

Тюкин И.Ю., Терехов В.А.

АДАПТАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Санкт-Петербург — 2006

ББК

Тюкин Иван Юрьевич,
Терехов Валерий Александрович

Адаптация в нелинейных динамических системах

ISBN

Излагается оригинальный подход к проблеме адаптации в нелинейных динамических системах. Адаптивность как свойство приспособления рассматривается применительно к задачам обработки информации в нелинейных динамических системах, математическая модель которых известна не полностью. В первую очередь теория и методы адаптации ориентированы на задачи управления в открытых динамических системах. Но приводимые в книге методы и алгоритмы адаптации успешно могут быть распространены и на решение задач обработки эмпирической информации в разных областях науки и техники.

Книга базируется на использовании аппарата функционального анализа, нелинейной динамики, теории аппроксимации и синергетики. Приведенные примеры решенных на основе введенной теории, методов и алгоритмов адаптации задач иллюстрируют междисциплинарный характер проблемы адаптации в динамических системах различной природы и назначения. Поэтому книга рассчитана на довольно широкий круг читателей – специалистов по кибернетике, прикладной математике, биофизиков и других отраслей науки и техники.

Книга может быть использована как учебное пособие для студентов старших курсов технических университетов и аспирантов, обучающихся по специальностям в области управления и информатики.

Оглавление

Основные обозначения и сокращения	6
Введение	8
1. Проблемы адаптации в управляемых нелинейных детерминированных системах	13
1.1 Логические основы проблемы адаптивного управления	13
1.1.1 Поисковый принцип адаптации и экстремальные системы . . .	13
1.1.2 Бесписковый принцип адаптации	15
1.2 Математические постановки задачи адаптивного управления	22
1.3 Методы синтеза адаптивных систем управления нелинейными динамическими объектами	27
1.3.1 Системы с линейной и выпуклой параметризацией	28
1.3.2 Системы с невыпуклой параметризацией	32
1.3.3 Метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов и принцип инвариантного погружения в задачах адаптивного управления	34
1.4 Проблемы адаптивного управления нелинейными объектами	39
1.5 Новый подход к решению проблемы адаптации в нелинейных системах	47
2. Функциональный анализ динамических систем	52
2.1 Операторное описание динамических систем	54
2.2 Свойства операторов устойчивых систем	62
2.3 Постановка задачи функционального анализа и регулирования неравновесных, открытых и неустойчивых систем	69
2.4 Анализ и синтез систем с локально ограниченными операторами . . .	76
2.4.1 Анализ реализуемости соединений систем с локально ограниченными операторами	76
2.4.2 Задача функционального синтеза адаптивного регулятора. Принцип разделения.	85

2.5	Анализ асимптотического поведения систем с локально ограниченными операторами	90
2.6	Анализ асимптотического поведения неустойчивых систем	93
2.6.1	Теорема о малом контурном усилении для неравномерной сходимости	99
2.6.2	Характеризация притягивающего множества по Милнору . . .	103
2.6.3	Системы с сепарабельной динамикой	106
3.	Задачи адаптивного управления для классов нелинейных объектов	112
3.1	Постановка задачи адаптивного управления в условиях функциональной неопределенности и нелинейной параметризации . .	113
3.2	Синтез прямого адаптивного управления нелинейными динамическими объектами	127
3.2.1	Метод виртуального алгоритма адаптации. Достаточные условия реализуемости	128
3.2.2	Задача вложения. Достаточные условия разрешимости	135
3.2.3	Задача прямого адаптивного управления классом объектов с моделями в нижнетреугольной форме	140
3.3	Задача адаптивного регулирования к инвариантным множествам . . .	154
3.3.1	Объекты с параметрической неопределенностью и нелинейной параметризацией	155
3.3.2	Объекты с сигнальными возмущениями и линейной параметризацией	156
3.4	Задача адаптивного управления взаимосвязанными нелинейными системами	160
3.4.1	Системы с немоделируемой динамикой	160
3.4.2	Функциональная нормализация немоделируемых возмущений	163
3.4.3	Децентрализованное адаптивное управление	165
3.5	Задача параметрической идентификации объектов с нелинейно параметризованными моделями одного класса	172
3.6	Задача недоминирующего управления объектами с нелинейной параметризацией общего вида	178
4.	Искусственные нейронные сети в задаче адаптивного управления	190
4.1	Задача адаптивного управления объектами с неопределенной физической моделью возмущений	191

4.2	Задача ко-монотонной нейросетевой аппроксимации функций	196
4.3	Задача синтеза алгоритмов настройки параметров	199
4.3.1	Формальная постановка задачи	201
4.3.2	Аппроксимация функций с помощью логистических уравнений	202
4.3.3	Синтез алгоритмов оценки параметров систем логистических уравнений	203
5.	Решения прикладных задач адаптивного управления и идентификации нелинейных динамических систем	220
5.1	Задача управления динамикой автомобиля в режиме разгона-торможения в условиях неопределенности качества дорожного покрытия	221
5.1.1	Система прямого адаптивного управления	222
5.1.2	Результаты моделирования	226
5.2	Задача идентификации моделей электрической активности клеток нервной системы по измерениям мембранного потенциала	231
5.2.1	Формальная постановка задачи	232
5.2.2	Анализ модели	234
5.2.3	Синтез алгоритма идентификации	237
5.3	Задача адаптивного сравнения шаблонов в системах обработки визуальной информации	241
5.3.1	Постановка задачи	241
5.3.2	Условия синхронизации осцилляторов-детекторов совпадений	246
5.3.3	Синтез подсистемы адаптивной фильтрации оптических возмущений	248
5.3.4	Результаты экспериментальной апробации системы	257
6.	Послесловие	263
7.	Приложение 1. Дополнение к методам нелинейного адаптивного управления	265
7.1	Адаптивный обход интегратора	265
7.2	Адаптивный обход интегратора с функциями настройки	271
7.3	Минимаксный алгоритм адаптивного управления для систем с нелинейной параметризацией	279

8. Приложение 2	283
8.1 Доказательство Теоремы 2.1	283
8.2 Доказательство Теоремы 2.3	286
8.3 Доказательство Теоремы 2.4	286
8.4 Доказательство Теоремы 2.5	287
8.5 Доказательство Теоремы 2.6	289
8.6 Доказательство Теоремы 2.7	290
8.7 Доказательство Леммы 2.2	293
8.8 Доказательство Леммы 2.3	294
8.9 Доказательство Следствия 2.2	294
8.10 Доказательство Следствия 2.3	295
9. Приложение 3	298
9.1 Доказательство Теоремы 3.1	298
9.2 Доказательство Следствия 3.1	301
9.3 Доказательство Теоремы 3.2	301
9.4 Доказательство Теоремы 3.3	302
9.5 Доказательство Леммы 3.1	303
9.6 Доказательство Теоремы 3.4	308
9.7 Доказательство Следствия 3.2	311
9.8 Доказательство Теоремы 3.5	312
9.9 Доказательство Теоремы 3.6	317
9.10 Доказательство Теоремы 3.7	317
9.11 Доказательство Теоремы 3.8	320
9.12 Доказательство Теоремы 3.9	323
9.13 Доказательство Теоремы 3.10	324
9.14 Доказательство Теоремы 3.11	327
9.15 Доказательство Следствия 3.3	333
10. Приложение 4	336
10.1 Доказательство Теоремы 4.1	336
10.2 Доказательство Теоремы 4.2	336
10.3 Доказательство Леммы 4.1	339
10.4 Доказательство Теоремы 4.3	340
Список источников	343
Предметный указатель	375

Основные термины, обозначения и их определения

В книге применяются следующие термины и их определения.

В соответствии с общепринятыми конвенциями, символом \mathbb{R} будем обозначать поле вещественных чисел, а $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$; символом \mathbb{N} – множество натуральных чисел; символом \mathbb{R}^n – линейное пространство $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ над полем вещественных чисел с размерностью $\dim\{\mathcal{L}(\mathbb{R})\} = n$; эвклидову норму элемента $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ обозначим как $\|\mathbf{x}\|$; C^k – пространство функций, дифференцируемых по меньшей мере k раз.

Символ \mathcal{K} обозначает класс всех монотонно возрастающих функций $\kappa : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ таких, что $\kappa(0) = 0$, символом \mathcal{K}_∞ обозначим подкласс функций $\kappa \in \mathcal{K}$, дополнительно удовлетворяющих следующему условию: $\lim_{s \rightarrow \infty} \kappa(s) = \infty$. Функции $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ограничение которых на \mathbb{R}_+ принадлежит классу \mathcal{K}_∞ , будем обозначать символом $\mathcal{K}_{\infty,e}$. Наконец, будем говорить, что $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ из \mathcal{KL} , если и только если для всех $s \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \beta(\cdot, s) \in \mathcal{K}$, а $\beta(s, \cdot)$ монотонно убывает до нуля.

Символом $L_p^n[t_0, T]$, где $T > t_0$, $p \geq 1$, обозначим пространство всех функций $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что

$$\|\mathbf{f}\|_{p,[t_0,T]} = \left(\int_{t_0}^T \|\mathbf{f}(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p} < \infty.$$

Символ $\|\mathbf{f}\|_{p,[t_0,T]}$ обозначает $L_p^n[t_0, T]$ – норму вектор-функции $\mathbf{f}(t)$. Символом $L_\infty^n[t_0, T]$ обозначим пространство всех функций $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что

$$\|\mathbf{f}\|_{\infty,[t_0,T]} = \text{ess sup}\{\|\mathbf{f}(t)\|, t \in [t_0, T]\} < \infty,$$

где $\|\mathbf{f}\|_{\infty,[t_0,T]}$ обозначает $L_\infty^n[t_0, T]$ – норму функции $\mathbf{f}(t)$.

Пусть $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ – некоторая функция, символом $L_{\chi,p}^n[t_0, T]$ будем обозначать пространство всех функций $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что

$$\left(\int_{t_0}^T \chi(\tau) \|\mathbf{f}(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p} < \infty.$$

Для некоторого множества \mathcal{A} в \mathbb{R}^n и нормы $\|\cdot\|$ (например, стандартной эвклидовой нормы в \mathbb{R}^n) символом $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ будем обозначать следующую индуцированную норму:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = \inf_{\mathbf{q} \in \mathcal{A}} \{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|\}.$$

Пусть $\Delta \in \mathbb{R}_+$, тогда символом $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}_\Delta}$ обозначим:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}_\Delta} = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} - \Delta, & \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} > \Delta, \\ 0, & \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \leq \Delta. \end{cases}$$

Аналогично нормам $\|\cdot\|_{\infty, [t_0, t]}$, символом $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_{\infty, [t_0, t]}}$ обозначим:

$$\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}_{\infty, [t_0, t]}} = \sup_{\tau \in [t_0, t]} \|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}}.$$

Пусть задана некоторая функция $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Будем говорить, что функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ локально ограничена, если для любого $\|\mathbf{x}\| < \delta$ существует константа $D(\delta) > 0$ такая, что справедлива оценка: $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq D(\delta)$.

Рассмотрим квадратную матрицу Γ размерностью $n \times n$. Тогда записью $\Gamma > 0$ будем обозначать положительно определенную симметрическую матрицу, а символом Γ^{-1} обозначим матрицу, обратную к Γ . Символами $\lambda_{\min}(\Gamma)$, $\lambda_{\max}(\Gamma)$ обозначим минимальные и максимальные собственные числа матрицы Γ соответственно. Символом I будем обозначать единичную матрицу соответствующей размерности. Записью $\|\mathbf{x}\|_{\Gamma}^2$ обозначим квадратичную форму $\mathbf{x}^T \Gamma \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; а $|\cdot|$ – модуль скалярной величины.

Решение системы дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$ для $t \geq t_0$ обозначим как $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u})$ или $\mathbf{x}(t)$, если значения \mathbf{x}_0 , $\boldsymbol{\theta}$ и функция $\mathbf{u}(t)$ явно определяются контекстом.

Пусть $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ – функция состояния \mathbf{x} , параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ и времени t . Пусть, в дополнение, \mathbf{x} и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ являются функциями времени t . Тогда, если аргументы функции \mathbf{u} могут быть явно определены из контекста, будем использовать сокращенную запись $\mathbf{u}(t)$ вместо исходной $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t)$.

Для удобства и компактности записи при вычислении частных производных функционалов по векторному полю будем использовать следующее расширенное определение производной Ли по векторному полю. Пусть вектор состояния $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ может быть записан в виде разбиения $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1q})^T$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_2 = (x_{21}, \dots, x_{2p})^T$, $q + p = n$, и операция \oplus обозначает прямую сумму двух векторов. Введем в рассмотрение функцию $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такую, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \oplus \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$, где $\mathbf{f}_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\mathbf{f}_1(\cdot) = (f_{11}(\cdot), \dots, f_{1q}(\cdot))^T$, $\mathbf{f}_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{f}_2(\cdot) = (f_{21}(\cdot), \dots, f_{2p}(\cdot))^T$. Тогда символом $L_{\mathbf{f}_i(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x}, t)$, $i \in \{1, 2\}$ обозначим производную Ли функции $\psi(\mathbf{x}, t)$ по векторному полю $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$:

$$L_{\mathbf{f}_i(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_j^{\dim \mathbf{x}_i} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_{ij}} f_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}).$$

Иные термины и обозначения определяются в соответствующем контексте книги.

Введение

С момента публикации первых работ по адаптивным системам в первой половине 20-го века до настоящего дня приспособляющиеся системы или системы с адаптацией эволюционировали от сравнительно простых экстремальных систем управления линейными объектами до адаптивных регуляторов линейных объектов, порядок математической модели которых существенно превосходит порядок математической модели объекта. В подавляющем большинстве практических приложений теория адаптивных систем управления и идентификации, как совокупность общесистемных положений и методов, используется для решения стандартных задач регулирования хорошо изученных и исследованных, зачастую устойчивых по Ляпунову объектов. Потенциальная роль этих теорий уже на этапе их возникновения, представлялась, как это следует из анализа работ ученых в конце 50-х – начала 60-х годов прошлого века, значительно шире и глубже. Однако эти предвидения не были поняты или на это не было обращено внимание большинства ученых, активно занятых задачами адаптивного управления того времени.

В естественных науках, таких, как физика, химия или биология, понимание механизмов и самих принципов адаптации, “приспособления” на сегодняшний день является одной из наиболее актуальных проблем [301]. Именно в этих областях знаний применение методов адаптации и управления наиболее перспективно для анализа явлений, не поддающихся анализу на языке “родной” науки. Хорошим примером может служить применение кибернетических методов в физике [85]. Не менее актуальным остается адаптивный подход к проектированию систем управления функционально сложными техническими объектами и технологическими процессами в условиях неконтролируемых изменений собственных свойств и свойств внешней среды. В то же время применение “классических” методов оказывается в значительной мере затруднительным или малоэффективным [67, 68, 69]. Причиной тому является то, что условия применимости классических методов в рамках существующей теории требуют точного знания уравнений математической модели объекта, линейности по неизвестным параметрам, устойчивости по Ляпунову целевых движений и, более того, известности функции Ляпунова (зачастую со знакоопределенной производной по времени) для целевых движений [292, 254, 219, 232, 157, 187, 38]. Каждое из этих требований в отдельности ограничивает роль существующей теории адаптивных си-

стем в приложении к актуальным проблемам естественных наук; в совокупности они представляют собой "стандартный" подход, который оказывается ограниченным даже для решения типовых задач управления техническими объектами.

Основное внимание авторов сосредоточено на теории и методах адаптивного управления нелинейными динамическими объектами:

- с потенциально неустойчивой по Ляпунову и неравновесной целевой динамикой;
- при условии потенциальной невозможности задания целевых множеств в явном виде;
- с использованием минимальной, *качественной* информации об объекте, а также в условиях недоступности информации о точных математических моделях объекта;
- с использованием моделей неопределенностей, максимально адекватных физической сущности процессов и явлений в самом объекте;
- с возможностью реализации механизмов управления в типовых и однородных структурах типа искусственных нейронных сетей прямого действия.

Необходимыми компонентами такой теории адаптивного управления, как это следует из логики ее развития, являются: 1) *аппарат анализа* свойств нелинейных систем, который не требует точного знания математических моделей исследуемых объектов и не зависит от того, устойчив ли объект по Ляпунову; 2) *принципы и методы адаптации* к неконтролируемым, неизмеряемым возмущениям и неопределенностям среды и модели объекта, использующие лишь их общесистемные, фундаментальные свойства; 3) *поиск, анализ и синтез* структур реализации алгоритмов нелинейного управления, адаптации и идентификации.

В рамках развиваемой в книге теории адаптации обсуждаются следующие проблемные задачи¹.

1) Разработка математического аппарата, позволяющего анализировать реализуемость, полноту и ограниченность состояния объектов и их соединений на основе моделей в виде отображений "вход-выход" и "вход-состояние" в предположении, что эти отображения известны лишь с точностью до мажорирующих. Результатом использования этого аппарата анализа являются формулировки желаемых *принципов макроорганизации и целевых ограничений*, реализация которых не требует *a priori* устойчивости по Ляпунову целевых движений, знания целевых множеств в явном виде, а также полной определенности математической модели управляемого объекта.

2) Разработка метода реализации полученных принципов и целевых ограничений для классов моделей нелинейных динамических объектов в виде частично известных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Результатом применения

¹Часть результатов в разд. 2 – 5, вошедших в книгу, получена И. Ю. Тюкиным во время его работы в RIKEN в лаборатории Perceptual Dynamics, Computational Neuroscience Group (Japan).

этого метода при решении задач синтеза систем адаптивного управления нелинейными динамическими объектами является комплекс методов решений *типовых задач* адаптивного управления. Для возможности использования в процессе управления адекватных, нелинейных физических моделей, методы должны допускать нелинейную параметризацию моделей неопределенности в широком и практически значимом классе функций.

3) Формализованная мотивация синтеза типовых структур адаптивных систем управления на основе искусственных нейронных сетей, включая решение задачи выбора подходящей архитектуры сети и разработку методов настройки параметров полученного класса регуляторов.

Вследствие ограничения круга решаемых задач, объектами исследования являются нелинейные динамические системы и их соединения, потенциально представимые в виде локально ограниченных отображений, систем дифференциальных уравнений и системами аппроксимирующих нелинейных функций с настраиваемым базисом.

Предметом обсуждаемых в книге проблем адаптации служат свойства реализуемости, полноты, ограниченности состояния адаптивных систем управления, условия достижения целевых множеств и их окрестностей, законы адаптивного управления, процедуры оценки неизвестных параметров нелинейных отображений, качество переходных процессов при условии неполноты информации об объекте и в условиях параметрических, сигнальных и функциональных возмущений.

Изложение современного состояния теории адаптивного управления, ее методов и алгоритмов ограничено аналитическим обзором, необходимо включенным в книгу для мотивации и аргументации новых положений и идей, которые составляют ее основное содержание. Для знакомства с традиционными подходами к решению проблемы адаптации в управляемых динамических системах можно рекомендовать достаточно большое число обстоятельных книг и публикаций в периодической печати. Наименования таких работ приводятся в библиографическом списке. Тем не менее, относительно новые методы адаптивного управления нелинейными объектами, появившиеся в последние десятилетия прошлого века, главным образом, в англоязычных изданиях, авторы сочли целесообразным включить в книгу в виде отдельного приложения.

Содержание книги составлено следующим образом.

В первом разделе анализируются известные подходы к решению задач адаптивного управления нелинейными динамическими объектами и формулируются основные проблемы, возникающие в стандартных постановках [82, 84, 254, 219] и производится постановка задачи работы. К числу проблем существующих методов в работе относятся: неоднозначность самого понятия адаптивной системы, качества управления,

ограниченность классов целей управления² и моделей неопределенности, требования точной информации о модели объекта (т. е. знание дифференциальных уравнений) и отсутствие типовых средств реализации в общем случае нелинейных законов управления.

Во втором разделе вводится описание нелинейных систем с использованием лишь качественной информации и свойствах “вход-состояние” и “вход-выход”, вводится математический аппарат анализа соединений динамических систем с локально ограниченными по состоянию и неограниченными по свободной переменной (времени) операторами. Поставлена и решена задача функционального синтеза адаптивных систем, обосновано использование известного *принцип разделения*, предоставляющего возможность независимого решения задач функционального синтеза обратной связи, алгоритма адаптации и наблюдателя. При этом желаемые фактические взаимодействия между этими подсистемами формулируются в виде принадлежности соответствующих выходов к заданным функциональным пространствам.

В третьем разделе книги на основе результатов предыдущего раздела приводится новая постановка задачи адаптивного управления нелинейными объектами в условиях неопределенности математической модели объекта, возможной неустойчивости по Ляпунову целевой динамики, нелинейной параметризации и частичной неопределенности целевых функционалов. Общая задача адаптивного управления ставится как *задача регулирования влияния неопределенности в заданное функциональное пространство*, что позволяет избежать использования аппарата функций Ляпунова и, как следствие, потенциальных ограничений этого метода при решении задач синтеза. В рамках общей постановки задачи приводятся частные постановки задач адаптивного регулирования к инвариантным множествам, управления соединением взаимосвязанных систем и идентификации. Для решения совокупности этих задач в работе вводится и обосновывается метод т.н. *виртуального алгоритма адаптации*, и приводятся условия применимости этого метода для классов моделей объектов в рамках поставленных задач.

В четвертом разделе поставлена задача построения адаптивных регуляторов с применением нейронных сетей в качестве настраиваемых моделей неопределенности. Вводится и обосновывается архитектура таких сетей, а также приводятся оценки скоростей сходимости аппроксимационного ряда в выбранном базисе функций. Для настройки функционального и в общем случае нелинейно параметризованного базиса

²К числу наиболее существенных ограничений стоит отнести ограничения на устойчивость по Ляпунову целевых движений в системе и необходимость точной спецификации целевого множества. Последнее требование в условиях неопределенности модели приводит либо к необходимости предварительной идентификации объекта, что противоречит самой сути большинства методов прямого адаптивного управления, либо к искусственному, силовому введению в систему движений, не свойственных самому объекту

вводится метод, основанный на представлении базисных функций линейной комбинацией решений нелинейных дифференциальных уравнений с линейными параметрами. Приводятся условия сходимости параметров базиса в окрестность оптимальных значений для заданной аппроксимируемой функции.

В пятом разделе приводятся решения ряда прикладных задач управления, идентификации и обработки экспериментальной информации в биофизике, решения которых в рамках стандартных постановок либо не известны, либо затруднительны в силу ограничений самой задачи. В частности, рассмотрены и решены задачи оптимального экстренного торможения в условиях неопределенности свойств дорожного покрытия, задача идентификации динамики класса клеток (биологических нейронов) головного мозга животных, задача синтез адаптивной системы обработки визуальной информации, включая проблемы распознавания линейно несепарабельных и перекрывающихся объектов.

В приложении 1 в качестве справочного материала кратко изложены основы метода адаптивного обхода интегратора, необходимые для понимания примера расчета адаптивного закона управления с применением этого метода в разд. 3, параграф 3.2., а также сведения о минимаксном подходе к адаптивному управлению в нелинейных системах. Включение этого материала в определенной мере восполняет пробел в дефиците сведений в отечественной научной литературе о зарубежных работах по адаптивному управлению нелинейными объектами, а также полезен для сравнительного анализа возможностей этих методов с другими, в том числе и разрабатываемыми авторами книги.

В приложениях 2–4 приводятся доказательства лемм и теорем, содержащихся в книге.

1. Проблемы адаптации в управляемых нелинейных детерминированных системах

В разделе рассматривается класс задач управления нелинейными динамическими объектами в условиях неопределенности в контексте существующих математических постановок проблемы адаптации. Приводится ретроспективный анализ развития теории адаптивных систем управления. На основе устанавливаемых недостатков общепринятых подходов к решению проблемы адаптивного управления делается вывод о необходимости поиска новых решений, адекватных уровню сложности самой исходной задачи.

1.1. Логические основы проблемы адаптивного управления

Проблема адаптивного управления как систематическое исследование поведения и построения динамических систем, способных приспосабливаться к изменениям условий функционирования, имеет более, чем полувековую историю. Исторически процессам формализации частных проблем адаптации предшествовал период создания общесистемных взглядов как на саму проблему, так и на способы ее решения. Поэтому представляется естественным хотя бы кратко остановиться на анализе хронологически первых логических постановках проблемы адаптивного управления.

Первые идеи и конкретные способы адаптации проявились в конце 30-х годов прошлого столетия в задаче автоматической оптимизации производительности промышленных установок и в задаче увеличения мощности двигателей внутреннего сгорания. Основное содержание задачи автоматической оптимизации состояло в поиске и удержании системы на экстремуме ее статической характеристики.

1.1.1. Поисковый принцип адаптации и экстремальные системы

Автоматический поиск экстремума статической характеристики объекта как способ автоматического регулирования по максимуму или минимуму показателя качества технологического процесса был предложен в СССР Ю. С. Хлебцевичем в 1940 г. [87] и несколько позже В. В. Казакевичем в 1943 г. [21]. Проблемы теории экстремальных регуляторов привлекли к себе внимание многих ученых в СССР и за рубежом в 50-е годы [12, 315, 19, 22, 104, 80, 251, 264, 274] прошлого столетия. Первое систематическое изложение прикладной теории экстремального регулирования

как принципа автоматической оптимизации систем содержится в опубликованной в США в 1951 г. под редакцией Ч. С. Дрейпера и И. Т. Ли книге “Принципы автоматической оптимизации”, где были представлены результаты исследований коллектива специалистов лаборатории авиационной автоматики MIT. Обширный список работ по адаптивным системам, опубликованных к 1958 году, содержится в обзорной статье [104]. Большинство ранних работ по экстремальным системам рассматривают модели объектов в виде статических отображений, позже некоторые авторы расширяют класс допустимых систем до моделей Винера и Гаммерштейна [339]. Анализ устойчивости экстремальных систем управления детерминированными нелинейными динамическими объектами в замкнутом контуре оставался открытой проблемой более сорока лет. Теоретически обоснованные схемы применения экстремальных регуляторов для *динамических нелинейных* систем широкого класса впервые приводятся лишь в 2000 г. в работе [222], где в качестве основного аппарата анализа используются методы усреднения. В качестве возбуждающего сигнала, аналога пробных воздействий, используется гармонический сигнал малой амплитуды. В русскоязычной литературе современным примером использования пробных воздействий в структуре адаптивного регулятора является т.н. “самоорганизующийся оптимальный регулятор с экстраполяцией” (СОРЭ) [31], обеспечивающий как параметрическую, так и структурную адаптивность системы. В нем пробным воздействием служит циклическое задание элементов ковариационной матрицы фильтра Калмана-Бьюси.

Потенциальные приложения экстремальных адаптивных регуляторов приводятся в обзоре [304] и монографии [107]. Эти приложения включают процессы управления двигателями внутреннего сгорания, паровыми котлами, водяными турбинами, ветряными мельницами, ячейками солнечных батарей. К потенциальным приложениям следует отнести и системы управления антиблокировкой колес в режиме торможения, предложенные в работе [92], системы управления биореактором [172] и процессом “мягкого” затвора электромеханических клапанов [275].

Однако несмотря на интенсивные исследования методов синтеза экстремальных систем с непосредственной автоматической оптимизацией режимов работы на действующем объекте, экстремальные регуляторы не получили сколь-нибудь широкого распространения. Можно привести несколько тому причин. Во-первых, это недопустимость пробных движений на действующий промышленный объект, нарушающих нормальный режим его работы и требующий дополнительных затрат энергии на реализацию пробных поисковых воздействий. Во-вторых, поиск экстремума с помощью пробных сигналов требуют значительного времени, за которое статическая характеристика объекта может изменяться настолько, что оптимизация становится неэффективной. В-третьих, реальная инерционность объекта, запаздывание и возмущения, действующие на объект, приводят к дополнительным ошибкам регулирования (“рис-

канью”) при воздействии пробных сигналов на входе объекта. Отметим, что все (или подавляющее большинство) работы по экстремальным системам управления базировались на использовании линейных моделей объектов с унимодальной статической характеристикой и введении пробных поисковых сигналов на входе объекта. В связи с этим укажем на работу¹, в которой разработан метод синтеза экстремального регулятора и где для оценки функции градиента статической экстремальной характеристики объекта пробные воздействия не используются, а рекуррентные алгоритмы вычисления функций градиентов заменены на численные оценки производных, что снимает ряд эксплуатационных проблем в практических задачах. Класс моделей объектов ограничен нестационарными многомерными, приводимыми к автономным одноканальным моделям. Поэтому в целом, как принцип адаптации, автоматическая оптимизация на основе поисковых и беспоисковых механизмов отыскания экстремума статической характеристики регулируемого динамического объекта в условиях неконтролируемых изменений характеристик динамических объектов и возмущений получил ограниченное применение.

1.1.2. Беспоисковый принцип адаптации

Альтернативой идее поиска экстремального значения функционала качества системы управления с использованием метода “проб” и “ошибок”, стала “беспоисковая” оптимизация. Применительно к адаптивным системам этот подход к реализации механизма адаптации к неконтролируемым факторам основывался на аналитических вычислениях тем или иным способом условий экстремума функционала качества, без использования пробных воздействий на объект. Поэтому в от “аналитические” или “беспоисковые” самонастраивающиеся системы [29, 2, 23].

По [118] адаптация, самоорганизация, саморегулирование означает постепенное изменение усредненных свойств в стохастической среде функционирования динамической системы. В [36] способы достижения требуемых динамических свойств самонастраивающихся систем классифицируются по степени сложности этих систем за счет:

- а) высокого контурного коэффициента усиления;
- б) изменения параметра по программе согласно заранее заданным условиям работы системы;
- в) изменения параметров в зависимости от требуемого критерия качества системы;

¹Французова Г. А. Синтез систем экстремального регулирования для нелинейных нестационарных объектов на основе принципа локализации // Дисс. на соискание ученой степени доктора техн. наук. Новосибирский гос. техн. университет, 2004.

г) изменения структуры системы в зависимости от требуемого показателя ее качества.

Несмотря на то, что приведенные способы хронологически относятся еще к началу 60-х годов прошлого столетия, их логические принципы сохраняются в той или иной мере и в современных схемах адаптивных систем управления.

Способ а) – самый простой. При отсутствии информации об уровне аддитивных возмущений или о величине невязки между математической моделью процесса и уравнениями, стоящими за реальными физическими процессами в объекте (эту невязку обычно называют немоделируемой или паразитной динамикой) способ применяется наиболее часто. В теории управления нелинейными объектами регуляторы, позволяющие изменять коэффициент вплоть до бесконечно больших величин в зависимости от величины отклонения от положения равновесия называют “регуляторами с бесконечной границей роста коэффициента” (infinite gain margin controllers). Примером являются, т. н. $L_g V$ – регуляторы для аффинных по управлению систем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

где $V(\mathbf{x})$ – функция Ляпунова для автономной системы, а $L_g V$ – производная Ли функции $V(\mathbf{x})$ по векторному полю $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Возможны и иные примеры систем адаптивного управления с помощью высоких коэффициентов усиления, более изощренные по форме, но все те же по содержанию, единственная цель которых состоит в демпфировании неизвестной нелинейности или возмущений с помощью больших коэффициентов усиления в отрицательной обратной связи или специальных функций – мажорант.

Пример адаптивной системы, построенной на способе б), который является, безусловно, более интересным, чем простое увеличение контурного усиления, приведен в работах [144, 252], где параметры адаптивного регулятора (точнее, текущий индекс используемого контроллера) изменяются согласно программе, реализуемой на основе схемы с гистерезисом. Критерием переключения является значение функционала качества, ассоциированного с конкретным контроллером. Выбор следующего контроллера из конечного множества возможных происходит последовательным перебором и циклическим образом. Подобная идея построения адаптивного регулятора со свойствами, изменяющимся согласно некоторой программе в зависимости от условий работы системы, была впоследствии развита в работе [256], где переключение происходит не циклическим образом, а целенаправленно – в зависимости от значения критерия качества, что является, по-сути, способом в).

К направлению с применением способа в) скорее всего следует отнести и все то огромное множество работ в современной параметрической постановке, где параметры регулятора основного контура настраиваются согласно алгоритмам градиентного

типа. Способ г) в классификации Ли, выделенный отдельно, можно считать, по-видимому, подклассом систем в) с той лишь оговоркой, что для реализации таких систем потребуется рассматривать параметризованные линейные комбинации управляющих функций из заданного класса вместо единственной функции.

При отсутствии содержательной информации о динамических свойствах регулируемого объекта целесообразно применять способ г). В [10] анализируются самонастраивающиеся системы со многими настраиваемыми параметрами и для этого используется цифровая вычислительная машина. Автор упомянутой работы критически оценивает применение термина “самонастраивающиеся системы” к системам, не являющимися таковыми (а это – системы комбинированного регулирования, системы с допустимо высоким коэффициентом усиления в контуре, автоколебательные системы) и разделяет точку зрения Дж. Траксела [93, 73], что “... т. н. самонастраивающееся регулирование является только *методом рассмотрения систем*”, который имеет определенную ценность при логическом подходе к проектированию нелинейных систем автоматического регулирования, но не является *новым фундаментальным* вкладом в теорию систем управления. Принцип самонастройки или адаптации состоит, по существу, из трех положений:

- а) определение оптимальных условий работы и адекватного им критерия качества;
- б) сравнение существующих характеристик с оптимальными;
- в) изменение настройки системы с целью привести существующие характеристики к оптимальным.

Задачи б) и в) решаются автоматически; задача а) решается разработчиком на начальной стадии проектирования. В работах [118, 36, 117, 73, 313, 81] адаптация постулируется как способность системы изменять свою структуру и подстраиваться в соответствии с изменяющейся обстановкой. Под категорию *адаптивного* управления подпадают, по мнению Ю. Ту [313], те системы управления, где уравнения, характеризующие динамику процесса, статистические свойства сигналов или возмущений, например, распределения вероятностей для случайных переменных, заранее неизвестны или известны частично. Однако, в работе [158] высказывается мнение, что “... систематическое изложение задач адаптивного управления ведет к метазадаче, которая не является задачей адаптивного управления”. В цикле работ Р. Беллмана и его последователей [118, 117, 119, 86, 24] вводится итеративная стратегия адаптивного управления, базирующаяся на байесовском оценивании значений вероятности случайных параметров (коэффициентов уравнений динамики, статистических характеристик случайных сигналов или возмущений) и синтезе оптимального управления стохастическими процессами на основе теории динамического управления, т. е., по

существо, предлагается концепция *идентификационного подхода* к решению проблемы адаптации в управляемых динамических системах.

Так, например, в [24] процесс адаптации наделяется следующими чертами: а) идентификации в форме определения апостериорной статистики; б) собственно стохастического управления. В частности, если некоторый параметр уравнений системы *a priori* задается каким-либо законом распределения, то задача б) превращается в задачу стохастической по Байесу оптимизации. В [119] вводятся понятия “более общих процессов адаптации”, где указывается на большой смысл попытки формулирования того, что следует подразумевать под “общим видом процессов управления с адаптацией”. Для этого постулируются как выполнимые следующие предположения.

- 1) Динамические процессы рассматриваются как многошаговые процессы изменения состояния, т. е. процессы в дискретные моменты времени $k = 1, 2, \dots$, отображающие последовательную эволюцию состояния динамической системы. В частности, эта эволюция задается дифференциальными уравнениями состояния; в общем случае, последовательностью функций

$$\{f_N\} = \left\{ \sum_{k=0}^N h(\mathbf{x}_k) \right\},$$

где $h(\mathbf{x}_k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – заданная функция состояния \mathbf{x}_k . Эта функция является функцией начального состояния \mathbf{x}_0 и числа шагов (измерений) N при условии, что определено преобразование $F(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, обладающее свойством: $\mathbf{x}_k = F(\mathbf{x}_{k-1})$, \mathbf{x}_{k-1} – есть состояние на одну единицу времени позднее. В достаточно общем случае принимается $\mathbf{x}_k = F(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\xi}_k)$, где \mathbf{u} – вектор управления, изменяющий состояние в соответствии с заданной целью; $\boldsymbol{\xi}$ – случайная переменная с фиксированной, но неизвестной функцией распределения и $\hat{P}(\boldsymbol{\xi})$ – априорная оценка для этой функции распределения. В таком случае пара $(\mathbf{x}, \hat{P}(\boldsymbol{\xi}))$ есть состояние управляемого объекта.

- 2) Состояние системы наблюдаемо на каждом шаге.
- 3) На каждом шаге вычисляется априорная оценка как истинная функция распределения и математические ожидания переменных состояния получают на этой основе.
- 4) Существует систематическая процедура для модификации априорной функции распределения по мере того, как разворачивается этот процесс. Эта процедура может быть процедурой с адаптацией, если в результате выбора \mathbf{u}_k новая функция распределения зависит от старой функции распределения, от реализации $\boldsymbol{\xi}_k$, от начального состояния \mathbf{x}_0 , нового состояния \mathbf{x}_k и управления \mathbf{u}_k .

- 5) Пусть $M\{J_N\} = \bar{J}(\mathbf{x}, \hat{P})$ – математическое ожидание функции критерия “суммарного” типа $J_N = \sum_{k=0}^N q(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\xi}_{k+1})$. Тогда $\bar{J}_N(\mathbf{x}, \hat{P})$ вычисляется в соответствии с принципом оптимальности Беллмана в виде функционального уравнения и из него на каждом шаге $k = 1, 2, \dots$, следует вычислять оптимальное управление $\mathbf{u}_k^* = \min_{\mathbf{u}_k} \bar{J}(\mathbf{x}, \hat{P})$. Но, как об этом пишут сами авторы [119]: “не очень трудно записать эти соотношения, но большие трудности представляет получение аналитических или численных результатов из этих уравнений”.

Из приведенной формулировки процессов управления с адаптацией следуют логические принципы адаптации по Беллману.

- 1) Адаптивное управление рассматривается как *управление по состоянию* в условиях случайной среды функционирования с неизвестной функцией распределения.
- 2) В основу “механизма” адаптации полагается *теория итераций* и, как следствие, приоритет отдается *численным методам оптимизации* с последовательным использованием измерительных данных.
- 3) *Рандомизация целевой функции* и использование методов теории статистических решений, в частности, байесового и связанных с ним других, более экономичных, но и менее содержательных статистических подходов к оцениванию.
- 4) *Текущая оптимизация* на основе результатов текущего оценивания с использованием рандомизированных сепарабельных целевых функций интегрального или суммарного типов.

Следует обратить внимание на то, что хотя общая формулировка процессов адаптации по Беллману обращается к параметризованным моделям системы в широком смысле этого слова, она не ограничивается гипотезой квазистационарности параметров. Вариабельность параметров ограничивается лишь законами распределения параметрических возмущений. Отличительная особенность такой формулировки заключается и в том, что для адаптации используются лишь измерения текущего состояния.

Принципу действия систем управления с приспособлением Дж. Траксел дал в [93, 73] “... достаточно вольное определение как системы с автоматическим измерением сигналов или динамических характеристик объекта с последующей автоматической перестройкой устройства управления ...” с последующей критикой такого определения как нестрогого. И далее: “Попытки дать строгое определение, которое позволяло бы точно разделить системы на два класса – приспособляющиеся и

неприспосабливающиеся (т. е. на адаптивные и неадаптивные – *авт.*), наталкиваются, по-видимому, на непреодолимые препятствия. Например, обычную одноконтурную систему можно считать приспособляющейся, если основное внимание обращать на усиление в цепи обратной связи, уменьшающее влияние любых вариаций параметров объекта”. На примере простейшей схемы резисторного делителя напряжения Дж. Траксел показывает, что эта – вовсе не схема с обратной связью! – может быть рассмотрена согласно ее математическому определению как схема с компенсирующей параметрические изменения отрицательной обратной связью. Поэтому он делает вывод, что даже всем привычная “.... обратная связь может быть определена *только как точка зрения*, которую выбирает исследователь или конструктор”. С такой позиции “... *приспосабливающейся системой является всякая физическая система, которая может быть спроектирована с точки зрения принципа приспособления*”. Сам Дж. Траксел, допуская, как это следует из его рассуждений, множество точек зрения на понимание механизма адаптации, вводит три различные формы реализации принципа приспособления:

- оптимизация статических условий работы объекта, что нашло свое воплощение в самых первых работах по созданию адаптивных систем [12, 315, 19, 22, 104, 80] с автоматическим поиском экстремума функционала, характеризующего техническое состояние объекта;

- системы с автоматической коррекцией динамики системы за счет изменения (подстройки) характеристик управляющего устройства; именно это направление адаптации реализовывалось в последующих исследованиях, вплоть до настоящего времени, в классе самонастраивающихся систем (СНС) с компенсационным механизмом адаптации. В работе [93] Дж. Траксел рассмотрел как частные, так и обобщенные функциональные схемы приспособляющихся систем с обучением, теории и реализации которых впоследствии были посвящены многочисленные работы;

- системы управления конечным значением, целью которых являлось выработка вычислительным устройством такого сигнала управления, при котором оптимальные характеристики системы достигались бы в определенный момент времени. Это, для настоящего времени, частный и специфический вид систем терминального управления, порожденный требованиями того времени, начавшимся в 50-е годы периодом внедрения в технику автоматического управления цифровой вычислительной техники и большими надеждами в связи с ней на успехи в решении сложных практических задач.

В своей фундаментальной работе Дж. Траксел делает глубокой и важный по своему значению вывод о принадлежности приспособляющихся систем к классу *суущественно нелинейных замкнутых систем управления*, реализация которых невозможна при использовании обычных линейных методов теории управления.

Адаптивный подход по Дж. Тракселу позволяет (и в этом его назначение) создавать системы с нулевой чувствительностью при условии, что элементы адаптации действуют мгновенно и без помех. Но хорошо известно, что именно это условие как раз и не выполняется во всех рассматриваемых до настоящего времени адаптивных системах.

Далее отметим еще одно важное условие, которое обсуждается в работе Дж. Траксела: идеальное выполнение указанных условий требует задания математического класса входных сигналов с тем, чтобы *“... вводимые в систему нелинейные элементы, зависящие от характеристик объекта, обеспечивали требуемое качество системы в целом”*. И это требование для реализации адаптивных свойств замкнутой системы в подавляющем большинстве работ по адаптивному управлению даже не упоминается в числе обсуждаемых задач.

И, наконец, обратим внимание на вывод, сделанный в работе Траксела: *“... перспективной чертой принципа приспособливания является возможность введения простого механизма обучения в ту часть системы, которая осуществляет приспособливание. Когда обучение комбинируется с приспособливанием, система управления получает гибкость и способность решать более значительные задачи, присущие человеку-оператору”*. И опять именно это интуитивное понимание необходимости простых механизмов приспособливания, открывающих путь к практической реализации адаптивных регуляторов в задачах управления, не получило должного развития в подавляющем большинстве приложений. Этим, в том числе, можно объяснить совершенно неудовлетворительный для настоящего времени практический результат применения теории адаптивных систем.

В обзорном докладе Дж. Траксела на 2-м международном конгрессе ИФАК [73] сформулирована концепция логической теории самонастраивающихся систем, базирующейся на трех теориях:

- теории моделирования управляемых систем и объектов;
- теории оптимизации детерминированных и стохастических динамических систем (А. А. Фельдбаум; Р. Беллман (динамическое программирование); Л. С. Понтрягин (принцип максимума), R. Kulikowski (оптимизация нелинейных случайных процессов управления), А. Брайсон, Хо Ю-Ши (градиентные методы оптимизации));
- теории устойчивости нелинейных систем.

Концепция логической теории по Тракселу приводит к механизмам адаптивного управления, сущность которых состоит из трех частей – *оптимизации, идентификации* с использованием оценок чувствительности (передаточных функций, оценочных функций или иных характеристик системы) к изменениям параметров объекта или внешней среды и *анализа условий устойчивости* нелинейных систем.

В целом идеи, сформированные в работах исследователей с середины 50-х до кон-

ца 60-х годов 20-го столетия, исходили из парадигмы идентификационного подхода к реализации адаптивных свойств динамических систем управления.

В эти же годы формировался подход к *самообучению* систем управления [73, 313, 81, 86, 89], который предполагал изменение закона регулирования или стратегии управления при непредвиденных изменениях условий функционирования системы. Если в “обычных” приспособляющихся системах изменяются структура алгоритма или его параметры с последующей оптимизацией динамических характеристик системы, то в самообучающихся системах на основе теории статистических решений изменяется тип стратегии управления.

В рассматриваемых подходах общим являлось использование априорной информации об объекте, сведений о статистических характеристиках измеряемых сигналов в системе управления и ее использование в процессах обучения.

1.2. Математические постановки задачи адаптивного управления

Этому вопросу посвящен ряд основополагающих работ [315, 19, 80, 36, 37, 93, 158, 343, 226, 81, 91, 32, 50, 53, 82, 303]. Приведем те из них, которые не привязаны к использованию конкретных механизмов адаптации и характеризуются известной общностью.

В небольшой по объему статье Л. Заде [343] делает попытку формального определения адаптивности, квалифицируя это как сложную проблему, неопределенность которой порождается смешением собственно адаптивного поведения и механизма его достижения. Соединение этих альтернативных составляющих в единственном осмысленном определении, как и в работе Дж. Траксела, представляется автору иллюзорной целью из-за невозможности строгого математического описания всех возможных механизмов адаптации. Позже об этом же писал в своей монографии [50] Дж. Саридис, где он привел более двух десятков различных по смыслу определений и существующих постановок задачи адаптивного управления и адаптивных систем.

По Л. Заде формальное определение понятия адаптивности с точки зрения ее внешнего проявления, без указания элементов ее реализации, вытекает из следующих рассуждений.

Рассматривается система \mathcal{S} , имеющая своим входом функцию времени $\mathbf{g}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ из класса $G_\nu\{\mathbf{g}(t)\}$. Семейство входов G_ν представляет собой своего рода источник, возможно, но не необходимо, снабженный вероятностной мерой, определенной на этом семействе, так, чтобы G_ν можно было рассматривать как случайный процесс. Обобщая, можно считать, что и само семейство G_ν является членом семейства $\{G_\nu\}$, индексированного своей переменной $\nu \in \mathbb{R}$.

Пусть качество работы системы \mathcal{S} задано функцией $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, зависимой от ν ,

что отражается значениями $Q(\nu)$. Вводится критерий допустимости качества в виде: $Q(\nu) \in \Omega$, где Ω – некоторый класс функций. Информация о системе в рамках введенных обозначений может быть рассмотрена как отношение принадлежности $\nu \in N$, где N есть определенное множество значений переменной ν . Тогда понятие адаптивности как свойства динамической системы через ее внешнее проявление можно дать следующим определением.

О п р е д е л е н и е 1.2.1. Система S называется адаптивной по отношению к семейству $\{G_\nu\}$ и Ω , если $Q(\nu) \in \Omega$ для любого источника семейства $\{G_\nu\}$, $\nu \in N$. Другими словами, система S адаптивна по отношению к множеству N и классу Ω , если она отображает множество N в класс Ω , а именно: $Q(\nu) : N \rightarrow \Omega$.

Определение адаптивности по Л. Заде эквивалентно понятию *допустимого поведения* динамической системы S для семейства входных функций G_ν или, как более общее, для семейств $\{G_\nu\}$. Неопределенность ограничена возможными семействами $G(\nu)$, а допустимое поведение – соответствующим значением $Q(\nu)$.

Формулирование задачи адаптивного управления содержится и в работе [226], где, без потери общности, выделяются следующие компоненты *типовой задачи управления с оптимизацией характеристик управляемой системы*.

1. Постановка целей управления (технической, математической).
2. Оценивание текущего состояния управляемого объекта по отношению к цели.
3. Оценивание факторов окружающей среды функционирования системы, существенно влияющих на поведение системы в прошлом, настоящем и будущем.
4. Выработка на основе информации по п.п. 1-3 наилучшей стратегии (законов, алгоритмов) управления.
5. В соответствии с перечисленными компонентами типовая задача адаптивного управления в работе [226] ставится следующим образом (рис. 1.1).

Исходные данные для ее решения включают:

- 1) физические и математические соотношения между измеряемыми сигналами $x(t)$, $z(t)$ и $u(t)$, т. е. принимается во внимание физическая сущность объекта;
- 2) статистические характеристики возмущений внешней среды $f(t)$, $v(t)$. Допускается полуопределенное задание характеристик, с точностью до параметров, например, функций распределения этих возмущений.

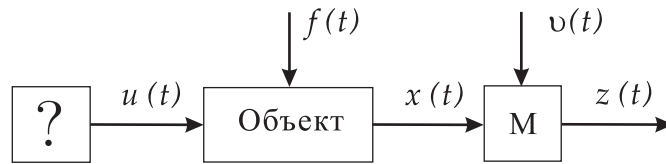


Рисунок 1.1. Задача адаптивного управления

Требуется в соответствии с целью управления определить функцию $u(t)$ в зависимости от измеряемой функции выхода $z(t)$ при неполной информации об объекте. Методы решения подобной задачи приводятся в многочисленных работах по адаптивным системам управления. Из постановки задачи следует ее решение при условии идентифицируемости (в определенном смысле) объекта управления в системе с обратной связью по выходу $z(t)$ в режиме нормальной эксплуатации. Решению задачи адаптивного управления в приведенной постановке посвящены работы, среди которых из числа приведенных в списке литературы можно выделить работы по применению байесовского оценивания в сочетании с методом динамического программирования [118, 117, 158, 313, 119, 86], спектральных методов идентификации [93, 2, 25, 33], методов оценивания динамических характеристик объектов и его состояния (аналитические методы синтеза с применением настраиваемых моделей, фильтров Винера и Калмана, корреляционных функций, функций чувствительности, универсальных алгоритмов оптимизации по критерию обобщенной работы) [37, 93, 2, 23, 25, 32], теории инвариантности [20, 45].

Достаточно общее и строгое определение термина “адаптация” в случаях параметрической неопределенности объекта или возмущений для детерминированных с обобщением на стохастические системы с управляемыми марковскими процессами ситуаций введено в работах [91, 50, 53, 82, 84]. В рамках этих определений разработана математическая теория адаптивного управления [82, 84]. Ее особенностью является рассмотрение процесса управления на полубесконечном интервале времени при цели управления, *не зависящей от характера переходных процессов*, что приводит к итеративным процессам адаптации со слабо контролируемой динамикой процессов в системе.

Приведем в упрощенной форме постановку задачи адаптивного управления по цитируемым работам. Предполагается задание системы дифференциальных уравнений достаточно общего вида для модели объекта, включающих вектор неизвестных

параметров θ из известного множества допустимых значений $\Omega_\theta \subset \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \theta, t); \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \theta, t),\end{aligned}$$

где $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, и $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Omega_\theta \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Omega_\theta \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^k$ – гладкие функции своих аргументов. Без существенной потери общности в практических приложениях параметр θ возможно определить как функцию времени: $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega_\theta$, $\theta(t) \in \Theta$. При этом вводятся стандартные предположения на функции в правых частях исходной системы, гарантирующие существование хотя бы одного решения. Для конкретных задач эти функции могут быть подчинены дополнительным требованиям.

Задание множества Θ как множества функций или векторов из некоторого класса определяет *класс адаптивности*, на который распространяется постановка задачи адаптивного управления.

Для цели управления $Q[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), 0 \leq \tau \leq t] \leq \Delta$ при $t \geq t^*$, $\Delta \geq 0$ – пороговое значение целевого функционала $Q[\cdot]$, определенного на множестве состояний объекта $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, сигналов управления $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, ставится задача нахождения неупреждающего алгоритма адаптивного управления в виде двухуровневой структуры:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= U_t[\mathbf{y}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\beta}(\tau), 0 \leq \tau \leq t]; \\ \boldsymbol{\beta}(t) &= B_t[\mathbf{y}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\beta}(\tau), 0 \leq \tau \leq t],\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ – конечномерный вектор настраиваемых параметров, обеспечивающий выполнение целевого условия для системы управления и принадлежность всех траекторий $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\boldsymbol{\beta}(t)$ к заданным множествам. Синтезируемая адаптивная система должна обеспечивать для любого $\theta \in \Omega_\theta(\Theta)$ и любых начальных значений $\mathbf{x}(0)$, $\boldsymbol{\beta}(0)$ достижение цели управления.

