР НК)	261
5.8.3*. Диэлектрические резонаторы, работающие на азимутальных высших типах колебаний (ДР АК)	262
5.8.4*. Волноводно-диэлектрические резонаторы (ВДР)	265

Глава 6*. Квазиоптические линии и резонаторы 269

6.1*. Открытая линзовая линия (математический аппарат)	271
6.2*. Собственные волны линзовой линии	275
6.3*. Зеркальная линия	277
6.4*. Открытые резонаторы. Основные свойства	280
6.5*. Элементы теории открытых резонаторов с вогнутыми зеркалами	282
6.6*. Открытый резонатор с цилиндрическими зеркалами эллиптического профиля	284
6.7*. Открытые резонаторы с двугранными отражателями	288

Глава 7. Излучение электромагнитных волн 294

7.1. Источники излучения электромагнитных волн. Вибратор Герца	295
7.2. Расчёт электромагнитных полей, создаваемых заданными электрическими и магнитными токами в однородной изотропной среде	297
7.2.1. Уравнения Максвелла с магнитными токами	297
7.2.2. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд поля. Граничные условия	300
7.2.3. Уравнения Гельмгольца и электродинамические потенциалы	301
7.2.4. Решение векторного уравнения Гельмгольца. Функции Грина	302
7.3. Электрические и магнитные волны в безграничной среде	305
7.3.1. Электрические и магнитные волны в декартовой системе координат	305
7.3.2. Электрические и магнитные волны в цилиндрической системе координат	306
7.3.3. Электрические и магнитные волны в сферической системе координат	308

7.4. Расчёт электромагнитных полей излучающих систем в дальней, промежуточной и ближней областях	309
7.4.1. Дальняя зона	310
7.4.2. Промежуточная область (зона Френеля)	312
7.4.3. Ближняя зона	313
7.5. Излучение электромагнитных волн элементарными излучателями	313
7.5.1. Элементарный электрический вибратор (диполь Герца)	314
7.5.2. Элементарный магнитный излучатель	316
7.5.3. Элементарная рамка	318
7.5.4. Элементарный щелевой вибратор (ЭЩВ)	320
7.5.5. Элементарный излучатель Гюйгенса	322
7.6*. Применение принципа суперпозиции к расчёту электромагнитных полей излучающих систем	325
7.6.1*. Тонкий криволинейный проволочный вибратор	325
7.6.2*. Длинная криволинейная узкая щель в металлическом экране	326
7.6.3*. Апертурная антенна	326
7.6.4*. Система идентичных излучателей	327
7.6.5*. Система из дискретных излучателей, одинаково ориентированных в пространстве	327
7.7*. Антенна из двух одинаковых линейных излучателей	331
7.8*. Самосогласованная постановка задач расчёта полей излучающих систем. Диполь Герца	333
7.8.1*. Тонкопроволочное приближение электрического вибратора	333
7.8.2*. Самосогласованная физическая модель электрического вибратора	335
7.8.3*. Сингулярное интегральное представление электромагнитного поля	336
7.8.4*. Сингулярное интегральное уравнение	337
7.8.5*. Диполь Герца	339

Глава 8. Возбуждение волноводов и резонаторов..... 342

8.1. Ортогональность собственных функций краевых задач для экранированных волноводов	343
8.2. Ортогональность собственных волн в волноводах	344
8.3. Возбуждение волн в волноводах	350
8.4*. Ортогональность собственных колебаний объемных резонаторов	355
8.5*. Возбуждение колебаний в объемных экранированных резонаторах	357

8.6*. Возбуждение волн в рупорах	360
8.7*. О возбуждении колебаний, описываемых соленоидальными функциями	365
8.8*. О возбуждении открытых направляющих структур	366