В обзорном докладе [8] на 1-й Всесоюзной конференции "Теория адаптивных систем и ее применения" (18-20 мая 1983 г., Ленинград) анализируются достижения теории адаптивного управления в классе аналитических (по В. В. Солодовникову) или беспойсковых (по А. А. Красовскому) самонастраивающихся систем (БСНС), к числу которых отнесены системы с самонастройкой по частотным, временным характеристикам и с применением эталонных моделей поведения объекта в системе. Последнее означает задание модели либо в явном виде, когда она включается в систему как физическое устройство или программа, или в неявном, когда она заменяется экстраполятором, вычисляющим значения обобщенной ошибки адаптивного управления по заданному набору коэффициентов уравнения эталонной модели и измеряемым (оцениваемым) сигналам в основном контуре. Общепринятой стала классификация всего многообразия конкретных типов БСНС на два различающихся по принципу работы класса: на системы без предварительной идентификации объектов, получивших

название систем с “прямым адаптивным управлением” (англ. термин - direct adaptive control или model reference adaptive systems - из-за использования в этом классе эталонных моделей), и систем с текущей идентификацией динамических характеристик объекта и возмущений внешней среды, получивших название “идентификационные адаптивные системы”. В англоязычной литературе системы этого класса называются системами “непрямого адаптивного управления” (indirect adaptive control). В обзоре [8] дается оптимистическая оценка возможностям практического применения БСНС, которым и до настоящего времени уделяется внимание в научной печати как *основному принципу построения адаптивных систем*.

Однако в последнее время появляется критические оценки развитых подходов к построению систем адаптивного управления [84, 31]. В основе критического отношения лежит очевидный факт несоответствия теоретических результатов их практической значимости. Достаточно сказать, что в составе программно-технических комплексов лишь очень немногих ведущих фирм мира заявляются адаптивные контроллеры, а случаи уверенного использования адаптивных регуляторов в промышленной практике встречаются еще реже.

Особо следует остановиться на теории адаптивных систем, разработанной в середине 60-х годов прошлого столетия Я. З. Цыпкиным. Им был выдвинут подход к решению задач адаптации, в основу которого положены вероятностные итеративные методы оптимизации целевых функционалов [88, 89], используемые для решения внешне различных технических задач. “Алгоритмический” подход к синтезу алгоритмов управления в реальном времени, в темпе протекания процессов в объекте положил начало бурному потоку работ по теории адаптивных систем, использующей вероятностные итеративные алгоритмы (см., например, обширный обзор публикаций, приведенных в [50]). Стоит отметить при этом, что итерационный процесс адаптации постулировался как необходимый еще в работах Р. Беллмана [118, 343, 119] (см. с. 4-5).

Немалые надежды, возлагавшиеся на новый механизм адаптации в виде вероятностных итеративных методов, нашли свое отражение и в формировании самого определения адаптивности. Если адаптивность по Дж. Тракселу, Р. Беллману и Л. Заде приводила к идентификационному механизму адаптации с использованием теории статистических решений, то “алгоритмический” подход по Я. З. Цыпкину в принципиальном плане расширяет применение этой теории (“адаптивный байесовский подход” [89]) до возможной реализации класса самообучающихся систем классификации и распознавания и в конечном итоге, класса самообучающихся систем управления. На 2-м Ленинградском симпозиуме по теории адаптивных систем (30 января - 2 февраля 1974 г.) Я. З. Цыпкиным была выдвинута концепция адаптивного управления в динамической системе как *процесса асимптотического приближения*

к оптимальному в среднем состоянию в условиях:

- а) неопределенности ситуации (уравнений объекта, ограничений, недоступных для измерения возмущений среды);
- б) неопределенности цели управления, достигаемой путем
- в) рандомизированной стратегии управления.

Такая весьма общая концепция, очевидно, включает постановки задач адаптивного управления, сформулированные в более ранних работах Беллмана, Заде и Траксела, как частный случай. Иллюзия принципиальной разрешимости этой проблемы базировалась на тех возможностях, которые приписывались вероятностным итеративным алгоритмам адаптации. Несмотря на то, что конструктивного развития такая концепция не получила, содержательная составляющая этого подхода в полной мере до сих пор не оценена.

1.3. Методы синтеза адаптивных систем

управления нелинейными динамическими объектами

Обстоятельный обзор методов синтеза адаптивных систем управления нелинейными объектами по выходу содержится в статье [13], хотя уже в ранних работах Р. Беллмана, К. Фу и других авторов постановка задачи адаптивного управления и предлагаемый подход к ее решению также не ограничивалась линеаризованными моделями объектов. В классе самонастраивающихся систем математически строгая постановка задачи адаптивного управления [91], которая была приведена выше, распространяется и на класс нелинейных объектов.

Как вытекает из приведенного обзора логических и формальных постановок задач адаптивного управления, проблема адаптации исторически возникла в контексте задач оптимизации поведения систем. С другой стороны, к настоящему времени сложилась упоминавшееся выше общепринятое разделение адаптивных систем на системы прямого адаптивного управления и системы идентификационного типа. Подобное деление, однако, не в полной мере позволяет определить специфику методов синтеза самих алгоритмов адаптации в зависимости от математического аппарата решения исходной оптимизационной задачи.

Поэтому с появлением формальной параметрической постановки В. А. Якубовича [91], развитой впоследствии в работах [82, 84], в дополнение к общепринятой классификации было бы естественно различать методы решения задачи адаптивного управления в зависимости от типа параметризации математических моделей в

самой постановке задачи – задачи с выпуклой и линейной параметризацией и задачи с невыпуклой, нелинейной параметризацией. Кроме того, как отмечается Я. З. Цыпкиным в предисловии к монографии [90], логично разделять методы синтеза адаптивных систем и по способу выбора целевого критерия – эвристическое задание цели управления в виде достаточно произвольного функционала и согласованный выбор целевого критерия и закона управления с динамикой самого объекта. Принимая во внимание высказанные соображения, приведем краткую классификацию методов синтеза адаптивных систем в соответствии с предложенными критериями.

1.3.1. Системы с линейной и выпуклой параметризацией

Следуя работе [13], рассмотрим основные методы синтеза адаптивных систем управления нелинейными объектами в сформулированной выше постановке В. А. Якубовича.

Согласно [91] в процессе синтеза сначала находятся уравнения (алгоритмы) регулятора объекта для принятой модели с использованием какого-либо метода теории управления, а затем алгоритм настройки его параметров. Это – общепринятый в настоящее время подход к синтезу адаптивных систем. Решение первой задачи базируется на применении методов теории управления нелинейными динамическими объектами, описываемыми в классе дифференциальных уравнений общего вида. Типовым частным случаем является аффинная по управлению нелинейная модель:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)u; \\ y &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t),\end{aligned}$$

где u, y – скалярные функции управления и выхода объекта соответственно.

Конструктивные результаты в теории адаптивных систем управления в постановке В.А. Якубовича, полученные для аффинных по управлению нелинейных моделей объекта, приведем ниже.

1. *Метод скоростного градиента.* Метод скоростного градиента впервые был предложен А. Л. Фрадковым в работе [83] и развит впоследствии в [82, 84]. Основная идея метода состоит в рассмотрении процесса адаптации как задачи минимизации мгновенного значения скорости изменения целевого функционала $Q(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (с учетом знака). Управление u ищется в классе функций вида $u = u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$, где $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ – вектор параметров обратной связи. Изменение параметров задается пропорционально градиенту скорости изменения $Q(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= -\Gamma \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \left(\frac{dQ(\mathbf{x}(t), t)}{dt} \right) = -\Gamma \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \partial_{Q_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t), \quad \Gamma > 0, \\ \partial_{Q_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) &= \frac{\partial Q(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t).\end{aligned}$$

При условии выбора целевого функционала $Q(\mathbf{x}, t)$ в виде дифференцируемой, ограниченной снизу и неограниченной сверху (по состоянию) функции, отрицательность его производной по времени $d/dtQ(\mathbf{x}, t)$ на полубесконечном интервале $[t', \infty)$, $t' > t_0$ будет означать устойчивость по Ляпунову всей системы. Следует отметить, что на практике устойчивость по Ляпунову достигается лишь в расширенном пространстве состояний $\mathbb{R}^n \times \Omega_\theta$. Стремление же целевого функционала к минимально возможному значению происходит в асимптотике при $t \rightarrow \infty$. Критическими условиями работоспособности метода являются:

– условие выпуклости скорости изменения целевого функционала по настраиваемым параметрам $\hat{\theta}$:

$$(\hat{\theta}' - \hat{\theta}) \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \partial Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \theta, \hat{\theta}, t) \geq \partial Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \theta, \hat{\theta}', t) - \partial Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \theta, \hat{\theta}, t);$$

– независимость $\partial/\partial \hat{\theta}(\partial Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \theta, \hat{\theta}, t))$ от неизвестных *a priori* параметров θ ;

– условие достижимости, формулируемое как условие существования таких параметров $\hat{\theta}$ функции управления $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t)$, которые удовлетворяют условию асимптотической устойчивости по Ляпунову для исходной системы.

2. *Синтез адаптивных систем на основе канонических форм моделей нелинейных объектов* [192, 205] (А. Isidori (1989), I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic, A. Morse и др. (1991)). Суть метода заключается в применении специального нелинейного и независимого от неизвестных параметров модели преобразования переменных состояния исходной системы нелинейных уравнений приведенного выше класса к форме, используемой для синтеза адаптивного закона управления. Последнее означает то, что для реализации алгоритмов адаптивного управления без использования производных по времени все нелинейности в канонической форме уравнений объекта должны зависеть только от измеряемой выходной переменной y . Соответствующая каноническая форма общего вида предложена в работе [114], а необходимые и достаточные условия существования такого преобразования, независимого от неизвестных параметров, исследованы в работах [240, 241, 205].

3. *Метод адаптивного обхода интегратора (ОИ)* [219] (I. Kanellakopoulos, M. Krstic, P. Kokotovic, A. Morse (1992), Z. Jiang, L. Praly (1991), подробное изложение приводится в Приложении 1). Для канонических форм в виде уравнения с нижнетреугольной записью рядом авторов разработана процедура синтеза стабилизирующих законов управления с применением метода функций Ляпунова, получившая название “integrator backstepping” - “обход интегратора” (J. Tsiniyas, C. Byrnes, A. Isidori (1989), I. Kanellakopoulos (1991), R. Marino, P. Tomei (1991, 1993)). Итеративный характер процедуры и вычисление на каждом шаге этой процедуры настраиваемого параметра регулятора и составляет решение задачи синтеза адаптивного регулятора. Привлекательной особенностью метода, основанного на применении канонических

форм нелинейных объектов и метода обхода интегратора, является совмещение задачи синтеза нелинейного закона управления и синтеза алгоритма адаптации этого закона - “адаптивный обход интегратора”. В настоящее время получили развитие различные подходы к реализации “адаптивного обхода интегратора”.

3.1. Метод, совмещающий процедуру ОИ, использование т.н. “функций настройки” или алгоритма фиктивной настройки параметров закона регулирования, не используемый для реальной настройки регулятора [217]. В этом методе число настраиваемых параметров регулятора равно числу неизвестных текущих значений параметров модели объекта.

3.2. Метод адаптивного управления с использованием канонической формы адаптивного наблюдателя совместно с процедурой ОИ (R. Marino, P. Tomei (1991)) и синтеза функций настройки на каждом шаге синтеза адаптивного регулятора.

В обоих методах возникает проблема компенсации возмущающего влияния ошибок: в первом методе – ошибки оценивания состояния; во втором – ошибки наблюдения. Для этого в первом случае в синтезируемый по методу ОИ закон вводятся дополнительные компенсирующие поправки, содержащие частные производные, возводимые на каждом шаге в квадрат. Поэтому возникает проблема чувствительности к коэффициентам при таких поправках. Во втором случае для компенсации необходимо введение дополнительных демпфирующих обратных связей.

Перечисленные методы синтеза нелинейного адаптивного управления гарантируют достижение главного качества – устойчивости адаптивной системы в расширенном пространстве состояния, включая векторы настраиваемых параметров и оценок вектора состояния. Подобное расширение и отсутствие доказательств факта асимптотической устойчивости в расширенном пространстве состояния (за исключением, пожалуй, линейных систем некоторого класса и нелинейных систем при условии постоянного возбуждения [250, 268]), побуждает к неизбежной критике качества переходных процессов в таких системах, т. к. стремление к нулю целевого функционала вытекает вовсе не из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, а из леммы Барбалата, которая, в свою очередь, не дает явных оценок ни скорости сходимости, ни максимальных отклонений от целевой траектории.

Помимо нетривиальности решения задачи синтеза на основе канонических форм нелинейных моделей объекта, остается нерешенной проблема чувствительности синтезируемых адаптивных алгоритмов к неизбежному отличию исходных нелинейных уравнений объекта от используемых на практике упрощенных моделей. Ведь именно по этой причине алгоритмы адаптивного управления, синтезированные для линейных моделей, зачастую неработоспособны на реальных объектах. Кроме того, сами по себе условия существования непараметрического преобразования в канонические формы нельзя называть слабыми и легко проверяемыми.

Наиболее полно аналитические методы решения задачи адаптивного управления в постановке В. А. Якубовича, интегрирующие состояние теории адаптивного управления, вплоть до настоящего времени, изложены в книге [38]. По оценке ее авторов, наиболее совершенная стратегия адаптивного управления состоит в одновременном изучении объекта в режиме нормальной эксплуатации и управлении им. Такой закон управления можно в общем случае записать в виде векторных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= U(y, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t); \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\Theta}(y, \boldsymbol{\theta}, t) \end{aligned}$$

где $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \Omega_{\theta}$ – оценка вектора неопределенных факторов модели объекта управления. В зависимости от возможного физического смысла, который имеет, можно выделить три типа неопределенности математической модели управляемого объекта:

- 1) *функциональная неопределенность*, означающая, что $\boldsymbol{\theta}$ является неизвестной функцией в классе $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$;
- 2) *сигнальная неопределенность*, когда $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(t)$ – неизвестная функция времени;
- 3) *параметрическая неопределенность*, когда $\boldsymbol{\theta}$ – вектор неизвестных квазистационарных параметров заданной математической модели объекта.

С начала 70-х годов и по настоящее время решение задачи адаптивного управления шло по пути аналитического синтеза алгоритмов в классе приведенных выше векторных уравнений с неопределенностью типа 3), чаще без учета внешних возмущений на объект и при условии, что динамика реального объекта адекватна принятому динамическому порядку используемой модели, т.е. отсутствует немоделируемая динамика. В значительно меньшей степени рассматривались ситуации, когда такие идеальные условия работы реального объекта не выполнялись. Результатом этих исследований в рамках тех же методов синтеза адаптивных алгоритмов, которые были получены для идеальных условий работы, явились, так называемые, *робастные* алгоритмы адаптации. Практически неизбежное присутствие немоделируемой динамики, а также нарушение *условий согласования* и *относительная степень* $\rho \geq 2$ объекта (линейного, нелинейного) порождают немалые математические проблемы синтеза адаптивных законов управления. Можно с уверенностью сказать, что именно перечисленные факторы, нарушающие расчетные, идеальные условия применимости столь же идеальных адаптивных алгоритмов, являются одной из причин неудачных попыток применить эти алгоритмы на практике.

С другой стороны, выполнение условия согласования дает возможность реализации компенсационного механизма подавления возмущенных движений в системе. В обычных, неадаптивных системах, примером такого рода компенсации служат инвариантные системы, где организуются дополнительные каналы передачи возмущенного движения с такими динамическими характеристиками, что в требуемой точке

системы суммарное действие возмущений и компенсирующих воздействий равно нулю или допустимо малому значению. Напомним, однако, что такое решение будет реальным при одинаковых порядках динамики модели и реального объекта. В адаптивных системах компенсационный механизм реализуется в пространстве параметров принятой модели объекта и настраиваемых параметров адаптивного регулятора. Очевидно, что в силу неизбежных отличий нелинейных уравнений реального объекта от его заданной параметризованной модели, условия компенсации вряд ли могут быть выполнены.

В [38] справедливо отмечается, что нарушение условий согласования не означает, что возмущенные движения в системе, порождаемые неопределенностью динамики объекта 1) - 3), не могут быть компенсируемыми. В обоснование этой мысли положены довольно сложные аналитические методы синтеза алгоритмов, для чего используются специальные *параметризованные модели* объекта и метод адаптивного обхода интегратора. Этот метод, однако, столкнулся с принципиальной трудностью по обеспечению устойчивости траекторий движения в системе в условиях ненулевых возмущений и при относительной степени объекта более, чем единица. Для преодоления возникающих проблем были разработаны еще более сложные и изощренные алгоритмы адаптации для компенсации влияния неопределенных факторов (в частности, группа алгоритмов адаптации с расширенной ошибкой (R. Monopoli (1974), A. Morse (1980))), применение которых даже для целей компьютерного моделирования становится проблемой и вряд ли приближает разработчика к практическому их использованию в реальных условиях даже для управления одномерными объектами.

Так, использование алгоритма с расширенной ошибкой в системе асимптотического слежения за эталонной моделью выхода линейного объекта третьего порядка с одним интегрирующим звеном и тремя коэффициентами, которые априорно полагаются неизвестными, приводит к структуре адаптивного регулятора, динамический порядок которого равен 29 [38]. При этом предполагается, что внешние возмущения отсутствуют. Очевидна неадекватность решения проблемы адаптации на основе линейно параметризованных моделей объекта и воздействий внешней среды реальным задачам управления.

1.3.2. Системы с невыпуклой параметризацией

Задачи адаптивного управления системами нелинейной параметризацией неопределенностей порождают обособленную область проблем в существующей теории адаптивных систем. Перечисленные выше сложности теории, неизбежно возникающие уже для линейно параметризованных моделей, усугубляются нарушением принципа суперпозиции по параметрам векторного поля в правой части дифференциального

уравнения модели. Поэтому “параметрическая” нелинейность математических моделей физических явлений зачастую приносится в жертву удобству работы с линейно параметризованными моделями. Все методы адаптивного управления, рассмотренные ранее, за исключением метода скоростного градиента [83] в постановочной части так или иначе предполагают линейную параметризацию модели обобщенного настраиваемого объекта. Известный метод скоростного градиента, в общем случае сформулированный для нелинейно параметризованных систем, требует выполнения условия выпуклости по параметрам производной по времени целевого функционала, что не всегда выполняется даже для моделей с выпуклыми по параметрам правыми частями. Нарушение условия выпуклости сводит “на нет” эффективность метода для синтеза адаптивных регуляторов нелинейных динамических объектов.

Несмотря на потенциальные сложности в отношении моделей с нелинейной параметризацией для адаптивного управления в рамках существующей общепринятой логики синтеза адаптивных систем, физика самого исследуемого явления зачастую диктует необходимость их применения и, следовательно, актуальность.

На сегодняшний день предложен ряд подходов к синтезу адаптивного регулятора, в той или иной степени работоспособных для различных классов нелинейных объектов. Большинство из них базируется на идее демпфирования нелинейно параметризованной функции в правой части модели объекта линейно параметризованными функциями регулятора. В качестве примера отметим работы [231, 230, 148, 123]. В русскоязычной литературе и несколько ранее эта идея впервые была высказана и исследована В. В. Путовым [48]. Хотя в явном виде такая трактовка полученного научного результата им самим и не приводится, она становится очевидной, если рассматривать нелинейно параметризованные функции в правой части как функциональную неопределенность, удовлетворяющую условиям мажорирования.

Отдельно следует отметить работу [206], где дается локальное решение задачи адаптивного управления системами с нелинейной параметризацией. Локальность решения в данном случае означает, что для любого значения параметра $\theta \in \Omega_\theta$ существует такая окрестность $\mathcal{V}_\theta(\theta) \subset \Omega_\theta$ точки θ и алгоритм адаптации, синтезированный для линеаризованной по параметру модели, который гарантирует достижение цели управления для любого $\hat{\theta}(0) \in \mathcal{V}(\theta)$.

Следующая группа методов базируется на синтезе минимаксного адаптивного управления для класса параметризованных моделей объекта по ошибке [233, 212, 96]:

$$\dot{e}_c = -ke_c + f(\mathbf{x}, \theta) - f(\mathbf{x}, \hat{\theta}) + u_a(t),$$

где $k \in \mathbb{R}_+$, $k > \delta = \text{const}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R}^n \times \Omega_\theta \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^0$, f - ограничена и удовлетворяет условию Липшица по θ , функция $u_a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ - т. н. регуляризационный член. Краткое обоснование этого метода приводится в приложении 1.

Идея такого управления состоит в синтезе алгоритма адаптации $\dot{\hat{\theta}} = e_c \omega^*$, который удовлетворяет критерию:

$$\omega^* = \arg \min_{\omega} \max_{\theta \in \Omega_{\theta}} \text{sign}(e_{\varepsilon}) J(\omega, \theta, \hat{\theta}),$$

где

$$e_{\varepsilon} = e_c - \varepsilon S\left(\frac{e_c}{\varepsilon}\right), \quad S(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 1 \\ y, & -1 < y < 1 \\ -1, & y \leq -1 \end{cases}$$

и

$$J(\omega, \theta, \hat{\theta}) = f(\mathbf{x}, \theta) - f(\mathbf{x}, \hat{\theta}) + (\theta - \hat{\theta})^T \omega.$$

При этом управление $u_a(t)$ выбирается таким образом, чтобы обеспечить выполнение неравенства:

$$e_{\varepsilon} S\left(\frac{e_c}{\varepsilon}\right) u_a(t) + e_{\varepsilon} J(\omega^*, \theta, \hat{\theta}) \leq 0.$$

Следует отметить, что алгоритмы этого типа остаются демпфирующими в силу последнего неравенства, т. к. основным их отличием от метода мажорирующих функций является лишь то обстоятельство, что демпфирующая добавка $u_a(t)$ выбирается “оптимальным” образом согласно минимаксной оптимизации. При этом для успешного разрешения такой оптимизационной задачи требуется заранее знать область возможного изменения параметров θ модели, что само по себе не является значимым ограничением. Однако следует понимать, что увеличение области допустимого изменения параметров в этом случае автоматически влечет к тому, что верхняя граница модуля $|u_a(t)|$ увеличивается и, следовательно, демпфирующий член играет все большую и большую роль в обеспечении устойчивости по Ляпунову расширенной системы.

По своему содержанию, таким образом, алгоритмы [233, 212, 96] остаются демпфирующими и вряд-ли существенно разрешают принципиальную проблему параметрического адаптивного управления в невыпуклом случае.

1.3.3. Метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов и принцип инвариантного погружения в задачах адаптивного управления

Метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (метод АКАР) был разработан проф. А. А. Колесниковым в 80 – 90-е годы прошлого столетия и в последующем развивался им в контексте *синергетической теории управления* [26, 27]. Базовые положения этого метода позже легли в основу *метода адаптивного управления на многообразиях* [62, 76, 311].

Ключевая идея теории А. А. Колесникова состоит в том, что управление осуществляется в пространстве состояний объекта с использованием т. н. *макропеременных* $\psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_i \in C^1$, $i = 1, \dots, r$, $r \leq n$, равенство нулю которых задает *желаемые инвариантные многообразия*. Сам термин “инвариантные многообразия” вводится через определение фазового потока $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, как отображения начального состояния $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0, t \in \mathbb{R}_+$ в состояние $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t . Для удобства обозначений фазовый поток системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, t)$ в дальнейшем будем обозначать символом $\mathbf{x}_f(t, \mathbf{x}_0, t_0)$.

О п р е д е л е н и е 1.3.1. Множества $S \subset \mathbb{R}^n$ называются инвариантными по отношению к потоку $\mathbf{x}_f(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, если

$$\mathbf{x}_f(t, \mathbf{x}_0, t_0) \in S$$

для любых $\mathbf{x}_0 \in S$ для всех $t > t_0$.

Следуя определениям А. А. Колесникова, желаемые инвариантные многообразия – это состояния исходной динамической системы, которые удовлетворяют технической цели управления и одновременно являются наиболее естественными состояниями самого объекта. Привлекательной особенностью метода АКАР является отсутствие необходимости задавать знакоопределенные целевые функционалы и включение информации о естественных (или желаемых) динамических состояниях объекта непосредственно в целевую функцию.

В качестве критерия достижения цели управления предлагается использовать свойство *аттрактивности* целевых многообразий. Термин аттрактивность в [26] понимается в рамках стандартного определения аттрактивности множества [173].

О п р е д е л е н и е 1.3.2. Множество \mathcal{A} называется притягивающим (аттрактивным), если

- 1) оно замкнутое, инвариантное и
- 2) для некоторой окрестности \mathcal{V} множества \mathcal{A} и для всех $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}$ выполняются следующие предельные соотношения:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{V} \quad \forall t \geq 0; \quad (1.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{A}} = 0. \quad (1.2)$$

В англоязычной литературе близким к методу АКАР можно считать метод инвариантного погружения [106] или метод *immersion and invariance* (следуя авторам этой статьи, для краткости будем называть его методом I&I). Этот метод построен на использовании таких категорий, как погружение и инвариантность и, в принципе, не

требует априорного задания класса функций Ляпунова для процедуры синтеза. Метод не требует в явном виде ни выполнения условий непосредственной компенсации, ни линейной параметризации объекта.

Несмотря на идейную близость метода I&I к методу АКАР, они существенно различаются по формальному содержанию. Эта разница состоит в том, что задача синтеза регулятора в методе АКАР трансформируется в две задачи. Во-первых, в задачу отыскания "подходящего инвариантного многообразия"

$$\mathbf{x} = \pi(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p, \quad \pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

допускающего задание в неявном виде:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(\mathbf{x}) = 0 \mid \mathbf{x} = \pi(\boldsymbol{\xi})\}$$

и инвариантного вдоль решений уравнений замкнутой системы. Во-вторых, управление должно быть выбрано таким образом, чтобы многообразие $\phi(\mathbf{x}) = 0$ было аттрактивным. Следует отметить, что обе эти задачи в работе [106] не решаются, в отличие от теории А. А. Колесникова. Более того, аттрактивность и инвариантность целевого многообразия вводятся в качестве предположений. Доказывается, однако, что эти предположения могут быть достаточными для решения задачи асимптотической стабилизации заданного положения равновесия. Этот результат сформулирован в приводимой ниже теореме [106]

Т е о р е м а 1.1. *Рассматривается класс аффинных по управлению нелинейных систем:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$; $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ – стабилизируемое положение равновесия системы с регулятором. Предполагается существование дифференцируемых требуемое число раз функций

$$\alpha : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}, \quad \pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad c : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$$

и выполнение следующих условий:

1) *Существование целевой системы*

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}),$$

глобально асимптотически устойчивой в точках $\boldsymbol{\xi}^* = \pi(\mathbf{x}^*)$.

2) *Условие погружения: для всех $\boldsymbol{\xi}$ выполняется равенство*

$$\mathbf{f}(\pi(\boldsymbol{\xi})) + \mathbf{g}(\pi(\boldsymbol{\xi}))c(\pi(\boldsymbol{\xi})) = \frac{\partial \pi(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}).$$

3) Для $\xi \in \mathbb{R}^p$ существует неявное многообразие $\mathbf{x} = \pi(\xi)$, эквивалентное $\phi(\mathbf{x}) = 0$ для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

4) Аттрактивность многообразия и ограниченность решений. Все траектории системы

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, \mathbf{z})), \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, \mathbf{z})\end{aligned}$$

ограничены и $\mathbf{z} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда \mathbf{x}^* – глобально асимптотически устойчивое положение равновесие системы (1.3).

В работе [106] вводится понятие "адаптивная стабилизируемость" при условии инвариантного погружения. Для формулировки этого понятия используется гипотеза:

Предположение 1.1. Существует параметризованная функция $\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) : \mathbb{R}^n \times \Omega_\theta \rightarrow \mathbb{R}^m$, такая, что для неизвестного $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta$ система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$$

имеет глобально асимптотически устойчивое положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$.

Приведенная гипотеза в содержательном смысле эквивалентна условию достижимости в методе скоростного градиента [82, 84, 13, 38] за исключением того, что функционал, фигурирующий в условии достижимости в методе скоростного градиента, здесь *a priori* не задается.

Определение 1.3.3. Система (1.3) в предположении 1.1 называется адаптивно стабилизируемой при условии инвариантного погружения, если расширенная система

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{x}) + \hat{\boldsymbol{\theta}}), \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})\end{aligned}\tag{1.4}$$

стабилизируема при условии инвариантного погружения вдоль решений целевой системы

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi).$$

Необходимо отметить, что отличием от стандартных подходов является лишь тот факт, что в качестве настраиваемого параметра используется вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{x})$.

Решение задачи адаптивного управления по [106] с использованием теоремы осуществимо при выполнении ряда ограничительных условий, которые для удобства выпишем вместе.

1. Существование глобально устойчивой целевой системы, удовлетворяющей технологическим целям.
2. Существование целевого инвариантного многообразия по отношению к исходной системе уравнений объекта.
3. Многообразие должно иметь возможность "неявного" задания (локальное целевое условие) в виде $\mathbf{x} = \pi(\boldsymbol{\xi})$, где \mathbf{x} – состояние объекта, а $\boldsymbol{\xi}$ – состояние целевой системы
4. Многообразие должно быть аттрактивным и все решения системы (1.4) должны быть ограниченными.
5. Стабилизируемость исходной модели состояния объекта (1.3).

Приведенные результаты и краткий анализ работ [26, 27, 106] позволяют сделать следующие выводы.

1) Оба направления являются первой попыткой формулировки задачи адаптивного управления на многообразиях в нелинейных динамических системах и, в частности, в классе моделей с параметрической неопределенностью.

2) Отмечая близость предлагаемого в [106] метода к методу аналитического конструирования агрегированных регуляторов в синергетической теории управления [27], следует сделать вывод, что в отличие от метода АКАР, где конечным результатом синтеза является оптимальный закон управления нелинейным многомерным объектом, результатом метода I&I является лишь доказательство существования стабилизирующего закона управления для принятого класса нелинейного объекта и определение параметрического алгоритма адаптации. С другой стороны, если теория А. А. Колесникова включает концептуальное, по меньшей мере, решение задачи выбора целевых многообразий (аттракторов) и метод синтеза оптимальных законов управления, переводящих исходную систему на целевые многообразия, то в методе I&I решение этих задач отсутствует. Следует также отметить, что в известном смысле оба метода дополняют друг друга. Метод АКАР дает решение задачи конструирования нелинейных оптимальных регуляторов, а метод I&I обосновывает достаточность этого решения при одинаковых для обоих методов ограничений для асимптотической адаптивной стабилизации положения равновесия на целевом многообразии.

3) Попытка авторов работы [106] уйти от параметрического управления и от идеологии "непосредственной компенсации" как рабочего принципа современной теории адаптивного управления оказывается не столь успешной, как это заявляется в работе. Все сформулированные результаты опираются именно на условие компенсации

или в общем случае – на условие достижимости. Поэтому о решении задачи непараметрического управления или о ее постановке в рамках метода говорить пока преждевременно.

4) Несмотря на то, что в [106] утверждается возможность применения адаптивных алгоритмов для нелинейно параметризованных регуляторов, по-существу, используется линейно параметризованная модель, что входит в противоречие с выводами ее авторов. Тем не менее, несомненная ценность работы состоит, на наш взгляд, в формировании нового подхода в англоязычной литературе к синтезу адаптивных систем как специального класса нелинейных динамических систем, не опирающемуся на использование класса параметризованных моделей объектов, и принимающего концепцию адаптацию динамической системы по состоянию.

1.4. Проблемы адаптивного управления нелинейными объектами

Приведенный анализ постановок задач и методов адаптивного управления динамическими объектами, начиная с работ Беллмана [117, 119] и заканчивая современными результатами [219, 191, 38, 27, 106], позволяет сформулировать ряд актуальных и до сих пор нерешенных проблем современной теории адаптивного управления.

Первый круг проблем – это проблемы определения самого свойства *адаптивности в управляемых системах*. Тезис о том, что любая система, которая может быть спроектирована с точки зрения принципа приспособления является *адаптивной* (Дж. Траксел) недостаточно формализован и вместе с тем неоднозначен, чтобы быть полноценным определением. С другой стороны, известные постановки задачи Л. Заде [343], В. А. Якубовича [91, 82], определившие направление исследований на несколько десятилетий вперед, не выходят за рамки трактовки адаптивности как особого поведения выхода системы в при неопределенности математической модели в заданном класса. Такое определение адаптивности приводит к естественным противоречиям, отмеченным, в частности, в предисловии к тематическому выпуску журнала *System & Control Letters* по адаптивным системам за 2003 год [281]. В [281] подчеркивается, что адаптивность, с одной стороны, и уменьшение неопределенности со временем, с другой стороны, никак не отражается в самой задаче адаптивного управления.

Формализация задачи адаптивного управления привела к выхолащиванию самого понятия адаптивности. Трактовка адаптивности лишь как приспособление, но не как приспособление наилучшим (в смысле какого-либо критерия) образом разрушает границы между обычной задачей управления по выходу и задачей адаптивного управления. Иллюстрацией этого утверждения является постановка задачи регулирования по выходу, приведенная в работе [127]. Модель объекта задается системой

уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}); \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= S(\boldsymbol{\omega}); \\ \mathbf{y} &= \mathbf{k}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}), \\ \mathbf{e} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}),\end{aligned}\tag{1.5}$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ – вектор измерений, $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^q$ – вектор регулируемых величин, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ – функция управления, $\boldsymbol{\omega}(t, \boldsymbol{\omega}_0, t_0)$ – сигнал возмущений, заданный решениями системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = S(\boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}_0.$$

Функции $\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{k}, S$ предполагаются C^k -гладкими. Целью управления является обеспечение предельного соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0\tag{1.6}$$

для любых $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\omega}(t_0) \in \Omega_{\boldsymbol{\omega}} \subset \mathbb{R}^T$. Формально задача (1.5), (1.6) ставится как решение проблемы регулирования в условиях неизмеряемых возмущений с известной моделью. Хотя явным образом в работе [127] термин “адаптация” и не используется, сама постановка задачи укладывается в рамки задачи В. А. Якубовича, где адаптивность предполагается в классе решений подсистемы, моделирующей влияние возмущений. Таким образом, формализация адаптивности в терминах поведения выхода системы приводит к тому, что задача адаптивного управления поглощается целиком задачей управления по выходу. Интуитивно понятно, однако, что приспособление в адаптивных системах следует понимать не только в терминах свойств выхода системы, но и в терминах *повышения ее эффективности* со временем (что согласуется с критическими замечаниями в [281]). Следовательно, очевидна необходимость коррекции самого понятия *адаптивная система* с привлечением критериев оценки эффективности/оптимальности системы во времени.

Второй класс проблем – это проблема *целей адаптивного управления*. Стандартная постановка задачи адаптивного управления допускает целевые множества, определенные в виде неравенств

$$Q[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), 0 \leq \tau \leq t] \leq \Delta, \quad \forall t > t^*.$$

Зачастую целевые функционалы $Q(\cdot)$ задают в виде знакоопределенных функций состояния. Более того, в большинстве случаев [254, 191, 84, 38], несмотря на относительную широту класса целевых функционалов в постановке задачи, сами алгоритмы адаптивного управления требуют, чтобы целевой функционал обладал следующими свойствами:

- 1) $Q(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, Q \in C^1$;
- 2) $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} Q(\mathbf{x}, t) = \infty, \forall t \in \mathbb{R}_+$;
- 3) $Q(0, t) = 0$ (для задачи регулирования в начало координат).

Дополнение этих свойств условием достижимости (для алгоритма скоростного градиента [83, 84] и симметричным условием в [254] для градиентных алгоритмов) автоматически влечет требование о *знании функции Ляпунова* для системы с идеальным регулятором основного контура. Знание функции Ляпунова для невозмущенной (в отсутствие параметрических возмущений) системы является, таким образом, *необходимым условием* построения адаптивного регулятора для стандартных методов синтеза. В этой связи следует отметить работу [269], где предлагается схема адаптивного управления, не требующая знания функции Ляпунова с *отрицательно определенной* производной по времени (в условии достижимости). Допускается знание лишь того, что эта функция существует и обладает рядом свойств качественного характера. Требование известности функции Ляпунова с отрицательно определенной производной по времени заменяется на требование знания функции Ляпунова, обеспечивающей устойчивость невозмущенной системы. Однако несмотря на очевидные достоинства, эта схема имеет и ряд недостатков. Это, прежде всего, мультипликативный рост размерности регулятора в зависимости от размерности вектора неопределенности и требование глобальной асимптотической устойчивости (единственного) целевого множества в системе с регулятором основного контура при отсутствии параметрических возмущений.

Требования существования функции Ляпунова для системы с идеальным регулятором основного контура существенно сужает *a priori* и класс допустимых целевых движений в адаптивной системе. Так, в частности, неустойчивые и неравновесные режимы не могут выступать в роли целевой динамики для стандартных методов адаптивного управления. С другой стороны, например, физические процессы в лазерах (мультистабильность, нерегулярность решений) [314, 135, 136, 137], химических реакторах (уравнение реакции-диффузии), метаболических сетях, биологических организмах, социальных системах [110, 155, 273, 180, 149, 244, 141, 111, 40, 41] являются примерами систем, в которых такие режимы – естественное динамическое состояние. Отметим и процессы, изоморфные знаменитому “феномену бабочки”, открытому Э.Н. Лоренцом еще в 1963 году [234]. Сущность этого феномена состоит в том, что малейшие возмущения могут оказывать существенное влияние на решение системы. Этот факт сформулирован в известном тезисе Лоренца о влиянии воздушного потока от крыльев бабочки на ураганы, возникающие на удалении в тысячи миль от нее. К классу задач, допускающих неустойчивые по Ляпунову режимы нормального функционирования, следует отнести и проблему управления бифуркациями [215], где целевыми движениями могут быть неустойчивые и хаотические колебания [173],

задачи промежуточной (от англ. – intermittent) и перемежающейся, странствующей (от англ. – itinerancy) синхронизации [204] в системах параллельной аналоговой обработки информации [329, 203, 201, 202].

Все эти процессы не удовлетворяют условиям глобальной устойчивости по Ляпунову и, следовательно, не допускают адаптивного управления стандартными методами без привлечения дополнительных средств регуляризации. Часто таким регуляризирующим средством является введение эталонной модели и дополнительной обратной связи, выполняющей роль стабилизирующего управления по ошибке. Таким образом, осуществление адаптации ставится в прямую зависимость от знания эталонных движений и учета их в функции адаптивного управления. С другой стороны, введение дополнительного стабилизирующего управления по ошибке не всегда возможно и целесообразно (рост размерности системы и как следствие потенциальное понижение качества переходных процессов). Поэтому возникает необходимость в распространении методов адаптивного управления на системы с *неустойчивыми по Ляпунову целевыми режимами*.

Третья группа проблем современной теории адаптивного управления – это *проблемы качества* адаптивных систем. Большинство алгоритмов адаптивного управления [82, 84, 38, 291, 292, 254, 219] гарантируют лишь *устойчивость по Ляпунову* адаптивной системы в расширенном пространстве состояний $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^r$, включающем настраиваемые параметры $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^d$ и состояние наблюдателя $\xi \in \mathbb{R}^r$. При этом зачастую игнорируется тот факт, что свойство устойчивости по Ляпунову гарантирует лишь малость отклонений от положения равновесия при условии малых возмущений. С другой стороны, адаптивные постановки задачи управления в условиях неопределенности оправданы лишь при относительно больших по норме параметрических возмущениях (см. например, работу [162], где иллюстрируется этот тезис на примере методов обхода интегратора). Таким образом, факт устойчивости по Ляпунову адаптивной системы не является показателем качества переходных процессов. Более того, в тех случаях, где устойчивость по Ляпунову является единственной характеристикой системы в дополнение к достижению цели управления на полубесконечном интервале времени, есть все основания усомниться в адекватности (или успешности) применения самого метода функций Ляпунова для синтеза адаптивного управления.

В качестве практически обоснованной меры качества адаптивной системы управления поэтому традиционно считается свойство *асимптотической устойчивости по Ляпунову* [292], что выражается в робастности к малым возмущениям и приемлемом качестве переходных процессов². В адаптивных системах асимптотическая

²См. также [72], где в дополнение к устойчивости вводится и анализируется важное в практическом отношении понятие времени адаптации

устойчивость по Ляпунову и, как следствие, желаемые робастность и качество достигаются за счет выполнения т. н. *условия постоянного возбуждения* [227, 250] (от англ. persistently exciting) или *предельной невырожденности*. Формально для линейного регрессора

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (1.7)$$

это условие может быть сформулировано следующим образом:

О п р е д е л е н и е 1.4.1. *Функция $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}(t))$ называется предельно невырожденной, если существуют такие числа $T, \delta > 0$, что для любого $t > 0$ справедлива следующая оценка:*

$$\int_t^{t+T} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}(\tau)) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}(\tau))^T d\tau \geq \delta I_d.$$

Для того, чтобы регрессор (1.7) удовлетворял свойству предельной невырожденности согласно определению 1.4.1, в общем случае требуется внешнее возбуждение вектора состояния системы, что не всегда возможно на практике. Отсутствие же свойства предельной невырожденности регрессора зачастую влечет невыполнение условий асимптотической устойчивости и, как следствие, к чувствительности к малым возмущениям и отсутствию асимптотической сходимости оценок вектора $\boldsymbol{\theta}$. Следовательно, требуются иные критерии для оценки качества адаптивных систем.

Большинство работ по прямому адаптивному управлению в отсутствие ограничительного требования предельной невырожденности регрессора используют в качестве косвенных показателей качества оценки верхних границ L_2 и L_∞ норм сигналов $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{e}(t)$ или $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ (см., например [191, 219]).

Анализ более совершенных критериев качества, таких, как интегрально-квадратичный критерий, приводится в работах [163, 162]. В этих работах, однако, рассматривается либо слишком узкий класс нелинейных систем [163], либо приводится лишь сравнение между системами робастного и адаптивного управления [162] без предложения новых подходов к синтезу самих алгоритмов адаптации в контексте качества их динамического поведения. С другой стороны, известны *эвристики*, улучшающие качество переходных процессов в адаптивных системах. В частности, это методы адаптивного управления с множественными моделями, предложенные в работах [255, 256]. Кроме того, к числу методов, гарантирующих улучшенные показатели качества адаптивных систем следует отнести и метод обхода интегратора с функциями настройки (от англ. *tuning functions*) [217, 220]. В работе [218] утверждается, что *нелинейный регулятор* основного контура, вытекающий из метода адаптивного обхода интегратора уже для линейных моделей самого объекта управления, превосходит по качеству переходных процессов системы со стандартными адаптивными регуляторами для линейных систем. Однако формальные критерии качества (за исключением все тех же

оценок верхних границ норм L_2 и L_∞ ошибок регулирования) в виде функционалов, вычисляемых в явном виде и *a priori* как функции областей допустимых начальных условий и параметрической неопределенности, в этих работах не вводятся.

Четвертый круг проблем адаптации порождается одной из главных проблем современной теории управления – проблемой получения адекватных с физической точки зрения и математически корректных моделей динамических объектов для синтеза заведомо грубых систем управления. Управление по выходу (адаптивное в том числе) использует математические модели физических объектов в классах дифференциальных уравнений. Это представляется естественным и очевидным. Первый шаг в сторону приближения линеаризованных моделей нелинейных по своей природе реальных объектов и систем состоит в использовании в задачах синтеза законов управления исходно нелинейных моделей в виде нелинейных дифференциальных уравнений. Однако и для таких нелинейных моделей в большинстве случаев информация о поведении системы традиционно формируется в виде измеряемых входов/выходов, т. е. используется первичная измерительная информация. В то же время известно, что фундаментальные свойства нелинейных систем определяются объективно существующими инвариантами (параметрами порядка в синергетике), образуемыми переменными состояния или совокупностью измеряемых переменных. В методе АКАР в качестве таких инвариантов выступают макропеременные, которые могут рассматриваться как *целевые модели* состояния динамической системы.

Проблема адекватной модели и информации о состоянии динамической системы – это и ограниченность классов моделей нелинейных динамических систем, формализуемых в терминах дифференциальных уравнений и для которых получены теоретически (не говоря уже о практически) обоснованные методы и алгоритмы адаптивного управления. Прежде всего, это модели с *линейной параметризацией неопределенности*:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x})\theta_i, \quad \phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T.$$

К очевидным достоинствам таких моделей следует отнести широкий спектр алгоритмов и методов адаптивного управления, разработанных в предположении о линейности функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ по параметру [292, 291, 82, 254, 191, 38]. В частности, линейность модели по неизвестному параметру и как следствие – выполнение принципа суперпозиции – приводят к возможности распространения известных алгоритмов адаптивного управления по выходу для линейных систем [214] на классы нелинейных динамических систем [221, 241, 240, 260].

С другой стороны, значительное число физических процессов описываются нелинейными динамическими моделями с *нелинейной параметризацией*. Это, например, модели процессов в химических и биореакторах [123, 305], модели трения в меха-

нических [101, 102, 128, 267] и биомедицинских [290] системах, модели магнитного потока в индукционных моторах и магнитных подвесах [140, 261] электромеханические клапаны [276], модели управляемых процессов в двигателях внутреннего сгорания, силовых установках кораблей [109] и в перспективных силовых установках гидроводородного принципа действия [150].

Проблема адаптивного управления, где неопределенность математической модели задается нелинейной функцией параметров и состояния содержит и такой класс практически важных задач как адаптивное регулирование *классом динамических систем*. Эта задача по содержательному смыслу наиболее близка к проблеме одновременной стабилизации в классической теории управления [337, 122, 300, 169] и задаче адаптивного управления с множественными моделями [255, 253]. Принципиальная разница, однако, состоит в том, что вместо построения закона управления на основе анализа свойств локальных адаптивных регуляторов с линейной параметризацией, нелинейная постановка задачи позволяет проводить синтез системы управления и анализ ее свойств одновременно и в рамках единой теории.

Подавляющее большинство методов адаптивного управления объектами с нелинейно параметризованными моделями требуют либо введения демпфирующих управлений (компенсаторов нелинейности) [233, 96, 212], либо используют линейно параметризованные мажорирующие управления (доминирование нелинейности) [148, 231, 230, 123]. При этом в обоих случаях задача построения управляющей функции с *нелинейной параметризацией* не решается, но заменяется (за счет использования нелинейного демпфирования и мажорирования) на задачу отыскания управления с *линейной параметризацией*. Таким образом, в теоретическом плане подобные решения остаются в рамках прежней постановки задачи адаптивного управления с линейно параметризованной неопределенностью в замкнутом контуре. Платой за такую подмену является неизбежное понижение качества системы при естественном повышении энергетических затрат на управление (“чрезмерная” компенсация влияния нелинейности).

Необходимость в адаптивном управлении системами с нелинейно параметризованными моделями без привлечения механизмов мажорирования и линеаризации появляется в широком спектре задач обратной (инверсной) биоинженерии, физики и биологии. К таким задачам, прежде всего, следует отнести проблему синтеза систем технического зрения. Адаптация на уровне отдельного элемента здесь продиктована пространственной неоднородностью обрабатываемого изображения и дополнительно мотивируется результатами физиологических исследований [124, 335]. При этом математические модели классических и неклассических настраиваемых рецепторных полей искусственных нейронов в системах обработки визуальной информации как правило нелинейно параметризованы [143]. Использование мажорирующих функций

в алгоритмах адаптации в таких системах автоматически влечет большие энергетические потери вследствие чрезмерной компенсации неопределенности при условии высокой плотности размещения элементов.

В задачах управления проблема недоминирующей адаптации особенно остра в приложениях, где систематическое перерегулирование по управлению приводит к быстрому износу исполнительных устройств, нежелательным вибрациям и перерасходу энергозатрат на реализацию управляемого движения. Типичный пример такой задачи – это управление разгоном/торможением механических систем на колесах в условиях неизвестных и изменяющихся по ходу движения системы свойств дорожного полотна (коэффициента трения). Физически обоснованные математические модели трения в таких системах как правило нелинейны по параметрам [128, 267].

Такие теоретические открытия в физике и биологии, как перемежающаяся синхронизация [168, 203, 204, 202] и самонастройка клеток внутреннего уха в особое состояние на границе устойчивости³ [108, 199, 154] дополнительно подчеркивают необходимость изучения механизмов адаптации без привлечения демпфирования. Примером, иллюстрирующим практическую ценность самонастройки к критическим состояниям и экспериментально подтверждающим возможность технической реализации таких систем в режимах перемежающейся синхронизации, является работа [328]. Наконец, параметрическое управление *самоорганизующимися критическими режимами* – явлением, наблюдаемом в землетрясениях [325], нервной активности мозга человека [116], математическая модель которых в свою очередь описывается системой фазовых осцилляторов с нелинейным возбуждением [294].

Известные в литературе алгоритмы адаптации, не использующие вспомогательно-го демпфирования неопределенности, зачастую являются локальными [206] и представляют в этом смысле лишь теоретический интерес, как возможность распространения применимости адаптивного управления для модели с линейной параметризацией на классы моделей с нелинейной по параметрам неопределенностью при условии *малых параметрических возмущений*. Известные нелокальные результаты для систем с нелинейной параметризацией регулятора и модели [283] и методологически близкие к ним работы [188, 242, 243] для систем с нелинейной параметризацией модели, но с линейно параметризованным регулятором, как отмечают сами авторы [242, 243]: “являются лишь математическим доказательством возможности синтеза адаптивного регулятора и не имеют никакой практической ценности”. Кроме того, условия применимости алгоритмов адаптации в работах [283, 188, 242, 243] содержат

³Математические модели, наиболее точно описывающие это состояние, соответствуют бифуркациям Хопфа, где управляющим параметром служит концентрация ионов K^+ и Ca^{2+} , изменяющая мембранный потенциал клетки. Изменения мембранного потенциала, в свою очередь, инициируют нервные импульсы, исходящие от клетки-детектора звуковых колебаний.

ограничительное требование экспоненциальной устойчивости системы с регулятором основного контура (все параметры известны, адаптации нет), что существенно сужает область применимости (пусть и в исключительно теоретическом плане) результата. Из сказанного очевидна актуальность проблемы синтеза адаптивного управления для классов моделей с нелинейной параметризацией без привлечения доминирования и демпфирования в управлении и без использования гипотезы о малом диапазоне параметрических возмущений.

Пятый круг проблем – это проблемы реализации *адаптивных регуляторов* нелинейными динамическими системами. Суть этих проблем состоит в том, что условие разрешимости задач адаптивного управления нелинейными объектами является, вообще говоря, возможность реализации точно таких же возмущений самим регулятором. Этот тезис известен в литературе как *принцип внутренней модели*. В задаче адаптивного управления нелинейными объектами этот тезис выдвигался многими авторами. Так, например, в [308] показано, что уже для локального управления по выходу в нелинейных системах такая модель действительно необходима. Для линейных систем подобные результаты были получены в середине 70-х годов прошлого столетия в работе [160]. Еще раньше этот же принцип, но с позиций общей теории систем, был обоснован в работе [138]. Таким образом, в силу того, что каждый физический объект с нелинейной динамикой по своему уникален, решение задачи адаптивного управления тоже оказывается уникальным и в этом смысле ограниченным классом доступных физических моделей исследуемых процессов. Другими словами, задача адаптивного регулятора в общем случае не поддается формальной типизации. Ситуация осложняется еще и тем, что сами модели возмущений не всегда известны даже с точностью до класса нелинейностей.

Таким образом, встает задача о выборе самой структуры адаптивного закона управления, в одной стороны удовлетворяющего принципу внутренней модели, а с другой – допускающей достижение целей управления.

1.5. Новый подход к решению проблемы адаптации в нелинейных системах

Анализ эволюции теории адаптивного управления – логических и математических основ адаптивного управления позволяет сформулировать (табл. 1) ключевые характеристики общепринятой или стандартной постановки задач и соответствующих условий их решения, в значительной степени ограничивающих возможность их использования для решения реальных и вместе с тем актуальных задач управления, и сравнительные характеристики нового подхода к решению проблемы адаптации в управляемых системах физическими объектами и процессами в условиях неопреде-

ленности.

Таблица 1.1. Сравнительные характеристики содержательной постановки задач адаптации в управляемых динамических системах

Характеристика	Новая постановка	Стандартные постановки
Адаптация	Асимптотическая компенсация влияния неопределенности с точностью до заданного функционального пространства	Сигнально-параметрическая
Цели управления	Достижение желаемых динамических состояний, в т. ч. неравновесных и неустойчивых по Ляпунову движений	Стабилизация по Ляпунову расширенной системы, отслеживание эталонных (известных) траекторий
Целевые функции	Макропеременные, знание функций Ляпунова не требуется	В классе функций Ляпунова
Качество	Мера качества процессов задается постановкой задачи в зависимости от физических свойств объекта.	Устойчивость по Ляпунову и ограниченность траекторий
Модели объектов	Дифференциальные уравнения, отображения “вход-выход”	Дифференциальные уравнения (известные)
Классы моделируемых неопределенностей	а) параметрическая; б) сигнальная; в) функциональная; относительно уравнений динамики макропеременных	а) параметрическая; б) сигнальная; в) функциональная; относительно уравнений модели объекта
Классы моделей неопределенности	Допускаются нелинейно параметризованные и невыпуклые модели неопределенности	Линейные по параметру модели неопределенности
Адекватность моделей	Сильная. Используются исходно нелинейные модели адекватные физической сущности самих объектов	Слабая, модели упрощенные, “удобные” для используемых методов синтеза
Реализация алгоритмов управления	Алгоритмы адаптации – для классов нелинейностей; реализация законов управления – на типовых элементах	Каждой задаче соответствует уникальное решение

Для решения задач адаптивного управления в новой постановке в системах с неравновесной и неустойчивой целевой динамикой для широкого класса нелинейных динамических систем с использованием информации лишь качественного характера⁴ прежде всего требуется:

1) описание исследуемых объектов на языке, не требующем точное знание диф-

⁴К информации качественного характера в книге относятся макропеременные [26], возможность описания объекта дифференциальными уравнениями, оценки отображений “вход–выход” в заданных функциональных пространствах и т. д.

ференциальных уравнений самого объекта;

2) математический аппарат анализа соединений таких объектов (систем объектов) при условии возможной неустойчивости по Ляпунову положений равновесия, движений или целевых множеств в пространстве состояний объекта.

Искомый математический аппарат должен позволять формулировать принципы желаемой макроорганизации адаптивных систем управления в виде ограничений в функциональных пространствах на свойства отображений “вход-выход”, “вход-состояние” и макропеременные для управляемого объекта, регулятора и их соединений, выполнение которых:

1) гарантирует реализуемость, полноту и ограниченность состояний объекта и регулятора;

2) сохраняет все “типичные”, желаемые, полезные нелинейные эффекты управляемого объекта, включая мульти- и метастабильность, неустойчивость по Ляпунову, неравновесность;

3) устраняет нежелательные эффекты в самом объекте, нежелательное влияние среды, и влияние неопределенности информации об объекте для достижения целей управления.

Исходной информацией на данном этапе являются модели объекта с точностью до оценок отображений “вход-выход” и “вход-состояние” по нормам в заданных функциональных пространствах, а также принадлежность внешних сигналов (возмущений) к конкретным функциональным пространствам.

Полученные принципы и ограничения выступают в качестве основных требований к адаптивному регулятору в задаче синтеза конкретных законов адаптивного управления. Формулировка требований к адаптивному регулятору на языке ограничений в функциональных пространствах потенциально позволит снять проблему устойчивости по Ляпунову целевых движений. Задача синтеза адаптивного регулятора сводится в свою очередь к решению проблемы обеспечения выполнения конкретных функциональных ограничений в нелинейных системах при условии возможной нелинейной параметризации неопределенностей. Исходной информацией для решения задачи синтеза являются макропеременные, классы моделей неопределенности, а также модели объекта с точностью до дифференциальных уравнений целевой динамики и макропеременных.

Для эффективной и потенциально автоматизируемой практической реализации разработанных алгоритмов адаптивного управления нелинейными динамическими объектами требуется решение проблемы реализации полученных нелинейных законов в технических устройствах типовой и однородной архитектуры. В качестве подобных устройств в работе выбираются нейронные сети прямого распространения, математическими моделями которых служат суперпозиции нелинейных непрерывных

функций заданного класса с настраиваемыми параметрами. Исходной информацией для решения задачи реализации являются классы нелинейностей модели объекта с точностью до дифференциальных уравнений целевой динамики и макропеременных, а также условия применимости разработанных алгоритмов управления.

Диаграмма, иллюстрирующая содержание задачи синтеза адаптивных систем в терминах требуемой информации об объекте, классов моделей (уровни описания объекта), необходимых методов анализа и синтеза, их взаимодействие и иерархия (с указанием конкретного раздела в рамках работы) представлена на рис. 1.2.

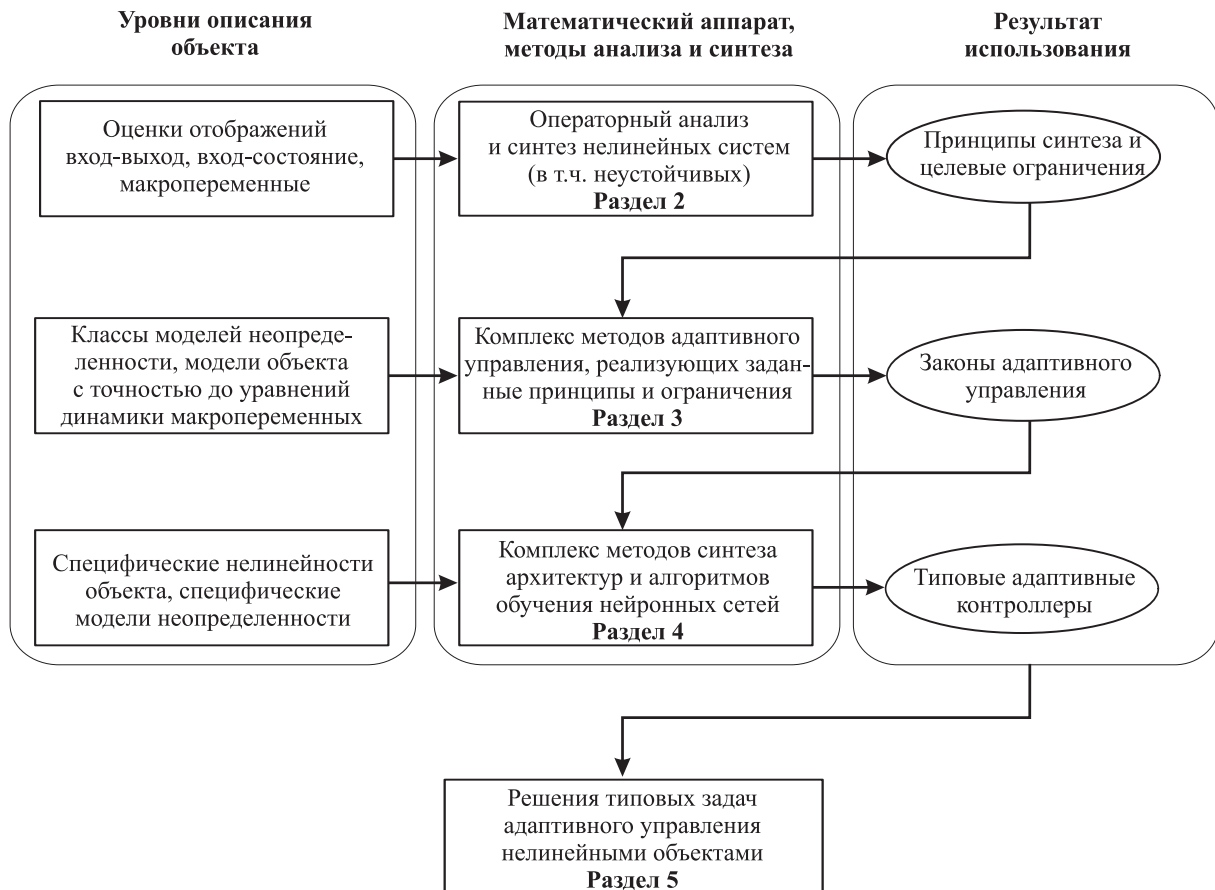


Рисунок 1.2. Содержание теории и методов адаптивного управления нелинейными динамическими объектами с применением нейронных сетей

Нетрудно видеть, что синтез адаптивных систем осуществляется согласно принципу последовательного раскрытия неопределенности [6] и в соответствии с новой содержательной постановкой проблемы адаптации в управляемых системах разбивается на разрешение трех групп проблем, соответственно излагаемых в разделах 2, 3 и 4.

1. Проблемы анализа и синтеза систем и их соединений с использованием ми-

нимально необходимой информации о самом объекте или системе. К такой минимально доступной информации об объекте в работе относятся свойства реальных управляемых объектов или процессов в виде исходно нелинейных уравнений “вход-выход”, “вход-состояние” объекта [344, 196] и макропеременные или параметры порядка таких объектов (процессов) [26, 27, 51]. В число рассматриваемых моделей реальных объектов включаются системы с неустойчивой по Ляпунову целевой динамикой. Кроме того, допускаются объекты с недоопределенными математическими моделями, в том числе, с немоделируемой динамикой. Результатом решения этой группы проблем являются методы анализа свойств соединений систем и принципы построения систем управления объектами в условиях неопределенности (разд. 2).

2. Проблемы синтеза адаптивных регуляторов нелинейными объектами для систем с неустойчивой целевой динамикой, с неопределенностями в целевых функционалах, неявно заданными целевыми множествами, с нелинейной параметризацией и немажорирующим (недоминирующим) управлением. К *качественной информации* об объекте на этапе синтеза нелинейных законов управления относятся задаваемые классы моделей возмущений и неопределенностей (разд. 3).
3. Проблемы реализации типовых или универсальных адаптивных регуляторов для класса нелинейных объектов. Как отмечается в работах авторов [18, 68, 69, 65, 67, 70], решение проблемы типизации и реализации законов адаптивного управления, причем в полном соответствии с принципами внутренней модели [138, 160, 308], может быть получено за счет целенаправленного расширения размерности синтезируемой системы. Другими словами, представлением регулятора системой функций, с одной стороны, с однородным и “типизируемым” базисом, а с другой стороны, плотным в заданном пространстве функций. К таким нелинейным регуляторам относятся в общем случае универсальные аппроксиматоры нелинейных отображений, в первую очередь, такие универсальные аппроксиматоры, как искусственные нейронные сети [198, 183, 39, 59, 60]. Таким образом, проблемы этого круга сводятся к проблемам выбора систем базисных функций, анализом их эффективности (например, с точки зрения скорости сходимости аппроксимационного ряда), методам параметрической настройки выбранных базисов (разд. 4).

2. Функциональный анализ динамических систем

В разделе вводится формальное описание динамических систем в терминах отображений в функциональных пространствах или *оператора* в широком смысле этого слова. Подобное описание, задающее систему в терминах “вход-выход”, оказывается наиболее полным для анализа общих свойств управляемых нелинейных систем. Свойства систем, как отображений в функциональных пространствах, в дальнейшем оказываются существенно важной информацией в задачах синтеза систем управления в общем случае и, в частности, синтеза систем управления с адаптацией.

Так, в частности, показано, что наиболее распространенные определения устойчивости (устойчивость инвариантных множеств по Ляпунову [223], устойчивость решений системы по Ляпунову, устойчивость от входа к состоянию, от входа к выходу и от выхода к состоянию, и наконец, устойчивость систем, заданных оператором [344]) эквивалентны свойству непрерывности некоторого функционального отображения, заданного над специфически определенными функциями входа, областью определения, и выхода, областью значений (теоремы 2.1, 2.3).

Реальные технические и физические системы, однако, не всегда могут быть описаны непрерывными отображениями. Для технических систем сам факт непрерывности отображения в точке в широком смысле слова означает возможность бесконечно близкого приближения к цели. На практике же требуются лишь *достаточно* близкие приближения. При этом колебания самого отображения в соответствующих окрестностях решений могут быть достаточно малой величины, хотя и не равными нулю. В теории динамических систем это соответствует, например, существованию устойчивого предельного цикла в окрестности положения равновесия. Кроме того, в системах с непрерывным оператором при условии, что множество входов не ограничивается лишь управлением и определяется дополнительно взаимодействием со средой (т. е. в открытых системах), свойство непрерывности оператора как отображения может нарушаться по части переменных.

Непрерывные отображения и отображения с ограниченным колебанием, вообще говоря, являются различными математическими объектами и методы анализа систем с непрерывным оператором не могут быть автоматически распространены на новые объекты. Поэтому для описания (асимптотического) поведения таких систем с неравновесной и потенциально неустойчивой динамикой использованы локально ограниченные операторы и определены условия, гарантирующие реализуемость, пол-

ноту и ограниченность состояний для последовательных, параллельных и замкнутых соединений таких систем (теоремы 2.4, 2.5), устанавливаются оценки предельных множеств соединений (следствие 2.1) с учетом лишь качественной информации о системе в целом.

Эти результаты использованы в задаче синтеза управления:

- 1) с *возможностью сохранения* существенно нелинейных эффектов самого объекта как по входу $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{E}_1$, так и по входу $\delta(t) \in \mathcal{L}_\delta[t_0, T]$ в области $\mathcal{D}_0(r(\mathbf{e}_1))$ (свойство устойчивости "вход-выход" для сигналов $\delta(t)$ большой амплитуды из $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$);
- 2) при выполнении требований к *ограниченности состояния* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) \oplus \mathbf{x}_2(t)$ и *выхода* $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_1(t) \oplus \mathbf{y}_2(t)$ всей системы¹;
- 3) *без требований непрерывности* передаточных отображений, что эквивалентно возможности создания неустойчивых целевых движений (см. теоремы 2.3, 2.1);

На основе анализа свойств соединений систем с локально ограниченными операторами поставлена задача функционального синтеза адаптивного регулятора. Дается решение этой задачи, сформулированное в виде *принципа разделения* (теорема 2.6).

Отдельно рассмотрены вопросы функционального анализа класса систем для которых локальная ограниченность соответствующих операторов не является равномерной по времени. Примерами таких систем являются системы с перемежающейся, итинерантной и поисковой динамикой. Для характеристики асимптотического поведения таких систем используется понятие слабого притягивающего множества по Милнору. Разрабатывается метод анализа таких систем и формулируются условия возникновения областей захвата в пространстве состояний (теорема 2.7, или теорема о неравномерном малом контурном усилении). Анализируются асимптотические свойства таких систем (следствие 2.2) и приводятся упрощенные критерии для систем, представимых соединением устойчивой подсистемы с сепарабельной динамикой² и неустойчивой поисковой (следствие 2.3). Кроме того, полученные в следствиях 2.2, 2.3 результаты автоматически приводят к обобщенной теореме о малом контурном усилении для каскадов интегрально устойчивых от входа к состоянию систем с двунаправленными связями (в отличие от известных результатов в этой области для систем с однонаправленными связями [97]).

¹Ограниченность $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{y}_1(t)$ вытекает непосредственно из неравенства (2.60). Условия ограниченности $\mathbf{x}_2(t)$, $\mathbf{y}_2(t)$ определяются из оценок (П2.22), (П2.23) в Приложении 1.

²Частным случаем являются экспоненциально устойчивые системы.

2.1. Операторное описание динамических систем

По аналогии с [17, 47] введем в рассмотрение физический объект \mathcal{O} , взаимодействующий со средой. Будем считать, что над объектом \mathcal{O} возможно провести эксперимент (потенциально многократный) с целью воздействия на объект или для описания объекта в заданных условиях. Кроме того, положим, что выполняются следующие стандартные гипотезы:

- 1) процесс *наблюдения* явным образом не влияет на объект \mathcal{O} ;
- 2) *процессы* в объекте \mathcal{O} описываются вещественными функциями, определенными на непустом подмножестве $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$;
- 3) воздействия \mathbf{u} , \mathbf{e} наблюдателя и среды, и реакция \mathbf{x} объекта \mathcal{O} , и измерения \mathbf{y} этой реакции могут быть описаны вещественными функциями, определенными на \mathcal{T} .

Функции $\mathbf{u} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^m$ будем называть воздействиями наблюдателя или *управлением*, функции $\mathbf{e} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^s$ назовем воздействиями среды или *возмущением*, функции $\mathbf{x} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ назовем реакциями объекта или *состоянием*, а функции $\mathbf{y} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^h$ назовем наблюдениями или просто выходом объекта \mathcal{O} .

Множества допустимых функций $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$, $t \in \mathcal{T}$ обозначим символами \mathcal{U} , \mathcal{E} , \mathcal{X} и \mathcal{Y} соответственно. Дополнительно положим, что множество \mathcal{T} определения функций $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ является *интервалом* на \mathbb{R} . Будем называть интервал \mathcal{T} *интервалом существования* объекта. Максимально возможный допустимый интервал $\mathcal{T}^*(\mathcal{O}, \mathbf{u}, \mathbf{e})$ определения функций $\mathbf{x}(t)$ назовем *временем существования* объекта \mathcal{O} . Очевидно, что время существования объекта \mathcal{O} в общем случае зависит от воздействий $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ и $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$. Однако, если эта зависимость явно определяется из контекста, то вместо записи $\mathcal{T}^*(\mathcal{O}, \mathbf{u}, \mathbf{e})$ будем использовать символ \mathcal{T}^* .

Пример 2.1.1. Примером объекта с конечным временем существования является, например, решение дифференциального уравнения, моделирующего физические эффекты взрывного характера:

$$\dot{x} = x^2 + u, \quad x(t_0) = 0.$$

При $u(t) = \text{const}$, $u \leq 0$ (т. е. при отсутствии воздействия наблюдателя, или при “охлаждении” вещества) время существования объекта совпадает с $[t_0, \infty) \subset \mathbb{R}$. При $u > 0$ (т. е. при нагревании) решение $x(t)$ достигает бесконечно больших значений за конечное время \mathcal{T}^* , и интервал существования объекта $\mathcal{T}^* = [t_0, \mathcal{T}^*)$.

В математической теории *абстрактных систем* понятие “система” вводится как бинарное *отношение* \mathcal{S} , определенное на множестве $\{\mathcal{U} \times \mathcal{E}\} \times \{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}\}$ и заданное

графом $\mathcal{P} \subseteq \{\mathcal{U} \times \mathcal{E}\} \times \{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}\}$. Другими словами, система задается совокупностью пар $(\{\mathbf{u}, \mathbf{e}\}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \in \{\mathcal{U} \times \mathcal{E}\} \times \{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}\}$. При этом допускается, что состояния $\mathbf{x}(t)$ и измерения $\mathbf{y}(t)$ определены не для всех $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$. Формальное определение абстрактной системы как некоторого отношения на множестве входов $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{e}(t)$, состояний $\mathbf{x}(t)$ и выходов $\mathbf{y}(t)$ является одним из наиболее общих в теории систем. Из него, однако, не ясна спецификация причинно-следственных связей между входом и состоянием и входом, состоянием и выходом.

В *динамических системах*, имеющих отношение к техническим и физическим объектам, отношения причинности играют существенное значение. Прежде всего нас будет интересовать свойство реакции $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ объекта по отношению к предъявленным входам $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{e}(t)$. При этом функциональность³ графа $\mathcal{P} \subseteq \{\mathcal{U} \times \mathcal{E}\} \times \{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}\}$ отношения \mathcal{S} не обязательна. Более того, в силу необходимости анализировать открытые системы, требование функциональности графа \mathcal{P} являлось бы существенным ограничением на применимость результатов анализа свойств систем в силу необходимости проверок единственности реакций $\mathbf{x}(t)$, вообще говоря, не полностью известных, на неизвестные воздействия $\mathbf{e}(t)$.

Поэтому, чтобы, во-первых, иметь возможность задавать причинно-следственные связи (направленные взаимодействия) между элементами, составляющими систему, т. е. функциями $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$, а, во-вторых, избежать избыточного и ограничительного требования единственности реакций, введем понятие *системы* \mathcal{S} как совокупности *отображений*.

О п р е д е л е н и е 2.1.1. Системой \mathcal{S} , заданной на множестве входов \mathcal{U} , воздействий среды \mathcal{E} , состояний \mathcal{X} и выходов \mathcal{Y} , будем называть совокупность отображений

$$\mathcal{S}_T : \{\mathbf{u}(t), \mathbf{e}(t)\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{E} \mapsto \{\mathbf{x}(t)\} \subseteq \mathcal{X}; \quad (2.1)$$

$$\mathcal{H}_T : \{\mathbf{u}(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{x}(t)\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{E} \times \mathcal{X} \mapsto \{\mathbf{y}(t)\} \subseteq \mathcal{Y}; \quad (2.2)$$

$$\mathcal{T} = [t_0, T] \subseteq \mathcal{T}^*.$$

Отображение \mathcal{S}_T в (2.1) формально определяет взаимодействие “вход – состояние”, а отображение \mathcal{H}_T в (2.2) формализует взаимодействие “вход, состояние – выход”.

Для возможности сравнения реакций $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ при различных воздействиях $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{e}(t)$ необходимо ввести какую-либо меру близости (метрику) в множествах функций \mathcal{U} , \mathcal{E}^4 , \mathcal{X} и \mathcal{Y} . Кроме того, в подавляющем большинстве технических и

³Граф \mathcal{P} бинарного отношения \mathcal{S} функционален, если для любого $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}\} \in \mathcal{U} \times \mathcal{E}$ найдется один и только один элемент $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

⁴Введение метрики в множестве \mathcal{E} , вообще говоря, не обязательно для всех результатов этого раздела.

физических задач множества функций \mathcal{U} и \mathcal{X} наделены структурой *линейного пространства*. Другими словами, в множестве входов и реакций введены и однозначно определены операции сложения “+”, образующие абелеву группу и внешнего умножения на скаляр “.” (в нашем случае на число из \mathbb{R}) со свойством дистрибутивности по сложению. Поэтому в качестве множеств \mathcal{U} , \mathcal{E} , \mathcal{X} , \mathcal{Y} будем рассматривать, прежде всего, *метрические пространства*. Более того, в ряде случаев будет необходимо сравнивать суммы элементов из \mathcal{U} , \mathcal{E} , \mathcal{X} , \mathcal{Y} и их умножения на скаляр. Поэтому с самого начала будет считать, что \mathcal{U} , \mathcal{E} , \mathcal{X} , \mathcal{Y} – *нормированные пространства* над \mathcal{T} .

Из обширного множества возможных нормированных пространств для задания \mathcal{U} , \mathcal{X} , \mathcal{Y} будем использовать прежде всего *функциональные пространства* $L_p^n[t_0, T]$, $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, $\mathbb{R}_{\geq 1} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\} \cup \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Подобный выбор обусловлен тем, что многие физически значимые свойства функций $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ (например, энергия, мощность, максимальная амплитуда) могут быть установлены непосредственно из значений функциональных норм $\|\cdot\|_{p, [t_0, T]}$. Кроме того, ряд стандартных показателей качества и целевых критериев также могут быть сформулированы на языке функциональных норм в $L_1^n[t_0, T]$, $L_2^n[t_0, T]$ и $L_\infty^n[t_0, T]$.

Пример 2.1.2. Пусть состояние $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и управление $\mathbf{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ определены на интервале $[t_0, T]$ и, кроме того, непрерывны. Тогда записи слева и справа эквивалентны:

- 1) $\int_{t_0}^T \|\mathbf{x}(\tau)\|^2 + \|\mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau \Leftrightarrow (\|\mathbf{x}(t)\|_{2, [t_0, T]})^2 + (\|\mathbf{u}(t)\|_{2, [t_0, T]})^2$;
- 2) $\int_{t_0}^T \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau \Leftrightarrow \|\mathbf{x}(t)\|_{1, [t_0, T]}$;
- 3) $\max_{t \in [t_0, T]} \|\mathbf{x}(t)\| + \int_{t_0}^T \|\mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau \Leftrightarrow \|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} + (\|\mathbf{u}(t)\|_{2, [t_0, T]})^2$.

В отличие от множеств \mathcal{X} , \mathcal{Y} и \mathcal{U} , множество \mathcal{E} удобно задать *линейным нормированным* пространством \mathcal{L}_e . Это продиктовано тем обстоятельством, что воздействия среды не всегда естественно могут быть представлены как функции времени. Так, например, иногда имеет смысл включить в множество \mathcal{E} и неизвестные параметры объекта \mathcal{O} , начальные и граничные условия. Другими словами, те параметры, представление которых функциями времени не всегда возможно или естественно в условиях задачи. Примером такого пространства \mathcal{L}_e является прямая сумма $\mathcal{L}_e = \mathbb{R}^d \oplus L_p[t_0, T]$, где норма $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_e}$ на \mathcal{L}_e индуцируется нормами в \mathbb{R}^d и $L_p[t_0, T]$ соответственно:

$$\forall \mathbf{z} \in \mathcal{L}_e, \mathbf{z} = \boldsymbol{\xi} \oplus \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{\nu} \in L_p[t_0, T] \Rightarrow \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{L}_e} = \|\boldsymbol{\xi}\| + \|\boldsymbol{\nu}(t)\|_{p, [t_0, T]}.$$

Принимая во внимание приведенные рассуждения, будем считать, что множества \mathcal{U} , \mathcal{X} , \mathcal{Y} являются линейными функциональными пространствами \mathcal{L}_u , \mathcal{L}_x , \mathcal{L}_y над интервалом $\mathcal{T} = [t_0, T]$ существования объекта \mathcal{O} . Кроме того, в каждом из этих

пространств определена хотя бы одна $L_p[t_0, T]$ - норма, $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Множество \mathcal{E} зададим некоторым линейным нормированным пространством \mathcal{L}_e с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_e}$. Система S в этом случае может быть рассмотрена не просто как пара отображений \mathcal{S}_T и \mathcal{H}_T , а как совокупность операторов действующих на пространствах \mathcal{L}_u , \mathcal{L}_x , \mathcal{L}_y .

О п р е д е л е н и е 2.1.2. Рассмотрим систему (2.1), (2.2), где множества \mathcal{X} , \mathcal{U} и \mathcal{Y} – пространства функций $\mathcal{L}_x[t_0, T] \subseteq L_q^n[t_0, T]$, $\mathcal{L}_u[t_0, T] \subseteq L_p^m[t_0, T]$ и $\mathcal{L}_y[t_0, T] \subseteq L_k^h[t_0, T]$, $q, p, k \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ соответственно. Будем говорить, что система (2.1), (2.2) задает оператор “вход-состояние” $\mathcal{S}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e})$

$$\mathcal{S}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e}) : \mathcal{L}_u[t_0, T] \times \mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_x[t_0, T], \quad (2.3)$$

и оператор (2.2) задает оператор “вход-выход”(2.2) $\mathcal{H}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e})$

$$\mathcal{H}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e}) : \mathcal{L}_u[t_0, T] \times \mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_y[t_0, T], \quad (2.4)$$

на интервале $T = [t_0, T]$, если и только если выполняется соотношение

$$\mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}_u[t_0, T] \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_x[t_0, T], \quad \forall \mathbf{e} \in \mathcal{E};$$

$$\mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}_u[t_0, T] \Rightarrow \mathbf{y}(t) \in \mathcal{L}_y[t_0, T], \quad \forall \mathbf{e} \in \mathcal{E}.$$

Для анализа свойств систем, заданных операторами “вход-состояние” $\mathcal{S}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e})$ и “вход-выход” $\mathcal{H}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e})$ в смысле определения 2.1.2, необходимо иметь информацию о свойствах преобразования $\mathbf{u}(t)$, \mathbf{e} в $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ по действию операторов $\mathcal{S}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e})$, $\mathcal{H}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e})$. С одной стороны, эта информация должна позволять оценивать и сравнивать в каком-либо смысле свойства реакций в зависимости от свойств входов. С другой стороны, такая информация должна быть достаточно общей и принципиально проверяемой на практике.

В качестве такой информации естественно выбрать функциональные нормы в \mathcal{L}_u и \mathcal{L}_x , \mathcal{L}_y . Как это иллюстрируется примером 2.1.2, функциональные нормы (по крайней мере $L_p[t_0, T]$ -нормы для $p = 1, 2, \infty$) имеют вполне определенный физический смысл, могут выступать как критерии качества систем и, кроме того, их значения могут быть вычислены непосредственно в результате эксперимента. В дополнение, они позволяют сравнивать элементы соответствующих пространств, включая суммы и умножения на число. Следовательно, уместно ввести дополнительную характеристику системы (2.1), (2.2), учитывающую *качественную* связь функциональных норм \mathcal{L}_u и \mathcal{L}_x , \mathcal{L}_y под действием операторов (2.3) и (2.4). С этой целью по аналогии с коэффициентом усиления в линейных системах, введем понятие *нелинейного коэффициента передаточного отображения из \mathcal{L}_u в \mathcal{L}_x (\mathcal{L}_u в \mathcal{L}_y)*.

О п р е д е л е н и е 2.1.3. Будем говорить, что для системы (2.1), (2.2) на интервале $T = [t_0, T]$ определены коэффициенты $\gamma_{S, \mathcal{L}_x}$, $\gamma_{H, \mathcal{L}_y}$ передаточного отображения "вход-состояние" (из \mathcal{L}_u в \mathcal{L}_x) и "вход-выход" (из \mathcal{L}_u в \mathcal{L}_y), если и только если

1) система (2.1), (2.2) задает оператор $\mathcal{S}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e}) : \mathcal{L}_u[t_0, T] \times \mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_x[t_0, T]$ и существует функция $\gamma_{S, \mathcal{L}_x} : \mathcal{L}_e \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, такая, что выполняется неравенство:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_x, [t_0, T]} \leq \gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}, T), \quad (2.5)$$

где функция $\gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}, T)$ – не убывающая по $\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}$, и локально ограничена по всем аргументам;

2) система (2.1), (2.2) задает оператор $\mathcal{H}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e}) : \mathcal{L}_u[t_0, T] \times \mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_y[t_0, T]$ и существует функция $\gamma_{H, \mathcal{L}_y} : \mathcal{L}_e \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, такая, что выполняется неравенство:

$$\|\mathbf{y}(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]} \leq \gamma_{H, \mathcal{L}_y}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}, T), \quad (2.6)$$

где функция $\gamma_{H, \mathcal{L}_y}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}, T)$ – не убывающая по $\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}$, и локально ограничена по всем аргументам.

Коэффициенты $\gamma_{S, \mathcal{L}_x}$, $\gamma_{H, \mathcal{L}_y}$ передаточного отображения "вход-состояние" (из \mathcal{L}_u в \mathcal{L}_x) и "вход-выход" (из \mathcal{L}_u в \mathcal{L}_y), как следует из определения 2.1.3, являются функциями своих аргументов и в этом смысле однозначно определяют поведение системы в терминах отношений норм соответствующих линейных пространств. С другой стороны, они могут быть определены не единственным образом и поэтому сами по себе не могут однозначно задавать систему (2.1), (2.2). Кроме того, одна и та же система \mathcal{S} может иметь несколько различных коэффициентов передаточных отображений "вход-состояние" и "вход-выход" в зависимости от того, каким образом определены нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_x}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_y}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_u}$ в (2.5), (2.6). Это свойство иллюстрируется примером 2.1.3.

П р и м е р 2.1.3. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u, \quad x(t_0) \in \mathcal{E} \subset \mathbb{R} \\ y &= x, \quad T = [t_0, T], \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $u \in C^0[t_0, T]$ и $u \in L_\infty^1[t_0, T] \cap L_2^1[t_0, T]$. Система (2.7), очевидно, задает оператор "вход-состояние" $\mathcal{S}_T : L_\infty^1[t_0, T] \cap L_2^1[t_0, T] \times \mathcal{E} \mapsto L_\infty^1[t_0, T] \cap L_2^1[t_0, T]$. При этом для системы (2.7) определены сразу четыре коэффициента передаточных отображений $L_2^1 \mapsto L_\infty^1$, $L_2^1 \mapsto L_2^1$, $L_\infty^1 \mapsto L_2^1$, $L_\infty^1 \mapsto L_\infty^1$.

В реальных технических и физических системах практически важным для анализа случаев является существование коэффициентов передаточных отображений для пространств $\mathcal{L}_x \subseteq L_\infty^n[t_0, T]$, $\mathcal{L}_y \subseteq L_\infty^h[t_0, T]$ и, соответственно, норм $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_x} = \|\cdot\|_{\infty, [t_0, T]}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_y} = \|\cdot\|_{\infty, [t_0, T]}$. Такие коэффициенты будем обозначать символами $\gamma_{S, \infty}$ и $\gamma_{H, \infty}$. Существование коэффициентов $\gamma_{S, \infty}$ и $\gamma_{H, \infty}$ означает, что существует не пустой интервал времени \mathcal{T} , на котором состояние и выходы системы (2.1), (2.2) являются ограниченными функциями времени, что в свою очередь является необходимым условием физической и технической *реализуемости* такой системы.

О п р е д е л е н и е 2.1.4. Система S называется

1) *реализуемой*, если для каждого $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_u$ и $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$ существует число $T(\mathbf{u}, \mathbf{e}) > t_0$ такое, что

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} < \infty; \quad (2.8)$$

$$\|\mathbf{y}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} < \infty; \quad (2.9)$$

2) *реализуемой с передаточным отображением по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_u}$* , если для каждого $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$ существует такое число $T(\mathbf{e}) > t_0$, что в системе S на интервале $\mathcal{T} = [t_0, T]$ определены коэффициенты $\gamma_{S, \infty}$ и $\gamma_{H, \infty}$ соответствующих передаточных отображений. А именно, выполняются неравенства

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} \leq \gamma_{S, \infty}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}, T); \quad (2.10)$$

$$\|\mathbf{y}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} \leq \gamma_{H, \infty}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}, T). \quad (2.11)$$

Интервал $\mathcal{T} = [t_0, T]$ будем называть интервалом реализуемости системы при заданных $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_u$, $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$.

Свойство реализуемости, например, всегда выполнено для систем, заданными обыкновенными дифференциальными уравнениями с непрерывными правыми частями при условии, что функции $\mathbf{u}(t) \in C^0$. Это вытекает непосредственно из теоремы о существовании решения дифференциального уравнения. Отметим, что определение 2.1.4 предполагает и существование норм $\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}$ для входов, реализуемых по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}$ систем. В дополнение, свойство реализуемости системы на интервале \mathcal{T} позволяет сформулировать важное в практическом отношении понятие *полноты* системы.

О п р е д е л е н и е 2.1.5. Систему S будем называть

1) *полной*, если она реализуема на (полу) бесконечном интервале времени \mathcal{T} ;

2) полной с передаточным отображением по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_u}$, если она полна и существуют такие коэффициенты $\gamma_{S,\infty}$ и $\gamma_{H,\infty}$ передаточных отображений, что неравенства (2.10), (2.11) выполнены для всех $T \geq t_0$.

Свойство полноты системы, по-сути, означает, что интервал существования системы как объекта исследования совпадает с интервалом $[t_0, \infty]$. Для систем, заданных дифференциальными уравнениями свойство полноты эквивалентно гарантии существования решения $\mathbf{x}(t)$ на сколь угодно большом интервале времени при всех $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$ и $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}_u$.

Сам факт полноты некоторой системы (2.1), (2.2) в смысле определения 2.1.5 в большинстве случаев не нуждается в доказательстве. Зачастую это свойство выполнено по умолчанию, например, для самих управляемых физических или технических объектов, за исключением, пожалуй, экзотических случаев, подобных примеру 2.1.1. Однако в задачах синтеза и анализа систем полнота *соединения* элементарных блоков (наблюдатель, алгоритм адаптации, регулятор) при допущении, что сам объект может быть неустойчивым, с конечным временем существования и неустойчивой целевой динамикой, оказывается важным вопросом исследования таких соединений.

Необходимость введения понятий реализуемости и полноты системы в работе продиктована еще и тем, что существенная часть вопросов в теории управления касается прежде всего *асимптотических свойств*, при $t \rightarrow \infty$, поведения (состояний, выходов, входов и т.п.) исследуемой системы. Это означает, что нас интересуют отображения $\mathcal{S}_{[t_0, \infty]}(\mathbf{u}, \mathbf{e}) : \mathcal{L}_u[t_0, \infty] \times \mathcal{E} \mapsto L_\infty[t_0, \infty]$. Однако известны объекты из класса систем, заданных линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами (см. пример 2.1.4), для которых такие отображения определены не для всех $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$. Следовательно, анализ (и синтез) таких систем в терминах норм $\|\cdot\|_{\infty, [t_0, \infty]}$ оказывается невозможным. С другой стороны, эти системы обладают свойством реализуемости и полноты, что позволяет анализировать их поведение в терминах функциональных норм $\|\cdot\|_{\infty, [t_0, T]}$. Это, в свою очередь, дает возможность отыскать классы $\mathcal{U}_c \subset \mathcal{L}_u$ функций $\mathbf{u}(t)$ (задача анализа), гарантирующие существование оператора $\mathcal{S}_{[t_0, T]}(\mathbf{u}, \mathbf{e}) : \mathcal{U}_c[t_0, T] \times \mathcal{E} \mapsto L_\infty[t_0, T]$ при $T \rightarrow \infty$ уже для всех $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$ и таким образом обеспечить *существование* решения задачи синтеза.

П р и м е р 2.1.4. Рассмотрим объект, заданный системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1, \quad (2.12)$$

$$\dot{x}_2 = \lambda x_2 + u, \quad \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \quad x_1(t_0), x_2(t_0) \in \mathbb{R},$$

где $u(t) \in \mathcal{L}_u \subseteq L_\infty^1[t_0, \infty] \cap C^0[t_0, \infty]$. Естественно отнести значения $x_1(t_0), x_2(t_0)$ к множеству $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ воздействий среды. Система (2.12) является реализуемой и

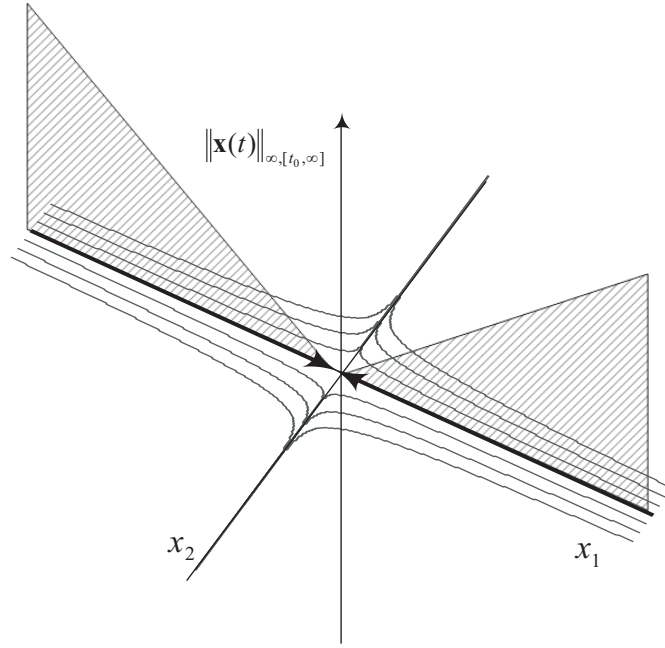


Рисунок 2.1. Область определения оператора $S_{[t_0, \infty]}(u, \mathbf{e}) : \mathcal{L}_u \times \mathbb{R}^2 \mapsto L_\infty^2[t_0, \infty]$ для системы (2.12) при $u(t) = 0$, $t \in [t_0, \infty]$

полной в смысле определений 2.1.4, 2.1.5. Однако оператор $S_{[t_0, \infty]}(u, \mathbf{e}) : \mathcal{L}_u \times \mathcal{E} \mapsto L_\infty^2[t_0, \infty]$ существует не для всех пар $(x_1(t_0), x_2(t_0)) = (e_1, e_2) \in \mathcal{E}$. В частности, при $u(t) = 0$ оператор $S_{[t_0, \infty]}$ определен лишь на *устойчивом* многообразии $\mathcal{C}_s = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$ [173] пространства решений системы (2.12). Иллюстрация к этому примеру приведена на рис. 2.1.

Пример 2.1.4 иллюстрирует качественную разницу между анализом систем в пространствах $\mathcal{L}_x[t_0, T]$ и $\mathcal{L}_x[t_0, \infty]$ с нормами $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_x[t_0, T]}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_x[t_0, \infty]}$ соответственно. Так, например, в пространствах $\mathcal{L}_x[t_0, \infty]$ даже для “хороших” реализуемых систем, обладающих свойством полноты, отображение $\mathcal{S}_{[t_0, \infty]}(\mathbf{u}, \mathbf{e})$ может оказаться сингулярным в некоторых точках (областях) $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{L}_u[t_0, \infty]$, $\mathbf{e}_0 \in \mathcal{E}$. В частности, для объектов, заданных системой стационарных дифференциальных уравнений с гладкой правой частью и начальными условиями из \mathcal{E} , область существования оператора $\mathcal{S}_{[t_0, \infty]}(0, \mathbf{e})$ ограничена множеством $\mathcal{E} \cap \mathcal{C}_s$, где \mathcal{C}_s – устойчивое многообразие пространства решений системы при $\mathbf{u}(t) = 0$ для всех $t \in [t_0, \infty]$.

Это, в свою очередь, служит иллюстрацией того, что такая характеристика асимптотического поведения системы, как устойчивость по Ляпунову, может быть связана с *отсутствием/наличием сингулярности* у задающего систему оператора. Факт возможного наличия такой сингулярности определяет специфику постановок задач и

набор допустимых методов анализа и синтеза для этих систем.

Поэтому для анализа и последующего синтеза адаптивных систем на основе лишь качественной информации о свойствах операторов “вход-выход” и “вход-состояние” необходимо прежде всего сформулировать отличительные характеристики устойчивых и допустимых неустойчивых систем.

2.2. Свойства операторов устойчивых систем

Традиционно понятия устойчивости систем формулируются с привлечением понятия *фазового потока* динамических систем [223], где сам фазовый поток определяется как отображение

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0), \quad \mathbf{x} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (2.13)$$

удовлетворяющее условию

$$\mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Физический смысл аргументов отображения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ – это текущий момент времени t , вектор начальных условий $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и начальный момент времени t_0 . В силу того, что в задаче анализа устойчивости начальные условия предполагаются заданными *a priori*, можно рассматривать пару (\mathbf{x}_0, t_0) как элемент подпространства $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ пространства \mathcal{E} *воздействий среды*. Следовательно, фазовый поток (2.13) уместно рассматривать как отображение, которое переводит пару $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ в элемент из пространства функций $L_\infty^n[t_0, T]$ аргумента t . Таким образом, с фазовым потоком (2.13) можно соотнести *эквивалентную систему*:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_T : \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_x \subseteq L_\infty^n[t_0, T], \\ \mathcal{H}_T : \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_y \subseteq L_\infty^n[t_0, T], \end{aligned} \quad (2.14)$$

определенную на интервале $\mathcal{T} = [t_0, T]$, с входом из \mathcal{E} и выходом из \mathcal{L}_x .

Положим, что существует *положительно инвариантное множество* (в смысле определения 1.3.1) $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ по отношению к фазовому потоку $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$. Приведем наиболее общее определение устойчивости по Ляпунову инвариантного множества Ω^* относительно фазового потока $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$.

Прежде всего введем в рассмотрение меру близости решений $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ к множеству Ω^* . Стандартной мерой в задачах исследования устойчивости является *функциональная норма*, индуцированная мерой близости $\|\mathbf{x}\|_{\Omega^*} = \text{dist}(\Omega^*, \mathbf{x})$ в пространстве \mathbb{R}^n точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и множества $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} = \sup_{t \geq t_0} \text{dist}(\Omega^*, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)). \quad (2.15)$$

О п р е д е л е н и е 2.2.1. Инвариантное множество Ω^* по отношению к фазовому потоку $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ системы (2.14) называется

1) *устойчивым по Ляпунову*, если система (2.14) является полной в достаточно большой окрестности множества Ω^* , и для любой ε -окрестности $\mathcal{V}(\Omega^*, \varepsilon)$ множества Ω^* существует такое $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что для всех $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}(\Omega^*, \delta(\varepsilon, t_0))$ выполнено следующее соотношение:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \in \mathcal{V}(\Omega^*, \varepsilon) \quad \forall t \geq t_0,$$

или

$$\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*} < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} < \varepsilon; \quad (2.16)$$

2) *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0), \Omega^*) = 0.$$

Определение 2.2.1 является обобщением понятий устойчивости положения равновесия [207], устойчивости по части переменных, [49, 9, 333], и устойчивости по функции [38]. В некотором роде инверсным свойству устойчивости по Ляпунову является устойчивость множества по Лагранжу.

О п р е д е л е н и е 2.2.2. Инвариантное множество Ω^* является устойчивым по Лагранжу, если для любого ограниченного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что для всех $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}(\Omega^*, \varepsilon)$ множество $\mathcal{V}(\Omega^*, \delta(\varepsilon, t_0))$ является положительно инвариантным по отношению к потоку $\mathbf{x}_f(t, \mathbf{x}_0, t_0)$. Другими словами,

$$\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*} < \varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*} < \delta(\varepsilon, t_0). \quad (2.17)$$

Как вытекает из определений 2.2.1, 2.2.2 свойство устойчивости инвариантных множеств характеризует *локальное* поведение динамических систем, т. е. в окрестности заданного инвариантного множества $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$. В случае, если объектом исследования является конкретный элемент $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{I}m(\mathcal{S}_T) \subseteq \mathcal{L}_x$ из пространства состояний \mathcal{L}_x системы (2.14), называемый *решением* системы, а не отклонение всех решений от инвариантного множества Ω^* , используется понятие устойчивости *решения*.

О п р е д е л е н и е 2.2.3. Решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ называется

1) *устойчивым по Ляпунову в области $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$* , если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon, t_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0)$, что

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| < \delta(\varepsilon, t_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, t_0)\|_{\infty, [t_0, \infty]} < \varepsilon, \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathcal{X}; \quad (2.18)$$

2) асимптотически устойчивым по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову и при этом выполняется следующее предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, t_0)) = 0.$$

Практически важным применением понятия устойчивости решения системы (2.14) в теории регулирования нелинейных систем является, например, свойство *конвергентности* систем [11]. Развитие теории конвергентных систем [11], приведенное в работах [271, 272], позволило снять стандартное ограничение *локальности* для класса нелинейных систем в задаче управления по выходу. Существенным является то, что именно переход от анализа *малых отклонений* от инвариантных множеств и использования теоремы о центральном многообразии [192] к *анализу поведения решений* на полубесконечных интервалах и, соответственно, применению теоремы об инвариантном многообразии [272], позволил построить теорию *нелокального регулирования по выходу*.

Несмотря на очевидные различия в определениях устойчивости 2.2.1–2.2.3, эти определения формулируют общие свойства систем с позиции их операторных характеристик. Такими операторными характеристиками устойчивости в определениях 2.2.1–2.2.3 являются свойства передаточного отображения \mathcal{S}_T и функции $\gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, T)$, представимой в виде

$$\gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, T) = \gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{x}_0 \oplus t_0, T) = \gamma_{S, L_\infty}(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0), \quad (2.19)$$

Эти свойства сформулированы в следующей теореме.

Т е о р е м а 2.1. *Для того, чтобы система (2.14) была устойчивой в смысле определения 2.2.1, необходимо и достаточно выполнения следующих альтернатив:*

1.1) *чтобы отображение $\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathcal{S}_T(\mathbf{x}_0 \oplus t_0)$, $T = [t_0, \infty]$ из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ в пространство $\mathcal{L}_x \subseteq L_\infty^n[t_0, \infty]$ с метрикой (2.15) было непрерывно по \mathbf{x}_0 в окрестности $\mathcal{V}(\Omega^*, \varepsilon)$ для всех $t_0 \in \mathbb{R}$;*

1.2) *коэффициент $\gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, T)$ отображения \mathcal{S}_T , представимым в виде (2.19), где функция $\gamma_{S, L_\infty}(0, t_0) = 0$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ локально ограничена по t_0 , непрерывна и не убывает по $\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}$ в окрестности нуля.*

Для устойчивости в смысле определения 2.2.2 необходимо и достаточно выполнения альтернатив:

2.1) *чтобы отображение $\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathcal{S}_T(\mathbf{x}_0 \oplus t_0)$, $T = [t_0, \infty]$ из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ в пространство $\mathcal{L}_x \subseteq L_\infty^n[t_0, \infty]$ с метрикой (2.15) было локально ограничено по \mathbf{x}_0 в окрестности $\mathcal{V}(\Omega^*, \varepsilon)$ для всех $t_0 \in \mathbb{R}$;*

2.2) коэффициент $\gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, T)$ отображения \mathcal{S}_T , представимым в виде (2.19), где функция $\gamma_{S, L_\infty}(0, t_0) = 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}$, локально ограничена по $t_0, \|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}$ (в окрестности нуля).

Устойчивость в смысле определения 2.2.3 эквивалентна

3) непрерывности по $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ отображения $\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathcal{S}_T(\mathbf{x}_0 \oplus t_0), T = [t_0, \infty], T = [t_0, \infty]$ из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ в пространство $\mathcal{L}_x \subseteq L_\infty^n[t_0, \infty]$ со стандартной метрикой в $L_\infty^n[t_0, T]$.

Как следует из теоремы 2.1, понятия устойчивости по Ляпунову инвариантного множества и решения эквивалентны свойству непрерывности соответствующих отображений метрических пространств в функциональные метрические пространства. В каждом случае, однако, непрерывность определяется относительно специфических норм функционального пространства \mathcal{L}_x . Свойство устойчивости по Лагранжу, в свою очередь, оказывается эквивалентно локальной ограниченности отображения $\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0)$. Существенным оказывается и то, что для устойчивых систем (2.14) существуют коэффициенты $\gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, T)$ передаточных отображений, не зависящие в явном виде от T .

Понятия устойчивости по Ляпунову инвариантных множеств и решений систем характеризуют свойства системы без учета специфики влияния внешних возмущений и входов на решение. Эти ключевые понятия теории систем формулируются для всех допустимых воздействий $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$, которые не меняют, например, определение системы в виде записи (2.14). Влияние *моделируемых* возмущений ограничено, однако, лишь элементами из линейного пространства \mathcal{E}_0 . При этом свойство устойчивости в определениях 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 должно выполняться для всех $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$. Таким образом, стандартные определения устойчивости по Ляпунову инвариантного множества или решения характеризуют лишь влияние начальных условий на состояние $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_x$ системы (2.14), оставляя за пределами рассмотрения специфику реакции объекта на классы входов $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}_u$. Эта специфика, тем не менее, имеет существенное значение в задачах анализа и синтеза *соединений* систем и при исследовании асимптотического поведения объектов при наличии возмущений.

Для оценки асимптотического поведения систем с входом и выходом в работах [344, 302, 296, 216] вводятся понятия устойчивости “вход-выход”, “вход-состояние”, “вход-выход-состояние”. При этом обычно считается, что состояние $\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, T]$, а $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}_u[t_0, T]$. Множество \mathcal{E} воздействий среды, аналогично предыдущему случаю, задается прямой суммой $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$. Тогда, согласно определению 2.1.2, будем

считать, что система задана парой операторов

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_T : \mathcal{L}_u \times \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_x \subseteq L_\infty^n[t_0, T], \\ \mathcal{H}_T : \mathcal{L}_u \times \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_y \subseteq L_\infty^n[t_0, T].\end{aligned}\tag{2.20}$$

Кроме того, положим, что система (2.20) реализуема и полна. Следуя [344, 207], дадим определение устойчивости “вход-выход”.

О п р е д е л е н и е 2.2.4. Система (2.20) называется устойчивой от входа к выходу, если существует функция $\alpha \in \mathcal{K}$ и число $\beta > 0$ такие, что для всех $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}_u[t_0, \infty] \cap \mathcal{L}_y[t_0, T]$ и $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{y}(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]} \leq \alpha(\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]}) + \beta.\tag{2.21}$$

Система называется устойчивой от входа к выходу с конечным коэффициентом передачи, если существует такое число $\gamma > 0$, что выполняется неравенство

$$\|\mathbf{y}(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]} \leq \gamma \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]} + \beta.\tag{2.22}$$

Устойчивость “вход-выход” (так называемая L -устойчивость [207], если рассматриваются линейные пространства L_p), естественным образом вводит такую практически важную характеристику систем, как коэффициент передачи. Это понятие, в свою очередь, оказывается ключевым для операторного анализа соединений нелинейных систем с обратными связями.