Глава 9. Дифракция электромагнитных волн..... 368

9.1. Физическая оптика (приближение Гюйгенса–Кирхгофа)	369
9.1.1. Принцип Гюйгенса–Френеля в теории дифракции электромагнитных волн	370
9.1.2. Суперпозиция (интерференция) электромагнитных волн в дальней зоне от двух когерентных источников	371
9.1.3. Дифракция плоской волны на одной широкой одномерной щели	373
9.1.4. Дифракция плоской волны на двух параллельных широких одномерных щелях	377
9.1.5. Дифракция плоских волн на одномерных дифракционных решётках. Понятие о голографии	378
9.2. Дифракция Фраунгофера на отверстиях в непрозрачном экране	381
9.2.1. Метод Гюйгенса–Кирхгофа	381
9.2.2. Дифракция на отверстиях в экране	382
9.2.3. Применение метода Гюйгенса–Кирхгофа к расчёту поверхностных антенн	386
9.2.4. Принцип Бабинне	387
9.3. Дифракция Френеля на прямоугольном отверстии в экране	388
9.4*. Интегральная формула Кирхгофа–Гельмгольца	392
9.4.1*. Скалярная формула Грина	392
9.4.2*. Пример применения интегральной теоремы Кирхгофа–Гельмгольца. Условие излучения Зоммерфельда	396
9.5*. Интегральные представления электрического и магнитного полей	399
9.5.1*. Векторные формулы Грина	400
9.5.2*. Интегральные представления электрического и магнитного полей	401
9.5.3*. Интегральные формулы Стреттона–Чу	402
9.6*. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода в задачах дифракции, получаемые с помощью формул Грина	403
9.6.1*. Дифракция на идеально проводящем теле	404
9.6.2*. Дифракция на двумерном диэлектрическом цилиндре	406
9.7*. Интегральные уравнения первого рода в задачах дифракции	408
9.8. Метод разделения переменных в теории дифракции плоских электромагнитных волн на телах с координатными границами	411

9.8.1. Дифракция плоской волны на круговом идеально проводящем цилиндре	412
9.8.2. Дифракция плоской волны на круговом диэлектрическом цилиндре	416
9.8.3. Дифракция плоской волны на круговом идеально магнитном цилиндре	422

Глава 10. Электромагнитные волны в анизотропных средах 425

10.1. Общие закономерности анизотропных сред	426
10.1.1. Уравнения Максвелла	426
10.1.2. Уравнения для комплексных амплитуд	427
10.1.3. Общие свойства тензора комплексной диэлектрической проницаемости	428
10.1.4. Общие закономерности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах	429
10.1.5. Дисперсионные уравнения для анизотропной среды	431
10.1.6. Обобщённые уравнения Гельмгольца для гиротропных сред в декартовой системе координат	431
10.2. Распространение плоских гармонических волн в кристаллических средах	435
10.2.1. Общие закономерности	435
10.2.2. Классификация кристаллических сред	437
10.3*. Распространение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме	439
10.3.1*. Магнитоактивные среды	439
10.3.2*. Макроскопические модели магнитоактивной плазмы. Высокочастотное приближение	440
10.3.3*. Общий вид тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы	442
10.3.4*. Распространение плоских высокочастотных волн в магнитоактивной плазме	443
10.3.5*. Эффект Фарадея. Слабomagнитоактивная плазма	444
10.3.6*. Продольное распространение плоских волн в магнитоактивной плазме	445
10.3.7*. Поперечное распространение плоских волн в магнитоактивной плазме	446
10.4*. Макроскопические модели анизотропных магнитных сред	446
10.4.1*. Ферро- и ферромагнитные среды	447
10.4.2*. Тензор восприимчивости для изотропного ферромагнетика	448
10.4.3*. Вынужденные уравнения движения	450
10.4.4*. Высокочастотная магнитная восприимчивость	452

10.4.5*. Тензор магнитной проницаемости при наличии потерь в феррите	454
10.5. Нормальные волны в безграничной намагниченной ферритовой среде	456
10.5.1. Продольно намагниченная ферритовая среда	458
10.5.2. Поперечно намагниченная ферритовая среда	460
10.6*. Магнитостатические и спиновые волны в неограниченной изотропной среде	461
10.6.1*. Дисперсионные соотношения для магнитостатических волн	463
10.6.2*. Пределы применимости магнитостатического приближения	464
10.6.3*. Спиновые волны в неограниченной ферромагнетике	464
10.7*. Электромагнитные волны в киральных средах	467
10.7.1*. Понятие киральной среды	467
10.7.2*. Материальные уравнения для киральной среды	468
10.7.3*. Общие закономерности распространения электромагнитных волн в киральной среде	471
10.7.4*. Понятие биизотропной среды	473

Глава 11. Распространение радиоволн 475

11.1. Основные факторы, влияющие на распространение радиоволн	476
11.1.1. Радиоволны	476
11.1.2. Строение атмосферы	477
11.1.3. Механизмы распространения радиоволн	479
11.1.4. О возможностях постановки электродинамических задач	483
11.1.5. Доминантная область радиолинии	484
11.1.6. Расчёт поля с учётом рельефа местности	488
11.2. Зоны видимости радиолокационных станций в условиях свободного пространства	489
11.3. Волны в плавно неоднородной среде. Метод геометрической оптики	491
11.3.1. Уравнение эйконала	492
11.4. Распространение радиоволн в тропосфере и ионосфере	493
11.4.1. Рефракция радиоволн в тропосфере и ионосфере	493
11.4.2. Ионосферное распространение дециметровых волн. Критические частоты	500
11.5*. Распространение электромагнитных волн вдоль земной поверхности (задача А. Зоммерфельда)	503
11.6*. Структура поля вертикального диполя у поверхности Земли. Функция ослабления	508

11.6.1*. Функция ослабления	508
11.6.2*. Приближённые граничные условия Шукина-Леонтовича	508
11.6.3*. Структура поля радиоволны у поверхности Земли	509
11.7*. Поле низко расположенного излучателя над поверхностью Земли. Функция ослабления для вертикального диполя	512
11.8*. Поле высоко поднятого излучателя в освещённой зоне	516
11.8.1*. Интерференционные (отражательные) формулы	517
11.8.2*. Интерференционный множитель при малых углах скольжения	520
11.8.3*. Влияние интерференционного множителя на диаграмму направленности передающей антенны	520
11.8.4*. Поле горизонтального диполя	520
11.8.5*. Поле вертикального диполя	521
11.8.6*. Квадратичная формула Введенского	522

ГЛАВА 12*. Основы теории линейных устройств СВЧ и КВЧ для гармонических процессов 524

12.1*. Основные определения	525
12.1.1*. Многополюсник	525
12.1.2*. Матрицы многополюсников	526
12.1.3*. Матрица рассеяния	527
12.1.4*. Матрицы сопротивлений и проводимостей	528
12.2*. Основные теоремы цепей СВЧ и КВЧ диапазонов	528
12.2.1*. Теорема Умова-Пойнтинга	529
12.2.2*. Лемма Лоренца для многополюсников	530
12.2.3*. Теорема Фостера для недиссипативных многополюсников	532
12.2.4*. Первая эквивалентная схема	534
12.2.5*. Вторая эквивалентная схема	534
12.3*. Соотношения между характеристическими матрицами четырёх- полюсника (дескрипторами)	536
12.3.1*. Связь между матрицами Z , Y и S	536
12.3.2*. Зависимость матриц многополюсников от нумерации входов	537
12.3.3*. Сдвиг плоскостей отсчёта фаз на входах многополюсника	537
12.4*. Основные свойства матрицы рассеяния	538
12.4.1*. Физический смысл элементов матрицы рассеяния	538
12.4.2*. Симметричность матрицы рассеяния для взаимных устройств	538
12.4.3*. Унитарность матрицы рассеяния для недиссипативных многополюсников	539

12.4.4*. Коммутируемость матрицы рассеяния с матрицей симметрии для симметричных многополюсников	539
12.4.5*. Преимущества матрицы рассеяния	540
12.5*. Анализ четырёхполюсников каскадной структуры с помощью матриц передачи	540
12.6*. Метод симметричных восьмиполусников (метод синфазного и противофазного возбуждения)	543
12.6.1*. Режим холостого хода (синфазное возбуждение)	543
12.6.2*. Режим короткого замыкания (противофазное возбуждение)	544
12.6.3*. Общее решение	544
12.6.4*. Связь между матрицами	544
12.6.5*. Схема анализа	545
12.7*. Матрицы передачи и рассеяния для некоторых широко используемых типов четырёхполюсников	545
12.8*. Пример использования матрицы рассеяния	549
12.8.1*. Двойной волноводный тройник	549
12.8.2*. Свойства двойного волноводного тройника	549
12.8.3*. Пример	550
12.9*. Вычисление волновых сопротивлений линий передачи	551
12.9.1*. Волновое сопротивление линии с Т-волной	552
12.9.2*. Волновое сопротивление линии с Е-, Н- или гибридной волной	553
12.9.3*. «Энергетическое» определение волнового сопротивления	554
12.9.4*. Резюме	555