П р и м е р 2.2.1. Рассмотрим соединение двух систем $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ с операторами “вход-выход” $\mathcal{H}_{1,T}$ и $\mathcal{H}_{2,T}$:

$$\mathcal{H}_{1,T} : \mathbf{y}_1(t) = \mathcal{H}_{1,T}(\mathbf{u}_1(t)),$$

$$\mathcal{H}_{2,T} : \mathbf{y}_2(t) = \mathcal{H}_{2,T}(\mathbf{u}_2(t)),$$

изображенное на рис. 2.2. Как показано в работе [344], если произведение $\gamma_1\gamma_2$ (или композиция $\alpha_1 \circ \alpha_2$) коэффициентов передачи γ_1 и γ_2 двух систем строго меньше единицы, то замкнутое соединение таких систем оказывается устойчивым от входа к выходу. Точная формулировка этого результата дается *теоремой 2.2 о малом контурном усилении* [207, 344].

Т е о р е м а 2.2. Пусть заданы две полные и устойчивые от входа к выходу системы $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$:

$$\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]} \leq \gamma_1 \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]} + \beta_1,$$

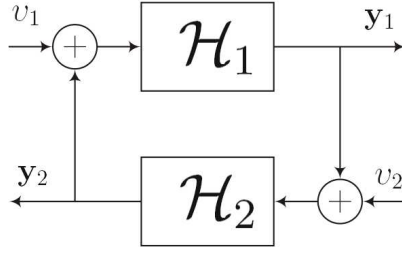


Рисунок 2.2. Соединение систем с обратной связью

$$\|\mathbf{y}_2(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]} \leq \gamma_2 \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]} + \beta_2.$$

Тогда замкнутое соединение систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 устойчиво от входа v_1 (v_2) к выходу y_1 (y_2) с конечным коэффициентом передачи при условии, что

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1. \quad (2.23)$$

Известны обобщения этого фундаментального результата с привлечением понятия *практической устойчивости от входа к выходу* [196]:

О п р е д е л е н и е 2.2.5. Система (2.20) называется *практически устойчивой от входа к выходу*, если существуют функция $\alpha \in \mathcal{K}$, $\beta \in \mathcal{KL}$ и число $D > 0$ такие, что для всех $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}_u[t_0, \infty] \cap \mathcal{L}_y[t_0, T]$ и $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}_0\|, t) + \alpha(\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]}) + D. \quad (2.24)$$

Теоремы о малом контурном усилении являются одним из наиболее эффективных критериев устойчивости в операторном анализе систем, и, как следствие, понятие устойчивости “вход-выход” оказывается существенным в задаче анализа свойств соединений *устойчивых систем*. Устойчивость “вход-выход”, однако, никак не характеризует поведение состояния $\mathbf{x}(t)$. С целью компенсации этого недостатка в работах [302, 216, 296] вводятся понятия устойчивости “вход-состояние”, “выход-состояние” и “вход-выход состояние”.

О п р е д е л е н и е 2.2.6. Система (2.1), (2.2) называется:

1) *глобально устойчивой от входа к состоянию относительно инвариантного множества* $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$, если она полна и, кроме того, существуют функции $\gamma \in \mathcal{K}$, $\beta \in \mathcal{KL}$ такие, что для любых $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq t_0$ фазовый поток системы удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*} \leq \beta(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t) + \gamma(\|\mathbf{u}(\tau)\|_{\infty, [t_0, t]}); \quad (2.25)$$

2) глобально интегрально устойчивой от входа к состоянию относительно инвариантного множества $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$, если она полна и, кроме того, существуют функции $\gamma \in \mathcal{K}$, $\beta \in \mathcal{KL}$ такие, что для любых $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq t_0$ фазовый поток системы удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*} \leq \beta(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t) + \int_{t_0}^t \gamma(\|\mathbf{u}(\tau)\|) d\tau; \quad (2.26)$$

3) глобально устойчива от входа к выходу и состоянию относительно инвариантного множества $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$, если она полна и существуют функции $\gamma_u \in \mathcal{K}$, $\gamma_y \in \mathcal{K}$, $\beta \in \mathcal{KL}$ такие, что для всех $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$ выполнено неравенство

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*} \leq \beta(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t) + \gamma_u(\|\mathbf{u}(\tau)\|_{\infty, [0, t]}) + \gamma_y(\|\mathbf{y}(\tau)\|_{\infty, [t_0, t]}); \quad (2.27)$$

4) глобально устойчива от выхода к состоянию, если существуют функции $\gamma_y \in \mathcal{K}$, $\beta \in \mathcal{KL}$ такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*} \leq \beta(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t) + \gamma_y(\|\mathbf{y}(\tau)\|_{\infty, [t_0, t]}). \quad (2.28)$$

В работе [302] показано, что свойство устойчивости от входа к состоянию эквивалентно существованию специальной функции Ляпунова для исходной системы. Кроме того, в этой же работе доказывается, что устойчивость “вход-состояние” влечет глобальную асимптотическую устойчивость инвариантного множества Ω^* при $\mathbf{u}(t) = 0$. Устойчивость от выхода к состоянию является необходимым и достаточным условием обнаруживаемости состояния по выходу [296].

Аналогично случаю автономных систем (2.14), понятия устойчивости в определениях 2.2.4, 2.2.6 для систем с входом и выходом (2.20) в некотором роде эквивалентны и одинаковым образом характеризуют реакцию объекта на различные воздействия из множества $\mathcal{L}_u \times \mathcal{E}$. Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.3. Для того, чтобы система (2.20) была:

1) устойчивой от входа к выходу в смысле определения 2.2.4 необходимо существование локально ограниченного по \mathbf{e} , непрерывного по $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]}$ и ограниченного по T коэффициента $\gamma_{H, \mathcal{L}_y}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]}, T)$ передаточного отображения “вход-выход”;

2) устойчивой от входа к состоянию необходимо существование коэффициента $\gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}, T)$ передаточного отображения “вход-состояние”, представимого в виде

$$\gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}, T) = \gamma_{S, L_\infty}(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}, T),$$

где функция $\gamma_{S,L_\infty}(\cdot)$ непрерывна по $\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}$, $\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u,[t_0,T]}$, локально ограничена по t_0 , ограничена по T и $\gamma_{S,L_\infty}(0, t_0, 0, T) = 0$ для всех $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \geq t_0$;

Операторные характеристики интегральной устойчивости “вход-состояние” могут быть рассмотрены как частный случай устойчивости “вход-состояние” с той лишь разницей, что $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_\gamma$, где \mathcal{L}_γ - пространство всех функций $\mathbf{u} : \int_{t_0}^T \gamma(\|\mathbf{u}(\tau)\|) d\tau < \infty$. При этом определение нормы (или в общем случае метрики) в \mathcal{L}_γ требует отдельного рассмотрения в зависимости от свойств функции $\gamma(\cdot)$.

Характеристики устойчивости от входа к выходу и состоянию и от выхода ко входу могут быть переформулированы в терминах устойчивости “вход-состояние” в силу монотонности функции $\gamma_y(\cdot)$ и существования $\gamma_{H,L_\infty}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u,[t_0,T]}, T)$:

$$\gamma_y(\|\mathbf{y}(t)\|_{\infty,[t_0,T]}) \leq \gamma_y(\gamma_{H,L_\infty}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u,[t_0,T]}, T)).$$

Операторные характеристики, приведенные в теоремах 2.1, 2.3, позволяют выделить необходимые и достаточные свойства операторов устойчивых систем. Анализ этих свойств, в свою очередь, позволяет обосновать круг первостепенных проблем анализа асимптотического поведения неустойчивых систем и формально поставить задачу управления системами, заданных операторными соотношениями “вход-выход” (2.4) и “вход-состояние” (2.3).

2.3. Постановка задачи функционального анализа и регулирования неравновесных, открытых и неустойчивых систем

Как вытекает из анализа свойств устойчивых систем, в наиболее широко используемых определениях 2.2.1–2.2.6, эквивалентные операторные характеристики устойчивости по Ляпунову (теорема 2.1) – это непрерывность отображения $\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0)$ по \mathbf{x}_0 или непрерывность нелинейных коэффициентов γ_{S,L_∞} передаточных отображений. Устойчивость по Ляпунову зачастую является критерием работоспособности систем и подавляющее большинство методов синтеза систем управления направлены, прежде всего, на обеспечение этого качества. В этом смысле, очевидно, свойство непрерывности оператора, как эквивалент устойчивости по Ляпунову, является синонимом работоспособности.

Свойство непрерывности оператора позволяет эффективно применять методы математического анализа для исследования асимптотических свойств соединений устойчивых систем. Так, в частности, именно непрерывность оказывается *необходимым* условием применения теоремы 2.2 о малом контурном усилении в вопросах анализа замкнутых нелинейных систем. Свойство равномерной непрерывности также оказывается ключевым в вопросах анализа *аттрактивности* инвариантных множеств

соединений устойчивых от входа к состоянию систем [296]. Кроме того, это свойство автоматически гарантирует сохранение устойчивости последовательного соединения устойчивых от входа к состоянию (выходу) систем.

Известна и связь непрерывности коэффициентов передаточных отображений для устойчивых систем от входа к выходу (L_2 -устойчивых) со свойством строгой пассивности по выходу нелинейных систем. А именно, как показано в [207], строгая пассивность по выходу влечет L_2 -устойчивость от входа к выходу. Следовательно, согласно теореме 2.1, существование оператора системы с непрерывным коэффициентом $\gamma_{S, \mathcal{L}_x}$ передаточного отображения из L_2 в L_2 является *необходимым* условием строгой пассивности по выходу.

Несмотря на перечисленные достоинства такой характеристики работоспособных систем, как непрерывность оператора, практическая проверка этого свойства и, как следствие, возможность использования методов анализа и синтеза таких систем не всегда возможна и эффективно реализуема.

Прежде всего, для сложных физических систем сам факт проверки непрерывности оператора от входа к состоянию подразумевает предварительно решение задачи идентификации состояния объекта. С другой стороны, если такая идентификация все же успешно проведена, то проверка непрерывности оператора оказывается осложнена неизбежным наличием шумов в измерительных данных. Более того, сам факт возможности эффективного исследования непрерывности отображения зависит прежде всего от знания модели физических объектов с точностью до всех значимых состояний. Другими словами, даже устойчивые объекты могут оказаться неустойчивыми в нашем понимании уже при условии, что вектор состояния объекта и модели не полностью адекватны.

Для математических объектов, например, для моделей в пространстве состояний, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{f} \in C^0, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^h\end{aligned}\tag{2.29}$$

проверка непрерывности оператора зачастую сводится к поиску функции Ляпунова $V(\mathbf{x}, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty,\tag{2.30}$$

удовлетворяющей неравенству

$$\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t, \mathbf{u}) + \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \leq 0.\tag{2.31}$$

Задача отыскания такой функции $V(\mathbf{x}, t)$ для произвольного векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t, \mathbf{u})$ не тривиальна и, вообще говоря, решение существенным образом зависит от точного знания модели (2.29).

Проблема отыскания функции $V(\mathbf{x}, t)$ становится еще более сложной, если в дополнение к устойчивости требуется определить аттрактивность инвариантного множества. В этом случае дополнительно требуется, чтобы левая часть неравенства (2.31) была отрицательно определена. Несмотря на то, что для автономных систем эта проблема может быть решена без требования отрицательной определенности полной производной функции $V(\mathbf{x}, t)$ и выполнения неравенств (2.30) [223, 4], отыскание подходящей функции $V(\mathbf{x}, t)$ в общем случае для открытых систем остается проблемой.

В качестве альтернативы условию отрицательности полной производной по времени функций Ляпунова $V(\mathbf{x}, t)$ как критерия равномерной аттрактивности, известны т. н. “предельные критерии” [103]. В частности, в [103] показано, что необходимым условием равномерной аттрактивности нулевого положения равновесия в системе (2.29) является выполнение интегрального неравенства

$$\forall \delta > 0 \exists a > 0, b \in \mathbb{R} : \|\mathbf{x}\| > \delta, t \geq t_0 \geq 0 \Rightarrow \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \boldsymbol{\theta}, \tau, \mathbf{u}(\tau))\| d\tau \geq a(t - t_0) + b. \quad (2.32)$$

Достаточные же условия равномерной аттрактивности в [103] неизбежно требуют отыскания подходящей функции Ляпунова $V(\mathbf{x}, t)$.

Еще одной возможной заменой явного использования функций Ляпунова в задаче исследования асимптотических свойств системы (2.29) является свойство *равномерной δ -предельной невырожденности* сигналов (от англ. uniform δ -persistence of excitation), введенное в работе [257].

О п р е д е л е н и е 2.3.1. Пусть решение $\mathbf{x}(t)$ системы (2.29) представимо в виде $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) \oplus \mathbf{x}_2(t)$. Функция $\phi : t \mapsto \phi(t, \mathbf{x}(t))$ называется *равномерно δ -предельно невырожденной по отношению к $\mathbf{x}_1(t)$ в области \mathcal{D}* , если для всех $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{D}$ существуют положительные константы $\delta > 0$, $T > 0$ и $\mu > 0$ такие, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено условие

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)\| \leq \delta \Rightarrow \int_t^{t+T} \|\phi(\tau, \mathbf{z}(\tau))\| d\tau \geq \mu. \quad (2.33)$$

Однако проверка равномерной предельной невырожденности функции $\phi(t, \mathbf{x}(t))$ состояния системы (2.29), как следует непосредственно из (2.33), подразумевает, вообще говоря, знание свойств конкретных решений $\mathbf{x}(t) : \mathbf{x}_1(t) \in \mathcal{D}$ системы (2.29). Решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ системы (2.29) в свою очередь непрерывно зависят от неизвестного параметра $\boldsymbol{\theta}$ [43] и существенным образом определяются функциями времени в правой части. Следовательно, проверка условий (2.32), (2.33) влечет в общем случае решение задачи идентификации.

Таким образом, свойство непрерывности оператора, задающего систему (или, что эквивалентно, существование функции Ляпунова для системы (2.29)) оказывается трудно проверяемым свойством на практике. Особенно, если речь идет о моделях вида (2.3), (2.4), (2.5), (2.6). Более того, даже если объектом исследования являются уравнения (2.29), анализ непрерывности оператора упирается либо в необходимость отыскания подходящей функции $V(\mathbf{x}, t)$, либо в дополнительное исследование свойств некоторых функций состояний вдоль решений системы (2.29). В обоих случаях решение этих нетривиальных задач оказывается чувствительным к конкретному виду векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t, \mathbf{u})$. Поэтому методы анализа и синтеза систем, основанные на использовании подобной информации, не могут быть эффективно использованы в условиях существенной неопределенности, в том числе и в задачах адаптивного управления. В дополнение следует иметь в виду, что в силу неизбежного присутствия немоделируемой динамики, свойство непрерывности отношений “вход-выход” и “вход-состояние” в реальной системе, даже в случае успешного решения перечисленных задач, может не выполняться.

Приведенные рассуждения показывают, что несмотря на удобство математического анализа систем с непрерывными операторами и коэффициентами передаточных отображений, проверка этого свойства на практике затруднительна, либо не всегда возможна в силу отсутствия необходимой и исчерпывающей информации о моделях “вход-выход” и “вход-состояние” реальных систем. Более того, сама природа физического объекта может не допускать описание его в терминах непрерывных отображений. Так, например, операторы неустойчивых систем (как показано в примере 2.1.4) оказываются сингулярными даже если система при этом остается реализуемой и полной. Известны примеры открытых систем, систем с немоделируемыми возмущениями, активно взаимодействующих со средой, характеристики которых меняются качественным образом со временем и под действием среды. Происходящие при этом изменения в поведении систем получили название *катастроф* [3].

П р и м е р 2.3.1. Простейшим примером систем, допускающих такие изменения, является система

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_T : \mathbb{R} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E} \subseteq [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}; \\ \mathcal{H}_T : \mathbb{R} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{R}; \\ \mathcal{S}_T(u, e) &= \max_{u = \frac{1}{3}x^3 + ex} \{x \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Как это иллюстрируется рисунком, оператор “вход-состояние” системы (2.34) непрерывен при $e \geq 0$. Однако свойство непрерывности оператора $\mathcal{S}_T(u, e)$ “вход-состояние” нарушается при $e < 0$.

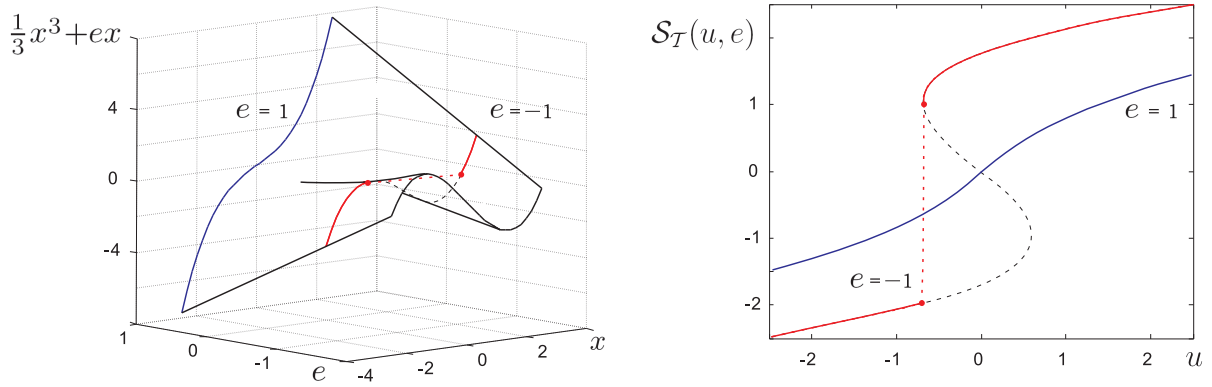


Рисунок 2.3. Диаграмма возникновения катастрофы или потеря непрерывности по u отображения $\mathcal{S}_T(u, e)$ “вход-выход” в системе (2.34) при $e < 0$.

Следовательно, возникает вопрос об адекватности использования классических определений устойчивости и их обобщенного математического эквивалента – непрерывности отображений “вход-выход” и “вход-состояние” – в задачах анализа систем в условиях *неконтролируемых* сигнальных и параметрических возмущений и при отсутствии полной информации о самом объекте исследования.

Естественной заменой условию непрерывности отображений как критерию работоспособности системы является свойство *локальной ограниченности* оператора, задающего систему. Свойство локальной ограниченности оператора является в некотором роде минимально допустимой целью управления и соответствует понятию устойчивости по Лагранжу (см. теорему 2.1)⁵. В качестве минимально доступной информации для анализа систем с локально ограниченными операторами логично использовать и информацию о процессах в системе лишь качественного характера. Такой информацией может быть, например, *существование* локально ограниченных по отдельным аргументам или по их совокупности коэффициентов соответствующего передаточного отображения.

Проблема, однако, заключается в том, что исследование систем с локально ограниченными операторами и их соединениями затруднено отсутствием эффективных методов анализа и синтеза таких систем. Исключением является, пожалуй, класс полупассивных систем [278]. Для полупассивных систем, заданных моделями вида (2.29), где $\dim\{\mathbf{u}\} = \dim\{\mathbf{y}\}$ разработаны методы анализа и синтеза соединений [279] при условии, что связи между системами удовлетворяют условию линейности, симметричности, инвариантности и так называемому условию диффузии. В общем

⁵Отметим также, что несмотря на катастрофу в системе (2.34) при $e < 0$, отображение $\mathcal{S}_T(u, e)$ остается локально ограниченным.

случае вопрос о существовании и ограниченности решений в таких системах остается открытым. Это дополнительно подчеркивает актуальность задачи исследования свойств систем с локально ограниченными операторами и их *соединений*.

Для возможности формального анализа соединений систем прежде всего необходимо определить основные классы взаимодействий, которые принято называть *последовательным, параллельным и замкнутым* соединением. С этой целью введем в рассмотрение две системы \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{1,T} : \mathcal{L}_{u_1} \times \mathcal{E}_1 &\mapsto \mathcal{L}_{x_1} \subseteq L_\infty^{n_1}[t_0, T]; \\ \mathcal{H}_{1,T} : \mathcal{L}_{u_1} \times \mathcal{E}_1 &\mapsto \mathcal{L}_{y_1} \subseteq L_\infty^{m_1}[t_0, T];\end{aligned}\tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{2,T} : \mathcal{L}_{u_2} \times \mathcal{E}_2 &\mapsto \mathcal{L}_{x_2} \subseteq L_\infty^{n_2}[t_0, T]; \\ \mathcal{H}_{2,T} : \mathcal{L}_{u_2} \times \mathcal{E}_2 &\mapsto \mathcal{L}_{y_2} \subseteq L_\infty^{m_2}[t_0, T].\end{aligned}\tag{2.36}$$

О п р е д е л е н и е 2.3.2. Пусть заданы системы \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 и $\mathcal{L}_{y_1} \subseteq \mathcal{L}_{u_2}$. Последовательным соединением систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 будем называть систему \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_T : \mathcal{L}_u \times \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_x \subseteq L_\infty^{n_1+n_2}[t_0, T]; \\ \mathcal{H}_T : \mathcal{L}_u \times \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_y \subseteq L_\infty^{m_2}[t_0, T],\end{aligned}\tag{2.37}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2; \quad \mathcal{L}_x = \mathcal{L}_{x_1} \oplus \mathcal{L}_{x_2}; \quad \mathcal{L}_y = \mathcal{L}_{y_2}; \\ \mathcal{S}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2) &= \mathcal{S}_{1,T}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1) \oplus \mathcal{S}_{2,T}(\mathcal{H}_{1,T}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2), \\ \mathcal{H}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2) &= \mathcal{H}_{2,T}(\mathcal{H}_{1,T}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2).\end{aligned}\tag{2.38}$$

О п р е д е л е н и е 2.3.3. Пусть заданы системы \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 и $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_{u_1} \cap \mathcal{L}_{u_2} \neq \emptyset$. Параллельным соединением систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 будем называть систему \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_T : \mathcal{L}_u \times \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_x \subseteq L_\infty^{n_1+n_2}[t_0, T], \\ \mathcal{H}_T : \mathcal{L}_u \times \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_y \subseteq L_\infty^{m_1+m_2}[t_0, T],\end{aligned}\tag{2.39}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{L}_x = \mathcal{L}_{x_1} \oplus \mathcal{L}_{x_2}, \quad \mathcal{L}_y = \mathcal{L}_{y_1} \oplus \mathcal{L}_{y_2}; \\ \mathcal{S}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2) &= \mathcal{S}_{1,T}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1) \oplus \mathcal{S}_{2,T}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2), \\ \mathcal{H}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2) &= \mathcal{H}_{1,T}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1) \oplus \mathcal{H}_{2,T}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2).\end{aligned}\tag{2.40}$$

О п р е д е л е н и е 2.3.4. Пусть заданы системы \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 и $\mathcal{L}_{y_1} \subseteq \mathcal{L}_{u_2}$, $\mathcal{L}_{y_2} \subseteq \mathcal{L}_{u_1}$. Замкнутым соединением систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 будем называть систему \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_T : \mathcal{L}_u \times \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_x \subseteq L_\infty^{n_1+n_2}[t_0, T], \\ \mathcal{H}_T : \mathcal{L}_u \times \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_y \subseteq L_\infty^{m_1+m_2}[t_0, T],\end{aligned}\tag{2.41}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{L}_x = \mathcal{L}_{x_1} \oplus \mathcal{L}_{x_2}, \quad \mathcal{L}_y = \mathcal{L}_{y_1} \oplus \mathcal{L}_{y_2}, \quad \mathcal{L}_u = \mathcal{L}_{u_1} \oplus \mathcal{L}_{u_2} \\
\mathbf{y}_1 &= \mathcal{H}_{1,T}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{y}_2, \mathbf{e}_1); \\
\mathbf{y}_2 &= \mathcal{H}_{2,T}(\mathbf{u}_2 + \mathbf{y}_1, \mathbf{e}_2); \\
\mathcal{S}_T(\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2) &= \mathcal{S}_{1,T}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{y}_2, \mathbf{e}_1) \oplus \mathcal{S}_{2,T}(\mathbf{u}_2 + \mathbf{y}_1, \mathbf{e}_2); \\
\mathcal{H}_T(\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2) &= \mathcal{H}_{1,T}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{y}_2, \mathbf{e}_1) \oplus \mathcal{H}_{2,T}(\mathbf{u}_2 + \mathbf{y}_1, \mathbf{e}_2).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

В задаче анализа свойств соединений систем прежде всего актуальны вопросы реализуемости и полноты всего соединения. Эти вопросы наиболее остро стоят в задаче анализа замкнутых соединений систем. Отличительной особенностью замкнутого соединения (2.42) является неявный характер задания оператора такой системы и, как следствие, трудности анализа свойств операторов \mathcal{S}_T , \mathcal{H}_T . Дополнительной сложностью в задаче анализа операторных свойств соединений становится и необходимость замены гипотезы о непрерывности операторов \mathcal{S}_T , \mathcal{H}_T на более практичную гипотезу их локальной ограниченности. Следствием этого является то, что такой мощный инструмент анализа, как теорема о малом контурном усилении (теорема 2.2), оказывается не пригодной для анализа контуров (замкнутых соединений) из систем с локально ограниченными операторами.

Таким образом, анализ систем с позиции задач управления не исчерпывается анализом реализуемости и полноты. Более того, свойства полноты служат лишь необходимым условием разрешимости более важной цели – управления системой. Отсюда следует актуальность задачи анализа асимптотических свойств полных систем или, другими словами, анализ ограниченности по нормам в соответствующих функциональных пространствах \mathcal{L}_x , \mathcal{L}_y состояний и выходов для классов воздействий из множества \mathcal{E} . Как только свойство ограниченности установлено, возникает задача оценки предельных множеств по состоянию, выходу и входу в управляемых системах.

Следовательно, актуальны следующие задачи анализа систем с локально ограниченными операторами.

З а д а ч а 2.1. *Анализ реализуемости и полноты соединений.* Пусть система \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_T : \mathcal{L}_u \times \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_x \subseteq L_\infty^n[t_0, T], \\
\mathcal{H}_T : \mathcal{L}_u \times \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{L}_y \subseteq L_\infty^n[t_0, T]
\end{aligned} \tag{2.43}$$

является (последовательным, параллельным, замкнутым) соединением систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 . Требуется:

- 1) найти условия, при которых соединение \mathcal{S} реализуемо;

2) найти условия, при которых соединение \mathcal{S} полно.

З а д а ч а 2.2. *Анализ локальной ограниченности оператора соединений.* Пусть задана полная система \mathcal{S} (2.43). Требуется:

1) сформулировать условия (свойства систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2), гарантирующие локальную ограниченность операторов “вход-состояние” и “вход-выход” системы \mathcal{S} для всех $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_u$;

2) найти коэффициенты $\gamma_{\mathcal{S}, \mathcal{L}_x}(\cdot, \cdot, \cdot)$, $\gamma_{H, \mathcal{L}_y}(\cdot, \cdot, \cdot)$ передаточных отображений “вход-состояние” и “вход-выход”:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_x, [t_0, T]} &\leq \gamma_{\mathcal{S}, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}, T), \\ \|\mathbf{y}(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]} &\leq \gamma_{H, \mathcal{L}_y}(\mathbf{e}, \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{L}_u, [t_0, T]}, T).\end{aligned}$$

З а д а ч а 2.3. *Анализ асимптотического поведения систем.* Пусть задана полная система \mathcal{S} (2.43) с локально ограниченными операторами “вход-состояние” и “вход-выход”. Найти предельные (при $t \rightarrow \infty$) оценки областей принадлежности состояния $\mathbf{x}(t)$ и выхода $\mathbf{y}(t)$. Кроме того, определить оценки

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{L}_x, [T, \infty]}, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t)\|_{\mathcal{L}_y, [T, \infty]} \quad (2.44)$$

как функции от $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_u$.

Решению этих и смежных задач посвящены следующие параграфы раздела.

2.4. Анализ и синтез систем с локально ограниченными операторами

2.4.1. Анализ реализуемости соединений систем

с локально ограниченными операторами

Рассмотрим задачу анализа реализуемости и полноты соединений систем. Вопросы реализуемости и полноты соединений актуальны прежде всего в задачах синтеза систем. Наиболее простыми и часто встречающимися операциями в задаче синтеза систем являются, очевидно, параллельное или последовательное соединение элементов. Но в общем случае уже последовательное соединение двух произвольных абстрактных систем может представлять известные сложности для анализа соединений в терминах функциональных норм входов, выходов и состояния системы.

П р и м е р 2.4.1. Рассмотрим последовательное соединение систем

$$\mathcal{S}_1 : \dot{z} = -z(1 + u_1^2(t)); \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 : \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 + z(t), \end{aligned} \quad (2.46)$$

где $\omega_0 > 0$ – параметр системы (2.46). В системе (2.46) возникает эффект резонанса при воздействиях $z(t) = r \sin(\omega_0 t) \in \mathcal{L}_\infty^1[t_0, T]$, $r \in \mathbb{R}$. А именно, решения $x_1(t)$ могут иметь вид $x_1(t) = -\frac{rt}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t)$, что соответствует неограниченному росту нормы $\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, T]}$ при $T \rightarrow \infty$ и сколь угодно малых значениях r (т. е. при сколь угодно малых значениях нормы $\|z(t)\|_{\infty, [t_0, T]}$).

В примере 2.4.1 условия резонанса, очевидно, не будут выполнены ни при каких $u_1(t) \in L_{\infty, [t_0, T]}^1$. Однако в общем случае требуется возможность осуществления такого рода проверок для произвольных нелинейных систем (2.1), (2.2), что не представляется возможным и, более того, необходимым. Более приемлемым способом анализа соединений являются, по-видимому, *консервативные* оценки поведения систем на основе понятий *коэффициентов передаточных отображений* и *реализуемости*. Такие консервативные оценки последовательных и параллельных соединений приводятся в следующей теореме.

Т е о р е м а 2.4. Пусть заданы системы (2.35) и (2.36). Тогда

1) параллельное соединение (2.39), (2.40) реализуемых (полных) систем реализуемо (полно).

Если при этом системы $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ реализуемы (полны) с передаточными отображениями по нормам $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{u_1}}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{u_2}}$ на интервалах $[t_0, T_1]$, $[t_0, T_2]$ соответственно, и кроме того, для системы \mathcal{S}_1 определен коэффициент $\gamma_{H, \mathcal{L}_{y_1}}$ передаточного отображения

$$\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_2}, [t_0, T_1]} \leq \gamma_{H, \mathcal{L}_{y_1} \subseteq \mathcal{L}_{u_2}}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}}, T_1),$$

то

2) последовательное соединение (2.37), (2.38) систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 также реализуемо (полно) с передаточным отображением по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{u_1}}$.

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} \leq \gamma_{S_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}, [t_0, T]}, T) + \gamma_{S_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \gamma_{H, \mathcal{L}_{y_1}}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}}, T), T); \quad (2.47)$$

$$\|\mathbf{y}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} \leq \gamma_{H_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \gamma_{H, \mathcal{L}_{y_1}}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}}, T), T).$$

Причем в случае реализуемых систем время $T = T^*(\mathcal{S})$ существования системы \mathcal{S} удовлетворяет оценке

$$T^*(\mathcal{S}) \leq \min\{T^*(\mathcal{S}_1), T^*(\mathcal{S}_2)\}. \quad (2.48)$$

Свойства реализуемости и полноты параллельных и последовательных соединений в условиях теоремы 2.4 наряду с оценками (2.47) в дальнейшем будут использоваться при анализе замкнутых контуров. Однако, прежде чем перейти к формулировке основного результата параграфа – теореме о реализуемости и полноте замкнутых соединений – введем дополнительное понятие, имеющее важное значение для анализа динамических систем.

О п р е д е л е н и е 2.4.1. Рассмотрим систему S , (2.1), (2.2), заданную операторами S_T и \mathcal{H}_T , (2.3), (2.4) на $T = [t_0, T]$. Пусть в дополнение определено отображение

$$\psi : \mathcal{L}_x[t_0, T] \times \mathcal{E}_\psi \mapsto \mathcal{L}_\psi[t_0, T], \quad (2.49)$$

где $\mathcal{L}_\psi[t_0, T]$ – линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\psi[t_0, T]}$, а \mathcal{E}_ψ – линейное пространство.

Будем говорить, что $\psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_\psi) \in \mathcal{L}_\psi[t_0, T]$ мажорирует состояние $\mathbf{x}(t)$ и выход $\mathbf{y}(t)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\psi}$, если и только если существуют функции $\mu_{S,\infty} : \mathcal{E} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\mu_{H,\infty} : \mathcal{E} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такие, что

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} \leq \mu_{S,\infty}(\mathbf{e}, \|\psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_\psi)\|_{\mathcal{L}_\psi[t_0, T]}); \quad (2.50)$$

$$\|\mathbf{y}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} \leq \mu_{H,\infty}(\mathbf{e}, \|\psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_\psi)\|_{\mathcal{L}_\psi[t_0, T]}). \quad (2.51)$$

Без потери общности будем полагать, что функции $\mu_{S,\infty}(\cdot, p)$ и $\mu_{H,\infty}(\cdot, p)$ не убывают по аргументу p .

Понятия мажорирования и мажорирующих функций в частности широко известны в анализе и эффективно применяются в задачах синтеза систем управления⁶. Практический смысл использования мажорирующих функций состоит прежде всего в том, чтобы по изменениям (или посредством изменения) известных *a priori* функций судить об изменении целого ряда переменных. При этом сами мажорируемые переменные в общем случае могут быть не доступны для непосредственного измерения.

В рамках стандартных постановок задач анализа систем, где пространства состояния $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, свойство мажорирования состояния сводится к оценкам вида

$$\|\mathbf{x}\| \leq \mu(\|\psi(\mathbf{x})\|). \quad (2.52)$$

⁶См., например, [48], где вводится метод мажорирующих функций для решения задач адаптивного и робастного управления. В работах [230, 231] мажорирование используется для адаптивной компенсации нелинейно параметризованных возмущений.

В этом смысле стандартные требования (2.30) к выбору функции Ляпунова $V(\mathbf{x}, t)$:

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$$

являются, по существу, условиями мажорирования.

Несмотря на очевидное сходство между (2.30), (2.52) и (2.50), (2.51), характеристика *функционального* мажорирования⁷ в определении 2.4.1 обладает рядом преимуществ по сравнению со стандартными определениями в задачах анализа динамических систем.

Во-первых, мажорирование в определении 2.4.1 означает возможность оценки поведения системы \mathcal{S} в пространстве $\mathcal{L}_x[t_0, T]$ с помощью функций из $\mathcal{L}_\psi[t_0, T]$. Наличие такой связи дает, в свою очередь, дополнительную степень свободы при решении задач синтеза. И в этом смысле, во-вторых, функция $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_\psi)$ является “информационной” переменной анализа – в отличие от “действительной” в (2.52). Другими словами, для того, чтобы управлять состоянием $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_x[t_0, T]$, например, перемещением или максимальным отклонением от заданного множества (элемент пространства $\mathcal{L}_x[t_0, T] \subseteq L_\infty^n[t_0, T]$) совсем не обязательно строить систему управления перемещением и компенсировать отклонения большими по амплитуде управлениями. Вполне достаточным может оказаться управление энергией $\psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_\psi) \in L_2^m[t_0, T]$ системы с помощью малых по амплитуде управляющих сигналов.

В-третьих, такое функциональное мажорирование хорошо согласуется с известным принципом управления по *агрегированным макропеременным* [51, 27, 26, 30, 52, 42]. Основное отличие мажорирования в определении 2.4.1 от понятия макропеременной заключается лишь в том, что макропеременная является функцией состояния $\mathbf{x}(t)$, в то время как *мажорирующее отображение* $\psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_\psi)$ в определении 2.4.1 есть элемент нормированного функционального пространства $\mathcal{L}_\psi[t_0, T]$. В обоих случаях оказывается возможным трактовать отображения $\psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_\psi)$ как *параметры порядка* исследуемой системы.

П р и м е р 2.4.2. Рассмотрим уравнения массы на пружине с нелинейным демпфированием:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_0 x_1 + f(x_2, t) + u(t), \quad k_0 < 0, \end{aligned} \tag{2.53}$$

где функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$ моделирует влияние нелинейного демпфера. Введем в рассмотрение функцию $\psi(\mathbf{x}(t), \lambda) = \lambda x_1(t) + x_2(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ и рассмотрим

⁷Под термином функциональное мажорирование имеется в виду мажорирование в функциональных пространствах.

уравнение

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1 + \psi(t).$$

Функция $\psi(\mathbf{x}(t), \lambda) \in L_\infty^1[t_0, T]$ мажорирует состояние системы (2.53) по норме $\|\cdot\|_{\infty, [t_0, T]}$. Это следует, например, из того, что $x_1(t)$ является решением уравнения

$$x_1(t) = e^{-\lambda t} x_1(t_0) + e^{-\lambda t} \int_{t_0}^t e^{\lambda \tau} \psi(\tau) d\tau \Rightarrow;$$

$$|x_1(t)| \leq |x_1(t_0)| + \frac{1}{\lambda} \|\psi(t)\|_{\infty, [t_0, t]}.$$

Тогда, используя неравенство

$$|x_2(t)| \leq |\psi(t)| + \lambda |x_1(t)|,$$

получим, что

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, t]} \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \|\psi(t)\|_{\infty, [t_0, t]} + (1 + \lambda) |x_1(t_0)|. \quad (2.54)$$

В дополнение к оценке (2.54), можно показать, что функция $\psi(\mathbf{x}(t), \lambda) \in L_\infty^1[t_0, T]$ мажорирует состояние системы (2.53) по нормам $L_p^1[t_0, T]$, $p \geq 1$. Действительно, применяя неравенства треугольника Гельдера [28] и используя

$$e^{-\lambda t} \left(\int_{t_0}^t |e^{\lambda \tau}|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{1}{\lambda q} \right)^{\frac{1}{q}},$$

получим

$$\|x_1(t)\|_{\infty, [t_0, t]} \leq |x_1(t_0)| + \left(\frac{1}{\lambda q} \right)^{\frac{1}{q}} \|\psi(t)\|_{p, [t_0, t]}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Следовательно, максимальное отклонение $x_1(t)$ в системе (2.53) мажорируется также и нормами $\|\psi(t)\|_{p, [t_0, t]}$. Это, в свою очередь, означает, что управление максимальным отклонением $x_1(t)$ от начала координат на интервале времени $[t_0, t]$ может быть реализовано в пространстве \mathcal{L}_ψ посредством регулирования норм $\|\psi(t)\|_{p, [t_0, t]}$, $p \geq 1$. При этом точное знание нелинейного демпфирования $f(x_2, t)$ не требуется.

Таким образом, использование понятия мажорирующего отображения позволяет более гибко применять результаты операторного анализа систем. С другой стороны, оно ни в коей мере не ограничивает применимость последующих формулировок в силу того, что мажорирующее отображение для системы (2.1), (2.2), заданной операторами \mathcal{S}_T и \mathcal{H}_T , (2.3), (2.4), всегда существует, например, вида $\psi : \psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_\psi) = \mathbf{x}(t)$, если система реализуема с передаточными отображениями по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_u}$.

В силу определения 2.4.1, для заданного мажорирующего отображения $\psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_\psi)$ в виде (2.49) можно определить оператор

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e}, \mathbf{e}_\psi) : \mathcal{L}_u[t_0, T] \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}_\psi &\mapsto \mathcal{L}_\psi[t_0, T] \\ \mathcal{P}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e}, \mathbf{e}_\psi) &= \psi(\mathcal{S}_T(\mathbf{u}, \mathbf{e}), \mathbf{e}_\psi).\end{aligned}\tag{2.55}$$

Таким образом, в последующем будем рассматривать системы, заданные операторами \mathcal{S}_T , \mathcal{H}_T и \mathcal{P}_T . Кроме того, ограничимся рассмотрением систем, для которых выполнено следующее условие.

Предположение 2.1. Для любого $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$ найдется функция $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}, t)$ и подпространство $\mathcal{L}_\delta[t_0, T] \subseteq \mathcal{L}_u[t_0, T]$ такие, что для операторов

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_T(\mathbf{u}^*(\mathbf{e}, t) + \delta(t), \mathbf{e}, \mathbf{e}_\psi) \\ \mathcal{S}_T(\mathbf{u}^*(\mathbf{e}, t) + \delta(t))\end{aligned}$$

определены коэффициенты $\gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}$, $\gamma_{H^*, \mathcal{L}_y}$ передаточных отображений $\mathcal{L}_\delta[t_0, T] \mapsto \mathcal{L}_\psi[t_0, T]$, $\mathcal{L}_\delta[t_0, T] \mapsto \mathcal{L}_y[t_0, T]$:

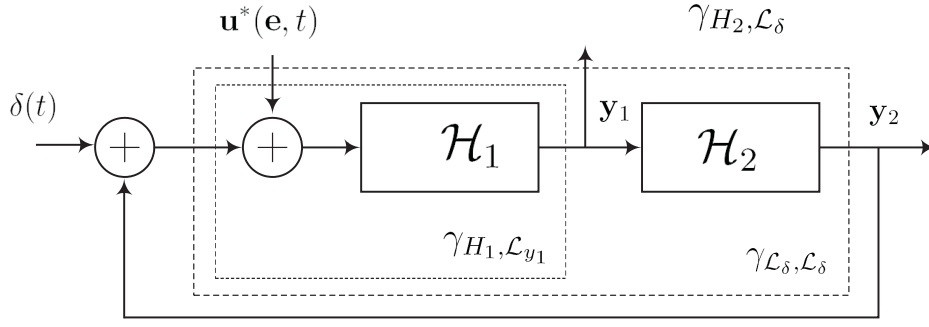
$$\|\psi(t)\|_{\mathcal{L}_\psi, [t_0, T]} \leq \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_\psi, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}, T)\tag{2.56}$$

$$\|\mathbf{y}(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]} \leq \gamma_{H^*, \mathcal{L}_y}(\mathbf{e}, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}, T).\tag{2.57}$$

Предположение 2.1 означает, что для любого возмущающего воздействия \mathbf{e} среды \mathcal{E} в пространстве входов $\mathcal{L}_u[t_0, T]$ можно выделить элемент $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}, t)$ и непустое подпространство $\mathcal{L}_\delta[t_0, T] \subseteq \mathcal{L}_u[t_0, T]$ такие, что управления $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{e}, t) + \delta(t)$ “регулируют” выход $\mathbf{y}(t)$ и функцию $\psi(t)$ по нормам $\|\mathbf{y}(t)\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]}$, $\|\psi(t)\|_{\mathcal{L}_\psi, [t_0, T]}$ в силу неравенств (2.56), (2.57). Оценка (2.56), в свою очередь, согласно условиям мажорирования (2.50), (2.51) позволяет управлять нормами $\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, T]}$, $\|\mathbf{y}(t)\|_{\infty, [t_0, T]}$ состояния и выходов системы \mathcal{S} . Другими словами, предположение 2.1 постулирует саму возможность *функционального управления* состоянием $\mathbf{x}(t)$ и выходом $\mathbf{y}(t)$ посредством управляющих сигналов $\delta(t)$ из подпространства $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$ пространства $\mathcal{L}_u[t_0, T]$ входов при условии сохранения *реализуемости* системы \mathcal{S} ⁸.

Рассмотрим замкнутое соединение системы \mathcal{S}_1 , удовлетворяющей предположению 2.1, и некоторой системы \mathcal{S}_2 . Структурная схема такого соединения изображена на рис. 2.4. Как было отмечено ранее, операторы замкнутого соединения систем (2.42) в общем случае задаются неявным образом в зависимости от операторов систем \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 . При этом, согласно условиям задачи 2.1, непрерывность отображений $\mathcal{H}_{1, T}$,

⁸В частном и наиболее практическом случае, когда нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_y, [t_0, T]}$ и $\|\cdot\|_{\infty, [t_0, T]}$ совпадают, неравенство (2.57) автоматически выполняется (см. (П2.19) в Приложении 1).

Рисунок 2.4. Замкнутое соединение систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2

$\mathcal{H}_{2,T}$ может нарушаться как следствие возможных резонансов или неустойчивости систем $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$. Более того, сами отображения $\mathcal{H}_{1,T}, \mathcal{H}_{2,T}$ могут быть не полностью известны. Поэтому возникает вопрос о возможности анализа реализуемости, полноты и ограниченности состояния и выходов соединения с использованием информации лишь качественного характера, а именно, таких свойств операторов $\mathcal{H}_{1,T}, \mathcal{H}_{2,T}$, как локальная ограниченность коэффициентов функций $\gamma_{H_1, \mathcal{L}_{y_1}}, \gamma_{H_2, \mathcal{L}_{y_2}} = \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}$ передаточных отображений.

Ответ на этот вопрос дается теоремой 2.5, устанавливающей достаточные условия реализуемости и полноты замкнутых соединений, схема которых приведена на рис. 2.4.

Т е о р е м а 2.5. Теорема о существовании малого контурного усиления. Пусть система \mathcal{S}_1 заданная операторами $\mathcal{S}_{1,T}$ и $\mathcal{H}_{1,T}$, (2.35) на $T = [t_0, T]$ удовлетворяет условиям:

1) для системы \mathcal{S}_1 существуют мажорирующее отображение $\psi(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{e}_\psi)$ и функция $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_1, t) \in \mathcal{L}_u[t_0, T]$, удовлетворяющие предположению 2.1.

Рассмотрим систему \mathcal{S}_2 , (2.35), заданную операторами

$$\mathcal{S}_{2,T} : \mathcal{L}_{y_1}[t_0, T] \times \mathcal{E}_2 \mapsto \mathcal{L}_{x_2}[t_0, T];$$

$$\mathcal{H}_{2,T} : \mathcal{L}_{y_1}[t_0, T] \times \mathcal{E}_2 \mapsto \mathcal{L}_\delta[t_0, T].$$

Положим, что

2) система \mathcal{S}_2 реализуема (полна) с заданными передаточными отображениями по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{y_1}, [t_0, T]}$;

3) коэффициент $\gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}$ передаточного отображения $\mathcal{L}_{y_1}[t_0, T] \mapsto \mathcal{L}_\delta[t_0, T]$ существует и глобально ограничен по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{y_1}, [t_0, T]}$, т. е. существует непрерывная

функция $\gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T) : \mathcal{E}_2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что неравенство

$$\gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}(\mathbf{e}_2, \|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}[t_0, T]}, T) \leq \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T), \quad (2.58)$$

выполнено для всех $\mathbf{y}_1(t) \in \mathcal{L}_{y_1}[t_0, T]$.

Тогда замкнутое соединение (2.42) систем \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 реализуемо (полно) для всех $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{e}_1, t) + \delta(t), \quad \delta(t) \in \mathcal{L}_\delta[t_0, T]. \quad (2.59)$$

При этом, если функции $\gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\cdot)$, $\gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\cdot)$ ограничены по T :

$$\begin{aligned} \sup_{T \geq t_0} \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, d, T) &= \Delta_P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, d), \\ \sup_{T \geq t_0} \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T) &= \Delta_C(\mathbf{e}_2), \end{aligned}$$

то $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{y}_1(t)$ ограничены, и как следствие, справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \mu_{S_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \Delta_P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, \Delta_C(\mathbf{e}_2) + \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta[t_0, T]})); \\ \|\mathbf{y}_1(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \mu_{H_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \Delta_P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, \Delta_C(\mathbf{e}_2) + \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta[t_0, T]})). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Теорема 2.5, или *теорема о существовании малого контурного усиления*, устанавливает, что для реализуемости (полноты) замкнутых соединений реализуемых (полных) систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 с локально ограниченными операторами достаточно, чтобы коэффициент $\gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}$ передаточного отображения из $\mathcal{L}_{y_1}[t_0, T]$ в $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$ был ограниченной по $\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}[t_0, T]}$ функцией для всех $\mathbf{y}_1(t) \in \mathcal{L}_{y_1}[t_0, T]$.

Таким образом, в отличие от теоремы о малом контурном усилении (теорема 2.2), теорема 2.5 не требует точного знания коэффициентов передачи γ_1 и γ_2 операторов “вход-выход” \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 для того, чтобы сделать вывод о реализуемости, полноте и ограниченности состояний и выходов в замкнутом контуре. Вместо этого требуется лишь *существование* ограниченного по $\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}[t_0, T]}$ коэффициента передаточного отображения (2.58). При этом *коэффициенты передачи* из $\mathcal{L}_{y_1}[t_0, T]$ в $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$ и $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$ в $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$, вычисляемые в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{L}_{y_1}, \mathcal{L}_\delta} &= \sup_{\delta(t) \in \mathcal{L}_\delta[t_0, T]} \frac{\|\mathcal{H}_{1, T}(\mathbf{u}^*(\mathbf{e}, t) + \delta(t), \mathbf{e}_1)\|_{\mathcal{L}_{y_1}[t_0, T]}}{\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta[t_0, T]}}, \\ \gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_{y_1}} &= \sup_{\mathbf{y}_1(t) \in \mathcal{L}_{y_1}[t_0, T]} \frac{\|\mathcal{H}_{2, T}(\mathbf{y}_1(t), \mathbf{e}_2)\|_{\mathcal{L}_\delta[t_0, T]}}{\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}[t_0, T]}}, \\ \gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta} &= \sup_{\delta(t) \in \mathcal{L}_\delta[t_0, T]} \frac{\|\mathcal{H}_{2, T}(\mathcal{H}_{1, T}(\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_1, t) + \delta(t), \mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2)\|_{\mathcal{L}_\delta[t_0, T]}}{\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta[t_0, T]}} \end{aligned} \quad (2.61)$$

могут быть не определены (т. е. иметь разрывы второго рода, см. рис. 2.5, в.), не ограничены (рис. 2.5, а.) и/или не удовлетворять условию малости контурного усиления $\gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta} = \gamma_{\mathcal{L}_{y_1}, \mathcal{L}_\delta} \cdot \gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_{y_1}} < 1$ для всех $\mathbf{y}_1(t) \in \mathcal{L}_{y_1}[t_0, T]$, $\delta(t) \in \mathcal{L}_\delta[t_0, T]$ (рис. 2.5, в.)

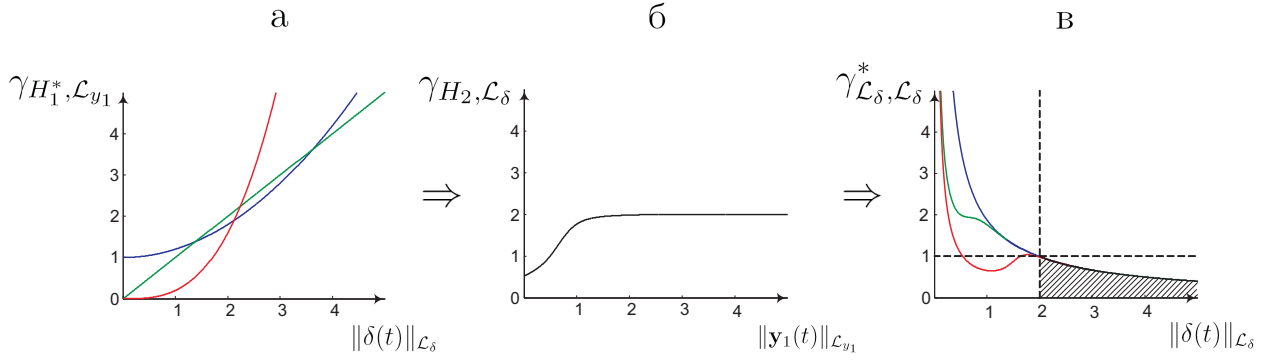


Рисунок 2.5. Иллюстрация к существованию малого контурного усиления

Физический смысл положений теоремы 2.5 иллюстрируется рисунком 2.5. На рис. 2.5, а. изображены графики функции $\gamma_{H_1^*, \mathcal{L}_{y_1}}(\mathbf{e}_1, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}, T)$ в зависимости от аргумента $\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}$ при различных значениях аргумента \mathbf{e}_1 , соответствующие кривым синего, красного и зеленого цветов. На рис. 2.5, б. приведен график функции $\gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}(\mathbf{e}_2, \|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}, [t_0, T]}, T)$ в зависимости от аргумента $\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}, [t_0, T]}$. На рис. 2.5, в. приведена оценка верхней границы $\gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}^*$ коэффициента контурного усиления в точке $\delta(t) \in \mathcal{L}_\delta[t_0, T]$:

$$\gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}^*(\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}, T) = \frac{\gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}(\mathbf{e}_2, \gamma_{H_1^*, \mathcal{L}_{y_1}}(\mathbf{e}_1, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}, T), T)}{\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}}.$$

В силу того, что выполняется условие (2.58), функция $\gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}^*(\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}, T)$ мажорируется монотонно убывающей функцией (в пределе до нуля) при росте значений функциональных норм $\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}$ сигнала $\delta(t)$ для фиксированного T и для каждого $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{E}_1$ (графики $\gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}^*(\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}, T)$ для различных значений возмущений среды \mathbf{e}_1 выделены цветом на рис. 2.5, в.). Очевидно, что для каждого $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{E}_1$ найдется $r(\mathbf{e}_1) \in \mathbb{R}_+$, такое, что

$$\gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}(r(\mathbf{e}_1)) = \sup_{\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} > r(\mathbf{e}_1)} \gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}^*(\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}, T) < 1. \quad (2.62)$$

(это соответствует заштрихованной области на диаграмме 2.5, в.). Следовательно, для любого $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{E}_1$ найдется такое число $r(\mathbf{e}_1) \geq 0$, что коэффициент контурного усиления $\gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}$ в (2.61) будет меньше единицы для всех $\delta(t) \in \mathcal{L}_\delta[t_0, T]$ при условии, что $\delta(t)$ достаточно велики по норме: $\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} > r(\mathbf{e}_1)$. Если при этом функция $\gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T)$ в (2.58) окажется глобально ограниченной по T , то тогда для замкнутого соединения систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 контурное усиление по $\delta(t)$ будет строго меньше единицы для всех $T > t_0$ и $\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} > r(\mathbf{e}_1)$.