Глава 13*. Введение в автоматизированное проектирование устройств СВЧ и антенн..... 556

13.1*. Основные термины и определения	557
13.2*. Принцип декомпозиции в системах машинного проектирования	559
13.3*. Формализация устройств СВЧ и антенн	561
13.3.1*. Волновой канал	561
13.3.2*. Устройство СВЧ как «чёрный ящик»	562
13.3.3*. Y- и Z-дескрипторы и соотношения между ними	565
13.3.4*. Ключевые задачи электродинамики и парциальные режимы	566
13.4*. Расчёт дескрипторов сложных схем СВЧ и антенн	566
13.4.1*. Схемы, состоящие из четырёхполюсников	566
13.4.2*. Произвольное соединение четырёхполюсников	568
13.4.3*. Метод определения параметров схем с произвольными внутренними связями	570

13.5*. Принцип многоуровневой модели базового элемента в системах машинного проектирования	571
13.5.1*. Физические и математические модели базовых элементов	571
13.5.2*. Многоуровневость математических моделей базовых элементов	572
13.6*. Принцип параметрического синтеза в системах машинного проектирования	574
13.7*. Роль вычислительной электродинамики в системах машинного проектирования	575
13.7.1*. Способы представления электромагнитного поля в численных методах расчёта базовых элементов	576
13.7.2*. О значении сингулярных интегральных уравнений в математических моделях базовых элементов	577

Глава 14*. Электродинамические методы расчёта устройств СВЧ и антенн..... 579

14.1*. Проекционные методы решения электродинамических задач	580
14.1.1*. Ортогональные ряды	580
14.1.2*. Метод моментов (метод Галеркина)	582
14.1.3*. Метод Бубнова-Галеркина	584
14.1.4*. Метод Ритца	584
14.2*. Интегральные уравнения электродинамики, связанные с базисами Трефца (адмитансные и импедансные интегральные уравнения)	585
14.2.1*. Проекционное наложение граничных условий: процесс Трефца	585
14.2.2*. Процесс Трефца как метод частичных областей	587
14.2.3*. Адмитансные и импедансные интегральные уравнения	588
14.3*. Общие сведения об интегральных уравнениях	591
14.3.1*. Уравнения Фредгольма	591
14.3.2*. Интегральные уравнения второго рода с вырожденным ядром	592
14.3.3*. Решение уравнений второго рода с помощью резольвенты	594
14.3.4*. Метод определителей Фредгольма	595
14.4*. Приближенные методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода	596
14.4.1*. Замена интегрального уравнения конечной системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	596
14.4.2*. Метод замены произвольного ядра вырожденным	597
14.4.3*. Метод моментов	599
14.5*. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Некорректные задачи в электродинамике	600

14.5.1*. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода	600
14.5.2*. Определение	600
14.5.3*. Методы регуляризации	601
14.5.4*. Относительная сходимость. Проблема анализа	602
14.6*. Сингулярные интегральные уравнения	604
14.6.1*. Аналитические функции. Интегралы типа Коши. Формулы Сохоцкого-Племеля	604
14.6.2*. Краевая задача Римана для многосвязной области. Сведение к сингулярным уравнениям	606
14.6.3*. Краевая задача Гильберта. Интегральное уравнение задачи. Связь краевых задач Гильберта и Римана	607
14.6.4*. Сингулярные интегральные уравнения. Регуляризация сингулярных уравнений	609
14.6.5*. Регуляризация решением характеристического уравнения (способ Карлемана-Векуа)	611
14.7*. Метод частичных областей расчета продольно-однородных линий передачи	612
14.7.1*. Г-образный волновод с продольно-однородным заполнением	612
14.7.2*. Сингулярное интегральное уравнение	614
14.8*. Вариационный метод расчета постоянных распространения сложных частично заполненных волноводов	616
14.8.1*. Вариационные принципы для регулярных волноводов	616
14.8.2*. Прямоугольный волновод с диэлектрическим стержнем	618
14.9*. Волноводно-щелевая линия передачи. Метод сингулярных интегральных уравнений	620
14.9.1*. Постановка задачи	620
14.9.2*. Тензор входного адмитанса области для m-Фурье-гармоники	622
14.9.3*. Адмитансное интегральное уравнение	625
14.9.4*. Сингулярные интегральные уравнения	626
14.10*. Дифракция основной волны прямоугольного волновода на индуктивной диафрагме, расположенной на стыке двух диэлектриков. Метод ортогонализирующей подстановки	632
14.10.1*. Постановка задачи	632
14.10.2*. Коэффициенты отражения и прохождения	633
14.10.3*. Интегральное уравнение	634
14.10.4*. Реактивная проводимость	635
14.10.6*. Метод ортогонализирующей подстановки	636
14.10.7*. Квазистатика	637
14.11*. Дифракция основной волны прямоугольного волновода на индуктивной полоске, расположенной на стыке двух диэлектриков. Метод сингулярного интегрального уравнения	638