Обозначая $\delta_e(t) = \delta(t) + \mathbf{y}_2(t)$ и используя (2.62), получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_2(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} &\leq \gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}(r(\mathbf{e}_1)) \|\delta_e(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} \\ &\leq \gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}(r(\mathbf{e}_1)) \|\mathbf{y}_2(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} + \gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}(r(\mathbf{e}_1)) \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} \Rightarrow \\ \|\mathbf{y}_2(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} &\leq \frac{\gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}(r(\mathbf{e}_1))}{1 - \gamma_{\mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\delta}(r(\mathbf{e}_1))} \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Неравенство (2.63), в свою очередь, можно назвать свойством *устойчивости “вход-выход” для сигналов “большой амплитуды”* (т. е. при $\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} > r(\mathbf{e}_1)$, см. также определение 2.2.4) замкнутой системы \mathcal{S} по отношению ко входу $\delta(t)$ и выходу $\mathbf{y}_2(t)$.

Свойство устойчивости “вход-выход” для сигналов большой амплитуды является антитезой известного понятия *устойчивости “вход-выход” в малом* ([207], определение 5.2, стр. 201):

$$\|\mathbf{y}_2(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} \leq \alpha_r(\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}) + \beta,$$

где $\alpha_r \in \mathcal{K}$ определено лишь для $\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} \leq r$. Принципиальное отличие этих понятий с точки зрения анализа заключается в том, что устойчивость в малом гарантирует, что все сингулярности и резонансы существуют *за пределами* ограниченной области $\mathcal{D}_0(r) \subseteq \mathcal{L}_\delta[t_0, T] : \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} \leq r$ в пространстве $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$. В то время, как свойство устойчивости “вход-выход” для сигналов *большой амплитуды* (2.63) означает, что особенности в поведении системы могут возникать лишь при ограниченных амплитудах воздействий (возмущений) $\delta(t)$. При этом для любого состояния \mathbf{e}_1 среды \mathcal{E}_1 область существования таких особенностей будет всегда ограничена *внутренностью* сферы $\mathcal{D}_0(r(\mathbf{e}_1))$. За пределами этой сферы поведение системы *практически устойчиво* [196] и коэффициенты передаточных отображений “вход-выход” непрерывны по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\delta[t_0, T]}$ в пространстве входов и выходов $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$.

Результаты системного анализа общих свойств последовательных, параллельных и замкнутых соединений систем, приведенные в теоремах 2.4, 2.5, имеют существенное значение для формальной постановки и последующего решения задачи синтеза систем управления. Применение этих результатов к задаче синтеза адаптивных систем рассматривается в следующем параграфе.

2.4.2. Задача функционального синтеза адаптивного регулятора.

Принцип разделения.

Для того, чтобы перейти от анализа соединений абстрактных систем к задачам синтеза адаптивных систем управления прежде всего конкретизируем понятия объекта управления, регулятора, цели управления и качества адаптивного управления.

Под *объектом* управления будем понимать систему \mathcal{S}_p :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{p,T} &: \mathcal{L}_u[t_0, T] \times \mathcal{E}_p \mapsto \mathcal{L}_{x_p}[t_0, T]; \\ \mathcal{H}_{p,T} &: \mathcal{L}_u[t_0, T] \times \mathcal{E}_p \mapsto \mathcal{L}_{y_p}[t_0, T]; \\ \mathcal{P}_{p,T} &: \mathcal{L}_{x_p}[t_0, T] \times \mathcal{E}_p \times \mathcal{E}_\psi \mapsto \mathcal{L}_{\psi_p}[t_0, T].\end{aligned}\tag{2.64}$$

В качестве допустимых управляющих входов выберем функции $\mathbf{u}^*(t) \in \mathcal{U}^* \subseteq \mathcal{L}_u[t_0, T]$, где \mathcal{U}^* – множество допустимых управлений. Без потери общности будем полагать, что функция $\mathbf{u}^*(t)$ может зависеть от состояния $\mathbf{x}_p(t)$ и воздействий \mathbf{e}_p среды \mathcal{E}_p :

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_p(t), t).$$

Отметим, что в силу того, что $\mathcal{L}_u[t_0, T]$ обладает структурой линейного пространства, любой элемент $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}_u[t_0, T]$ может быть представлен суммой вида

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_p(t), t) + \delta(t), \quad \delta(t) \in \mathcal{L}_\delta[t_0, T] \subseteq \mathcal{L}_u[t_0, T]\tag{2.65}$$

для некоторого $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}^*$ и подпространства $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$ пространства $\mathcal{L}_u[t_0, T]$ ⁹. Таким образом, можно сказать, что управление $\mathbf{u}^*(t)$ преобразует исходную систему (2.64) с множеством входов из $\mathcal{L}_u[t_0, T]$ в новую, “управляемую” систему \mathcal{S}_p^* с множеством входов из $\mathcal{L}_\delta[t_0, T] \subseteq \mathcal{L}_u[t_0, T]$. “Измененные” операторы системы (2.64) формально могут быть получены заменой $\mathbf{u}(t)$ в (2.64) на $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_p(t), t) + \delta(t)$, $\delta(t) \in \mathcal{L}_\delta[t_0, T] \subseteq \mathcal{L}_u[t_0, T]$ и определены в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{p,T}^*(\delta, \mathbf{e}) &= \mathcal{S}_{p,T}(\mathbf{u}^* + \delta, \mathbf{e}_p); \\ \mathcal{H}_{p,T}^*(\delta, \mathbf{e}) &= \mathcal{H}_{p,T}(\mathbf{u}^* + \delta, \mathbf{e}_p); \\ \mathcal{P}_{p,T}^*(\delta, \mathbf{e}, \mathbf{e}_\psi) &= \mathcal{P}_{p,T}(\mathbf{u}^* + \delta, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_\psi).\end{aligned}\tag{2.66}$$

В зависимости от конкретной задачи вход $\delta(t)$ в уравнениях (2.66) управляемой системы \mathcal{S}_p^* может играть роль возмущения, ошибки по управлению, эталонной траектории, программы и т. п.

Минимально допустимой целью управления будем считать ограниченность состояния $\mathbf{x}_p(t)$ и выхода $\mathbf{y}_p(t)$ объекта \mathcal{S}_p . Ограниченность состояния и выхода в случае реализуемых (полных) систем лишь на конечном ограниченном интервале времени $[t_0, T]$, безусловно, не является конечной целью синтеза. Однако это требование в силу того, что точные количественные характеристики операторов управляемого объекта не используются на данном этапе синтеза, оказывается адекватным уровню доступной информации о самом объекте.

Регулятором будем называть систему \mathcal{S}_c :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{c,T} &: \mathcal{L}_{y_p}[t_0, T] \times \mathcal{E}_c \mapsto \mathcal{L}_{x_c}[t_0, T]; \\ \mathcal{H}_{c,T} &: \mathcal{L}_{y_p}[t_0, T] \times \mathcal{E}_c \mapsto \mathcal{L}_{y_c}[t_0, T] \subseteq \mathcal{L}_u[t_0, T],\end{aligned}\tag{2.67}$$

⁹При этом $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$ в общем случае совпадает с $\mathcal{L}_u[t_0, T]$.

которая по измерениям выходов $\mathbf{y}_p(t) \in \mathcal{L}_{y_p}[t_0, T]$ объекта \mathcal{S}_p вырабатывает оценки $\mathbf{y}_c(t) \in \mathcal{L}_{y_c}[t_0, T] \subseteq \mathcal{L}_u[t_0, T]$ функций $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_p(t), t) \in \mathcal{U}^*$.

В силу того, что управление $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}(t), t) \in \mathcal{U}^*$, обеспечивающее достижение цели, в общем случае зависит от состояния $\mathbf{x}_p(t)$ и воздействий среды $\mathbf{e}_p \in \mathcal{E}_p$, то естественным образом возникают задачи восстановления *значимой для управления* информации о состоянии $\mathbf{x}_p(t)$ и о воздействиях среды \mathbf{e}_p . В соответствии с этим введем в рассмотрение систему *наблюдения* \mathcal{S}_o :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{o,T} : \mathcal{L}_{y_p}[t_0, T] \times \mathcal{E}_o &\mapsto \mathcal{L}_{x_o}[t_0, T], \\ \mathcal{H}_{o,T} : \mathcal{L}_{y_p}[t_0, T] \times \mathcal{E}_o &\mapsto \mathcal{L}_{y_o}[t_0, T],\end{aligned}\tag{2.68}$$

систему *адаптации* \mathcal{S}_a :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{a,T} : \mathcal{L}_{y_p}[t_0, T] \oplus \mathcal{L}_{y_o}[t_0, T] \times \mathcal{E}_a &\mapsto \mathcal{L}_{x_a}[t_0, T], \\ \mathcal{H}_{a,T} : \mathcal{L}_{y_p}[t_0, T] \oplus \mathcal{L}_{y_o}[t_0, T] \times \mathcal{E}_a &\mapsto \mathcal{L}_{y_a}[t_0, T];\end{aligned}\tag{2.69}$$

и функции

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_o : \mathcal{E}_p \times \mathcal{L}_{y_o}[t_0, T] \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathcal{L}_u[t_0, T], \\ \mathbf{u}_a : \mathcal{L}_{y_a}[t_0, T] \times \mathcal{L}_{y_o}[t_0, T] \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathcal{L}_u[t_0, T],\end{aligned}$$

где $\mathbf{y}_o(t)$ – это оценка информации о состоянии $\mathbf{x}_p(t)$ при воздействиях среды \mathbf{e}_p по измерениям $\mathbf{y}_p(t)$, а $\mathbf{y}_a(t)$ – оценка информации о воздействии среды \mathbf{e}_p по измерениям $\mathbf{y}_p(t)$ с использованием оценок $\mathbf{y}_o(t)$. При этом функция $\mathbf{u}_o(\mathbf{e}_p, \mathbf{y}_o(t), t)$ является оценкой управления $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_p(t), t)$ по измерениям $\mathbf{y}_p(t)$ при условии, что \mathbf{e}_p известно. Функция $\mathbf{u}_a(\mathbf{y}_a(t), \mathbf{y}_o(t), t)$, в свою очередь, является оценкой функции $\mathbf{u}_o(\mathbf{e}_p, \mathbf{y}_o(t), t)$ по измерениям $\mathbf{y}_p(t)$, $\mathbf{y}_o(t)$. Таким образом, опосредованно через функцию $\mathbf{u}_o(\mathbf{e}_p, \mathbf{y}_o(t), t)$ и отображения (2.68), (2.69), функция $\mathbf{u}_a(\mathbf{y}_a(t), \mathbf{y}_o(t), t)$ является оценкой функции $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_p(t), t)$ по измерениям $\mathbf{y}_p(t)$. В этой связи будем полагать, что функция $\mathbf{u}_a(\mathbf{y}_a(t), \mathbf{y}_o(t), t)$ является выходом $\mathbf{y}_c(t)$ регулятора \mathcal{S}_c .

Качество систем управления в стандартных постановках определяется, как правило, в терминах свойств желаемого поведения объекта. В нашем же случае, при условии, что желаемое поведение обусловлено лишь ограниченностью состояния и выходов, логично рассматривать не качество системы в целом, а качество собственно управления. В силу того, что объект \mathcal{S}_p под действием управления $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_p(t), t)$ представляет собой систему (2.66), для которой пространство входов ограничено линейным нормированным пространством $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$, то в роли критерия качества управления естественно выбрать отклонение функций $\mathbf{u}_o(\mathbf{e}_p, \mathbf{y}_o(t), t)$, $\mathbf{u}_a(\mathbf{y}_a(t), \mathbf{y}_o(t), t)$ по норме в $\mathcal{L}_\delta[t_0, T]$ от неизвестного $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_p(t), t)$:

$$\mathcal{J}_x[t_0, T] = \|\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_p(t), t) - \mathbf{u}_o(\mathbf{e}_p, \mathbf{y}_o(t), t)\|_{\mathcal{L}_\delta[t_0, T]};\tag{2.70}$$

$$\mathcal{J}_e[t_0, T] = \|\mathbf{u}_o(\mathbf{e}_p, \mathbf{y}_o(t), t) - \mathbf{u}_a(\mathbf{y}_a(t), \mathbf{y}_o(t), t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}. \quad (2.71)$$

Таким образом, задача синтеза функционального адаптивного регулятора в широком смысле этого слова, как задача управления в условиях неопределенности информации о воздействиях $(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_o, \mathbf{e}_a) \in \mathcal{E}_p \times \mathcal{E}_o \times \mathcal{E}_a$ среды и в отсутствие точной информации о состоянии $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_x[t_0, T]$ объекта \mathcal{S}_p , может быть сформулирована следующим образом:

З а д а ч а 2.4. *Задача функционального синтеза адаптивного регулятора.* Для класса реализуемых (полных) объектов \mathcal{S}_p (2.64) найти функции $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_p(t), t)$ и определить классы систем $\mathcal{S}_o, \mathcal{S}_a$ (2.68), (2.69) такие, что для всех $\mathbf{e}_p \in \mathcal{E}_p$:

- 1) замыкание системы \mathcal{S}_p^* (2.66) с регулятором $\mathcal{S}_o, \mathcal{S}_a$ реализуемо (полно);
- 2) состояние $\mathbf{x}_p(t)$ и выход $\mathbf{y}_p(t)$ объекта \mathcal{S}_p и регулятора ограничены;
- 3) оценки верхних границ $\mathcal{J}_x, \mathcal{J}_e$ в (2.70), (2.71) и норм $\|\mathbf{x}_p(t)\|_{\mathcal{L}_{x_p}, [t_0, T]}, \|\mathbf{y}_p(t)\|_{\mathcal{L}_{y_p}, [t_0, T]}$ могут быть получены как функции аргументов $\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_o, \mathbf{e}_a$.

Последнее требование обусловлено необходимостью сравнения свойств систем управления в зависимости от условий функционирования и состояния среды $\mathcal{E}_p, \mathcal{E}_o, \mathcal{E}_a$.

Достаточные условия разрешимости этой задачи в виде ограничений на системы $\mathcal{S}_o, \mathcal{S}_a$ вытекают из следующей теоремы.

Т е о р е м а 2.6. *Рассмотрим систему (2.64), заданную операторами $\mathcal{S}_{p,T}, \mathcal{H}_{p,T}$ и $\mathcal{P}_{p,T}$. Пусть*

- 1) *существует управление (2.65) такое, что управляемая система (2.66) удовлетворяет предположению 2.1;*
- 2) *существуют реализуемые (полные) системы \mathcal{S}_o (2.68) и \mathcal{S}_a (2.69), заданные операторами $\mathcal{S}_{o,T}, \mathcal{H}_{o,T}$ и $\mathcal{S}_{a,T}, \mathcal{H}_{a,T}$ соответственно;*
- 3) *нормы $\mathcal{J}_x[t_0, T]$ и $\mathcal{J}_e[t_0, T]$, определенные выражениями (2.70), (2.71) ограничены*

$$\mathcal{J}_x \leq \Delta_{J_x}, \quad \mathcal{J}_e \leq \Delta_{J_e}. \quad (2.72)$$

Тогда замкнутое соединение системы \mathcal{S}_p с регулятором \mathcal{S}_c :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{c,T}(\mathbf{y}_p, \mathbf{e}_o \oplus \mathbf{e}_a) &= \mathcal{S}_{a,T}(\mathbf{y}_p, \mathcal{H}_{o,T}(\mathbf{y}_p, \mathbf{e}_o), \mathbf{e}_a) \oplus \mathcal{S}_o(\mathbf{y}_p, \mathbf{e}_o), \\ \mathcal{H}_{c,T}(\mathbf{y}_p, \mathbf{e}_o \oplus \mathbf{e}_a) &= \mathbf{u}_a(\mathcal{H}_a(\mathbf{y}_p, \mathcal{H}_o(\mathbf{y}_p, \mathbf{e}_o), \mathbf{e}_a), \mathcal{H}_o(\mathbf{y}_p, \mathbf{e}_o), t) \end{aligned} \quad (2.73)$$

реализуемо (полно) для всех $\delta(t) \in \mathcal{L}_\delta[t_0, T]$. При этом, если функция $\gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\cdot)$ ограничена по T :

$$\sup_{T \geq t_0} \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_\psi, d, T) = \Delta_P(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_\psi, d), \quad (2.74)$$

то $\mathbf{x}_p(t)$ ограничено:

$$\|\mathbf{x}_p(t)\|_{\infty, [t_0, T]} \leq \mu_{S_p, \infty}(\mathbf{e}_p, \Delta_P(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_\psi, \Delta_{J_x} + \Delta_{J_e} + \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]})). \quad (2.75)$$

Теорема 2.6 формулирует достаточные условия разрешимости части 1) задачи 2.4. Проблема 2) в задаче 2.4 автоматически разрешается при наличии дополнительной информации о свойствах “вход-выход” и “вход-состояние” для систем \mathcal{S}_o и \mathcal{S}_a . В частности, если они обладают свойством “ограниченный вход – ограниченный выход”, то проблема 2) также автоматически разрешается, так как согласно теореме 2.6 условие (2.74) влечет ограниченность $\mathbf{x}_p(t)$. Решение подзадачи 3), очевидно, требует знания оценок передаточных отображений для систем \mathcal{S}_o , \mathcal{S}_a , что, как правило, всегда доступно на этапе синтеза системы управления.

В дополнение к условиям разрешимости задачи синтеза на принципиальном уровне, как то: обеспечение полноты и ограниченности состояний, теорема 2.6 формулирует *принцип разделения* в задаче синтеза управления в условиях неопределенности. В частности, этим принципом обосновывается то, что решение задачи управления в условиях неопределенности может быть сведено к решению совокупности *независимых задач*:

1) задачи синтеза управления $\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_p(t), t)$, при наличии достоверной информации о состоянии \mathbf{x}_p и среде \mathbf{e}_p , трансформирующего объект \mathcal{S}_p в систему (2.66), удовлетворяющую предположению 2.1;

2) задачи синтеза системы наблюдения (наблюдателя) \mathcal{S}_o состояния $\mathbf{x}_p(t)$ по выходу $\mathbf{y}_p(t)$, гарантирующей ограниченность нормы $\mathcal{J}_x[t_0, T]$ для всех $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}^*$ при условии, что воздействия среды \mathbf{e}_p измеряются;

3) задачи синтеза системы адаптации \mathcal{S}_a к неконтролируемым возмущениям среды \mathbf{e}_p , гарантирующей ограниченность нормы $\mathcal{J}_e[t_0, T]$ для всех $\mathbf{y}_o \in \mathcal{L}_{y_o}$.

Ключевым фактором, в отличие от стандартных подходов, здесь является то, что условия реализуемости, полноты и ограниченности решений замкнутой системы не зависят от того, каким образом получены частные решения задач 1)–3). Так, например, для решения задачи 1) совершенно не важно, каким образом решаются задачи 2), 3). Требуется лишь отыскать $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее предположению 2.1. С другой стороны, решение задач 2), 3), по сути, требует выполнения ограничения (2.72). При этом в силу того, что эти задачи решаются сразу для классов $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}$ и $\mathbf{y}_o \in \mathcal{L}_{y_o}$, общее решение задачи управления не зависит от того, какие конкретные элементы \mathbf{u}^* и \mathbf{y}_o были выбраны на этапах 1) и 2).

2.5. Анализ асимптотического поведения систем с локально ограниченными операторами

Предыдущие параграфы раздела были посвящены проблеме функционального анализа и отчасти синтеза систем с локально ограниченными передаточными отображениями. Результаты, сформулированные в теоремах 2.4, 2.5 и 2.6, устанавливают условия при которых последовательное, замкнутое и параллельное соединения систем с локально ограниченными операторами также являются системами с локально ограниченными операторами относительно новых входов, выходов и состояний. Это соответствует решению задач 2.1 и 2.2.

Решение задачи 2.3 в отличие от задач 2.1 и 2.2 предполагает не просто установление факта ограниченности состояния и выходов, но и подразумевает спецификацию областей, в которых это состояние находится. Поэтому естественно полагать, что для ее решения потребуется дополнительная информация о системе. Вопрос лишь в том, какая это информация. Так, в частности, оценки (2.44) могут быть получены непосредственно из (2.75) или (2.60) при условии, что известны оценки сверху на предел

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [T, \infty)},$$

и, кроме того, оценки отображений “вход-выход” и “вход-состояние” $\mu_{S, \infty}(\cdot)$, $\mu_{H, \infty}(\cdot)$, $\mu_{S_p, \infty}(\cdot)$, области изменений параметров среды \mathbf{e}_p и оценки сверху норм $\mathcal{J}_x[t_0, \infty]$, $\mathcal{J}_e[t_0, \infty]$. Подобная информация, как правило, всегда доступна либо из эксперимента и предметной области происхождения системы, либо возникает на этапе синтеза, как характеристика регулятора. Более точные оценки принадлежности состояния и выходов системы с локально ограниченным оператором можно сформулировать с привлечением фундаментальных понятий инвариантных (см. определение 1.3.1) и предельных [120, 173] множеств.

О п р е д е л е н и е 2.5.1. Точка p называется ω -предельной точкой точки \mathbf{x}_0 потока (отображения) $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, если существует последовательность моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_i, \mathbf{x}_0, t_0) = p.$$

Множество всех ω -предельных точек p для \mathbf{x}_0 называется ω -предельным множеством точки \mathbf{x}_0

Существует обширная литература по анализу свойств предельных множеств систем. Фундаментальные свойства предельных множеств для систем, заданных диф-

ференциальными уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.76)$$

где функция $\mathbf{f}(\cdot)$ локально Липшицева, сформулированы в следующей лемме (см. [120], стр. 198, а также [207], стр. 127, лемма 4.1).

Л е м м а 2.1. *Если решения системы (2.76) ограничены для всех $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ по $t \geq 0$, то множество $\Omega(\mathcal{D}) = \bigcup_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}} \omega(\mathbf{x}_0)$ замкнуто, инвариантно и, кроме того,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0), \Omega(\mathcal{D})) = 0.$$

Лемма 2.1 и теорема 2.6 позволяют сформулировать важное следствие.

С л е д с т в и е 2.1. *Рассмотрим системы S_p и S_c , удовлетворяющие условиям теоремы 2.6. Пусть, кроме того, системы S_a , S_o имеют локально ограниченные передаточные отображения “вход-состояние” и $\delta(t) \equiv 0$. Предположим, в дополнение, что в области (2.75) замкнутая система может быть описана дифференциальным уравнением вида (2.76)¹⁰. Тогда решения замкнутой системы асимптотически стремятся к максимальному инвариантному множеству, содержащемуся в*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_p\| &\leq \max_{\mathbf{e}_p \in \mathcal{E}_p, d \leq M} \mu_{S_p, \infty}(\mathbf{e}_p, d); \\ M &= \max_{\mathbf{e}_p \in \mathcal{E}_p, \mathbf{e}_\psi \in \mathcal{E}_\psi, d \leq \Delta_{J_x} + \Delta_{J_e}} \Delta_P(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_\psi, d). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Наиболее принципиальное требование к информации о системе, предъявляемое следствием 2.1 состоит в возможности описания объекта, регулятора и среды системой автономных дифференциальных уравнений. Если такое допущение справедливо для системы, то тогда ключевым уточняющим фактором становится знание инвариантных множеств системы. Как правило, инвариантные множества самого объекта (положения равновесия или замкнутые орбиты) могут быть оценены *a priori*. Поэтому, если оценки асимптотического поведения управляемой системы важны, то существенной задачей на этапе синтеза адаптивной системы становится задача отыскания такого регулятора, чтобы инвариантные множества замкнутой системы совпадали с целевыми.

Выполнение этого естественного требования, однако, не всегда возможно для систем, допускающих неопределенности в модели, пусть и представимыми в виде

¹⁰Вектор \mathbf{x} в данном случае – это обобщенный вектор состояния, включая состояние регулятора и среды.

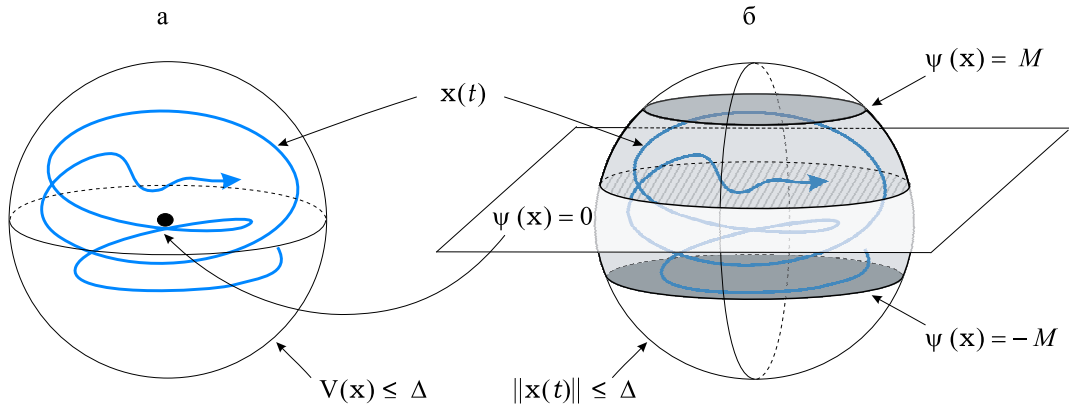


Рисунок 2.6. Область притяжения траекторий

(2.76). Частные результаты для асимптотически устойчивых положений равновесия получены в работах [269, 106]. Однако для широкого класса систем и множеств более сложной структуры, в частности, неустойчивых, применение этих результатов малоэффективно. Это, в свою очередь, мотивирует необходимость разработки схем адаптивного управления, не привносящих новых инвариантных множеств, кроме желаемых, в пространство состояний замкнутой системы.

В заключение отметим наиболее важные отличия оценок (2.77), полученных в результате комбинированного использования методов функционального анализа систем и свойств предельных множеств от стандартных методов оценки асимптотических решений в теории адаптивных систем. Эти различия иллюстрируются рисунком 2.6. Прежде всего, условия реализуемости, полноты и ограниченности сформулированы с учетом мажорирующих отображений $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_\psi)$. Для простоты будем полагать, что $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – скалярная функция состояния и не зависит от \mathbf{e}_ψ . Множество $\Omega_\psi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \psi(\mathbf{x}) = 0\}$ поэтому задает поверхность в \mathbb{R}^n . В стандартных методах адаптивного управления требуется явное задание целевого множества в виде нулей положительно определенной и неограниченно возрастающей по $\|\mathbf{x}\|$ функции $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ (см. рис. 2.6, а). Это условие зачастую ограничивает применимость теории, во-первых, множествами, для которых такое задание возможно (как правило, это сегменты гладких поверхностей или точки в \mathbb{R}^n). Во-вторых, в такой постановке необходимо *a priori* знание целевого множества. Дальнейшие изменения целевых множеств без изменения алгоритмов управления не допускается. В случае использования функционального подхода эти ограничения автоматически снимаются. Действительно, ограниченность состояния замкнутой системы вытекает из теорем 2.5, 2.6 (сфера $\Omega_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} : \|\mathbf{x}(t)\| \leq \Delta\}$ на рис. 2.6, б). С другой стороны, состо-

яние $\mathbf{x}(t)$ принадлежит области $\Omega_\psi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\psi(\mathbf{x})| \leq M\}$. Таким образом, траектория $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}(t))$ будет принадлежать множеству $\Omega_{\mathbf{x}} \cap \Omega_\psi$ для всех $t \geq t_0$ (затененная область на рис. 2.6, б). При этом в случае, если расширенная система удовлетворяет уравнениям вида (2.76), то решения стремятся к максимальному инвариантному множеству в $\Omega_{\mathbf{x}} \cap \Omega_\psi$. Знание этого множества *a priori* не требуется. В случае, когда известно, что $\psi(\mathbf{x}) \in C^1$ и $\psi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то решения, очевидно, стремятся к максимальному инвариантному множеству в Ω_ψ .

Отметим также и отличие излагаемого подхода от геометрических методов в адаптивном управлении [106]. Прежде всего методы, использующие описание движения системы в локальных координатах целевых многообразий, применимы лишь в окрестности этих многообразий в \mathbb{R}^n . При этом функции $\psi(\cdot)$ не должны зависеть от t , что совсем не обязательно в нашем случае, и кроме того, должны выполняться дополнительные метрические ограничения на свойства самой целевой поверхности [38]. В этом смысле результаты в [106] локальные (см. также теорему 1.1, приведенную в разд. 1). Результаты теорем 2.5, 2.6, напротив, не ограничены этими требованиями и, следовательно, применимы для систем, находящихся изначально вдали от положений равновесия или от целевых множеств.

2.6. Анализ асимптотического поведения неустойчивых систем

Большинство методов анализа асимптотических свойств динамических систем основано на таких фундаментальных понятиях, как устойчивость по Ляпунову в комбинации со стандартным понятием *притягивающего множества* (см. определение 1.3.2). Свойство (1.2) в определении 1.3.2 отражает собственно факт аттрактивности, притягивания или сходимости, в то время как свойство (1.1) требует, чтобы сходимость была равномерной по \mathbf{x}_0 в окрестности \mathcal{A} . Требование равномерности в таком смысле, очевидно, является необходимым для непрерывности в $L_\infty^n[t_0, \infty]$ и, следовательно, устойчивости по Ляпунову.

Несмотря на то, что стандартные понятия притягивающих множеств и устойчивости по Ляпунову являются эффективным тандемом в обширном множестве приложений, все же некоторые задачи не могут быть решены на их основе. Условие (1.1), в частности, может нарушаться в системах с перемежающейся, итинерантной или метастабильной динамикой. В общем случае оно не выполняется в системах, где фазовый поток глобально не обладает свойством сжатия. Такие системы, однако, естественным образом возникают в задачах глобальной оптимизации [175]. Например, в [297] отыскание глобального минимума некоторой дифференцируемой функции $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ на ограниченном множестве $\Omega_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ предлагается решать разбиением процедуры поиска на локально-сжимающую, градиентную подсистему \mathcal{S}_a

и поисковую, в общем случае неустойчивую \mathcal{S}_w :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_a : \dot{\mathbf{x}} &= -\mu_x \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mu_t T(t), \quad \mu_x, \mu_t \in \mathbb{R}_+ \\ \mathcal{S}_w : T(t) &= h\{t, \mathbf{x}(t)\}, \quad h : \mathbb{R}_+ \times L_\infty^n[t_0, t] \rightarrow L_\infty^n[t_0, t]\end{aligned}\quad (2.78)$$

Поисковая функция $T(t)$ в (2.78) плотной в области Ω_x (то есть посещающей любую малую окрестность каждой точки в Ω_x). Несмотря на то, что работа [297] не содержит формальных доказательств работоспособности алгоритмов (2.78), приведенные в ней вычислительные решения некоторых типовых оптимизационных задач демонстрируют существенные преимущества схем вида (2.78) по сравнению со стандартными, полученными из условий устойчивости по Ляпунову или равномерной по начальным условиям сходимости. Ослабление требования устойчивости по Ляпунову оказывается также преимущественным в задачах адаптации и идентификации для систем с параметризацией общего вида [323], навигации [309] и принятия решений в интеллектуальных системах [327, 330]. Системы с притягивающими, но тем не менее неустойчивыми по Ляпунову инвариантными множествами актуальны в задачах моделирования поведения биологических и физических систем [105]. Объекты подобного рода возникают также в задачах синхронизации нелинейных систем [121, 265]¹¹.

В случае, если исходная система устойчива, необходимость отыскания подходящей функции Ляпунова может быть существенным препятствием для анализа, особенно в тех ситуациях, когда информация о системе не полностью доступна. В этих случаях достижение целевых множеств безотносительно к устойчивости собственно процесса достижения цели можно рассматривать в качестве допустимого решения задачи регулирования. Известные результаты в этом направлении опубликованы в работах [188, 283].

Несмотря на то, что свойство (1.1) может не выполняться или намеренно игнорируется при анализе, сходимость траекторий $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ к множеству \mathcal{A} , свойство (1.2), должно, тем не менее, обеспечиваться. Это мотивирует, в свою очередь, исследование вопроса сходимости без требования ее равномерности в окрестности \mathcal{A} по \mathbf{x}_0 .

Подходящим понятием, которое адекватно этому требованию, является свойство *слабой аттрактивности или аттрактивности по Милнору* [245]:

О п р е д е л е н и е 2.6.1. *Множество \mathcal{A} называется слабо аттрактивным, слабо притягивающим или притягивающим по Милнору, если оно*

1) замкнутое, инвариантное и

¹¹Здесь уместно также отметить работу [280], где показано существенное различие между устойчивой и “почти устойчивой” синхронизацией в терминах необходимых коэффициентов усиления между парой осцилляторов Лоренца.

2) для некоторого множества \mathcal{V} (не обязательно окрестности множества \mathcal{A}) со строго положительной мерой и всех $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}$ выполняется соотношение (1.2).

Стандартные методы, в частности, принцип инвариантности Ла-Салля [224] или теоремы о центральном многообразии [132], могут быть использованы для анализа локальной неравномерной сходимости. Успешность применения этих методов, однако, зависит от точности информации о дифференциальных уравнениях исследуемой системы. В тех случаях, когда такая информация недоступна, и система представима в виде соединений отображений “вход-выход”, оправдано применение теорем о малом контурном усилении [344, 196] или теоремы 2.5. Эти результаты, однако, предполагают непрерывность либо локальную ограниченность отображений каждого компонента соединения, что может не выполняться для неравномерно-сходящихся процессов.

Предлагается компромиссное решение проблемы анализа асимптотической сходимости к неустойчивым множествам, использующее как свойства отображений “вход-выход”, так и фундаментальные понятия предельных множеств и инвариантности (центральные понятия в [224, 132]). Рассматривается класс систем, которые могут быть представлены в виде замкнутого соединения равномерно-притягивающей, устойчивой подсистемы \mathcal{S}_a с поисковой, в общем случае неустойчивой, частью \mathcal{S}_w . Типичным примером систем такого класса являются нелинейные каскады вида

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_a : \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \\ \mathcal{S}_w : \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{q}(\mathbf{z}, \mathbf{x}),\end{aligned}\tag{2.79}$$

где нулевое решение \mathbf{x} -подсистемы асимптотически устойчиво по Ляпунову в отсутствие входа \mathbf{z} , а состояние \mathbf{z} -подсистемы есть функция интеграла $\int_{t_0}^t \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau$. Сложность анализа асимптотических свойств соединений вида (2.79) заключается в том, что даже в случае если обе подсистемы в соединении (2.79) оказываются устойчивыми и \mathbf{x} -подсистема не зависит от состояния \mathbf{z} , соединение в целом может оказаться неустойчивым [97]. Однако неустойчивость по Ляпунову, как уже неоднократно было отмечено в разделе, не всегда означает неограниченность решений и невозможность достижения цели системой. Это обстоятельство дополнительно стимулирует необходимость анализа асимптотических свойств неустойчивых по Ляпунову систем.

Результаты настоящего параграфа позволяют показать, что для неустойчивых соединений вида (2.79), при выполнении некоторых дополнительных ограничений на свойства вход-выход систем \mathcal{S}_a и \mathcal{S}_w , всегда существует непустое множество \mathcal{V} в пространстве состояния системы, такое что траектории, проходящие через \mathcal{V} остаются ограничены и асимптотически приближаются к некоторому инвариантному множеству (слабому притягивающему множеству по Милнору).

Формально соединение систем \mathcal{S}_a и \mathcal{S}_w зададим следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_a &: (u_a, \mathbf{x}_0) \mapsto \mathbf{x}(t), \\ \mathcal{S}_w &: (u_w, \mathbf{z}_0) \mapsto \mathbf{z}(t),\end{aligned}\tag{2.80}$$

где $u_a \in \mathcal{U}_a \subseteq L_\infty[t_0, \infty]$, $u_w \in \mathcal{U}_w \subseteq L_\infty[t_0, \infty]$ – входы систем \mathcal{S}_a и \mathcal{S}_w соответственно, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^m$ начальные условия, а $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \subseteq L_\infty^n[t_0, \infty]$, $\mathbf{z}(t) \in \mathcal{Z} \subseteq L_\infty^m[t_0, \infty]$ состояния. Положим, что система \mathcal{S}_a устойчива от входа к состоянию относительно компактного множества \mathcal{A} .

Предположение 2.2. *Состояние $\mathbf{x}(t)$ системы \mathcal{S}_a удовлетворяет условию:*

$$\mathcal{S}_a : \quad \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}}, t - t_0) + c\|u_a(t)\|_{\infty, [t_0, t]}, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, t \geq t_0, \tag{2.81}$$

где функция $\beta(\cdot, \cdot) \in \mathcal{KL}$, и $c > 0$ – положительная константа.

Сжимающие свойства невозмущенной динамики системы \mathcal{S}_a моделируются в (2.81) функцией $\beta(\cdot, \cdot)$. Отношение “вход-выход” описывается в терминах непрерывного отображения, удовлетворяющего условию Липшица. При этом само отображение “вход-выход” не обязательно сжимающее.

Для систем \mathcal{S}_a , представимых системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_x(\mathbf{x}, u_a), \quad \mathbf{f}_x(\cdot, \cdot) \in C^1, \tag{2.82}$$

предположение 2.2 эквивалентно комбинации следующих свойств¹²:

1. множество \mathcal{A} устойчиво по Ляпунову и глобально аттрактивно в системе (2.82) при $u_a(t) \equiv 0$ для всех t ;
2. для всех $u_a \in \mathcal{U}_a$ и $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется неубывающая функция $\kappa : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ : \kappa(0) = 0$ такая, что для всех

$$\inf_{t \in [t_0, \infty)} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} \leq \kappa(\|u_a(t)\|_{\infty, [t_0, \infty)}).$$

Класс систем \mathcal{S}_w , неустойчивых, поисковых подсистем соединения (2.80) специфицируем следующим образом.

Предположение 2.3. *Система \mathcal{S}_w полна:*

$$u_w(t) \in \mathcal{U}_w \Rightarrow \mathbf{z}(t) \in \mathcal{Z}, \quad \forall t \geq t_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}_+$$

¹²Подробное доказательство приведенных эквивалентных характеристик устойчивости “вход-состояние” приводится в работе [302].

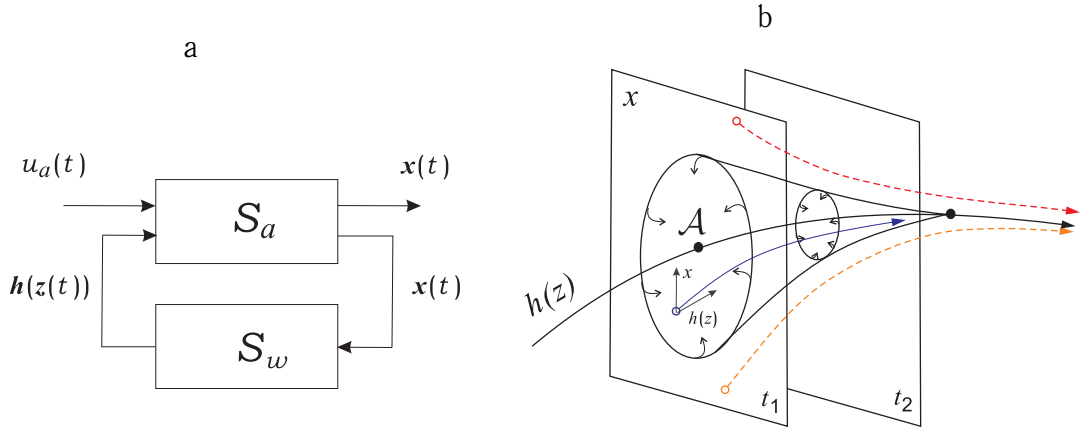


Рисунок 2.7. **a.** Структурная схема рассматриваемых соединений систем S_a и S_w . Система S_a – “сжимающая” система, имеет инвариантное притягивающее множество \mathcal{A} , удовлетворяющее определению 1.3.2. Система S_w может не содержать притягивающих множеств, она соответствует “поисковой” динамике. Примером поведения систем такой конфигурации является динамика фазового потока в окрестности седловой точки в трехмерном пространстве, что иллюстрируется диаграммой **b**.

и для нее определены функции выхода $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ и “ограничивающие” функции $\gamma_0 \in \mathcal{K}_{\infty,e}$, $\gamma \in \mathcal{K}_{\infty,e}$ такие, что справедливо следующее интегральное неравенство:

$$S_w : \int_{t_0}^t \gamma_1(u_w(\tau)) d\tau \leq h(\mathbf{z}(t_0)) - h(\mathbf{z}(t)) \leq \int_{t_0}^t \gamma_0(u_w(\tau)) d\tau, \quad \forall t \geq t_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}_+. \quad (2.83)$$

Неравенство (2.83) влечет *монотонность* функции $h(\mathbf{z}(t))$ по t . Для удобства последующих формулировок положим, что определены функции $\gamma_{0,1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\gamma_{0,2} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такие, что

$$\gamma_0(a \cdot b) \leq \gamma_{0,1}(a) \cdot \gamma_{0,2}(b), \quad (2.84)$$

для всех ограниченных $a, b \in \mathbb{R}_+$. Отметим, что эти функции всегда найдутся, например, для локально Липшицевых функций $\gamma_0(\cdot)$.

Рассмотрим замкнутое соединение систем (2.81), (2.83) с уравнениями связи $u_a(t) = h(\mathbf{z}(t))$ и $u_w(t) = \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} &\leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}}, t - t_0) + c\|h(\mathbf{z}(t))\|_{\infty, [t_0, t]}, \\ \int_{t_0}^t \gamma_1(\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}}) d\tau &\leq h(\mathbf{z}(t_0)) - h(\mathbf{z}(t)) \leq \int_{t_0}^t \gamma_0(\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}}) d\tau. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Диаграмма, иллюстрирующая общую структуру соединения (2.85) приведена на рис. 2.7.

Уравнения (2.85) характеризуют качественным образом взаимодействие между сжимающей S_a и поисковой S_w динамикой, свойственное целому спектру задач оптимизации (2.78) и теории систем, (2.79). Подобное описание также характерно для

систем, находящихся в состоянии транскритической бифуркации или бифуркации типа “седло-узел”.

Пример 2.6.1. Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon + \gamma x_1^2, \gamma > 0,\end{aligned}\tag{2.86}$$

где параметр ε изменяется от отрицательных до положительных значений. При $\varepsilon = 0$ устойчивое и неустойчивое положения равновесия в системе “сталкиваются”, приводя к каскадам вида (2.85). В отличие от другого возможного сценария:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon + \gamma x_2^2, \gamma > 0,\end{aligned}$$

где динамика второго уравнения *не зависит* от первого, анализ асимптотического поведения системы (2.86) не редуцируется до анализа отдельных уравнений независимо друг от друга. В этом смысле рассматриваемый класс систем (2.85) соответствует, возможно, наихудшему для анализа случаю и поэтому дополнительно интересен.

Именно, представляет интерес ответ на следующий вопрос: существует ли такое множество (слабая область захвата в терминологии [173] и [245]), что все траектории замкнутой системы, проходящие через это множество остаются ограниченными? Естественно ожидать, что существование такого множества будет зависеть от свойств функций $\gamma_0(\cdot)$, $\gamma_1(\cdot)$ и $\beta(\cdot, \cdot)$, с в (2.85). Если такое множество существует, то следующий вопрос состоит в определении условий возникновения слабого притягивающего множества.

Для ответа на поставленные вопросы прежде всего формулируются условия существования точки $\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{z}_0$ такой, что ее ω -предельное множество $\omega(\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{z}_0)$ ограничено в следующем смысле:

$$\|\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{z}_0)\|_{\mathcal{A}} < \infty, \quad |h(\omega_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{z}_0))| < \infty.\tag{2.87}$$

Можно показать, что множество Ω' всех таких точек имеет ненулевой объем в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Для установления условий возникновения притягивающих множеств используется понятие *статической характеристики* “вход-состояние”¹³ системы. Показывается, что если такая характеристика определена для системы \mathcal{S}_a , то возникновение и расположение притягивающего по Милнору множества определяется ее нулями. Диаграмма, иллюстрирующая основные шаги анализа и последовательность условий, влекущих возникновение притягивающих множеств соединения (2.85) приведена на рис. 2.8.

¹³Точное определение дается в параграфе 2.6.2.

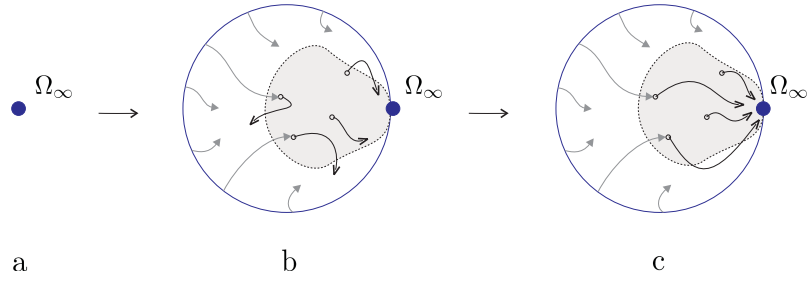


Рисунок 2.8. Возникновение слабого притягивающего по Милнору множества Ω_∞ . Панель *a* – целевое инвариантное множество, панель *b* – возникновение слабой области захвата (теорема 2.7), панель *c* – трансформация слабой области захвата в область притяжения слабого притягивающего в множества Ω_∞ (леммы 2.2, 2.3, следствие 2.3)

2.6.1. Теорема о малом контурном усилении

для неравномерной сходимости

Перед тем, как сформулировать основные результаты этого параграфа, введем в рассмотрение три последовательности:

$$\mathcal{S} = \{\sigma_i\}_{i=0}^\infty, \quad \Xi = \{\xi_i\}_{i=0}^\infty, \quad \mathcal{T} = \{\tau_i\}_{i=0}^\infty.$$

Первая последовательность, \mathcal{S} (см. рис. 2.9), разбивает интервал $[0, h(\mathbf{z}_0)]$, $h(\mathbf{z}_0) > 0$ в объединение сжимающихся интервалов H_i :

$$[0, h(\mathbf{z}_0)] = \cup_{i=0}^\infty H_i, \quad H_i = [\sigma_{i+1}h(\mathbf{z}_0), \sigma_i h(\mathbf{z}_0)]. \quad (2.88)$$

Формально это свойство последовательности \mathcal{S} зададим в виде предположения 2.4.

Предположение 2.4. Последовательность \mathcal{S} строго монотонна, убывает и, кроме того,

$$\{\sigma_n\}_{n=0}^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0, \quad \sigma_0 = 1. \quad (2.89)$$

Последовательности Ξ и \mathcal{T} будут использованы для определения достаточной степени $\xi_i \in \Xi$ сжатия фазового потока системы (2.81) в терминах свойств функции $\beta(\cdot, \cdot)$ и времени $T_i > \tau_i \in \mathcal{T}$. Эти характеристики сформулированы в предположениях 2.5 и 2.6

Предположение 2.5. Для заданных последовательностей Ξ , \mathcal{T} и функции $\beta(\cdot, \cdot) \in \mathcal{KL}$ в (2.81) выполняются следующие неравенства:

$$\beta(\cdot, T_i) \leq \xi_i \beta(\cdot, 0), \quad \forall T_i \geq \tau_i. \quad (2.90)$$

Предположение 2.5 устанавливает, что для заданного (пока произвольного) коэффициента ξ_i и момента времени t_0 необходимо как минимум τ_i условных единиц времени для того, чтобы состояние \mathbf{x} достигло области:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \leq \xi_i \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}}, 0).$$

Для того, чтобы специфицировать желаемую величину ξ_i , в дополнение к (2.90), необходимо ввести меры влияния начальных условий \mathbf{x}_0 и входов $h(\mathbf{z}_0)$ на состояние $\mathbf{x}(t)$ системы (2.81) в процессе ее движения в пространстве состояний. С этой целью введем две системы функций, Φ и Υ :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \phi_j(s) &= \phi_{j-1} \circ \rho_{\phi,j}(\xi_{i-j} \cdot \beta(s, 0)), \quad j = 1, \dots, i \\ \phi_0(s) &= \beta(s, 0); \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon : \quad v_j(s) &= \phi_{j-1} \circ \rho_{v,j}(s), \quad j = 1, \dots, i \\ v_0(s) &= \beta(s, 0), \end{aligned} \quad (2.92)$$

где функции $\rho_{\phi,j}, \rho_{v,j} \in \mathcal{K}$ удовлетворяют неравенству

$$\phi_{j-1}(a + b) \leq \phi_{j-1} \circ \rho_{\phi,j}(a) + \phi_{j-1} \circ \rho_{v,j}(b). \quad (2.93)$$

Отметим, что в случае $\beta(\cdot, 0) \in \mathcal{K}_{\infty}$ функции $\rho_{\phi,j}(\cdot), \rho_{v,j}(\cdot)$, удовлетворяющие неравенству (2.93) всегда существуют [196]. Свойства последовательности Ξ , обеспечивающие желаемую степень влияния начальных условий \mathbf{x}_0 и входа $h(\mathbf{z}_0)$ на норму состояния $\mathbf{x}(t)$, сформулированы в предположении 2.6.

Предположение 2.6. Последовательности

$$\sigma_n^{-1} \cdot \phi_n(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}), \quad \sigma_n^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^n v_i(c|h(\mathbf{z}_0)|\sigma_{n-i}) \right), \quad n = 0, \dots, \infty$$

ограничены сверху, т. е. существуют функции $B_1(\|\mathbf{x}_0\|), B_2(|h(\mathbf{z}_0)|, c)$ такие, что

$$\sigma_n^{-1} \cdot \phi_n(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}) \leq B_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}); \quad (2.94)$$

$$\sigma_n^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^n v_i(c|h(\mathbf{z}_0)|\sigma_{n-i}) \right) \leq B_2(|h(\mathbf{z}_0)|, c) \quad (2.95)$$

для всех $n = 0, 1, \dots, \infty$.

Следует отметить, что для широкого класса функций $\beta(s, 0)$, в частности сепарабельных и Липшицевых по s , предположения 2.4–2.6 всегда выполняются. Этот случай рассматривается подробно в параграфе 2.6.3 как следствие теоремы 2.7.

Для того, чтобы показать возникновение “слабых” областей захвата по Милнору в пространстве состояния, рассмотрим следующее семейство объемов, индуцированных последовательностью \mathcal{S} и соответствующим разбиением (2.88) интервала $[0, h(\mathbf{z}_0)]$:

$$\Omega_i = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{z} \in \mathcal{Z} \mid h(\mathbf{z}(t)) \in H_i\}. \quad (2.96)$$

Для каждого $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{Z}$ из Ω_0 одинаково возможны два альтернативных варианта. В одном случае траектория $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \oplus \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ остается в некотором множестве $\Omega' \subset \Omega_0$ для всех $t > t'$, $t' \geq t_0$. Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ состояние стремится к множеству

$$\Omega_a = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{z} \in \mathcal{Z} \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \leq c \cdot h(\mathbf{z}_0), \mathbf{z} : h(\mathbf{z}) \in [0, h(\mathbf{z}_0)]\}. \quad (2.97)$$

Во втором случае траектория $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \oplus \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ последовательно пересекает объемы Ω_j , и t_j – моменты времени когда траектория $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \oplus \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ “протыкает” гиперповерхности $h(\mathbf{z}(t)) = h(\mathbf{z}_0)\sigma_j$. Очевидно, что в этом случае состояние замкнутой системы останется в Ω_0 только если последовательность $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ расходится. Условия, устанавливающие такую возможность в зависимости от свойств характеристических последовательностей \mathcal{S} , Ξ , \mathcal{T} и также от свойств функций $\gamma_0(\cdot)$ в (2.85), сформулированы в теореме 2.7. Диаграмма, схематически иллюстрирующая основные идеи доказательства представлена на рис. 2.9.