14.11.1*. Схема анализа	638
14.11.2*. Сингулярное интегральное уравнение	640
14.11.3*. Квазистатическое решение	640
14.11.4*. Реактивное сопротивление	641
14.12*. Электродинамическая теория трубчатого электрического вибратора. Уравнение Поклингтона.	642
14.13*. Вывод сингулярного интегрального уравнения для трубчатого электрического вибратора	645
14.14*. Электродинамический анализ электромагнитного поля в проме- жуточной и ближней зонах полуволнового электрического вибратора	651
14.15*. Несамосопряженные краевые задачи электродинамики	654
14.15.1*. Самосопряженные и несамосопряженные электродинамические операторы	654
14.15.2*. Классификация краевых электродинамических задач	657
14.15.3*. Определение типов электродинамических операторов, описывающих поперечно-неоднородные направляющие структуры	659
14.15.4*. Условия существования в направляющих структурах КВ	668
14.15.5*. Свойства собственных комплексных волн	669
14.15.6*. Комплексные волны неоднородных экранированных направляющих структур	671
14.15.7*. Комплексные волны круглого открытого диэлектрического волновода	678
Приложения	682
П.1. Операции векторного анализа	683
П.2. Интегральные формулы векторного анализа	684
П.3. Дифференциальные формулы векторного анализа	685
П.4*. Четырёхмерные векторы	685
П.5. Дельта-функция Дирака	686
П.6. Цилиндрические функции	687
П.7. Решение двумерного уравнения Гельмгольца методом разделения переменных для координатных граничных задач	690
П.7.1. Метод в декартовой системе координат	690
П.7.2. Метод в цилиндрической системе координат	692
П.7.3. Краевые задачи для круговой области	692
П.7.4. Краевые задачи для части секториальной области	693
П.7.5. Краевая задача Неймана для части секториальной области	694
Список литературы	696

Основная литература	696
Литература к главе 1	698
Литература к главе 2	699
Литература к главе 3	699
Литература к главе 4	700
Литература к главе 5	701
Литература к главе 6	702
Литература к главе 7	702
Литература к главе 8	704
Литература к главе 9	704
Литература к главе 10	705
Литература к главе 11	706
Литература к главе 12	708
Литература к главе 13	709
Литература к главе 14	709
Справочники и математическая литература	716
 Предметный указатель	 718

Учебное пособие

Авторы:

Вячеслав Александрович Неганов

Олег Владимирович Осипов

Сергей Борисович Раевский

Геннадий Петрович Яровой

**Электродинамика и распространение
радиоволн**

В авторской редакции.

Компьютерный набор и верстка – *О. В. Осипов*.

Дизайн обложки – *О. В. Осипов*.

Формат 70х100/16. Бумага офсетная.

Гарнитура Journal. Печать офсетная. Печ. л. 46,5.

Тираж 1000 экз. Зак. № 1962.

Издательство «Радиотехника».

107031, Москва, К-31, Кузнецкий мост, д. 20/6.

Тел./факс: (495)621-48-37; 625-78-72, 625-92-41.

E-mail: info@radiotec.ru

www.radiotec.ru

Отпечатано с оригинал-макета в типографии ОАО

«Издательство «Самарский Дом печати»

443080, г. Самара, пр. К. Маркса, 201.