Т е о р е м а 2.7. Пусть заданы системы \mathcal{S}_a , \mathcal{S}_w , удовлетворяющие предположениям 2.2, 2.3. Рассмотрим их замкнутое соединение (2.85) и предположим, что существуют последовательности \mathcal{S} , Ξ и \mathcal{T} , удовлетворяющие предположениям 2.4–2.6. В дополнение положим, что выполнены следующие условия:

1) существует положительное число $\Delta_0 > 0$ такое, что

$$\frac{1}{\tau_i} \frac{(\sigma_i - \sigma_{i+1})}{\gamma_{0,1}(\sigma_i)} \geq \Delta_0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, \infty; \quad (2.98)$$

2) множество Ω_γ всех точек \mathbf{x}_0 , \mathbf{z}_0 , удовлетворяющих неравенству

$$\gamma_{0,2}(B_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}) + B_2(|h(\mathbf{z}_0)|, c) + c|h(\mathbf{z}_0)|) \leq h(\mathbf{z}_0)\Delta_0 \quad (2.99)$$

не пусто;

3) частичные суммы элементов последовательности \mathcal{T} расходятся:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tau_i = \infty. \quad (2.100)$$

Тогда для всех \mathbf{x}_0 , $\mathbf{z}_0 \in \Omega_\gamma$ состояние $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_0) \oplus \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ системы (2.85) асимптотически стремится к множеству (2.97)

$$\Omega_a = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{z} \in \mathcal{Z} \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \leq c \cdot h(\mathbf{z}_0), \mathbf{z} : h(\mathbf{z}) \in [0, h(\mathbf{z}_0)]\}.$$

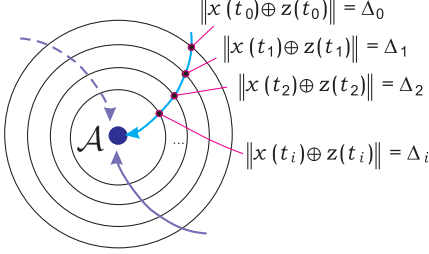
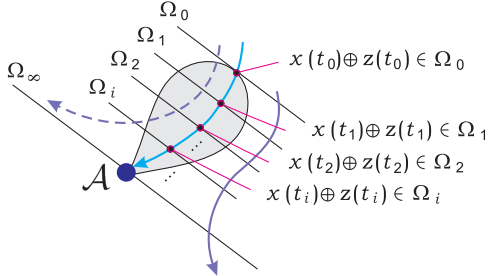
Стандартные схемы	Предлагаемое решение
<p>1) Область притяжения – окрестность инвариантного множества</p> <p>2) Влечет устойчивость по Ляпунову инвариантного множества</p> 	<p>1) Область притяжения – множество положительной меры (не обязательно, являющееся окрестностью)</p> <p>2) Позволяет анализировать сходимость в неустойчивых по Ляпунову системах</p> 
<p>Дано: расходящаяся последовательность моментов времени t_i</p>	<p>Дано: последовательность множеств Ω_i, расстояние Δ_i от которых к \mathcal{A} стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$</p>
<p>Доказывается: сходимость норм $\ \mathbf{x}(t_i) \oplus \mathbf{z}(t_i)\ = \Delta_i$ к нулю при $i \rightarrow \infty$</p>	<p>Доказывается: расходямость последовательности $\{t_i\}$, где $t_i : \mathbf{x}(t_i) \oplus \mathbf{z}(t_i) \in \Omega_i$</p>

Рисунок 2.9. Основные отличия стандартных концепций сходимости (слева) и концепции слабой, неравномерной сходимости (справа). В случае равномерной сходимости траектории, начинающиеся в окрестности множества \mathcal{A} всегда остаются в некоторой окрестности \mathcal{A} (сплошные и пунктирные голубые линии). В случае неравномерной сходимости только лишь часть начальных условий окрестности множества \mathcal{A} соответствует траекториям, остающимся в некоторой окрестности множества \mathcal{A} . Траектории, начинающиеся из других начальных условий могут покидать окрестность множества \mathcal{A} . Необходимым условием для того, чтобы траектории все же оставались в окрестности множества \mathcal{A} является, очевидно, расходямость последовательности $\{t_i\}$. В рамках рассматриваемой постановки задачи расходямость последовательности $\{t_i\}$ влечет и ограниченность нормы $\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}}$.

Основное отличие теоремы 2.7 от стандартных теорем о малом контурном усилении [344, 196] состоит в том, что последние учитывают лишь отношения “вход-выход” и “вход-состояние” (отображения $\gamma_0(\cdot)$ и константа c в случае системы (2.85)). Это является следствием того, что каждый элемент соединения предполагается устойчивым от входа к состоянию, и их внутренней динамикой поэтому можно пренебречь. Для системы (2.85) это предположение не выполняется, так как подсистема \mathcal{S}_w в общем случае неустойчива по Ляпунову. Следовательно, для того, чтобы установить ограниченность $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ и $h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0))$, необходимо учитывать “степень устойчивости” самой системы \mathcal{S}_a . Иначе говоря, система \mathcal{S}_a должна обладать достаточно большой степенью сжатия по \mathbf{x}_0 , в то время как коэффициент передачи “вход-выход” системы \mathcal{S}_w должен быть достаточно малым. Степень сжатия по \mathbf{x}_0 в \mathcal{S}_a , в соответствии с (2.81), определяется функцией $\beta(\cdot, \cdot)$. Свойства этой функции в явном виде учитываются в предположениях 2.6 и (2.100). Область допустимых начальных условий и, собственно, условие малого контурного усиления (свойства “вход-выход” систем \mathcal{S}_w и \mathcal{S}_a) определяются условиями (2.98), (2.99) соответственно. Отметим и то отличие, что область Ω_γ в общем случае не является окрестностью Ω_a . Поэтому сходимость состояния к Ω_a , обусловленная теоремой 2.7, вообще говоря, не является равномерной по $\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0$ в окрестности Ω_a .

В дополнение отметим и то обстоятельство, что теорема останется справедливой, если вместо соединения (2.85) рассматривать соединения вида

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} &\leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}}, t - t_0) + c\|h(\mathbf{z}(t))\|_{\infty, [t_0, t]} + \|\varepsilon(t)\|_{\infty, [t_0, t]}, \\ \int_{t_0}^t \gamma_1(\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}}) d\tau &\leq h(\mathbf{z}(t_0)) - h(\mathbf{z}(t)) \leq \int_{t_0}^t \gamma_0(\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}}) d\tau, \end{aligned} \quad (2.101)$$

где $\varepsilon(t)$ имеет смысл асимптотически затухающего возмущения. При этом

$$|\varepsilon(t)| \leq M \cdot h(\mathbf{z}_0) \cdot \sigma_i, \quad t \geq \sum_{j=0}^i \tau_i - \tau_0.$$

Условие (2.99) при этом трансформируется в неравенство

$$\gamma_{0,2}(B_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}) + B_2(|h(\mathbf{z}_0)|, c + M) + (c + M)|h(\mathbf{z}_0)|) \leq h(\mathbf{z}_0)\Delta_0. \quad (2.102)$$

Последнее замечание позволяет использовать результаты теоремы 2.7 для систем, состояние которых недоступно для измерения, но может быть восстановлено с точностью до асимптотически затухающих ошибок.

2.6.2. Характеризация притягивающего множества по Милнору

Теоремы о малом коэффициенте усиления позволяют эффективно установить условия ограниченности состояния и полноту замкнутого соединения. Оценки же

областей сходимости, вытекающие из них, зачастую слишком консервативны (см., например, (2.97)). Это объясняется тем, что условия подобных теорем используют лишь оценки отображений “вход-выход” и “вход-состояние” в качестве доступной информации о системе. В случае, когда необходимы более точные оценки областей сходимости, естественно ожидать, что потребуется дополнительная информация о свойствах систем \mathcal{S}_a и \mathcal{S}_w . Вопрос лишь в том, насколько подробной должна быть такая информация, достаточно ли ограничиться качественной информацией о классе систем или необходимы какие-либо количественные характеристики? Оказывается, что в нашем случае знание факта существования *статической характеристики* “вход-состояние” (см. определение 2.6.2) оказывается достаточным для того, чтобы существенно улучшить оценки (2.97) области сходимости.

О п р е д е л е н и е 2.6.2. Будем говорить, что для системы \mathcal{S}_a , (2.81), определена статическая характеристика “вход-состояние” $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ по норме $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$, если для любой константы \bar{u}_a выполняется предельное соотношение:

$$\forall u_a(t) \in \mathcal{U}_a : \lim_{t \rightarrow \infty} u_a(t) = \bar{u}_a \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} \in \chi(\bar{u}_a). \quad (2.103)$$

Ключевым свойством системы \mathcal{S}_a в определении 2.6.2 является то, что существование предела $\lim_{t \rightarrow \infty} u_a(t)$ влечет существование предела $\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}}$ при $t \rightarrow \infty$. Следует отметить, что граф отображения χ не обязательно должен быть функциональным. Поэтому определение 2.6.2 в принципе допускает значительную долю неопределенности при описании системы \mathcal{S}_a . Существенным для последующего анализа будет лишь сам факт наличия такой характеристики для системы \mathcal{S}_a .

Не каждая система, однако, обладает характеристикой $\chi(\cdot)$, удовлетворяющей определению 2.6.2. Известны примеры простых систем, состояние которых не имеет предела даже по норме при постоянных и асимптотически приближающихся к константам входах, как это требуется в (2.103). В механике, физике и биологии такие системы представляют собой классы нелинейных осцилляторов, возбуждаемых постоянными входами. Для работы с такими системами удобно использовать более слабое свойство *усредненной статической характеристики* или статической характеристики *в среднем*.

О п р е д е л е н и е 2.6.3. Будем говорить, что для системы (2.81) определена статическая характеристика в среднем $\chi_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ по норме $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$, если для любого постоянного \bar{u}_a и некоторого $T > 0$ выполняется предельное соотношение:

$$\forall u_a(t) \in \mathcal{U}_a : \lim_{t \rightarrow \infty} u_a(t) = \bar{u}_a \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} \|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}} d\tau \in \chi_T(\bar{u}_a). \quad (2.104)$$

Оценки асимптотических свойств состояния системы (2.85) в зависимости от свойств статических характеристик системы \mathcal{S}_a могут быть получены из лемм 2.2 и 2.3.

Л е м м а 2.2. Пусть задана система (2.85) и функция $h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0))$ ограничена для некоторого $\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0$. Кроме того, положим, что для системы (2.81) определена статическая характеристика $\chi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Тогда справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{A}} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)) \in \chi^{-1}(0). \quad (2.105)$$

Как вытекает из леммы 2.2, в случае, если статическая характеристика системы \mathcal{S}_a определена, асимптотическое поведение соединения (2.85) характеризуется нулями отображения $\chi(\cdot)$. Подобный вывод можно сформулировать и для систем со статической характеристикой в среднем

Л е м м а 2.3. Пусть задана система (2.85). Функция $h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0))$ ограничена для некоторого $\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0$, $h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)) \in [0, h(\mathbf{z}_0)]$, и для системы (2.81) определена статическая характеристика $\chi_T(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ в среднем. Кроме того, пусть существует положительная константа $\bar{\gamma}$ такая, что функция $\gamma_1(\cdot)$ в (2.83) удовлетворяет ограничению:

$$\gamma_1(s) \geq \bar{\gamma} \cdot s, \quad \forall s \in [0, \bar{s}], \bar{s} \in \mathbb{R}_+ : \bar{s} > c \cdot h(\mathbf{z}_0). \quad (2.106)$$

В дополнение положим, что $\chi_T(\cdot)$ не имеет нулей в правой полуплоскости. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{A}} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)) = 0. \quad (2.107)$$

Немедленным следствием лемм 2.2 и 2.3 является тот факт, что выполнение условий теоремы 2.7 в случае, если система (2.81) обладает статической характеристикой $\chi(\cdot)$ или $\chi_T(\cdot)$ автоматически гарантирует сходимость состояний замкнутой системы в область

$$\Omega_a = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{z} \in \mathcal{Z} \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = 0, \mathbf{z} : h(\mathbf{z}) \in [0, h(\mathbf{z}_0)]\}. \quad (2.108)$$

При некоторой дополнительной информации качественного характера о свойствах систем \mathcal{S}_a и \mathcal{S}_w оказывается возможным сформулировать более сильное утверждение об области сходимости состояний замкнутой системы. Этот результат приведен в виде следствия 2.2 из теоремы 2.7.

С л е д с т в и е 2.2. Рассмотрим систему (2.85), удовлетворяющую условиям теоремы 2.7. Пусть, в дополнение,

С1) поток $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \oplus \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ генерируется системой автономных дифференциальных уравнений с локально Липшицевой правой частью;

С2) подсистема S_w практически интегрально устойчива от входа к состоянию:

$$\|\mathbf{z}(\tau)\|_{\infty, [t_0, t]} \leq C_z + \int_0^t \gamma_1(u_s(\tau)) d\tau \quad (2.109)$$

и функция $h(\cdot)$ в (2.83) непрерывна: $h(\cdot) \in C^0$;

С3) для системы S_a определена статическая характеристика $\chi(\cdot)$.

Тогда для всех $\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0 \in \Omega_\gamma$ состояние замкнутой системы асимптотически стремится (при $t \rightarrow \infty$) к множеству

$$\Omega_a = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{z} \in \mathcal{Z} \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = 0, h(\mathbf{z}) \in \chi^{-1}(0)\}. \quad (2.110)$$

Как вытекает из следствия 2.2, нули статической характеристики системы S_a фактически “управляют” расположением областей, в которые асимптотически сходятся траектории замкнутой системы (2.85). Это свойство иллюстрируется рисунком 2.10. Отметим также и то, что в случае замены условия С3 в следствии 2.2 на альтернативное:

С3') для системы S_a определена статическая характеристика в среднем $\chi_T(\cdot)$, отображение $\chi_T(\cdot)$ не имеет нулей в правой полуплоскости и функция $\gamma_1(\cdot)$ удовлетворяет условию (2.106),

можно показать, что состояние замкнутой системы асимптотически сходится в область

$$\Omega_a = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{z} \in \mathcal{Z} \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = 0, h(\mathbf{z}) = 0\}. \quad (2.111)$$

Доказательство этого факта аналогично доказательству следствия 2.2 и поэтому не приводится.

2.6.3. Системы с сепарабельной динамикой

Условия ограниченности состояния и полноты замкнутого соединения для классов систем, оценки областей захвата по Милнору (множества Ω_γ) и, при доступной дополнительной качественной информации, оценки области, в которую состояние сходится асимптотически - все эти результаты были получены для достаточно общего класса функций $\beta(\cdot, \cdot) \in \mathcal{KL}$ в (2.81) и $\gamma_0(\cdot), \gamma_1(\cdot)$ в (2.83). Основным затруднением практического характера для применения этих результатов является необходимость проверки в конкретных приложениях выполнения условий теоремы 2.7 в силу общности функций $\beta(\cdot, \cdot)$ и $\gamma_0(\cdot), \gamma_1(\cdot)$. Условия теоремы 2.7, однако, могут быть существенно упрощены, если известна дополнительная информация о классе функций

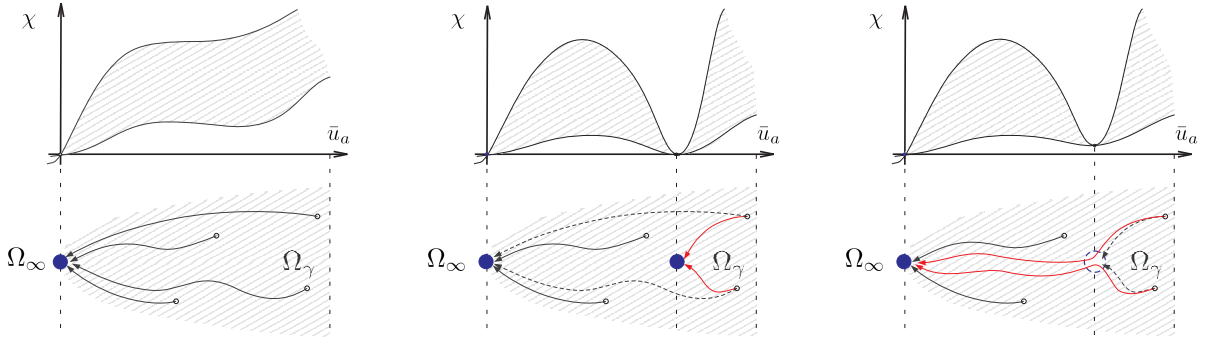


Рисунок 2.10. Управление расположением притягивающих множеств с помощью статических характеристик подсистем замкнутого соединения

$\beta(\cdot, \cdot)$ и $\gamma_0(\cdot)$. Этой информацией, в частности, может быть свойство сепарабельности функции $\beta(\cdot, \cdot)$ или, что эквивалентно, возможность следующей ее факторизации:

$$\beta(\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}, t) \leq \beta_x(\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}) \cdot \beta_t(t), \quad (2.112)$$

где $\beta_x(\cdot) \in \mathcal{K}$ и $\beta_t(\cdot) \in \mathcal{C}^0$ строго убывает¹⁴ по t и, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t(t) = 0. \quad (2.113)$$

Факторизация (2.112), как показано в работе [171], реализуема для широкого класса равномерно асимптотически устойчивых систем \mathcal{S}_a при соответствующем преобразовании координат. Немедленным следствием такой факторизации (2.112) является тот факт, что элементы последовательности Ξ в предположении 2.5, не зависят от норм $\|\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathcal{A}}$. Следовательно, проверка предположений 2.5, 2.6 упрощается. Наиболее интересный как с практической, так и с теоретической точек зрения случай возникает, когда функция $\beta_x(\cdot)$ в (2.112) удовлетворяет условию Липшица. Для этого класса систем условия теоремы 2.7 редуцируются до единственного и легко проверяемого неравенства. Рассмотрим подробнее этот случай.

Без потери общности положим, что состояние $\mathbf{x}(t)$ системы \mathcal{S}_a удовлетворяет оценкам

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} \leq \|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}} \cdot \beta_t(t - t_0) + c \cdot \|h(\mathbf{z}(t), \mathbf{z}_0)\|_{\infty, [t_0, t]}, \quad (2.114)$$

где значение $\beta_t(0)$ больше или равно единице. В силу того, что функция $\beta_t(t)$ строго убывает, отображение $\beta_t : [0, \infty] \mapsto [0, \beta_t(0)]$ инъективно. Более того, $\beta_t(t)$ непрерывно, тогда оно сюръективно и, следовательно, биективно. Другими словами, существует обратное (непрерывное) отображение $\beta_t^{-1} : [0, \beta_t(0)] \mapsto \mathbb{R}_+$ такое, что:

$$\beta_t^{-1} \circ \beta_t(t) = t, \quad \forall t > 0. \quad (2.115)$$

¹⁴В случае, если функция $\beta_t(\cdot)$ не строго монотонна, она всегда может быть мажорирована строго монотонной функцией.

Условия возникновения областей захвата в пространстве состояний замкнутой системы (2.85) для системы \mathcal{S}_a , удовлетворяющей выражению (2.114) приведены в форме следствия 2.3.

С л е д с т в и е 2.3. *Рассмотрим замкнутое соединение (2.85), где система \mathcal{S}_a удовлетворяет (2.114), функция $\gamma_0(\cdot)$ в (2.83) Липшицева:*

$$|\gamma_0(s)| \leq D_{\gamma,0} \cdot |s| \quad (2.116)$$

и область

$$\Omega_\gamma : D_{\gamma,0} \leq \left(\beta_t^{-1} \left(\frac{d}{\kappa \cdot \beta_t(0)} \right) \right)^{-1} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{h(\mathbf{z}_0)}{\beta_t(0) \|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}} + \beta_t(0) \cdot c \cdot |h(\mathbf{z}_0)| \left(1 + \frac{\kappa}{1-d} \right) + c|h(\mathbf{z}_0)|} \quad (2.117)$$

не пуста для некоторых $d < 1$, $\kappa > 1$. Тогда для всех начальных условий $\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0 \in \Omega_\gamma$ состояние $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \oplus \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ системы (2.85) асимптотически при $t \rightarrow \infty$ сходится к множеству Ω_a , заданному выражением (2.97). Если, в дополнение, справедливы условия C1)–C3) следствия 2.2, то притягивающее множество (в смысле Милнора) содержится в области (2.108).

Практически важным объектом применения этого следствия являются экспоненциально устойчивые системы \mathcal{S}_a :

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} \leq \|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}} D_\beta \exp(-\lambda t) + c \cdot \|h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0))\|_{\infty, [t_0, t]}, \lambda > 0, D_\beta \geq 1. \quad (2.118)$$

В этом случае область (2.117) начальных условий (область захвата по Милнору), гарантирующих сходимость к Ω_a , определяется из неравенства

$$D_{\gamma,0} \leq \max_{\kappa > 1, d \in (0,1)} -\lambda \left(\ln \frac{d}{\kappa D_\beta} \right)^{-1} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{h(\mathbf{z}_0)}{D_\beta \|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}} + D_\beta \cdot c \cdot |h(\mathbf{z}_0)| \left(1 + \frac{\kappa}{1-d} \right) + c|h(\mathbf{z}_0)|}.$$

Следует отметить и тот факт, что следствие 2.3 совместно со следствием 2.2 может служить аналогом теоремы о малом контурном усилении для соединений и каскадов интегрально устойчивых от входа к состоянию систем. В отличие от известных результатов [97], где рассматриваются системы вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}); \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{q}(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

предлагаемые критерии сходимости допускают двунаправленные соединения

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}); \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \end{aligned}$$

что существенно расширяет сферу применимости результатов.

В заключение отметим связь приведенных результатов со стандартной теоремой о малом контурном усилении. Эта связь дается следующим следствием, вытекающем непосредственно из (2.117).

С л е д с т в и е 2.4. *Рассмотрим соединение (2.85), где система \mathcal{S}_a удовлетворяет неравенству (2.114). Тогда множество Ω_γ начальных условий, соответствующее ограниченным траекториям системы (2.85), имеет ненулевую меру, если выполнено условие*

$$D_{\gamma,0} \cdot c \cdot \mathcal{G} < 1, \quad (2.119)$$

где

$$\mathcal{G} = \beta_t^{-1} \left(\frac{d}{\kappa \cdot \beta_t(0)} \right) \frac{k}{k-1} \left(\beta_t(0) \left(1 + \frac{\kappa}{1-d} \right) + 1 \right)$$

для некоторых $d \in (0, 1)$, $\kappa \in (1, \infty)$. В частности, Ω_γ содержит область

$$\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{1}{\beta_t(0)} \left[\frac{1}{D_{\gamma,0}} \left(\beta_t^{-1} \left(\frac{d}{\kappa \cdot \beta_t(0)} \right) \right)^{-1} \frac{k-1}{k} - c \left(\beta_t(0) \left(1 + \frac{\kappa}{1-d} \right) + 1 \right) \right] h(\mathbf{z}(t_0))$$

В случае, если динамика подсистемы \mathcal{S}_a экспоненциально устойчива, т. е. удовлетворяет условию (2.118), член \mathcal{G} в условии (2.119) определяется в виде

$$\mathcal{G} = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left(\frac{\kappa D_\beta}{d} \right) \frac{k}{k-1} \left(D_\beta \left(1 + \frac{\kappa}{1-d} \right) + 1 \right). \quad (2.120)$$

Для $D_\beta = 1$ минимальное значение \mathcal{G} в (2.120) может быть оценено следующим образом:

$$\mathcal{G}^* = \frac{1}{\lambda} \cdot \min_{d \in (0,1), \kappa \in (1,\infty)} \ln \left(\frac{\kappa}{d} \right) \frac{k}{k-1} \left(2 + \frac{\kappa}{1-d} \right) \approx \frac{15.6886}{\lambda} < \frac{16}{\lambda}, \quad (2.121)$$

что приводит к еще более простой формулировке условия (2.120):

$$D_{\gamma,0} \cdot \frac{c}{\lambda} \leq \frac{1}{16}. \quad (2.122)$$

В свете приведенных замечаний следствие 2.4 дает явное и легко проверяемое условие существования области захвата в пространстве состояния класса неустойчивых по Ляпунову систем. Более того, оно позволяет специфицировать явным образом точки $\mathbf{x}(t_0)$, $\mathbf{z}(t_0)$, принадлежащие к возникшей области захвата. Наконец, условия существования этой области, неравенство (2.119), оказывается похожим на стандартные ограничения (2.23) теорем о малом контурном усилении. Несмотря на внешнее сходство выражений (2.23) и (2.122), результаты параграфа содержательно отличаются от классических уже лишь тем, что коэффициент передачи “вход-выход”

подсистемы \mathcal{S}_w в формулировках следствий 2.3, 2.4 может быть бесконечным или вообще не определенным.

Для иллюстрации сходств и отличий стандартных теорем о малом контурном усилении и предложенных критериев рассмотрим следующий пример.

П р и м е р 2.6.2. Рассмотрим системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 + c_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\lambda_2 x_2 + c_2 |x_1| \end{cases}; \quad (2.123)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 + c_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = c_2 |x_1| \end{cases}. \quad (2.124)$$

Система (2.123) может быть интерпретирована как соединение двух устойчивых “вход-состояние” и “вход-выход” систем, x_1 и x_2 , с коэффициентами передачи “вход-выход” c_1/λ_1 и c_2/λ_2 по норме $L_\infty^1[t_0, \infty]$ соответственно. Следовательно, для установления ограниченности состояния всего соединения (2.123) можно использовать теорему о малом контурном усилении. Условия допустимой малости коэффициентов передачи в этом случае приводят к ограничениям вида:

$$\frac{c_1}{\lambda_1} \cdot \frac{c_2}{\lambda_2} < 1.$$

Стандартные теоремы о малом контурном усилении, однако, не могут быть применены для систем вида (2.124) в силу того, что коэффициент передачи “вход-выход” второй подсистемы, x_2 , оказывается бесконечным. Тем не менее, в этом случае следствие 2.4 позволяет сформулировать условия возникновения слабого притягивающего множества в системе (2.124) и оценить его область притяжения. Как вытекает из следствия 2.4, выполнение неравенства

$$\frac{c_1}{\lambda_1} \cdot \frac{c_2}{\lambda_1} < \frac{1}{16}$$

влечет существование области захвата ненулевой меры. Оценка этой области дается в свою очередь неравенством

$$|x_1(t_0)| \leq \frac{1}{c_2} \left[\lambda \left(\ln \frac{\kappa}{d} \right)^{-1} \frac{k-1}{k} - \left(2 + \frac{\kappa}{1-d} \right) \right] |x_2(t_0)|, \quad x_2(t_0) < 0.$$

Приведенные результаты, включая оценки областей захвата соединения (2.85), служат основой для синтеза адаптивных наблюдателей и процедур идентификации

по выходу для систем, не представимых в канонической форме адаптивного наблюдателя [114], и используются в задаче недоминирующего управления нелинейно параметризованными системами общего вида и в приложениях адаптивного распознавания изображений с альтернативными интерпретациями (см. разд. 3).

3. Задачи адаптивного управления для классов нелинейных объектов

В разделе рассмотрен круг проблем, посвященный синтезу адаптивных регуляторов для нелинейных динамических систем. На основе результатов разд. 2, в частности, теорем о существовании малого контурного усиления и с использованием принципа разделения, в разделе дается новая постановка задачи синтеза адаптивного управления. Ее отличия от известных постановок (см. разд. 1) заключаются в использовании в качестве базовых информационных единиц мажорирующих состояние отображений или макропеременных, а не первичной информации в виде измерительных данных по выходу или переменных вектора состояния; введение целевой динамики поведения динамической управляемой системы, а не целевых функционалов; допустимость нелинейной, в т. ч. невыпуклой, параметризации модели.

Общая задача адаптивного управления ставится как задача управляемой самоорганизации в расширенном фазовом пространстве открытой системы “объект – внешняя среда – регулятор” без явного использования аппарата метода функций Ляпунова и, как следствие, потенциальных ограничений этого метода при решении задач синтеза. В рамках общей постановки формулируются и решаются частные задачи адаптации в управляемых динамических системах.

1) Задача адаптивного управления движением изображающей точки расширенного фазового пространства системы к инвариантным множествам. Практическая ценность этой задачи состоит в том, что в ней не требуется точного задания самих финишных целевых множеств управляемой системы. Дополнительной и необходимой информацией здесь является знание того, что целевое множество *содержит* инвариантное подмножество. Решение этой задачи выполнено для систем с нелинейной и линейной параметризацией и сигнальными возмущениями.

2) Задача адаптивного управления взаимосвязанными нелинейными системами, в том числе, исследовано влияние немоделируемой динамики на свойства адаптивных систем, приведено решение задачи синтеза систем с перекрестными связями в каналах управления и адаптации.

3) Задача параметрической идентификации в замкнутом контуре нелинейных систем с нелинейной параметризацией. В ней исследованы условия асимптотической сходимости оценок к действительным значениям параметров и что особенно важно в приложениях, условия экспоненциальной устойчивости процедуры оценки парамет-

ров. Кроме того, получены оценки скорости сходимости процедуры идентификации в зависимости от свойств нелинейно параметризованного регрессора.

4) Задача недоминирующего управления и идентификации в системах с нелинейной параметризацией общего вида. Решение этой задачи формулируется как для систем с известной целевой динамикой, так и для систем, где целевые движения не полностью специфицированы, и доступны лишь оценки скорости сходимости невозмущенных движений к целевым множествам.

Для решения поставленных задач в разделе вводится новый метод синтеза адаптивных регуляторов – т. н. *метод виртуального алгоритма адаптации*. Суть метода состоит в том, что на первом этапе синтеза выбор алгоритмов адаптации проводится, исходя из предположений о доступности *полной* информации об объекте. По этой причине такие алгоритмы названы виртуальными. Единственным критерием успешности выбора алгоритма на данном этапе является достижение цели адаптивного управления. В работе выбор виртуальных алгоритмов адаптации обусловлен функциональным принципом разделения, введенном в разд. 2. На втором этапе синтеза решается задача реализуемости этих алгоритмов в интегро-дифференциальной форме. Посредством определенных структурных ограничений специфицируются классы систем, для которых решение задачи реализации всегда существует и может быть получено аналитически. На третьем этапе решается задача вложения исходной системы в системы более высоких размерностей. Эти системы, с одной стороны, должны удовлетворять критериям разрешимости задачи реализуемости алгоритмов адаптации, а с другой стороны, должны обеспечивать достижение исходных целей управления. Для решения этой задачи также использован функциональный принцип разделения.

Для задач 1)-3) приводятся частные виртуальные алгоритмы адаптации и теоремы вложения, гарантирующие разрешимость задачи синтеза в соответствии с предложенным методом. Решение задачи 4) приводится как методом виртуального алгоритма адаптации, так и с использованием теоремы о малом контурном усилении для неравномерной сходимости (теорема 2.7) в зависимости от доступной информации о целевой динамике системы.

3.1. Постановка задачи адаптивного управления в условиях

функциональной неопределенности и нелинейной параметризации

Будем рассматривать классы объектов управления, допускающие описание системами уравнений вида:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, t)u, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, t)u,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= (x_{11}, \dots, x_{1q})^T \in \mathbb{R}^q; \\ \mathbf{x}_2 &= (x_{21}, \dots, x_{2p})^T \in \mathbb{R}^p; \\ \mathbf{x} &= (x_{11}, \dots, x_{1q}, x_{21}, \dots, x_{2p})^T \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

В уравнении (3.1) $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta \in \mathbb{R}^d$ обозначает вектор неизвестных воздействий среды¹, при этом множество Ω_θ полагается замкнутым и ограниченным подмножеством \mathbb{R}^d . Отметим, что знание границ области Ω_θ по умолчанию не требуется, если это не оговорено заранее или не вытекает автоматически из формулировок результатов. Согласно общепринятым конвенциям, символами $u \in \mathbb{R}$ и \mathbf{x} обозначаются управляющий вход системы (3.1) и вектор состояния. Функции

$$\mathbf{f}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad \mathbf{f}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad \mathbf{g}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad \mathbf{g}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p$$

в модели (3.1) предполагаются локально ограниченными по \mathbf{x} и глобально ограниченными по t . При этом их зависимость от времени ограничивается стандартными условиями локального существования решений системы (3.1).

Будем полагать, что функции $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, t)$ известны и доступны для измерения, в то время как функции $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ и $\mathbf{g}_2(\mathbf{x}, t)$ могут быть, вообще говоря, неизвестны и недоступны для измерения. В соответствии с этим вектора \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 будем называть как *независимое от неопределенности* и соответственно *зависимое от неопределенности* разбиения состояния \mathbf{x} . Для удобства записи в некоторых случаях будем использовать представление системы (3.1) в виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)u, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) &= (g_{11}(\mathbf{x}, t), \dots, g_{1q}(\mathbf{x}, t), g_{21}(\mathbf{x}, t), \dots, g_{2p}(\mathbf{x}, t))^T, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) &= (f_{11}(\mathbf{x}, t), \dots, f_{1q}(\mathbf{x}, t), f_{21}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t), \dots, f_{2p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t))^T.\end{aligned}$$

При этом все введенные выше ограничения на классы рассматриваемых функций в (3.1) индуцируются и на функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$.

В соответствии с аргументацией предыдущего раздела (см. параграфы 2.4 и 2.5), а также в силу результатов, изложенных в [26, 27, 51], поведение сложных динамических систем уместно рассматривать в терминах мажорирующих состояние отображений (определение 2.4.1) или макропеременных в терминологии [26]. Это позволяет существенно редуцировать объем информации, необходимой для анализа

¹В общем случае это могут быть функции времени.

систем, что особенно актуально в условиях неопределенности модели самого объекта. В этом смысле полезно учитывать возможность такого рассмотрения непосредственно в постановке задачи *синтеза* адаптивного управления. С этой целью введем в рассмотрение функцию $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi \in C^1$ со следующим свойством

Предположение 3.1. Для функции $\psi(\mathbf{x}, t) \in C^1$ справедлива оценка:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} \leq \tilde{\gamma}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta}, \|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, T]}), \quad (3.3)$$

где $\tilde{\gamma}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta}, \|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, T]})$ – локально ограниченная и неотрицательная функция своих аргументов.

Согласно определению 2.4.1, функция $\psi(\mathbf{x}, t)$ мажорирует состояние системы (3.1) и поэтому близость к множеству

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n | \psi(\mathbf{x}(t), t) = 0\} \quad (3.4)$$

может служить естественной оценкой качества поведения системы. Поэтому в системах управления объектами с неопределенностью математических моделей множество Ω_0 удобно выбрать в качестве “минимального” целевого множества в том смысле, что попадание в его окрестность влечет, по меньшей мере, ограниченность вектора состояния объекта.

В стандартных постановках задач адаптивного управления (см., например, [82]) целевые критерии обычно удовлетворяют метрическим ограничениям в пространстве состояния объекта \mathbb{R}^n :

$$\nu_1(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)\|) \leq \psi(\mathbf{x}, t) \leq \nu_2(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)\|), \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{K}_\infty, \quad (3.5)$$

где функция $\boldsymbol{\xi} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\xi} \in C^0$ является, например, эталонной траекторией. Функция $\psi(\mathbf{x}, t)$ в этом случае выступает в качестве естественной функции Ляпунова регулятора основного контура (см. условие достижимости в [82, 84]). В дополнение к тому, что подобные постановки ограничивают динамику управляемой системы устойчивыми по Ляпунову движениями², отыскание функции Ляпунова в общем случае является нетривиальной задачей. Кроме того, если Ω_0 задает целевое множество, то задача отыскания функции $\psi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющей обоим ограничениям (3.4), (3.5) в условиях когда информация о желаемой траектории $\boldsymbol{\xi}(t)$ известна лишь частично представляется особенно затруднительной.

В отличие от общепринятых постановок, класс допустимых целевых множеств, удовлетворяющих предположению 3.1, оказывается существенно шире в силу отсутствия изначальной привязки к методу функций Ляпунова и, как следствие, необходимости одновременного разрешения (3.4) и (3.5). Причина этого состоит в том, что

²В разд. 2, параграф 2.6, приводится краткий обзор примеров, когда такое требование либо невыполнимо, либо нежелательно в силу специфических свойств управляемых систем.

вместо стандартных эвклидовых норм $\|\cdot\|$ в пространстве состояния \mathbb{R}^n и явного задания цели уравнением (3.5), в предположении 3.1 используются *функциональные нормы* $\|\mathbf{x}(t)\|_{p,[t_0,T]}$, $T \geq t_0$ в *функциональных пространствах* $L_p[t_0, T]$, $T \geq t_0$, $p \in \mathbb{R}_{\geq 1} \cup \infty$. Замена стандартных метрических ограничений (3.5) в \mathbb{R}^n на *операторные* отношения позволяют, с одной стороны, использовать измерения функции $\psi(\mathbf{x}, t)$ в качестве меры близости состояния $\mathbf{x}(t)$ к целевому множеству Ω_0 , не вводя при этом ограничения вида (3.5) на функцию $\psi(\mathbf{x}, t)$. С другой стороны, ограниченность $\mathbf{x}(t)$, как минимально допустимый критерий качества, вытекает из ограниченности $L_p^1[t_0, T]$ -норм функции $\psi(\mathbf{x}(t), t)$.

В зависимости от задачи и свойств исходного объекта управления, предположение 3.1 может быть интерпретировано как свойство *наблюдаемости неограниченного роста* [196] состояния системы (3.1) по “выходу” $\psi(\mathbf{x}, t)$. Кроме того, оно может быть рассмотрено как свойство *ограниченный вход – ограниченное состояние* системы (3.1) на ограничении $\psi(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \boldsymbol{\theta}, u(\mathbf{x}(t), t)), t) = v(t)$, где сигнал $v(t)$ выступает в качестве нового “входа”³. Если же ограниченность решений в явном виде не требуется – в силу свойств самой задачи по причине, например, естественной ограниченности состояния физического объекта для класса допустимых управлений, то предположение 3.1 можно вообще исключить из последующего рассмотрения.

Введем ограничения на класс допустимых решений задачи управления, а именно: специфицируем класс \mathcal{U}^* функций u , потенциально гарантирующий, по меньшей мере, ограниченность $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \boldsymbol{\theta}, u)$ для всех $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta$ и $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Согласно условию (3.3), ограниченность $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \boldsymbol{\theta}, u)$ достигается, если выбор функции u гарантирует, что $\psi(\mathbf{x}(t), t) \in L_\infty^1[t_0, \infty]$. Поэтому для того, чтобы определить искомый класс \mathcal{U}^* , рассмотрим изменение $\psi(\mathbf{x}, t)$ вдоль решений системы (3.2):

$$\dot{\psi} = L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}\psi(\mathbf{x}, t) + L_{\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}\psi(\mathbf{x}, t)u + \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Классом допустимых управлений \mathcal{U}^* будем считать класс функций u :

$$u \in \mathcal{U}^* \Leftrightarrow; \\ L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}\psi(\mathbf{x}, t) + L_{\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}\psi(\mathbf{x}, t)u + \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) - \varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t) + \varepsilon(t), \quad (3.7)$$

где $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^w \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторые локально ограниченные по \mathbf{x} , ψ , $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ и глобально ограниченные по t функции. Для широкого класса моделей (3.1), в частности, для которых существует $(L_{\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}\psi(\mathbf{x}, t))^{-1}$ при любых допустимых \mathbf{x} , условие (3.7) обеспечивается выбором:

$$u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}, t) = (L_{\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}\psi(\mathbf{x}, t))^{-1} \left(-L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)}\psi(\mathbf{x}, t) - \varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t) - \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) \quad (3.8)$$

³См. пример 2.4.2 в разд. 2.

с учетом обозначения $L_{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})} \psi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$. Тогда, принимая во внимание (3.8), уравнение (3.6) может быть записано в виде:

$$\dot{\psi} = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) - \varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t). \quad (3.9)$$

Таким образом, закон (3.8) переводит исходную модель (3.1) в хорошо известную в литературе форму *моделей по ошибке* ⁴[254]. Отметим, что в уравнениях (3.7), (3.8) и (3.9) вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ имеет смысл оценок неизвестного вектора $\boldsymbol{\theta}$.

Неполнота математических моделей физических объектов и погрешности измерений неизбежно приводят к наличию *немоделируемой динамики* в системе управления. Эти эффекты учитываются слагаемым $\varepsilon(t)$ в уравнении (3.7). В общем случае класс функций $\varepsilon(t)$ может быть достаточно произвольным⁵. Таким образом, расширенная запись уравнения (3.6) имеет вид:

$$\dot{\psi} = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) - \varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t) + \varepsilon(t). \quad (3.10)$$

Отметим, что включение слагаемого $\varepsilon(t)$ в правую части (3.10) позволяет учитывать эффекты наблюдателей на динамику системы, что автоматически расширяет область применимости результатов на классы задач управления по выходу.

Специфицируем, наконец, свойства функции $\varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t)$ в (3.8), (3.10). Существующие постановки задач адаптивного управления и идентификации [292, 254, 219, 84, 82] предполагают глобальную асимптотическую устойчивость по Ляпунову целевых движений. В нашем случае это эквивалентно глобальной устойчивости системы (3.10) при $\boldsymbol{\theta} \equiv \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Это свойство, как демонстрируется в разделе 2, не всегда адекватно отражает целевое и естественное поведение сложных систем. С другой стороны, подавляющее большинство реальных процессов (включая, безусловно, и асимптотически устойчивые с аддитивным входом) обладает свойством диссипации энергии: конечная энергия на входе системы производит конечные отклонения по состоянию. В качестве энергии сигналов принято использовать их $L_p[t_0, T]$ нормы. Причем зачастую индекс $p = 2$, что обусловлено, во-первых, удобством работы с такими пространствами (определено понятие внутреннего произведения); во-вторых, физическим смыслом таких энергий, например, суммарная мощность на интервале времени; в третьих, следующим фактом: $\varepsilon(t) \in L_2[t_0, T] \cap L_\infty[t_0, T] \Rightarrow \varepsilon(t) \in L_p[t_0, T]$, $p \geq 2$. В данном случае входом является сумма $f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t) + \varepsilon(t)$. Поэтому стандартное требование устойчивости целевых движений естественно заменить следующим предположением.

⁴Модели по ошибке (3.9) оказываются удобны для работы с системами с нелинейно параметризованными моделями в задачах адаптивного управления [233, 318] и идентификации [130].

⁵По умолчанию, и если отдельно не оговорено иное, формулировки результатов в данной работе приведены для случая, когда $\varepsilon(t) \in L_2^1[t_0, \infty] \cap C^0$.

Предположение 3.2. Рассмотрим систему:

$$\dot{\psi} = -\varphi(\psi, \omega, t) + \zeta(t), \quad (3.11)$$

где $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, а функция $\varphi(\psi, \omega, t)$ идентична правой части (3.10) при $\theta = \hat{\theta}$, $\varepsilon(t) = 0$. Тогда для любого $\omega \in \Omega_\omega$ для системы (3.11) определено отображение “вход-состояние” $L_2^1[t_0, \infty] \mapsto L_\infty^1[t_0, \infty]$ по входу $\zeta(t)$. Другими словами,

$$\zeta(t) \in L_2^1[t_0, \infty] \Rightarrow \psi(t, \psi_0, t_0, \omega) \in L_\infty^1[t_0, \infty], \quad \psi_0 \in \mathbb{R}$$

и существует функция $\gamma_{\infty,2}$ такая, что

$$\|\psi(t)\|_{\infty, [t_0, T]} \leq \gamma_{\infty,2}(\psi_0, \omega, \|\zeta(t)\|_{2, [t_0, T]}), \quad \forall \zeta(t) \in L_2^1[t_0, T]. \quad (3.12)$$

Таким образом, целевая динамика, удовлетворяющая предположению 3.2, в отличие от общепринятых подходов может иметь неустойчивые по Ляпунову положения равновесия, орбиты и, в частности, быть хаотической (в смысле, например, определений хаотической динамики, приведенных в [173]).

Пример 3.1.1. Примером систем, которые с одной стороны потенциально способны генерировать хаотические колебания, а с другой удовлетворяют предположению 3.2, являются известные уравнения Лоренца [234]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) + \zeta(t); \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz; \\ \dot{z} &= -\beta z + xy, \quad \sigma, \rho, \beta > 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В системе (3.13) переменная x выполняет роль функции $\psi(\mathbf{x}, t)$, а функция $\varphi(\psi, \omega, t) = -\sigma\psi + \sigma y(t, \omega, t_0, \zeta(t))$. Вектор ω в этом случае является вектором начальных условий: $\omega = (x_0, y_0, z_0)^T$. Можно показать, что система (3.13) задает передаточное отображение $L_2^1[0, \infty] \mapsto L_\infty^3$ от входа $\varepsilon(t)$ к вектору состояния $(x, y, z)^T$. Для этого рассмотрим функцию:

$$V_0(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (z - \sigma - \rho)^2).$$

Ее производная по времени может быть записана в виде:

$$\dot{V}_0 = -\sigma x^2 - y^2 - \beta \left(z - \frac{\sigma + \rho}{2} \right)^2 + \beta \frac{(\sigma + \rho)^2}{4} + x\varepsilon(t).$$

Учитывая, что

$$\left(z - \frac{\sigma + \rho}{2} \right)^2 \geq \frac{1}{2}(z - \sigma - \rho)^2 - \frac{(\sigma + \rho)^2}{4},$$

оценим \dot{V}_0 неравенством:

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 &\leq -\sigma x^2 - y^2 - \frac{\beta}{2}(z - \sigma - \rho)^2 + \frac{\beta}{2}(\sigma + \rho)^2 + x\varepsilon(t); \\ &\leq -\kappa(x^2 + y^2 + (z - \sigma - \rho)^2) + \frac{\beta}{2}(\sigma + \rho)^2 + x\varepsilon(t); \\ \kappa &= \min \left\{ \sigma, \frac{\beta}{2}, 1 \right\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dot{V}_0 \leq -2\kappa V_0 + \frac{\beta}{2}(\sigma + \rho)^2 + x\varepsilon(t) \leq -\kappa V_0 + \frac{\beta}{2}(\sigma + \rho)^2 - \kappa \left(x - \frac{\varepsilon(t)}{2\kappa} \right)^2 + \frac{\kappa\varepsilon^2(t)}{4}. \quad (3.14)$$

Пусть $\varepsilon(t) \in L_2^1[0, \infty]$. Тогда рассмотрим функцию

$$V(x, y, z, t) = \int_0^{V_0(x, y, z)} \varsigma(\xi) d\xi + \int_t^\infty \frac{\kappa\varepsilon^2(\tau)}{4} d\tau,$$

где $\varsigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определена следующим образом:

$$\varsigma(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > \frac{\beta}{2\kappa}(\sigma + \rho)^2 \\ 0, & \xi \leq \frac{\beta}{2\kappa}(\sigma + \rho)^2. \end{cases}$$

В соответствии с (3.14), производная по времени функции $V(x, y, z, t)$ удовлетворяет оценке:

$$\dot{V} \leq \varsigma(V_0) \left(-\kappa V_0 + \frac{\beta}{2}(\sigma + \rho)^2 \right) + \varsigma(V_0) \frac{\kappa\varepsilon^2(t)}{4} - \frac{\kappa\varepsilon^2(t)}{4} \leq 0.$$

Следовательно, $x(t), y(t), z(t)$ ограничены и система (3.13) задает всюду определенное передаточное отображение $L_2^1[0, \infty] \mapsto L_\infty^3$. Это в свою очередь эквивалентно тому, что

$$\dot{\psi} = -\sigma\psi + \sigma y(t, \omega, t_0, \zeta(t))$$

задает всюду определенное передаточное отображение $L_2^1[0, \infty] \mapsto L_\infty^1$ по отношению ко входу $\varepsilon(t)$ и состоянию $\psi(\mathbf{x}, t) = x$.

Другой, пример, удовлетворяющий предположению 3.2 – это уравнение Хиндмарша и Роуза [180]. Это уравнение моделирует ионный ток через клеточную мембрану в клетках аксонов и широко используются в областях искусственного интеллекта и нейронных сетей, например, для обработки визуальной информации [287].

Если устойчивость целевой динамики $\dot{\psi} = -\varphi(\psi, \omega, t)$ следует автоматически из специфики конкретной прикладной задачи, то и в этом случае предположение 3.2 обладает определенным преимуществом перед стандартными требованиями. Это преимущество заключается в том, что предположение 3.2 не требует *a priori* знания

конкретной функции Ляпунова для невозмущенной системы. Подобное свойство, кроме того, что оно является более “дружелюбным” для исследователя, позволяет в принципе синтезировать процедуры адаптации для систем с индуцируемой мультистабильностью ⁶[156, 336, 135, 239].

В задачах управления нелинейными объектами существенное значение играет возможность управления с помощью малых сигналов или слабых обратных связей. В теории адаптивных систем в стандартных постановках определение малого управления оказывается затруднительным в силу произвола выбора как механизмов достижения цели, так и регуляторов основного контура, которые никак не специфицируются в постановках задачи [82, 84, 254, 219]. Действительно, ответ на вопрос: является ли управление $u(t)$ малым, зависит прежде всего от того, каким образом определен класс наиболее предпочтительных управляющих функций, реализуемый регулятором основного контура, и лишь затем возможностью решения задачи адаптации в этом классе обратных связей. В рамках задач адаптивного управления и, более широко, механизмов адаптации, термин малое управление означает прежде всего т. н. *недоминирующее адаптивное управление*, т. е. такие законы адаптации в существующей системе, которые не требуют введения дополнительных компенсирующих обратных связей. Включение уравнений целевой динамики (3.11) в задачу синтеза адаптивного регулятора позволяет формально определить это понятие в контексте общей постановки задачи синтеза адаптивных законов управления в открытых динамических системах. Несмотря на кажущуюся очевидность, такая постановка проблемы адаптивного управления существенно отличается от известных и общепринятых.

Принимая во внимание, что единственная детерминированная компонента управления (3.8) в модели (3.10) – это функция $\varphi(\psi, \omega, t)$, то вполне естественно полагать, что класс C_φ функций $\varphi(\psi, \omega, t)$, для которого цель управления достигается за счет изменений в $\hat{\theta}$, определяет и класс допустимых недоминирующих управлений.

О п р е д е л е н и е 3.1.1. *Адаптивное управление будем называть недоминирующим в классе C_φ , если найдется такая функция $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, что цель управления достигается для всех $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \Omega_\theta$, $\varphi \in C_\varphi$.*

Определение недоминирующего адаптивного управления на основе свойств клас-

⁶В системах с индуцируемой мультистабильностью, т. е. в системах с множеством аттракторов и в которых траектории спонтанно переходят от одного аттрактора к другому в зависимости от внешних воздействий, синтез алгоритмов адаптации, основанный на знании конкретной функции Ляпунова, требует наличие дополнительной информации о текущем динамическом состоянии системы (т. е. свойства аттракторов и их расположение в пространстве состояния) самой системы. Это влечет необходимость *идентификации* текущего динамического состояния системы *непосредственно* перед решением задачи адаптивного управления.

са допустимых функций $\varphi \in \mathcal{C}_\varphi$ позволяет применять это понятие, учитывая специфику конкретной постановки задачи. Так, например, недоминирующее управление в классе $\mathcal{C}_\varphi = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid |\varphi(\cdot)| \in \mathcal{K}, \varphi(\sigma)\sigma \leq 0, \sigma \in \mathbb{R}\}$ означает, что цель управления достигается при сколь угодно малых по амплитуде отрицательных обратных связях по ψ в системе (3.10). В случае же, если для достижения цели, например, при наличии немоделируемой динамики требуется привлекать дополнительные компенсирующие воздействия $v(t)$, то недоминирующее управление в классе $\mathcal{C}_\varphi = \{\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi(\psi, t) = \varphi_0(\psi) + v(t)\}$, $\varphi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ означает, что неопределенность модели (3.10) компенсируется изменением $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t)$ с точностью до компенсации помехи за счет дополнительного сигнала $v(t)$ с заранее заданными свойствами.

Таким образом, мы ввели основные ограничения на допустимые классы систем (3.2) и классы допустимых управляющих функций. Рассмотрим теперь класс допустимых функций $f(\mathbf{x}, \theta, t)$ в (3.10). В подавляющем большинстве случаев, по крайней мере на уровне постановки задачи, принято предполагать наиболее широкий класс допустимых моделей параметризованных неопределенностей. С одной стороны, задание параметризации общего вида для функции $f(\mathbf{x}, \theta, t)$ в принципе возможно, но методически оно вряд-ли конструктивно из-за известных сложностей работы с нелинейностями общего вида. Стандартные постановки решения в литературе ограничиваются линейно или выпукло параметризованными моделями. Эти модели, однако, не всегда адекватны физической сущности задачи и, как следствие, могут приводить к неадекватным результатам управления. Поэтому возникает необходимость найти класс нелинейностей, что описывают разумно широкий диапазон практически значимых физических эффектов, а с другой стороны дает основания надеяться на возможность отыскания решения задачи адаптивного управления. Подходящим классом нелинейностей является следующий класс функций.

Предположение 3.3. Для заданной функции $f(\mathbf{x}, \theta, t)$ в (3.10) существует такая функция $\alpha(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\alpha(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^1$ положительное число $D > 0$, что справедливы неравенства

$$(f(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \theta, t))(\alpha(\mathbf{x}, t)^T(\hat{\theta} - \theta)) \geq 0; \quad (3.15)$$

$$|f(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \theta, t)| \leq D|\alpha(\mathbf{x}, t)^T(\hat{\theta} - \theta)|. \quad (3.16)$$

Первое неравенство, (3.15), предположения 3.15 выполняется, например, для любой гладкой нелинейной функции $f(\mathbf{x}, \theta, t)$, монотонной по линейному функционалу $\phi(\mathbf{x})^T \theta$ относительно вектора параметров θ :

$$f(\mathbf{x}, \theta, t) = f_m(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})^T \theta, t); \quad \text{sign} \left(\frac{\partial f_m(\mathbf{x}, \lambda, t)}{\partial \lambda} \right) = \text{const.}$$

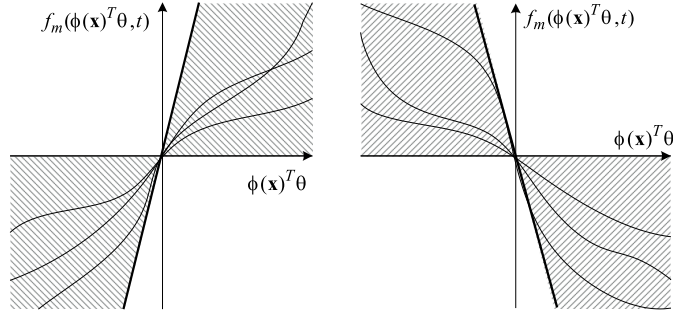


Рисунок 3.1. Иллюстрация к предположению 3.3 для нелинейно параметризованных функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) = f_m(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}, t)$, $f_m : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Жирной линией в каждом блоке показаны функции $MD\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}$, $D = \max_{\mathbf{x}, t} |D_\theta(\mathbf{x}, t)|$ соответственно.

Следовательно, функция $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющая неравенству (3.15), имеет вид:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) = M\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\kappa(\mathbf{x}, t),$$

где $\kappa : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\kappa(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^1$.

Второе неравенство, (3.16), выполнено, если функция $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}, t)$ растет не быстрее, чем линейная функция по переменной $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Это требование выполнено, например, для функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}, t)$, удовлетворяющих (глобально) условию Липшица по аргументу $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}$:

$$|f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}', t)| \leq D_\theta(\mathbf{x}, t) |\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')|.$$

В частности, неравенства (3.15), (3.16) выполняются для функций вида $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}, t)$, где $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) = MD_\theta(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$. Эти свойства иллюстрируются рис. 3.1.

Физический смысл ограничений в предположении 3.3 состоит в том, что они позволяют оценивать нелинейно параметризованные и в общем случае *неизвестные* разности $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$ посредством линейно параметризованных функционалов $D\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)^T (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ с *известными* $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$. Таким образом, неравенства (3.15), (3.16) естественным образом расширяют (и в т. ч. включают) линейно параметризованные модели до нелинейных по параметрам. При этом класс моделей физических процессов, удовлетворяющих предположению 3.3 по меньшей мере для ограниченных $\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}} \in \Omega_\theta$ оказывается достаточно широк. Эти модели включают в себя эффекты трения “залипания” [101], трение между шиной и дорожным покрытием [128], процессы в демпферах автомобильных подвесок [210], гладкие нелинейности типа “ограничение” и “зона нечувствительности”. Кроме того, этот класс нелинейностей включает модели биореакторов [123]. В дополнение функции $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$, удовлетворяющие предположению 3.3, служат нелинейным базисом множества аппроксимационных схем. Кроме того, они включают гауссовские нелинейности, используемые в моделях процессов нервной деятельности [143]. Примеры типовых нелинейностей в моделях пре-

Таблица 3.1. Примеры моделей нелинейных физических процессов

Физический смысл	Математическая модель неопределенности $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$	Области допустимых параметров	$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$
Трение “залипания” [101]	$\theta_0 e^{-x_2^2 \theta_1} = e^{-x_2^2 \theta_1 + \ln(\theta_0)}$ $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$	$\Delta_\theta > \theta_0, \theta_1 > 0$ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$	$(-x_2^2, 1)^T$
Трение между шиной и дорожным полотном [128]	$F_n \text{sign}(x_1 - r x_2) \frac{\frac{\sigma_0}{L} G \frac{x_3}{1-x_3}}{\frac{\sigma_0}{L} \frac{x_3}{1-x_3} + G}$ $G = \theta \left(\mu_C + (\mu_S - \mu_C) e^{-\frac{ r x_2 x_3 }{ 1-x_3 v_s}} \right)$ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ $r, F_n, \sigma_0, \mu_S, \mu_C > 0$ - параметры $\mu_S > \mu_C$	$\Delta_\theta > \theta > 0$ $x_1, x_2 \geq 0$ $x_3 \in (0, 1)$	$\frac{x_3}{1-x_3}$
Сила давления гидравлической эмульсии в демпферах подвески [210]	$\frac{K_o(\theta+1)A_p(x_1-x_2)}{L\left(\theta+K_o\frac{P_o}{x_3}\right)}$ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ $K_o, A_p, P_o, L > 0$ - параметры	$\Delta_\theta > \theta > 0$ $x_3 > 0$	$A_p(x_1 - x_2)$
Нелинейности в модели Монода роста микроорганизмов [123]	$\frac{x_1 x_2}{\theta_0 + \theta_1 x_1}, \frac{x_1 x_2}{\theta_0 + \theta_1 x_2}$ $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$	$\Delta_\theta > \theta_0, \theta_1 > 0$ $x_1, x_2 > 0$	$x_1 x_2 (1, x_1)^T$ $x_1 x_2 (1, x_2)^T$
Фокальные возмуще- ния в системах обработки визуальной информации [143]	$\sum_{i,j=1}^n e^{-\frac{ i-i_c + j-j_c }{\theta}} r_{i,j}(t)$ $r_{i,j} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, i, j, n \in \mathbb{N}$ $i_c, j_c \in \mathbb{N}, 1 \leq i_c, j_c \leq n$	$\Delta_\theta > \theta > 0$ $\ r_{i,j}(t)\ \leq \Delta_r$	1

численных физических процессах и соответствующие функции $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ приведены в табл. 3.1.

В некоторых приложениях требуется не просто обеспечить достижение целевого множества, но и одновременно определить значения неизвестных $\boldsymbol{\theta}$. С этой целью имеет смысл формализовать дополнительные естественные ограничения на класс нелинейностей, в принципе позволяющие получение таких оценок. Для этого отметим, что параметрическая ошибка $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$ может быть обнаружена по выходу $\psi(\mathbf{x}, t)$, в соответствии с (3.10), только лишь, если $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \neq 0$ влечет $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) \neq 0$. Поэтому в тех случаях, когда требуется сходимость оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ к $\boldsymbol{\theta}$, полезно иметь оценки разности $|f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)|$ снизу. Такая возможность определяется предположением 3.4⁷:

⁷Несмотря на то, что предположение 3.4 требует выполнения неравенства (3.17) для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

Предположение 3.4. Для заданной функции $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ в (3.10) и функции $\alpha(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих предположению 3.3, существует такое положительное число $D_1 > 0$, что выполнено неравенство

$$|f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) - f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)| \geq D_1 |\alpha(\mathbf{x}, t)|^T (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}). \quad (3.17)$$

Отметим также и то, что в задачах оценки параметров эффективность собственно алгоритмов оценивания часто зависит от того, насколько “хороша” сама нелинейность $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ и насколько предсказуем отклик системы (3.11) на ее малые и локальные измерения. Естественной мерой предсказуемости функций являются свойства локальной ограниченности и C^k -гладкости. Полагаем, что качество функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ и $\varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t)$ характеризуется с помощью следующего набора свойств:

Д 1. Функция $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ локально ограничена по \mathbf{x} , $\boldsymbol{\theta}$ равномерно по t .

Д 2. Функция $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \in C^1$, и производная $\partial f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)/\partial t$ локально ограничена по \mathbf{x} , $\boldsymbol{\theta}$ равномерно по t .

Д 3. Для заданных ограниченных $U_x \subset \mathbb{R}^n$, $U_\theta \subset \mathbb{R}^d$ существует такое число $D_{U_x, U_\theta} > 0$ что для всех $\mathbf{x} \in U_x$ и $\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}} \in U_\theta$ выполняется предположение 3.4, причем $D_1 = D_{U_x, U_\theta}$.

Д 4. Функции $\varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t)$ локально ограничены по ψ , $\boldsymbol{\omega}$ равномерно по t .

Таким образом, предположения 3.1 – 3.4 и допущения 1–4 задают основные ограничения, достаточные для формальной постановки обобщенной и частных задач адаптивного управления. Под обобщенной задачей будем понимать совокупность требований самого общего характера, таких как ограниченность состояний замкнутой системы, принадлежность ошибок к определенным функциональным пространствам, выполнение предельных целевых соотношений. Частные задачи, в свою очередь, получаются из обобщенной спецификацией желаемых свойств замкнутой системы, например, восстановление полной информации о неизвестных $\boldsymbol{\theta}$, робастность к немоделируемой динамике, децентрализованное управление, возможность получения решений для более широкого класса нелинейностей. В соответствии с этим сформулируем следующие задачи.

$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$ и $t \in \mathbb{R}_+$, в ряде случаев оказывается достаточным локальное выполнение этого условия, т. е. в окрестности некоторого ограниченного множества.

З а д а ч а 3.1. Для системы (3.1), (3.7), удовлетворяющей предположениям 3.1–3.3 и, возможно 3.4, требуется найти закон адаптивного управления вида

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x}, t), \quad (3.18)$$

обеспечивающий

- 1) полноту замкнутой системы;
- 2) ограниченность по норме в $L_2[t_0, \infty]$ сигнала $f(\mathbf{x}(t), \theta, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\theta}(t), t)$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}(t), \theta, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\theta}(t), t) &\in L_2^1[t_0, \infty], \\ \|f(\mathbf{x}(t), \theta, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\theta}(t), t)\|_{2, [t_0, \infty]} &< \infty \end{aligned} \quad (3.19)$$

для любых $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\theta \in \Omega_\theta$;

- 3) асимптотическую компенсацию влияния неопределенности модели на целевую динамику

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}(t), \theta, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\theta}(t), t) = 0. \quad (3.20)$$

Решение задачи 3.1, во-первых, автоматически влечет реализуемость системы управления, в том смысле, что на любом конечном интервале времени решения замкнутой системы как минимум ограничены; во-вторых, свойство (3.19) в силу предположений 3.1, 3.2 гарантирует по меньшей мере ограниченность решений без требования устойчивости целевой динамики по Ляпунову и, более того, позволяет оценить близость к целевому множеству (3.4); в-третьих, выполнение предельного соотношения (3.20) гарантирует точную компенсацию влияния моделируемых возмущений во времени, что решает проблему адаптации, выдвинутую в [281].

Факт доказательства разрешимости задачи 3.1 и возможные конструктивные решения неизбежно мотивируют вопрос об асимптотическом поведении замкнутой системы. В частности, очевидна актуальность ответа на вопрос: как из всего множества возможных решений выбирать те, которые гарантируют регулирование состояния системы к заданному инвариантному множеству. Формально это составляет задачу 3.2

З а д а ч а 3.2. Пусть задана система (3.1) и Ω_0 – ее нетривиальное инвариантное множество при $\theta = 0$ (не совпадает с пространством \mathbb{R}^n). Найти закон управления

$$u = u(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t), \quad \hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x}, t), \quad (3.21)$$

гарантирующий, что состояние $\mathbf{x}(t)$ системы (3.1) с управлением (3.21) асимптотически приближается к множеству Ω_0 для любых $\theta \in \Omega_\theta$.

Задачи 3.1 и 3.2 в своей постановке в явном виде не предполагают ни возможности декомпозиции системы (3.1) на совокупность взаимодействующих подсистем ни, наоборот, возможность объединения автономно управляемых систем в единое целое. С другой стороны, принципиальная возможность разделения задачи адаптивного регулирования сложной системой на совокупность подзадач меньшей размерности позволила бы существенно упростить процедуры синтеза и анализа. Таким образом, имеет смысл задача 3.3

Задача 3.3. Рассмотрим соединение пары (не обязательно идентичных) систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 вида (3.1), (3.7) с алгоритмами адаптивного управления (3.18), гарантирующими решение задачи 3.1 для каждой из подсистем:

1. найти условия, при которых

1.1) соединение систем (3.18) полно;

1.2) состояние расширенной системы ограничено для любых $\theta_1 \in \Omega_{\theta_1}$, $\theta_2 \in \Omega_{\theta_2}$;

1.3) для каждой из подсистем выполняется предельное соотношение (3.20).

Рассмотрим соединение пары систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{D}_2 , где \mathcal{D}_2 произвольная (полная) система.

2. Найти условия, при которых

2.1) соединение систем полно;

2.2) состояние расширенной системы ограничено для любых $\theta \in \Omega_\theta$.

3. Найти условия разрешимости задач 1 и 2 для совокупности произвольного конечного числа подсистем в соединении.

Отметим, что задача 3.3 включает как частный случай класс проблем управления по выходу и задачи децентрализованного адаптивного управления.

Рассмотрим, наконец, задачи оценки неизвестных параметров нелинейных моделей динамических систем.

Задача 3.4. Для системы (3.1), (3.7), удовлетворяющей предположениям 3.1–3.3 и 3.4, найти закон адаптивного управления вида (3.18), обеспечивающий:

1) полноту замкнутой системы;

2) выполнение предельного соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta \quad (3.22)$$

для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\theta \in \Omega_\theta$. Кроме того, желательной является возможность оценить скорость сходимости оценок $\hat{\theta}$ к θ .

Принципиальное отличие задачи 3.4 от предыдущих заключается в том, что в ней не требуется достижения целевых множеств и вообще говоря, ограниченности решений. Это означает, что частичные решения задачи 3.4 могут быть интерпретированы как алгоритмы адаптивного управления бифуркациями в том случае, когда выполнение равенства $\theta = \hat{\theta}$ влечет качественные изменения динамики системы. Другими словами, когда целевая динамика (3.11) качественным образом отличается от возмущенной динамики. Отметим, что факт допустимой нелинейной параметризации моделей автоматически отличает эту постановку от известных постановок задач адаптивного управления бифуркациями (см., например, работы [249, 248]).

Хотя решения задачи 3.4 и применимы для систем с нелинейной параметризацией, область приложений этих результатов определяется прежде всего ограничениями, заложенными в предположениях 3.3, 3.4 относительно класса допустимых нелинейных функций. Следовательно, интересен вопрос о возможности получения асимптотических оценок параметров θ для более широкого класса моделей систем. Ценой за подобное расширение может быть невозможность выполнения предельного соотношения (3.22) для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\theta \in \Omega_\theta$. Ответ на этот вопрос выносится в отдельную задачу 3.5.

Задача 3.5. Для заданной системы (3.1) определить управление u , алгоритм (3.18) и области Ω_x , $\Omega'_\theta \subset \Omega_\theta$ начальных условий таких, что состояние системы (3.1) ограничено и предельное соотношение (3.22) выполняется для всех $x_0 \in \Omega_x$, $\theta \in \Omega'_\theta$.

Решения задач 3.1 – 3.5 приводятся в последующих параграфах раздела.

3.2. Синтез прямого адаптивного управления нелинейными динамическими объектами

Рассмотрим конструктивные условия разрешимости задачи 3.1. С этой целью введем *метод виртуального алгоритма адаптации*, позволяющий аналитически выводить требуемые законы адаптивного управления при условии, что доступна информация о динамике изменений вектора x_1 , не зависящего от неопределенностей разбиения вектора состояния. Достаточные условия применимости этого метода для класса нелинейных систем (3.1) приводятся в параграфе 3.2.1, теорема 3.1. В дальнейшем полезно определить типовые классы систем, удовлетворяющие специфическим структурным ограничениям, для которых эти условия всегда выполняются. В параграфе 3.2.2 приводится метод, позволяющий сводить системы вида (3.1) к таким

типовым системам за счет вложения (или, эквивалентно, расширения системы) системы (3.1) в системы более высокой размерности, для которых условия теоремы 3.1 выполняются *a priori*. В параграфе 3.2.3 показывается, как результаты параграфов 3.2.1 и 3.2.2 могут быть применены для каскадов из систем вида (3.1). В частности, приводятся условия разрешимости задачи 3.1 и собственно алгоритмы управления для систем в нижнетреугольной форме.

3.2.1. Метод виртуального алгоритма адаптации.

Достаточные условия реализуемости

подавляющее большинство известных методов адаптивного управления и идентификации предполагают, что структура (в смысле класса функций и их аргументов) желаемых управлений и алгоритмов настройки параметров имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t); \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \mathcal{A}_{\text{lg}}(\psi, \mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ – некоторая функция состояния, оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ и времени, а $\mathcal{A}_{\text{lg}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ – закон (алгоритм) изменения оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ в зависимости от значений мажорирующей состояние переменной, возможно, части вектора состояния \mathbf{x} и времени.

Наиболее распространенной стратегией отыскания пары $u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$, \mathcal{A}_{lg} , также известная как *принцип непосредственной компенсации* (англ. – certainty-equivalence principle), является двухэтапный синтез. На первом этапе ставится задача отыскания обратной связи вида $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$, $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$, обеспечивающей достижение целей управления при условии, что значения $\boldsymbol{\theta}$ известны. На втором этапе вектор $\boldsymbol{\theta}$ формально заменяют оценкой $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ в функции $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ и находят классы функций $\mathcal{A}_{\text{lg}}(\cdot)$, гарантирующие достижение целей управления с учетом ограничений задачи (например, что сигналы $\dot{\mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\theta}$ не доступны для измерения в явном виде).

В рамках такой стратегии задача синтеза адаптивного регулятора разбивается на две *фактически независимые* задачи в силу того, что синтез обратной связи $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$, как правило, не ставится в зависимость от последующего решения задачи синтеза алгоритма $\mathcal{A}_{\text{lg}}(\psi, \mathbf{x}, t)$ ⁸. Это позволяет, с одной стороны, в полной мере использовать преимущества современных методов синтеза законов управления нелинейными системами [192, 207, 259] в задаче синтеза обратной связи $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$. С

⁸Единственное требование, что соединяет эти две задачи, так это стандартное требование асимптотической устойчивости по Ляпунову замкнутой системы с обратной связью $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ при $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \mathcal{A}_{\text{lg}}(\psi, \mathbf{x}, t)$. Последующие процедуры синтеза алгоритмов адаптации строятся исходя из того, что это условие выполнено. При этом как правило требуется знание конкретной функции Ляпунова. В случаях линейных моделей объекта такая функция обычно выбирается в классе квадратичных форм.

другой стороны, когда подходящие классы функций $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ уже определены, эта стратегия позволяет применять широкий спектр известных в литературе стандартных процедур адаптации и идентификации [232, 157, 82, 254, 38] при условии, что закон управления $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ обеспечивает по меньшей мере асимптотическую устойчивость системы по Ляпунову.

Тем не менее, именно эти основные достоинства принципа непосредственной компенсации (в широком смысле слова – универсальность и сведение проблемы к двум относительно независимым задачам) являются его ахиллесовой пятой. Суть проблемы состоит в том, что этот принцип действительно не учитывает – в равной мере ни с пользой для дела, ни во вред – саму возможность взаимодействия между процессами собственно управления и процедурами адаптации и оценки параметров. Однако, как показано в работах [318, 306, 263, 106], введение взаимодействия между управлением и адаптацией в виде дополнительного слагаемого

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_P(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (3.24)$$

к оценкам $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ в функции $u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$:

$$u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}_P(\mathbf{x}, t), t) \quad (3.25)$$

приводит к появлению новых свойств управляемой системы и улучшению качества переходных процессов. К сожалению, введение фактора возможного взаимного влияния и взаимодействия закона управления в основной контуре и алгоритма адаптации кардинальным образом усложняет синтез, нарушая простоту двухэтапного синтеза и, естественно, независимость задач синтеза регулятора основного контура и алгоритмов адаптации. Следует отметить, что даже в случаях линейных моделей объекта и регулятора и простых алгоритмах адаптации с использованием квадратичных функционалов, итоговая адаптивная систем становится эквивалентной многосвязной нелинейной системе с порядком более, чем третий. Гарантировать желаемое качество траекторий в такой системе становится трудно разрешимой задачей.

Подход к разрешению этих проблем, позволяющий сделать процесс синтеза взаимодействия $\hat{\boldsymbol{\theta}}_P(\mathbf{x}, t)$ целенаправленным и систематическим, содержится в работах [77, 319]. Предложенный в них метод позволяет, во-первых, сохранить двухэтапную процедуру синтеза адаптивного регулятора при сохранении формальной независимости задач синтеза регулятора основного контура и процедуры адаптации. С другой стороны, метод позволяет систематически и целенаправленно вводить желаемые взаимосвязи типа (3.24) в структуру адаптивного регулятора (3.25).

Принципиальное отличие этого метода от известных состоит в том, что вместо того, чтобы рассматривать задачу синтеза в рамках заданных ограничений, и лишь затем искать возможные пути ее решения, предлагается решать задачу без учета

ограничений и лишь затем, из пространства всех решений выбирать только те, которые удовлетворяют исходной постановке, т. е. с ограничениями.

В конкретном случае это эквивалентно тому, что для заданной и, вообще говоря, произвольной функции управления $u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$ ищется некоторый алгоритм адаптации, гарантирующий, что замкнутая система обладает желаемыми свойствами (например, обеспечивается решение задачи 3.1). При этом на данном этапе допускается использование всей возможной, в т. ч. недоступной для измерения информации $\dot{\psi}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}$:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathcal{A}_{\text{lg}}^*(\psi, \dot{\psi}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}, t). \quad (3.26)$$

По этой причине алгоритмы типа (3.26) называются в работе *виртуальными*, т. е. физически не реализуемыми в форме (3.26).

После того, как искомый класс алгоритмов адаптации (3.26), гарантирующий выполнение требований (3.19) установлен, решается задача реализации этих законов уже с учетом ограничений на недоступность сигналов $\dot{\psi}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}$ для непосредственного измерения. При этом естественно допустить возможность использования информации о векторных полях $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, t)$ модели (3.1), а также знание некоторых свойств функций $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ качественного характера.

Для решения задачи физической реализации законов (3.26) в форме, не требующей непосредственного измерения сигналов $\dot{\psi}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}$ предлагается использовать интегро-дифференциальный [159] эквивалент векторного уравнения (3.26) в виде т. н. *алгоритма в конечной форме* [77]:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \Gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}}_P(\mathbf{x}, t) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_I(t)), \quad \Gamma \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad \Gamma > 0 \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_I &= \mathcal{A}_{\text{lg}}(\psi, \mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Таким образом, предложенный подход к решению задачи синтеза адаптивного регулятора, с одной стороны, сохраняет такие достоинства принципа непосредственной компенсации, как возможность синтеза обратной связи $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ независимо от собственно процедуры адаптации. С другой стороны, этот подход автоматически и обоснованно приводит к искомым взаимосвязям $\hat{\boldsymbol{\theta}}_P(\mathbf{x}, t)$, гарантирующим в силу построения желаемые свойства (3.19) замкнутой системы даже в случае, если функции $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ в модели (3.10) зависят от вектора $\boldsymbol{\theta}$ нелинейным образом.

Выбор класса *виртуальных алгоритмов* адаптации (3.26) должен быть подчинен возможности решения задач 3.1 – 3.5. Поэтому такие алгоритмы должны быть, как минимум, работоспособны в случае нелинейной параметризации моделей без привлечения аппарата мажорирующих функций [48, 233, 231, 230]. Во-вторых, они потенциально должны обеспечивать возможность выполнения свойства (3.22) (задачи 3.4, 3.5). В-третьих, для решения задачи 3.2 естественно требовать, чтобы введение управляющих связей не приносило в систему никаких иных инвариантных

множеств за исключением, пожалуй, инвариантности вдоль многообразия целевой динамики (если такое существует). Поэтому класс *виртуальных алгоритмов* адаптации, обеспечивающих решения задач 3.1–3.5 зададим в виде:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma(\dot{\psi} + \varphi(\psi, \omega, t))\alpha(\mathbf{x}, t) + \mathcal{Q}(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t)(\theta - \hat{\theta}), \quad \Gamma \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad \Gamma > 0, \quad (3.28)$$

где $\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathcal{Q}(\cdot) \in \mathcal{C}^0$. Подобный выбор обусловлен тем, что фазовый поток, генерируемый такими системами, потенциально инвариантен вдоль уравнений целевой динамики, при условии, что $\mathcal{Q} = 0$. При этом работоспособность алгоритмов вида (3.28) в системах с нелинейно параметризованными неопределенностями в функциях $f(\mathbf{x}, \theta, t)$ – достижение целей управления и свойства (3.22), по меньшей мере для систем с асимптотически устойчивой по Ляпунову целевой динамикой (3.11), доказана в работах [46, 318].

В качестве кандидата на реализацию алгоритмов (3.28) в интегро-дифференциальной или конечной форме (3.27) выберем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\mathbf{x}, t) &= \Gamma(\hat{\theta}_P(\mathbf{x}, t) + \hat{\theta}_I(t)); \quad \Gamma \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad \Gamma > 0 \\ \hat{\theta}_P(\mathbf{x}, t) &= \psi(\mathbf{x}, t)\alpha(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t), \\ \dot{\hat{\theta}}_I &= \varphi(\psi(\mathbf{x}, t), \omega, t)\alpha(\mathbf{x}, t) + \mathcal{R}(\mathbf{x}, \hat{\theta}, u(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t), t), \end{aligned} \quad (3.29)$$

где функции $\Psi(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_d$, $\Psi(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^1$ в системе (3.29) удовлетворяют предположению 3.5⁹

Предположение 3.5. *Существует такая функция $\Psi(\mathbf{x}, t)$, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняется следующее равенство:*

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2} - \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2} = \mathcal{B}(\mathbf{x}, t), \quad (3.30)$$

где функция $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{d \times p}$ либо тождественно равна нулю, либо в случае $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \theta, t)$ дифференцируема по θ , удовлетворяет неравенству:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta, \theta', t) &\leq 0 \quad \forall \theta, \theta' \in \Omega_\theta, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \\ \mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta, \theta', t) &= \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}(\lambda), t)}{\partial \mathbf{s}} d\lambda; \quad \mathbf{s}(\lambda) = \theta\lambda + \theta'(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Функция $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \hat{\theta}, u(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t), t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ в системе (3.29) задается в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t), t) &= \partial \Psi(\mathbf{x}, t) / \partial t - \psi(\mathbf{x}, t)(\partial \alpha(\mathbf{x}, t) / \partial t) - (\psi(\mathbf{x}, t)L_{\mathbf{f}_1}\alpha(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - L_{\mathbf{f}_1}\Psi(\mathbf{x}, t)) - (\psi(\mathbf{x}, t)L_{\mathbf{g}_1}\alpha(\mathbf{x}, t) - L_{\mathbf{g}_1}\Psi(\mathbf{x}, t))u(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t), \\ &\quad + \mathcal{B}(\mathbf{x}, t)(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t)). \end{aligned} \quad (3.31)$$

⁹Похожее требование “интегрируемости” вводится также в [27] как условие работоспособности алгоритмов идентификации неизвестных параметров.

Функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$ и $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t), t)$ в системе (3.29) играют роль регуляторов формы производной $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}, t)$. Другими словами, они обеспечивают соответствие производной по времени $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}, t)$ уравнению (3.28). Роль функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$ в (3.29) состоит в том, чтобы компенсировать влияние зависящего от неопределенности члена $\psi(\mathbf{x}, t)L_{f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$. При этом условие (3.30) является условием возможности такой компенсации¹⁰. Функция $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t), t)$, в свою очередь, компенсирует влияние независимых от неопределенности векторных полей $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{g}_2(\mathbf{x}, t)$ на желаемую форму производной по времени $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}, t)$. Свойства системы (3.1) с регулятором основного контура (3.7) (в частности, (3.8)) и алгоритмом адаптации (3.29), (3.31), приводятся в теореме 3.1.

Т е о р е м а 3.1. *Рассмотрим замкнутую систему (3.1), (3.10), (3.29), (3.31) и положим, что выполнены предположения 3.3, 3.4 и 3.5. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Пусть для заданных начальных условий $\mathbf{x}(t_0)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_I(t_0)$ и значений вектора $\boldsymbol{\theta}$ интервал $[t_0, T^*]$ является (максимальным) интервалом времени, на котором определены решения замкнутой системы (3.1), (3.10), (3.29), (3.31). Тогда

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t) &\in L_2^1[t_0, T^*]; \\ \|f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]} &\leq D_f(\boldsymbol{\theta}, t_0, \Gamma, \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, T^*]}); \\ D_f(\boldsymbol{\theta}, t_0, \Gamma, \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, T^*]}) &= \left(\frac{D}{2} \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0)\|_{\Gamma^{-1}}^2 \right)^{0.5} + \frac{D}{D_1} \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, T^*]}; \\ \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)\|_{\Gamma^{-1}}^2 &\leq \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0) - \boldsymbol{\theta}\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \frac{D}{2D_1^2} \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, T^*]}^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

В дополнение, если выполнены предположения 3.1 и 3.2, то

$$2) \psi(\mathbf{x}(t), t) \in L_\infty^1[t_0, \infty], \mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, \infty] \text{ и}$$

$$\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, \infty]} \leq \gamma_{\infty, 2}(\psi(\mathbf{x}_0, t_0), \boldsymbol{\omega}, D_f(\boldsymbol{\theta}, t_0, \Gamma, \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, \infty]}) + \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, \infty]}); \quad (3.33)$$

3) кроме того, если выполняются свойства Д1, Д4 и для системы (3.11) определено передаточное отображение $L_2^1[t_0, \infty] \mapsto L_p^1[t_0, \infty]$, $p > 1$ по входу $\zeta(t)$ и выходу ψ , то

$$\varepsilon(t) \in L_2^1[t_0, \infty] \cap L_\infty^1[t_0, \infty] \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{x}(t), t) = 0. \quad (3.34)$$

Если, в дополнение, выполняется свойство Д2 и функции $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$, $\partial\psi(\mathbf{x}, t)/\partial t$ локально ограничены по \mathbf{x} равномерно по t , то

¹⁰В Приложении 2, в доказательстве теоремы 3.1, показано, что предположение 3.5 действительно достаточно для существования функции $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, t)$ состояния и времени, удовлетворяющей записи (3.28).

4) справедливо следующее предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t) = 0. \quad (3.35)$$

Теорема 3.1, по-сути, формулирует достаточные условия разрешимости задачи 3.1 в классе алгоритмов адаптации (3.29). При этом дополнительным условием разрешимости (в дополнение к сформулированным ранее предположениям) является новое предположение 3.5. Поэтому перед тем как развить результаты теоремы 3.1, раскроем физический смысл этого предположения.

Предположение 3.5 фактически связывает возможность синтеза алгоритма адаптации в классе (3.28), со свойствами функций $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ и макропеременной $\psi(\mathbf{x}, t)$. Эти функции в свою очередь зависят от свойств нелинейности $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ опосредованно через неравенства (3.15), (3.17) при выборе функции $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ и, что еще более важно, от способа задания множества: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \psi(\mathbf{x}, t) = 0\} \subseteq \Omega_0$, посредством конкретной функции $\psi(\mathbf{x}, t)$. Эти специфические свойства функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ и $\psi(\mathbf{x}, t)$ оказываются связанными условиями разрешимости уравнений в частных производных вида (3.30) относительно функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$. В достаточно общем случае, когда $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t) = \text{col}(\mathcal{B}_1(\mathbf{x}, t), \dots, \mathcal{B}_d(\mathbf{x}, t))$ и $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^2$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \text{col}(\alpha_1(\mathbf{x}, t), \dots, \alpha_d(\mathbf{x}, t))$, необходимые и достаточные условия существования искомой функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$ вытекают из известной леммы Пуанкаре:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \left(\psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \alpha_i(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2} + \mathcal{B}_i(\mathbf{x}, t) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \left(\psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \alpha_i(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2} + \mathcal{B}_i(\mathbf{x}, t) \right) \right)^T. \quad (3.36)$$

Следует отметить, что это равенство, будучи формальным условием существования требуемой функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$ в (3.30), одновременно учитывает и структурные свойства системы (3.1), (3.10). Действительно, положим $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t) = 0$ и рассмотрим частные производные $\partial \alpha_i(\mathbf{x}, t) / \partial \mathbf{x}_2$, $\partial \psi(\mathbf{x}, t) / \partial \mathbf{x}_2$ по вектору $\mathbf{x}_2 = (x_{21}, \dots, x_{2p})^T$. Пусть

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \\ \frac{\partial \alpha_i(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где символ $*$ в (3.37) обозначает некоторые функции состояния \mathbf{x} и времени t . Тогда условие (3.37) гарантирует справедливость равенства (3.36) и, следовательно, предположения 3.5. Таким образом, выполнение предположения 3.5 зависит от того, насколько большая часть разбиения \mathbf{x}_2 состояния \mathbf{x} является аргументом функций $\psi(\mathbf{x}, t)$ и $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$. Так, например, если $\partial \alpha(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_2, t) / \partial \mathbf{x}_2 = 0$, то предположение 3.5 выполняется для произвольных $\psi(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^1$. Если $\psi(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ зависят от единственного компонента вектора \mathbf{x}_2 , например x_{2k} , $k \in \{0, \dots, p\}$, то условие (3.37)

также всегда выполняется. Причем функция $\Psi(\mathbf{x}, t)$ в этом случае может быть вычислена либо аналитически взятием неопределенного интеграла

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial x_{2k}} dx_{2k}, \quad (3.38)$$

либо численно

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int_{x_{2k}(t_0)}^{x_{2k}(t)} \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial x_{2k}} dx_{2k}. \quad (3.39)$$

Во всех остальных случаях существование искомой функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$ определяется условием (3.36).

Необходимость выполнения предположения 3.5, на первый взгляд, может казаться существенным ограничением, которое ограничивает применимость как результатов теоремы 3.1, так и всего подхода в целом узким классом задач, для которых выполняется условие (3.36). Несмотря на то, что подобная критика действительно справедлива в части непосредственного применения теоремы 3.1, отметим, что, во-первых, условие (3.36) выполняется по умолчанию для достаточно широкого круга практически важных постановок задач адаптации и оценки параметров в системах с нелинейной параметризацией¹¹ для произвольных $\alpha(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^1$. Рассмотрим, например, работу [130], где класс допустимых систем ограничен уравнениями вида (3.40):

$$\dot{x} = -\varrho(x, u)x + f(\theta, u, x), \quad \varrho(x, t) > \varrho_{\min} > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.40)$$

Размерность вектора состояния в системе (3.40) равна единице и совпадает с размерностью \mathbf{x}_2 : $\dim\{\mathbf{x}\} = \dim\{\mathbf{x}_2\} = 1$. Следовательно, в соответствии с (3.38) и при условии, что $\psi(x, t), \alpha(x, t) \in \mathcal{C}^1$, функция $\Psi(x, t)$, удовлетворяющая равенству (3.30) всегда существует (в частности при $\mathcal{B}(x, t) = 0$). Во-вторых, для широкого класса систем, не удовлетворяющих предположению 3.5 оказывается возможным такое расширение уравнений системы¹², что предположение 3.5 выполняется в новом пространстве [322, 319, 317]. При этом расширение производится таким образом, чтобы достижение цели управления в расширенном пространстве состояний влекло выполнение исходных целей управления. Условия такой возможности и формальные ограничения на классы допустимых систем (3.1), для которых подобная процедура может быть реализована, приводятся в параграфе 3.2.2.

В заключение кратко прокомментируем результаты, установленные теоремой 3.1. Теорема 3.1, устанавливая условия разрешимости задачи 3.1, формулирует свойства,

¹¹См., например, постановку задачи в [130] для оценки параметров нелинейных систем в случае нелинейной параметризации. Эта постановка на сегодняшний день является одной из наиболее общих постановок, известных в литературе.

¹²Этот процесс эквивалентен вложению состояния в пространства более высокой размерности с доопределением уравнений динамики системы по новым переменным.

имеющие важное значение как для задач собственно управления – свойства 2), 3), так и идентификации – 1), 4). Эти свойства, как иллюстрируется уравнениями (3.32)–(3.35), дают условия ограниченности решений $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \boldsymbol{\theta}, u(t))$, асимптотического “обнуления” целевого функционала (условие (3.34)) и точной асимптотической компенсации влияния моделируемых неопределенностей $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ даже при наличии неизмеряемых возмущений $\varepsilon(t) \in L_2^1[t_0, \infty] \cap L_\infty^1[t_0, \infty]$. Эти свойства естественным образом вытекают из того, что выполнено требование $(f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t)) \in L_2^1[t_0, \infty]$ (требование (3.19) в задаче 3.1), выполнение которого в свою очередь обеспечивается свойствами (3.15), (3.16), (3.17) функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ в предположениях 3.3, 3.4. Среди этих свойств оценка (3.17) в предположении 3.4 имеет особое значение в случае ненулевых возмущений (в общем случае неограниченных по равномерной норме) из $L_2^1[t_0, \infty]$. В случае если возмущения $\varepsilon(t)$ равны нулю можно показать, что свойства 1)–4) выполняются без требования выполнения условий предположения 3.4.

С л е д с т в и е 3.1. *Рассмотрим систему (3.1), (3.10), (3.29), (3.31), и положим, что $\varepsilon(t) = 0$ и выполнены предположения 3.3, 3.5. Тогда*

5) норма $\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)\|_{\Gamma^{-1}}^2$ не возрастает со временем и свойства 1)–4)¹³ теоремы 3.1 справедливы с учетом того, что $\varepsilon(t) = 0$ в соответствующих оценках.

В дополнение к тому, что разность $|f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)|$ может теперь не удовлетворять требованию ограниченности снизу (3.17), следствие 3.1 гарантирует, что $\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)\|_{\Gamma^{-1}}^2$ не возрастает со временем при $\varepsilon(t) = 0$. Практическое значение этого следствия состоит в том, что в последующих параграфах раздела оно позволит доказать выполнение предельного соотношения (3.22) при более слабых ограничениях, чем требования предположения 3.4. Кроме того, оно позволит сформулировать условия экспоненциальной устойчивости невозмущенной системы (при $\varepsilon(t) = 0$), что в свою очередь гарантирует робастность замкнутой системы по отношению к (малым) возмущениям из $L_\infty^1[t_0, \infty]$ в правой части (3.10).

Однако перед тем, как перейти к рассмотрению этих новых свойств алгоритмов (3.29) рассмотрим вначале более важную задачу, связанную с обеспечением выполнения предположения 3.5 для систем вида (3.1).

3.2.2. Задача вложения. Достаточные условия разрешимости

В общем случае, когда $\dim\{\mathbf{x}_2\} > 1$, проблема отыскания функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющей условию (3.30) предположения 3.5 может быть решена с помощью

¹³В этом случае, однако, оценки нормы $\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, \infty]}$ будут отличаться от оценок (3.33) теоремы 3.1. Новые границы даются формулой (П3.14) в Приложении 2

специальной процедуры *вложения*, предложенной в [319]. Основная идея, лежащая в основе этой процедуры, состоит во введении вспомогательной системы

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^z, \\ \mathbf{h}_{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{h}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad \mathbb{R}^z \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^h,\end{aligned}\tag{3.41}$$

такой, что

$$f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}_1(t) \oplus \mathbf{h}_{\boldsymbol{\xi}}(t) \oplus \mathbf{x}'_2(t), \boldsymbol{\theta}, t) \in L_2^1[t_0, \infty],\tag{3.42}$$

причем $\dim\{\mathbf{h}_{\boldsymbol{\xi}}\} + \dim\{\mathbf{x}'_2\} = p$. Таким образом, уравнения модели по ошибке (3.10) принимают следующий вид:

$$\dot{\psi} = f(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{h}_{\boldsymbol{\xi}} \oplus \mathbf{x}'_2, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{h}_{\boldsymbol{\xi}} \oplus \mathbf{x}'_2, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) - \varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t) + \varepsilon_{\boldsymbol{\xi}}(t),\tag{3.43}$$

где $\varepsilon_{\boldsymbol{\xi}}(t) \in L_2^1[t_0, \infty]$ и $\dim\{\mathbf{x}'_2\} = p - h < p$. В принципе, размерность вектора \mathbf{x}'_2 таким образом может быть уменьшена до единицы или нуля. Как только это свойство выполнится, автоматически выполнится и условие (3.37), что в свою очередь, согласно (3.36), гарантирует выполнение предположения 3.5.

Сформулируем формальные ограничения на желаемые свойства системы (3.41) в виде предположения

Предположение 3.6. Система (3.41)

1) полна, т. е.

$$\mathbf{x} \in L_{\infty}^n[t_0, T] \Rightarrow \boldsymbol{\xi} \in L_{\infty}^z[t_0, T];\tag{3.44}$$

2) для любых $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$ и $\mathbf{x}(t_0)$ вдоль решений системы (3.41) существует функция $\Delta_{\boldsymbol{\xi}} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что справедлива следующая оценка:

$$\|f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\theta}, t)\|_{2, [t_0, T^*]} \leq \Delta_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_0),\tag{3.45}$$

где T^* – максимальное время существования решения $\mathbf{x}(t)$.

Очевидно, что расширение уравнений системы (3.1) уравнениями системы (3.41) трансформируют уравнения (3.10) в (3.43), где

$$\|\varepsilon_{\boldsymbol{\xi}}(t)\|_{2, [t_0, T]} \leq \Delta_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_0).$$

Для расширенной системы (3.1), (3.41) введем алгоритм адаптации:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, t) &= \Gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}}_P(\mathbf{x}, t) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_I(t)); \quad \Gamma \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad \Gamma > 0; \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_P(\mathbf{x}, t) &= \psi(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_{\boldsymbol{\xi}}, t) - \Psi(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_{\boldsymbol{\xi}}, t) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_I &= \varphi(\psi(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\omega}, t) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_{\boldsymbol{\xi}}, t) + \mathcal{R}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t), t),\end{aligned}\tag{3.46}$$

где функция $\Psi(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_{\boldsymbol{\xi}}, t)$ удовлетворяет предположению 3.7.

Предположение 3.7. Существует функция $\Psi(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t) \in C^1$, такая, что справедливо равенство

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t)}{\partial \mathbf{x}'_2} = \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \alpha(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t)}{\partial \mathbf{x}'_2}. \quad (3.47)$$

Функция $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t), t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ в системе (3.46) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t), t) = & \partial \Psi(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t) / \partial t - \psi(\mathbf{x}, t) (\partial \alpha(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t) / \partial t) + \\ & \left(\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t)}{\partial \mathbf{h}_\xi} - \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \alpha(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t)}{\partial \mathbf{h}_\xi} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_\xi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{f}_\xi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) - \\ & (\psi(\mathbf{x}, t) L_{\mathbf{f}_1} \alpha(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t) - L_{\mathbf{f}_1} \Psi(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t)) - \\ & (\psi(\mathbf{x}, t) L_{\mathbf{g}_1} \alpha(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t) - L_{\mathbf{g}_1} \Psi(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t)) u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Свойства замкнутой расширенной системы (3.1), (3.41), (3.46), (3.48) сформулированы в теореме 3.2

Теорема 3.2. Рассмотрим расширенную систему (3.1), (3.41), (3.46), (3.48), где система (3.41) удовлетворяет предположению 3.6. Тогда для расширенной замкнутой системы справедливы утверждения теоремы 3.1 при условии, что предположение 3.5 в формулировке теоремы 3.1 заменено на предположение 3.7.

При этом выполнение предположения 3.2 для систем (3.1), (3.11) влечет полноту и ограниченность решений замкнутой расширенной системы.

Теорема 3.2 устанавливает условия (предположение 3.6), при которых ограничения предположения 3.5 могут быть заменены более слабыми требованиями предположения 3.7. Нетрудно убедиться в том, что при условии существования системы (3.41), удовлетворяющей предположению 3.6 и условию $\dim\{\mathbf{h}_\xi\} = p$, предположение 3.7 всегда выполняется. Следовательно, можно сделать следующий вывод о том, что классы систем, для которых существует такое вложение одновременно являются и классами разрешимости задачи 3.1. В этом смысле теорема 3.2 сводит решение задачи 3.1 к решению задачи отыскания подходящего вложения исходной системы (3.1) в систему более высокого порядка (3.1), (3.41), $\dim\{\mathbf{h}_\xi\} = p$, для которой выполняются условия предположения 3.6.

Рассмотрим теперь классы систем, для которых подобное вложение оказывается возможным. Будем рассматривать функции $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$, удовлетворяющие следующему предположению $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$:

Предположение 3.8. Для функций $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ в системе (3.1) существуют и известны такие функции $\delta_f(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p$, что для любого $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta$

и всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$ найдутся вектора $\boldsymbol{\theta}_f \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{\theta}_b \in \mathbb{R}^p$ удовлетворяющие неравенству:

$$|f_{2,i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)| \leq \theta_{f,i} \cdot \delta_{f,i}(\mathbf{x}, t) + \theta_{b,i}, \quad i = 1, \dots, p, \quad (3.49)$$

причем функции $\delta_{f,i}(\mathbf{x}, t) \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, p$.

В силу предположения 3.8 для любого $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta$ существуют функции $\Delta_f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$, $\Delta_f(\mathbf{x}, t) = \delta_f(\mathbf{x}, t) \oplus 1$ и вектор $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^p$ такие, что

$$\|\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)\| \leq \boldsymbol{\eta}^T \Delta_f(\mathbf{x}, t). \quad (3.50)$$

Класс систем, удовлетворяющий предположению 3.8 и, следовательно, неравенствам (3.49), (3.50) содержит в себе такой широкий класс моделей, как системы с локально ограниченными по $\boldsymbol{\theta}$ функциями $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$. В этом смысле предположение 3.8 не является ограничением в силу того, что векторные поля в правой части (3.1) по умолчанию предполагаются локально ограниченными. Существенным для нас является лишь то, что функции $\delta_f(\mathbf{x}, t)$ в (3.49) и соответственно функции $\Delta_f(\mathbf{x}, t)$ в (3.50) известны.

Важным частным случаем систем, удовлетворяющих предположению 3.8 являются системы, где нелинейно параметризованные модели неопределенности глобально ограничены по \mathbf{x} , $\boldsymbol{\theta}$ и t , что соответствует подавляющему большинству практически значимых ситуаций. В этом случае, очевидно $\Delta_f(\mathbf{x}, t) = 1$, а $\boldsymbol{\eta} = \eta \in \mathbb{R}^1$ является скаляром.

Предположение 3.8, по-сути, специфицирует информацию о функциях $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$, требуемую для применения вводимого подхода к построению вспомогательных систем (3.41). Это предположение, однако, не вводит никаких ограничений на функции $\psi(\mathbf{x}, t)$, частные производные которых тем не менее участвуют в определении функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$. Для того, чтобы учесть это влияние, отдельно введем ограничения на класс допустимых функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$. Эти ограничения сформулированы в предположении 3.9

Предположение 3.9. Для функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ в моделях (3.9), (3.10) и (3.43) определены и существуют непрерывно дифференцируемые функции $\mathbf{h}_\epsilon : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{h}_\xi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ такие, что для всех $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{h}_\epsilon(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t) - \mathbf{h}_\epsilon(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, t)\| \geq |f(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{h}_\xi(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\theta}, t)|. \quad (3.51)$$

Предположение 3.9 выполняется, например, для функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$, удовлетворяющих условию Липшица.

Введем в рассмотрение следующую систему уравнений

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t)^T \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t) + \beta)(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, t)u + \mathbf{v}, \quad \beta > 0, \quad (3.52)$$

где

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t) = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{h}_\epsilon(\mathbf{s}(\lambda, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}), \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{s}} d\lambda, \quad \mathbf{s}(\lambda, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \boldsymbol{\xi},$$

а вектор \mathbf{v} определяется как

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\hat{\boldsymbol{\eta}}^T \Delta_f(\mathbf{x}, t) \cdot \text{sign}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2); \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} &= \Gamma_\eta \Delta_f(\mathbf{x}, t) \cdot \text{sign}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2)^T (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2), \quad \Gamma_\eta > 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Свойства системы (3.52), (3.53) устанавливаются следующей теоремой.

Т е о р е м а 3.3. *Рассмотрим последовательное соединение систем (3.1) и (3.52), (3.53). Положим, что для системы (3.1) выполняется предположение 3.8, а функция $\mathbf{h}_\epsilon(\cdot)$ в (3.52) удовлетворяет предположению 3.9. Тогда*

- 1) *система (3.52), (3.53) полна и, кроме того,*
- 2) *для любых $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta$ справедлива оценка*

$$\|f(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{h}_\xi, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\theta}, t)\|_{2, [t_0, T^*]} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\|\boldsymbol{\xi}(t_0) - \mathbf{x}_2(t_0)\|^2 + \|\hat{\boldsymbol{\eta}}(t_0) - \boldsymbol{\eta}\|_{\Gamma_\eta^{-1}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.54)$$

где T^* – максимальное время существования решения $\mathbf{x}(t)$.

Теорема 3.3 позволяет сводить задачу отыскания функций Ψ , удовлетворяющих предположениям 3.5 или 3.7 в задаче 3.1 синтеза адаптивного регулятора к проверке условий предположений 3.8, 3.9. Подобная замена позволяет сделать вывод о том, что для класса локально ограниченных по $\boldsymbol{\theta}$ функций $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ и Липшицевых по \mathbf{x}_2 функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ всегда найдется расширение (3.41), трансформирующее исходные уравнения (3.1), (3.10) в (3.1), (3.41), (3.43). Причем для расширенной системы решение задачи синтеза адаптивного регулятора всегда гарантируется в силу теоремы 3.2 так как выполнение предположения 3.6 гарантируется теоремой 3.3. Таким образом, теоремы 3.2, 3.3 устанавливают факт принципиальной разрешимости задачи (3.1). Конкретные уравнения алгоритмов адаптации даются выражениями (3.52), (3.53), (3.46), (3.48).

Как и любые результаты общего характера, теорема 3.3 имеет и очевидные недостатки. К наиболее существенным недостаткам следует отнести тот факт, что правые части системы (3.52), вообще говоря, разрывные. Для случая, когда правые части разбиения \mathbf{x}_2'' вектора \mathbf{x}_2 оказываются линейно параметризованными аналогичный результат, обеспечивающий выполнение предположения 3.6, можно привести в классе систем с непрерывными правыми частями (см. параграф 3.3). В общем случае

синтез расширений (3.41), обеспечивающие выполнение предположения 3.6 в классе систем с непрерывными правыми частями оказывается нетривиальной задачей. Тем не менее, такие задачи неизбежно возникают при управлении каскадами нелинейных систем. Для решения задач синтеза в системах такого типа обычно используются итеративные процедуры, требующие вычисления производных правых частей всей системы на каждом шаге синтеза [217, 26].

С целью распространения предлагаемого метода на каскады нелинейных систем, а также для определения самой возможности итеративного синтеза методом виртуального алгоритма адаптации отдельно рассмотрим случай, когда математическая модель системы (3.1) имеет нижнетреугольную форму. Эти результаты приводятся в следующем параграфе.

3.2.3. Задача прямого адаптивного управления классом объектов с моделями в нижнетреугольной форме

Рассмотрим класс объектов, математическая модель которых имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, \theta_i) + x_{i+1}, \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, \theta_n) + u + \varepsilon(t), \\ \varepsilon(t) &\in L_2, \quad \theta_i \in \Omega_\theta, \quad i = 1, \dots, n-1,\end{aligned}\tag{3.55}$$

Будем считать, что функции $f_i(\cdot)$ в модели (3.55) удовлетворяют предположениям 3.3, 3.4 с соответствующими функциями $\alpha_i(\mathbf{x})$. Термином “гладкая функция” в этом параграфе будем называть функции, дифференцируемые сколь угодно большое число раз. Для удобства будем считать, что функции $\alpha_i(\mathbf{x})$ гладкие. В заключение допустим, что выполнено следующее предположение.

Предположение 3.10. *Существуют гладкие функции $\bar{D}_i(\cdot) : \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любого $\theta_i \in \Omega_\theta$ справедлива оценка:*

$$(f_i(x_1, \dots, x_i, \theta_i) - f_i(x'_1, \dots, x'_i, \theta_i))^2 \leq \bar{D}_i^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i) \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i\|^2,$$

где $\mathbf{x}_i = (x_1, \dots, x_i)^T$, $\mathbf{x}'_i = (x'_1, \dots, x'_i)^T$

Целью управления будем считать выполнение предельного соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x_1(t)) = 0.\tag{3.56}$$

Для достижения поставленной цели рассмотрим вначале задачу построения расширения (3.41) для системы (3.55). Условия существования такого расширения сформулированы в лемме 3.1.

Л е м м а 3.1. Пусть заданы система:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_i, \theta_i) + \beta_i(\mathbf{x}, t), \quad (3.57)$$

$i = 1, \dots, n$ и гладкая функция $u(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \theta_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Предположим, что $\theta_0 \in \Omega_0$, Ω_0 – ограничены и существуют гладкие функции $\bar{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{z})$, $\bar{D}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, $i = 1, \dots, n$ такие, что:

- 1) $(u(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \theta_0) - u(\mathbf{x}', \mathbf{z}, \theta_0))^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2 \bar{F}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{z}) \quad \forall \theta_0 \in \Omega_0, \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$;
- 2) $(f_i(x_1, \dots, x_i, \theta_i) - f_i(x'_1, \dots, x'_i, \theta_i))^2 \leq \|\tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}'_i\|^2 \bar{D}_i^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i) \quad \forall \theta_i \in \Omega_{\theta}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i \in \mathbb{R}^n$;

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = (x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\tilde{\mathbf{x}}'_i = (x'_1, \dots, x'_i, 0, \dots, 0)^T.$$

Пусть существуют и известны функции $\alpha_i(\mathbf{x})$, удовлетворяющие предположениям 3.3, 3.4 для функций $f_i(x_1, \dots, x_i, \theta_i)$ соответственно. Тогда существуют такие $\xi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\nu(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, гладкие функции $\mathbf{f}_\xi(\cdot)$, $\mathbf{f}_\nu(\cdot)$, и система:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \mathbf{f}_\xi(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{z}, \nu), \quad \xi_0 \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{\nu} &= \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{z}, \nu), \quad \nu_0 \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (3.58)$$

что

- 1) $u(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \theta_0) - u(\mathbf{q}_i, \mathbf{z}, \theta_0) \in L_2[t_0, \infty]$, $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{q}_i = (\xi_1, \dots, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n)^T;$$

- 2) $f_i(x_1, \dots, x_i, \theta_i) - f_i(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, x_i, \theta_i) \in L_2[t_0, \infty]$, $i = 2, \dots, n$;

- 3) $\mathbf{x} \in L_\infty[t_0, T] \Rightarrow \xi, \nu \in L_\infty[t_0, T]$.

Лемма 3.1 позволяет сформулировать следующий результат

Т е о р е м а 3.4. Пусть заданы система (3.55) и целевой функционал $\psi(x_1) = 0$. Причем $\psi(x_1) \in L_\infty[t_0, T] \Rightarrow x_1 \in L_\infty[t_0, T]$. Кроме того, пусть существуют функции $\alpha_i(x_1, \dots, x_i)$, удовлетворяющие предположениям 3.3, 3.4 для функции $f_i(x_1, \dots, x_i, \theta_i)$ в (3.55) соответственно. В дополнение положим, что $f_i(x_1, \dots, x_i, \theta_i)$ удовлетворяют предположению 3.10, а функции $\alpha_i(x_1, \dots, x_i)$, $f_i(x_1, \dots, x_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, n$, $\psi_1(x_1)$ гладкие.

Тогда существуют такие система:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \mathbf{f}_\xi(\mathbf{x}, \xi, \nu), \quad \dot{\nu} = \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}, \xi, \nu), \\ \xi_0 &\in \mathbb{R}^n, \quad \nu_0 \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (3.59)$$

гладкие функции $\psi_i(x_i, t)$, $i = 1, \dots, n$, $\hat{\theta}_P(\mathbf{x}, \xi)$, управление $u(\mathbf{x}, \hat{\theta}, \xi, \nu)$, и алгоритм адаптации

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(\mathbf{x}, \xi, \hat{\theta}_I) &= \gamma(\hat{\theta}_P(\mathbf{x}, \xi) + \hat{\theta}_I), \quad \gamma > 0, \\ \dot{\hat{\theta}}_I &= \mathbf{f}_{\hat{\theta}}(\mathbf{x}, \hat{\theta}, \xi, \nu),\end{aligned}\tag{3.60}$$

что

- 1) $\psi_i(x_i, t), \psi \in L_2[t_0, \infty] \cap L_\infty[t_0, \infty]$, $\dot{\psi}, \dot{\psi}_i \in L_2[t_0, \infty]$, $i = 1, \dots, n$;
- 2) $\hat{\theta} \in L_\infty[t_0, \infty]$ и $u(\mathbf{x}, \hat{\theta}, \xi, \nu) - u(\mathbf{x}, \theta_n, \xi, \nu) \in L_2[t_0, \infty]$;
- 3) $\mathbf{x}, \xi, \nu \in L_\infty[t_0, \infty]$;
- 4) если $\varepsilon(t) \in L_\infty[t_0, \infty]$, то $\dot{\psi}, \dot{\psi}_i \in L_\infty[t_0, \infty]$, и, более того, выполняются предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x_1(t)) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_i(x_i(t), t) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 3.4, аналогично теоремам 3.2, 3.3, устанавливает условия (предположение 3.10), при которых необходимость решения уравнений в частных производных (3.30) заменяется более простой задачей синтеза расширения (3.41), (3.52), (3.53) или (3.59), удовлетворяющей предположению 3.6. Отметим, что подобное расширение системы или вложение состояния управляемого объекта в пространства более высокой размерности (с соответствующим доопределением решений по новым переменным) может быть интерпретировано как построение функционального наблюдателя \mathcal{S}_o (параграф 2.4.2), обеспечивающего ограниченность ошибки восстановления, значимой для управления информацией по норме (2.70). Таким образом, полнота и ограниченность решений замкнутой системы вытекают непосредственно из теоремы 2.6.

Следует отметить и то, что доказательство теоремы 3.4 конструктивно. Другими словами, в дополнение к установлению самого факта существования закона адаптивного управления для системы (3.55), оно определяет собственно уравнения такого регулятора (П3.42) в явном виде. Для того, чтобы проиллюстрировать шаги итеративного синтеза, использованного в доказательстве теоремы 3.4, а также преимущества рассматриваемого метода по сравнению с существующими в отношении качества управления, приведем два примера.

В первом примере для объекта второго порядка с линейной параметризацией приводятся синтез законов управления в соответствии с теоремами 3.2, 3.3 и 3.4. Эти законы сравниваются со стандартными решениями метода адаптивного обхода интегратора [217, 205]. Во втором примере приводится синтез регулятора для системы с нелинейно параметризованными моделями неопределенностей.

Пример 3.2.1. Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 \theta_0 + x_2; \quad \dot{x}_2 = x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2 + u, \quad (3.61)$$

где параметры θ_0 , θ_1 и θ_2 предполагаются неизвестными *a priori*. Цель управления состоит в достижении следующего множества: $x_1 - 1 = 0$ в \mathbb{R}^2 . Синтез регулятора для системы (3.61) проведем в соответствии с шагами доказательства теоремы 3.4.

1) *Синтез промежуточного управления.* Вычислим функцию управления $u_1(x_1, \hat{\theta}_0)$ такую, что для редуцированной системы

$$\dot{x}_1 = x_1^2 \theta_0 + u_1(x_1, \hat{\theta}_0) + \varepsilon_1(t), \quad \varepsilon_1(t) \in L_2; \quad \hat{\theta}_0 = \hat{\theta}_{0,P}(x_1) + \hat{\theta}_{0,I}(t)$$

выполняется следующее предельное соотношение: $\psi(x_1(t)) = x_1(t) - 1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Кроме того функция $u_1(x_1, \hat{\theta}_0(x_1, \hat{\theta}_{0,I}))$ должна обеспечивать выполнение условия $\psi, \dot{\psi} \in L_2[t_0, \infty]$.

2) *Вложение.* Расширим систему (или вложим) с помощью вспомогательной подсистемы

$$\dot{\xi} = f_\xi(\mathbf{x}, \xi, \nu); \quad \dot{\nu} = f_\nu(\mathbf{x}, \xi, \nu) \quad (3.62)$$

таким образом, чтобы выполнялось условие

$$u(x_1, \hat{\theta}_0(x_1, \hat{\theta}_{0,I})) - u(\xi, \hat{\theta}_0(\xi, \hat{\theta}_{0,I})) \in L_2[t_0, T], \quad x_1 - \xi \in L_2[t_0, T]. \quad (3.63)$$

Эти $L_2[t_0, T]$ -нормы должны быть ограничены сверху функциями начальных условий и, возможно, параметров.

3) *Синтез закона управления.* Введем новый целевой функционал $\psi_2(x_2, t) = x_2 - u_1(\xi, \hat{\theta}_0(\xi, \hat{\theta}_{0,I}))$ и вычислим закон управления $u(x_1, x_2, \xi, t)$ такой, что $\dot{\psi}_2 \in L_2[t_0, \infty]$, $\psi_2 \in L_2 \cap L_\infty[t_0, \infty]$. Последние условия влекут выполнение равенств

$$\dot{x}_1 = x_1^2 \theta_0 + x_2 = x_1^2 \theta_0 + u_1(x_1, \hat{\theta}_0(x_1, \hat{\theta}_{0,I})) + \mu(t),$$

где

$$\begin{aligned} \mu(t) &= x_2 - u_1(x_1, \hat{\theta}_0(x_1, \hat{\theta}_{0,I})) = (x_2 - u_1(\xi, \hat{\theta}_0(\xi, \hat{\theta}_{0,I}))) + \\ & \quad (u_1(\xi, \hat{\theta}_0(\xi, \hat{\theta}_{0,I})) - u_1(x_1, \hat{\theta}_0(x_1, \hat{\theta}_{0,I}))) \in L_2[t_0, \infty]. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу выбора функции $u_1(x_1, \hat{\theta}_0(x_1, \hat{\theta}_{0,I}))$, управление $u(x_1, x_2, \xi, t)$ будет гарантировать выполнение предельного соотношения $\psi(x_1(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а также свойства $\psi, \dot{\psi} \in L_2[t_0, \infty]$.

Начнем с определения функции $u(x_1, \hat{\theta}_0(x_1, \hat{\theta}_{0,I}))$. Пусть $u_1(x_1, \hat{\theta}_0) = -C_1(x_1 - 1) - \hat{\theta}_0 x_1^2$, где $C_1 > 0$ – параметр синтеза (коэффициент отрицательной обратной связи), а $\hat{\theta}_0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (виртуальный алгоритм адаптации):

$$\dot{\hat{\theta}}_0 = \gamma_0(C_1(x_1 - 1) + \dot{x}_1)x_1^2, \quad \gamma_0 > 0. \quad (3.64)$$

Как следует из леммы 9.1, управление $u_1(x_1, \hat{\theta}_0)$ с алгоритмом (3.64) обеспечивают выполнение следующих свойств $\psi, \dot{\psi} \in L_2[t_0, \infty]$, $\psi(x_1(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В соответствии с теоремой 3.1, реализация алгоритмов (3.64) в конечной форме имеет вид: $\hat{\theta}_0(x_1, \hat{\theta}_{0,I}(t)) = \gamma_0(1/3x_1^3 + \hat{\theta}_{0,I}(t))$; $\dot{\hat{\theta}}_{0,I} = C_1(x_1 - 1)x_1^2$. Подставляя эти функции в $u_1(x_1, \hat{\theta}_0)$, получим искомое выражение для $u_1(\cdot)$:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, \hat{\theta}_0(x_1, \hat{\theta}_{0,I})) &= -C_1(x_1 - 1) - \gamma_0(1/3x_1^5 + x_1^2\hat{\theta}_{0,I}(t)); \\ \dot{\hat{\theta}}_{0,I} &= \psi(x_1)\alpha_1(x_1) = C_1(x_1 - 1)x_1^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Таким образом, первый этап синтеза завершен.

Синтезируем теперь систему (3.62), обеспечивающую выполнение условия (3.63) для функции (3.65). С этой целью рассмотрим разность:

$$\begin{aligned} u(x_1, \hat{\theta}_0(x_1, \hat{\theta}_{0,I})) - u(\xi, \hat{\theta}_0(\xi, \hat{\theta}_{0,I})) &= -(x_1 - \xi)(C_1 + \gamma_0((x_1 + \xi)\hat{\theta}_{0,I} + \\ &1/3(x_1^4 + x_1^3\xi + x_1^2\xi^2 + x_1\xi^3 + \xi^4))) \end{aligned} \quad (3.66)$$

и введем обозначение $F(x_1, \xi, \hat{\theta}_{0,I}) = (C_1 + \gamma_0((x_1 + \xi)\hat{\theta}_{0,I} + \frac{1}{3}(x_1^4 + x_1^3\xi + x_1^2\xi^2 + x_1\xi^3 + \xi^4)))$. Лемма 3.1 гарантирует существование системы (3.62), такой, что выполняется условие (3.63). В частности, эта система может быть определена следующим уравнением

$$\dot{\xi} = (x_1 - \xi)(F^2(x_1, \xi, \hat{\theta}_{0,I}) + 1) + x_1^2\hat{\theta}_\xi + x_2, \quad (3.67)$$

где $\hat{\theta}_\xi$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{\hat{\theta}}_\xi = (x_1 - \xi + \dot{x}_1 - \dot{\xi})x_1^2$. Реализация этого алгоритма в конечной форме¹⁴ следует из теоремы 3.1, и может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_\xi &= 1/3x_1^3 + \hat{\theta}_{\xi,I}; \\ \dot{\hat{\theta}}_{\xi,I} &= (x_1 - \xi)x_1^2 - x_1^2((x_1 - \xi)(F^2(x_1, \xi, \hat{\theta}_{0,I}) + 1) + x_1^2\hat{\theta}_\xi + x_2). \end{aligned} \quad (3.68)$$

¹⁴Введение алгоритма (3.68) не является здесь необходимым шагом, так как исходная система линейно параметризована и поэтому условие (3.63) может быть обеспечено обычным градиентным алгоритмом. Тем не менее, в примере будем придерживаться последовательности шагов доказательства теоремы 3.4 с целью иллюстрации подхода, примененного как в случае линейно параметризованных систем, так и для систем с нелинейной параметризацией.

Учитывая (3.68) и (3.67), перепишем уравнения системы (3.62) в виде

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (x_1 - \xi)(F^2(x_1, \xi, \hat{\theta}_{0,I}) + 1) + \frac{1}{3}x_1^5 + \hat{\theta}_{\xi,I}(t)x_1^2 + x_2; \\ \dot{\hat{\theta}}_{\xi,I} &= (x_1 - \xi)x_1^2 - x_1^2((x_1 - \xi)(F^2(x_1, \xi, \hat{\theta}_{0,I}) + 1) + \frac{1}{3}x_1^5 + \hat{\theta}_{\xi,I}(t)x_1^2 + x_2). \quad (3.69)\end{aligned}$$

Таким образом, второй этап синтеза завершен.

Для завершения итеративной процедуры синтеза рассмотрим новое целевое многообразие $x_2 - u_1(\xi, \hat{\theta}_0(\xi, \hat{\theta}_{0,I})) = 0$ и целевую функцию $\psi_2(x_2, t) = x_2 - u_1(\xi, \hat{\theta}_0(\xi, \hat{\theta}_{0,I})) = x_2 + C_1(\xi - 1) + \gamma_0(\frac{1}{3}\xi^5 + \hat{\theta}_{0,I}\xi^2)$. Запишем производную по времени функции $\psi_2(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_2 &= \dot{x}_2 - \frac{\partial u_1(\xi, \hat{\theta}_0(\xi, \hat{\theta}_{0,I}))}{\partial \xi} \dot{\xi} - \frac{\partial u_1(\xi, \hat{\theta}_0(\xi, \hat{\theta}_{0,I}))}{\partial \hat{\theta}_{0,I}} \dot{\hat{\theta}}_{0,I} = x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + u \\ &\quad + \gamma_0 C_1 \xi^2 (x_1 - 1)x_1^2 + (C_1 + \gamma_0(\frac{5}{3}\xi^4 + 2\xi\hat{\theta}_{0,I}))((x_1 - \xi)(F^2(x_1, \xi, \hat{\theta}_{0,I}) + 1) + \\ &\quad \gamma_0(\frac{1}{3}x_1^5 + \hat{\theta}_{\xi,I}(t)x_1^2) + x_2).\end{aligned}$$

Тогда управление

$$\begin{aligned}u &= -\xi\hat{\theta}_1 - x_2\hat{\theta}_2 - \gamma_0 C_1 \xi^2 (x_1 - 1)x_1^2 - C_2(x_2 + C_1(\xi - 1) + \gamma_0(\frac{1}{3}\xi^5 + \hat{\theta}_{0,I}\xi^2)) \quad (3.70) \\ &\quad - (C_1 + \gamma_0(\frac{5}{3}\xi^4 + 2\xi\hat{\theta}_{0,I}))((x_1 - \xi)(F^2(x_1, \xi, \hat{\theta}_{0,I}) + 1) + \gamma_0(\frac{1}{3}x_1^5 + \hat{\theta}_{\xi,I}(t)x_1^2) + x_2),\end{aligned}$$

где $C_2 > 0$ – параметр, обеспечивает выполнение равенства: $\dot{\psi}_2 = -C_2\psi_2(x_2, t) + x_1\theta_1 + x_2\theta_2 - x_1\hat{\theta}_1 - x_2\hat{\theta}_2$. Учитывая свойство (3.63), запишем производную $\dot{\psi}_2$ в виде $\dot{\psi}_2 = -C_2\psi_2(x_2, t) + \xi\theta_1 + x_2\theta_2 - \xi\hat{\theta}_1 - x_2\hat{\theta}_2 + \varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t) = (x_1 - \xi)\theta_1 \in L_2$. Как вытекает из леммы 9.1, алгоритм адаптации

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_1 &= \gamma_0(C_2\psi_2(x_2, t) + \dot{\psi}_2)\alpha_1(\xi); \quad (3.71) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \gamma_0(C_2\psi_2(x_2, t) + \dot{\psi}_2)\alpha_2(x_2), \quad \alpha_1(\xi) = \xi, \quad \alpha_2(x_2) = x_2\end{aligned}$$

обеспечивает выполнение свойств $\psi_2 \in L_2 \cap L_\infty$ и $\dot{\psi}_2 \in L_2$. Реализации алгоритма (3.71) следуют из теоремы 3.1:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1(x_2, \xi, \hat{\theta}_{0,I}, t) &= \gamma_0((x_2 + C_1(\xi - 1) + \gamma_0(\frac{1}{3}\xi^5 + \hat{\theta}_{0,I}\xi^2))\xi + \hat{\theta}_{1,I}(t)); \quad (3.72) \\ \dot{\hat{\theta}}_{1,I} &= C_2(x_2 + C_1(\xi - 1) + \gamma_0(\frac{1}{3}\xi^5 + \hat{\theta}_{0,I}\xi^2))(\xi - \frac{\xi}{C_2}); \\ \hat{\theta}_2(x_2, \xi, \hat{\theta}_{0,I}, t) &= \gamma_0(\frac{x_2^2}{2} + \hat{\theta}_{2,I}(t)); \\ \dot{\hat{\theta}}_{2,I} &= C_2(x_2 + C_1(\xi - 1) + \gamma_0(\frac{1}{3}\xi^5 + \hat{\theta}_{0,I}\xi^2))x_2 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \hat{\theta}_{0,I}} \dot{\hat{\theta}}_{0,I},\end{aligned}$$

где $\Psi_2(x_2, \xi, \hat{\theta}_{0,I}) = \int \psi_2(x_2, t) \frac{\partial \alpha_2(x_2)}{\partial x_2} dx_2 = \frac{x_2^2}{2} + (C_1(\xi - 1) + \gamma_0(\frac{1}{3}\xi^5 + \hat{\theta}_{0,I}\xi^2))x_2$.

Для оценки качества полученного управления сравним результаты моделирования замкнутой системы с известным методом адаптивного обхода интегратора [217, 205]. Адаптивный регулятор для системы (3.61) в соответствии с методом [205] имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= -C_2(x_2 + C_1(x_1 - 1) + \hat{\theta}_3 x_1^2) - \gamma_0 x_1^4(x_1 - 1) - x_2(C_1 + 2x_1 \hat{\theta}_3) \\ &\quad - (C_1 x_1^2 + 2\hat{\theta}_3 x_1^3)\hat{\theta} - x_1 \hat{\theta}_1 - x_2 \hat{\theta}_2; \\ \dot{\hat{\theta}} &= \gamma_0(x_2 + C_1(x_1 - 1) + \hat{\theta}_3 x_1^2)x_1^2(C_1 + 2\hat{\theta}_3 x_1); \\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= \gamma_0(x_2 + C_1(x_1 - 1) + \hat{\theta}_3 x_1^2)x_1; \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \gamma_0(x_2 + C_1(x_1 - 1) + \hat{\theta}_3 x_1^2)x_2; \\ \dot{\hat{\theta}}_3 &= \gamma_0(x_1 - 1)x_1^2, \end{aligned} \quad (3.73)$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $\gamma_0 > 0$ – параметры. Как и прежде, параметры C_1 , C_2 являются коэффициентами отрицательных обратных связей по состоянию, а γ_0 – коэффициент скорости адаптации.

Адаптивное управление с функциями настройки [217] дается уравнениями

$$\begin{aligned} u_1 &= -C_2(x_2 + C_1(x_1 - 1) + x_1^2 \hat{\theta}) - (x_1 - 1) - \\ &\quad (C_1 + 2x_1 \hat{\theta})(x_2 + \hat{\theta} x_1^2) - x_1^2 \tau - x_1 \hat{\theta}_1 - x_2 \hat{\theta}_2; \\ \dot{\hat{\theta}} &= \tau; \quad \tau = \gamma_0((x_1 - 1)x_1^2 + (x_2 + C_1(x_1 - 1) + x_1^2 \hat{\theta})x_1^2(C_1 + 2x_1 \hat{\theta})); \\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= \gamma_0(x_2 + C_1(x_1 - 1) + x_1^2 \hat{\theta})x_1; \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \gamma_0(x_2 + C_1(x_1 - 1) + x_1^2 \hat{\theta})x_2. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Результаты моделирования замкнутой системы с этими тремя различными законами управления приведены на рис. 3.2. Начальные условия и параметры были выбраны следующим образом: $\theta_0 = \theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0.5$, $C_2 = C_1 = \gamma = 1$, $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0.2$, $\hat{\theta}_3(0) = \hat{\theta}_0(0) = 3$, $\hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_2(0) = -2$, $\xi_2(0) = 0$, $\xi_1(0) = x_1(0)$. Начальные условия для переменных $\hat{\theta}_{1,I}(0)$, $\hat{\theta}_{2,I}(0)$ и $\hat{\theta}_{3,I}(0)$ in (3.72) соответствовали значениям $\hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_2(0) = -2$, $\hat{\theta}_3(0) = 3$. В качестве дополнительного фактора качества введем переменную

$$\Delta \hat{\theta}(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|\theta_i - \hat{\theta}_i(t)\|^2},$$

которая служит мерой отклонения оценок параметров системы от их действительного значения.

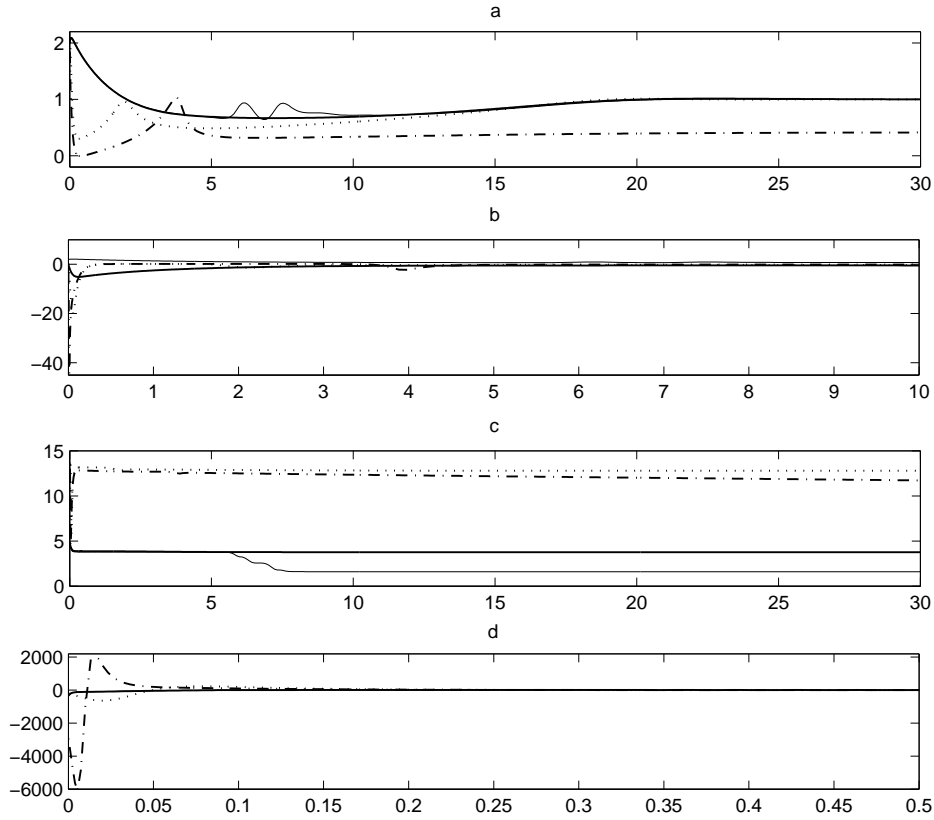


Рисунок 3.2. Графики траекторий системы (3.61) с управлениями (3.70), (3.72) (жирные сплошные линии), (3.73) (точки), (3.74) (пунктирные линии); a – траектории x_1 как функции времени, b – x_2 как функции времени, c – нормы параметрической ошибки $\Delta\hat{\theta}$ как функции времени, d – управление u как функция времени.

Как вытекает из результатов моделирования, качество переходных процессов в системе (3.61) с алгоритмом (3.70), (3.72) оказывается лучше, чем при использовании стандартных методов (3.73) и (3.74). Причем особенно заметно преимущество управления (3.70), (3.72) в темпе скорости уменьшения параметрической ошибки. Для количественного сравнения качества управления приведем значения суммарной энергии $I = \int_0^T u_1^2(\tau) d\tau$, $T = 500$, затраченной на управление во всех трех случаях. Для системы с управлением (3.70), (3.72) $I = 627.10$, для систем с управлением (3.73) $I = 13329.28$, регулятор (3.74) обеспечивает наихудшее качество управления $I = 263872.58$.

Похожая качественная картина наблюдается и при других значениях параметров C_1 , C_2 и γ_0 . В частности, при $C_1 = C_2 = c$, где значение c варьировалось в интервале $[1, 5]$, а параметр γ_0 выбирался случайным образом из $[0.1, 2]$.

Для других начальных условий $x_1(0)$, $x_2(0)$, однако, ни один из представленных алгоритмов не продемонстрировал абсолютное превосходство в качестве процессов. В среднем, однако, в рассмотренном диапазоне изменений начальных условий качество системы с предложенными алгоритмами (3.70), (3.72), выраженное в терминах L_2 -норм ошибки $x_1(t) - 1$ и управления $u(t)$, превосходит наилучшие результаты для систем с алгоритмами адаптивного обхода интегратора (3.73), (3.74). Результаты сравнения частично иллюстрируются рис. 3.3. Моделирование также показало, что для предложенных алгоритмов (3.70), (3.72) параметрическая неопределенность, выраженная числом $\Delta\theta(T)$, не возрастает относительно начального состояния $\Delta\theta(0) = 4.609$. В то же время алгоритмы, построенные на основе адаптивного обхода интегратора, часто приводят к существенному увеличению параметрической неопределенности $\Delta\theta(T)$.

Иллюстрацией возможностей метода в случаях, когда модель объекта имеет нелинейно параметризованные неопределенности, служит следующий пример.

Пример 3.2.2. Рассмотрим систему массы на пружине с неизвестным трением прилипания (или, в общем случае, демпфированием), а также с неопределенностями динамики исполнительных механизмов. Схематически эта система иллюстрируется рис. 3.4. Уравнения динамики системы следуют непосредственно из законов Ньютона:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -kx_1 + k(x_3 - x_1) - \tanh(S_f x_2)(C_1 + \theta_{1,2}e^{-\theta_{1,1}x_2^2}); \\ \dot{x}_3 &= \theta_2 x_3 + u.\end{aligned}\tag{3.75}$$

Коэффициенты k в (3.75) обозначают коэффициент упругой деформации пружины, слагаемое $\tanh(S_f x_2)(C_1 + \theta_{1,2}e^{-\theta_{1,1}x_2^2})$, $S_f = 50$ моделирует эффекты сил трения между контактными поверхностями и массой. При этом коэффициент C_1 – это коэффициент кулоновского трения, а параметры $\theta_{1,1}$, $\theta_{1,2}$ характеризуют штрибековские силы. Параметр θ_2 обозначает постоянную времени исполнительного механизма. Для простоты положим, что $k = C_1 = 1$.

Уравнения (3.75) встречаются в широком классе механических систем, включающих системы электромеханических клапанов, аппаратах искусственных мышц, моделях тканей и органов живых организмов (хотя и с другими функциями нелинейного демпфирования), а также в тактильных интерфейсах [186].

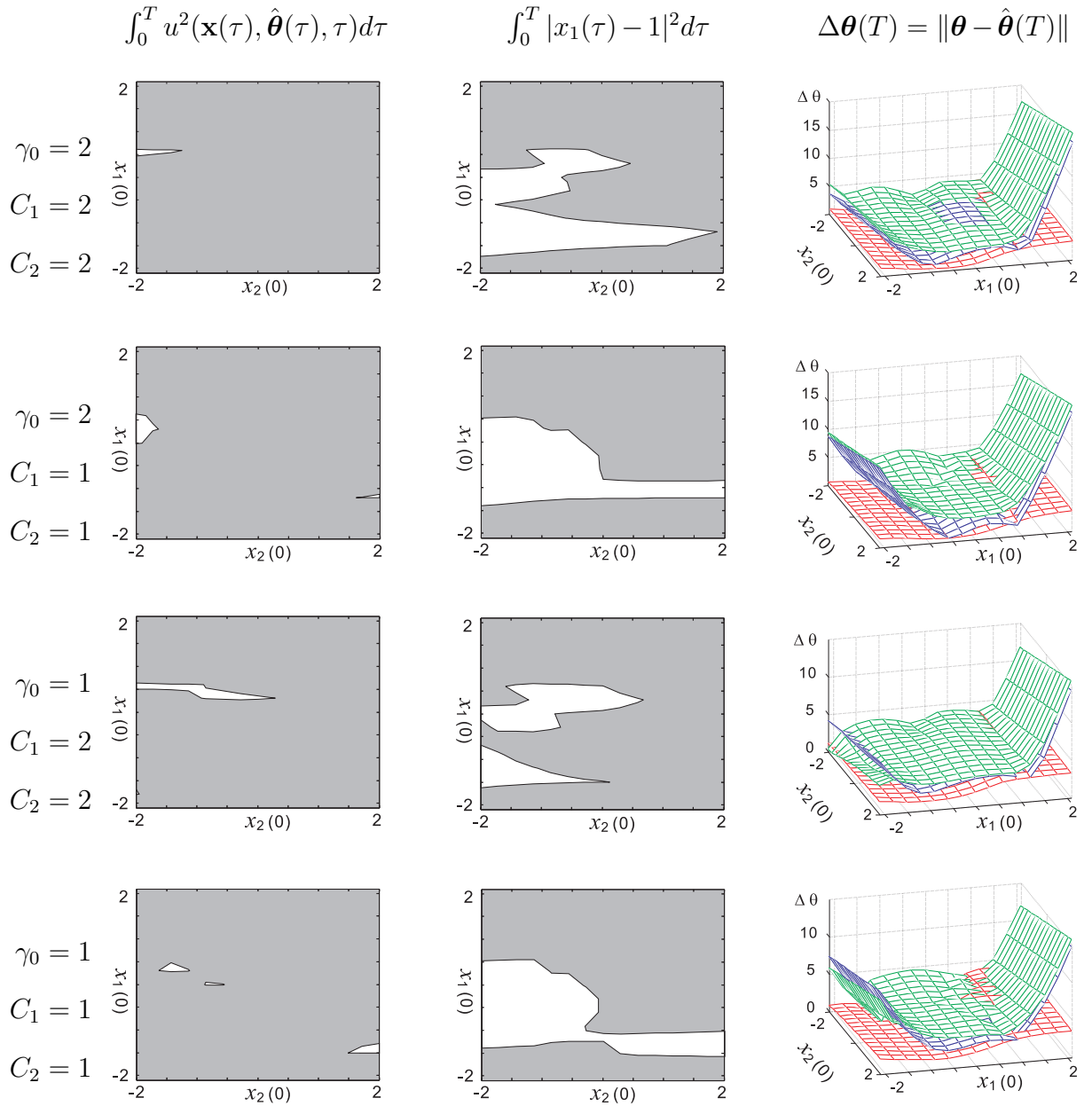


Рисунок 3.3. Диаграммы сравнения качества систем с алгоритмами адаптации на основе адаптивного обхода интегратора (3.73), (3.74) с системами на основе алгоритмов (3.70), (3.72) для начальных условий $x_1(0) \in [-2, 2]$, $x_2(0) \in [-2, 2]$ и следующих значений неизвестных параметров $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 1$. Каждая строчка содержит результаты моделирования систем с предустановленными параметрами C_1 , C_2 , γ_0 адаптивного регулятора. Левый столбец содержит данные сравнения L_2 -норм управления $u(t)$, средний столбец соответствует L_2 -нормам ошибки $x_1(t) - 1$, правый столбец содержит значения $\Delta\boldsymbol{\theta} = \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(T)\|$. Время моделирования $T = 30$ с. Зеленый цвет в правом столбце соответствует управлению (3.73), синий цвет – управлению (3.74), красный цвет – управлению (3.70), (3.72). Белые области на рисунках в левом и среднем столбцах соответствуют начальным условиям, при которых какой-либо из алгоритмов адаптивного управления на основе метода обхода интегратора (3.73), (3.74) превосходит по качеству предложенный в примере закон в терминах L_2 -норм сигналов $u(t)$ и $x_1(t) - 1$ соответственно. Закрашенные (серые) области соответствуют начальным условиям, при которых качество системы с предложенным алгоритмом (3.70), (3.72) оказывается лучше чем для обоих систем с управлением (3.73) и (3.74).

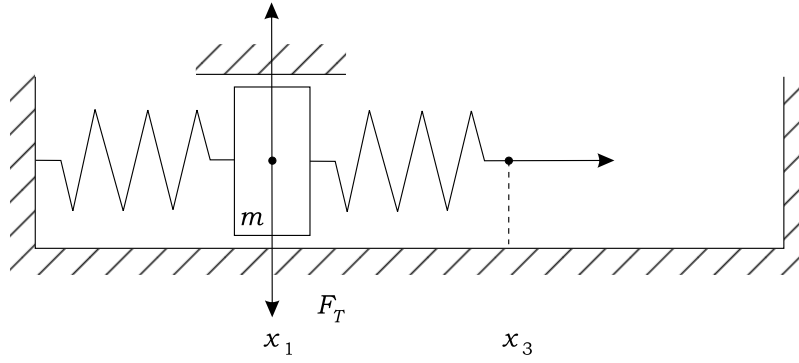


Рисунок 3.4. Система массы на пружине

Усредненные коэффициенты кулоновского трения и жесткости пружины определяются в основном физическими свойствами материалов и могут быть оценены *a priori*. Оценки штрибековских сил, однако, существенно более чувствительны к изменению условий среды (положение на поверхности, температура и т. д.) в силу принципиальной пространственной неоднородности контактных поверхностей. Поэтому для точного позиционирования, особенно на малых скоростях, требуется введение адаптации в тракт управления. В силу специфики задачи и нелинейностей применение методов мажорирования неизбежно влечет перерегулирование и колебания в окрестности рабочей точки. Следовательно, для обеспечения лучших переходных характеристик требуется недоминирующее управление в точности компенсирующее эффекты трения залипания.

Положим, что целью управления является перевод состояния системы в положение $x_1 = 1$. Система (3.75) имеет нижнетреугольную форму, и поэтому для решения этой задачи можно использовать результаты теоремы 3.4 при условии, что выполняются предположения 3.3, 3.4, 3.10. В силу того, что скорость x_2 , в принципе, ограничена и, кроме того, имеет место равенство

$$\tanh(S_f x_2) \theta_{1,2} e^{-\theta_{1,1} x_2^2} = \tanh(S_f x_2) e^{-\theta_{1,1} x_2^2 + \log \theta_{1,2}},$$

можем заключить, что предположения 3.3, 3.4 выполняются, причем

$$\alpha_1(\mathbf{x}) = (-x_2^3, x_2, 0, 0)^T.$$

Предположение 3.10 также выполняется в силу того, что рассматриваемые нелинейности локально Липшицевы по \mathbf{x} .

Приведем синтез адаптивного регулятора для системы (3.75), следуя шагам конструктивного доказательства теоремы 3.4. Рассмотрим вначале первые два уравнения, где x_3 играет роль виртуального управления u_1 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - \tanh(S_f x_2)(1 + \theta_{1,2} e^{-\theta_{1,1} x_2^2}) + u_1.\end{aligned}\quad (3.76)$$

Целью управления является достижение многообразия $\psi(x_1) = x_1 - 1 = 0$. В первом уравнении нет никаких неопределенностей, поэтому сразу выберем новое целевое многообразие $\psi_1(x_1, x_2) = x_1 - 1 + x_2 = 0$ и управление

$$u_1(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1) = -\psi_1(x_1, x_2) + 2x_1 - x_2 + \tanh(S_f x_2)(1 + e^{-\hat{\theta}_{1,1} x_2^2 + \log \hat{\theta}_{1,2}}), \quad (3.77)$$

которое обеспечивает выполнение следующего равенства:

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1(x_1, x_2) + \tanh(S_f x_2)(e^{-\hat{\theta}_{1,1} x_2^2 + \log \hat{\theta}_{1,2}} - e^{-\theta_{1,1} x_2^2 + \log \theta_{1,2}}). \quad (3.78)$$

Алгоритмы адаптации $\hat{\theta}_{1,1}$, $\hat{\theta}_{1,2}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{1,1}(x_1, x_2, t) &= -\gamma(-\psi_1(x_1, x_2)x_2^3 - \Psi_{1,1}(x_1, x_2) + \hat{\theta}_{1,1,I}) + \hat{\theta}_{1,1}(0), \quad \gamma > 0, \\ \dot{\hat{\theta}}_{1,1,I} &= -\psi_1(x_1, x_2)x_2^3 + \frac{\partial \Psi_{1,1}(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_2, \\ \Psi_{1,1}(x_1, x_2) &= -(x_1 - 1)x_2^3 - \frac{3}{4}x_2^4;\end{aligned}\quad (3.79)$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{1,2}(x_1, x_2, t) &= -\gamma(\psi_1(x_1, x_2)x_2 - \Psi_{1,2}(x_1, x_2) + \hat{\theta}_{1,2,I}) + \hat{\theta}_{1,2}(0), \quad \gamma > 0, \\ \dot{\hat{\theta}}_{1,2,I} &= \psi_1(x_1, x_2)x_2 + \frac{\partial \Psi_{1,2}(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_2, \\ \Psi_{1,2}(x_1, x_2) &= (x_1 - 1)x_2 + \frac{x_2^2}{2}.\end{aligned}\quad (3.80)$$

Функции $\Psi_{1,1} = \int \psi_1(x_1, x_2) 3x_2^2 dx_2$ и $\Psi_{1,2} = \int \psi_1(x_1, x_2) dx_2$ выбираются согласно предположению 3.5 теоремы 3.1 таким образом, чтобы производные функций $\hat{\theta}_{1,1}$, $\hat{\theta}_{1,2}$ имели вид:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_{1,1} &= \gamma(\dot{\psi}_1 + \psi_1(x_1, x_2))x_2^3; \\ \dot{\hat{\theta}}_{1,2} &= -\gamma(\dot{\psi}_1 + \psi_1(x_1, x_2))x_2.\end{aligned}\quad (3.81)$$

Свойства замкнутой системы (3.76), (3.77), (3.81) (предельное соотношение $\psi_1(x_1, x_2) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$) вытекают из леммы 9.1. Отметим, что алгоритмы (3.79), (3.80) не требуют введения расширений (3.58). Это вытекает из того, что производная \dot{x}_1 не зависит от $\boldsymbol{\theta}$ в явном виде и поэтому оказывается возможным компенсировать слагаемое $\frac{\partial \Psi_{1,1}(x_1, x_2)}{\partial x_1} \dot{x}_1$, $\frac{\partial \Psi_{1,2}(x_1, x_2)}{\partial x_1} \dot{x}_1$ в $\dot{\hat{\theta}}_{1,1,I}$, $\dot{\hat{\theta}}_{1,2,I}$ непосредственным образом.

Этим завершается первый шаг синтеза. Рассмотрим теперь исходные уравнения (3.75) и выберем $\psi_2(x_1, x_2, x_3, t) = u_1(x_1, x_2, t) - x_3$ ¹⁵. В отличие от предыдущего случая, производная $\dot{\psi}_2$ зависит не только от $f_3(\mathbf{x}, \theta_2) = x_2\theta_2 + u$, но и от $f_2(\mathbf{x}, \theta_1)$. Сумма двух монотонных функций, как известно, не является монотонной в общем случае по совокупности параметров $\theta_1 \oplus \theta_2$. Следовательно, для того, чтобы удовлетворить предположениям 3.3, 3.4 необходимо заменить переменную x_2 в ψ_2 на новую переменную ξ . Другими словами, мы должны вложить исходную систему в систему более высокого порядка, обеспечив при этом, что $u_1(x_1, x_2, t) - u_1(x_1, \xi, t) \in L_2$ (см. доказательства лемм 3.1, 9.1). Отметим, что в соответствии с требованиями леммы 9.1 такое расширение должно обеспечивать выполнение условия $f_3(\mathbf{x}, \theta_2) - f_3(x_1 \oplus \xi \oplus x_3, \theta_2) \in L_2$. В нашем примере, однако, функция f_3 не зависит от x_2 . Поэтому достаточно обеспечить выполнение условия $u_1(x_1, x_2, t) - u_1(x_1, \xi, t) \in L_2$ для того, чтобы гарантировать достижение цели управления: $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x_1(t)) = 0$.

Рассмотрим разность $u_1(x_1, x_2, t) - u_1(x_1, \xi, t)$:

$$u_1(x_1, x_2, t) - u_1(x_1, \xi, t) = -2(x_2 - \xi) + \tanh(S_f x_2) e^{-\frac{x_2^6}{4} + \hat{\theta}_{1,1,I}(t)x_2^2 - \frac{x_2^2}{2} + \hat{\theta}_{1,2,I}(t)} - \tanh(S_f \xi) e^{-\frac{\xi^6}{4} + \hat{\theta}_{1,1,I}(t)\xi^2 - \frac{\xi^2}{2} + \hat{\theta}_{1,2,I}(t)}.$$

Применяя теорему о среднем для разности экспонент, получим оценку:

$$|u_1(x_1, x_2, t) - u_1(x_1, \xi, t)| \leq |x_2 - \xi|(2 + S_f F(t)),$$

где

$$F(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} F_0(\tau); \quad (3.82)$$

$$F_0(t) = \max_{\lambda \in [0,1]} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial s} e^{-\frac{s^6}{4} + \hat{\theta}_{1,1,I}(t)s^2 - \frac{s^2}{2} + \hat{\theta}_{1,2,I}(t)} \right| \right\},$$

$$s = \lambda x_2(t) + (1 - \lambda)\xi(t). \quad (3.83)$$

Введем в рассмотрение систему :

$$\dot{\xi} = (x_2 - \xi)(1 + F^2(t)) - 2x_1 + x_3 - \tanh(S_f x_2)(1 + e^{-\theta_{\xi,1}x_2^2 + \theta_{\xi,2}}) \quad (3.84)$$

и запишем уравнение для производной $\dot{\psi}_\xi(x_2, \xi) = x_2 - \xi$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_\xi = & -\psi_\xi(1 + F^2(t)) + \tanh(S_f x_2)(e^{-\theta_{\xi,1}x_2^2 + \theta_{\xi,2}} \\ & - e^{-\theta_{1,1}x_2^2 + \theta_{1,2}}). \end{aligned}$$

¹⁵Для компактности изложения будем считать, что функция ψ_2 зависит явным образом от t с известной частной производной $\frac{\partial \psi_2}{\partial t}$, имея в виду, что эти производные являются известными (по построению) производными по времени функций $\hat{\theta}_{1,1,I}(t)$, $\hat{\theta}_{1,2,I}(t)$

В силу леммы 9.1, функция $(x_2 - \xi)F(t) \in L_2$ (и, следовательно, разность $u_1(x_1, x_2, t) - u_1(x_1, \xi, t) \in L_2$) при условии, что $\theta_{\xi,1}(t)$, $\theta_{\xi,2}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{\xi,1} &= \gamma(\dot{\psi}_\xi + \psi_\xi(1 + F^2(t)))x_2^3, \\ \dot{\theta}_{\xi,2} &= -\gamma(\dot{\psi}_\xi + \psi_\xi(1 + F^2(t)))x_2.\end{aligned}\quad (3.85)$$

Интегро-дифференциальная реализация уравнений (3.85) имеет вид:

$$\begin{aligned}\theta_{\xi,1} &= -\gamma(-(x_2 - \xi)x_2^3 - \Psi_{\xi,1}(x_2, \xi) + \hat{\theta}_{\xi,1,I}), \\ \dot{\theta}_{\xi,1,I} &= -(x_2 - \xi)x_2^3 + \frac{\partial \Psi_{\xi,1}(x_2, \xi)}{\partial \xi} \dot{\xi}, \\ \Psi_{\xi,1}(x_2, \xi) &= -\int 3(x_2 - \xi)x_2^2 dx_2 = -\frac{3}{4}x_2^4 + \xi x_2^3;\end{aligned}\quad (3.86)$$

$$\begin{aligned}\theta_{\xi,2} &= -\gamma((x_2 - \xi)x_2 - \Psi_{\xi,2}(x_2, \xi) + \hat{\theta}_{\xi,2,I}), \\ \dot{\theta}_{\xi,2,I} &= (x_2 - \xi)x_2 + \frac{\partial \Psi_{\xi,2}(x_2, \xi)}{\partial \xi} \dot{\xi}, \\ \Psi_{\xi,2}(x_2, \xi) &= \int (x_2 - \xi) dx_2 = \frac{1}{2}x_2^2 - \xi x_2.\end{aligned}\quad (3.87)$$

Таким образом, (3.84), (3.86), и (3.87) обеспечивают желаемое вложение исходной системы в систему более высокой размерности и, кроме того, выполнение предельного соотношения $\psi(x_1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Определим финальное целевое многообразие: $\psi_2(x_1, x_3, \xi, t) = u_1(x_1, \xi, t) - x_3 = 0$. Тогда выполнение $\psi_2 \in L_2 \cap L_\infty$ будет гарантировать, что траектории замкнутой системы (3.76), (3.79), (3.80) ограничены и $\psi(x_1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Ограниченность x_3 , в свою очередь, вытекает из ограниченности $x_2 - \xi$ и гладкости $u_1(x_1, \xi, t)$. Рассмотрим $\dot{\psi}_2$:

$$\dot{\psi}_2 = \frac{\partial u_1(x_1, \xi, t)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial u_1(x_1, \xi, t)}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial u_1(x_1, \xi, t)}{\partial t} - x_3 \theta_2 - u.$$

Положив

$$u = \frac{\partial u_1(x_1, \xi, t)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial u_1(x_1, \xi, t)}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial u_1(x_1, \xi, t)}{\partial t} - x_3 \hat{\theta}_2 + \psi_2(x_1, \xi, x_3, t), \quad (3.88)$$

получим

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_2(x_1, \xi, x_3, t) + x_3 \hat{\theta}_2 - x_3 \theta_2.$$

Отметим, что в принципе синтез искомого адаптивного управления u теперь можно завершить, используя для этого стандартные методы. Однако с целью иллюстрации продолжим вычисление $\hat{\theta}_2$, следуя доказательству теоремы 3.4. Искомые

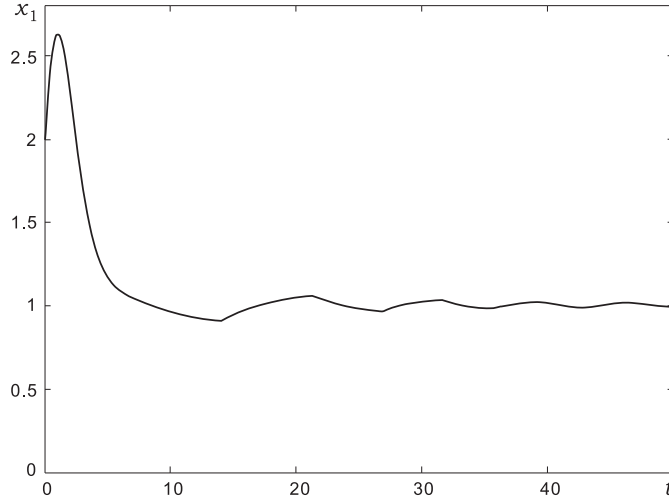


Рисунок 3.5. Траектории $x_1(t)$ как функции времени t

выражения для $\hat{\theta}_2$ даются уравнениями:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_2(x_1, \xi, x_3, t) &= -\gamma(\psi_2(x_1, \xi, x_3)x_3 - \Psi_2(x_1, \xi, x_3) + \hat{\theta}_{2,I}), \\ \dot{\hat{\theta}}_{2,I} &= \psi_2(x_1, \xi, x_3)x_3 + \frac{\partial \Psi_2(x_1, \xi, x_3)}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial \Psi_2(x_1, \xi, x_3)}{\partial \xi}\dot{\xi}, \\ \Psi_2(x_1, \xi, x_3) &= \int (u_1(x_1, \xi) - x_3) dx_3 = u_1(x_1, \xi)x_3 - \frac{1}{2}x_3^2.\end{aligned}\quad (3.89)$$

В соответствии с леммой 9.1 алгоритмы (3.89) гарантируют, что $\psi_2 \in L_2 \cap L_\infty$. Это, в свою очередь, влечет $x_1, x_2 \in L_\infty$. Ограниченность x_1, x_2 обеспечивает ограниченность x_3 . Следовательно, $\psi_2(x_1, \xi, x_3) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Более того, $\psi_1(x_1, x_2) \rightarrow 0$ и $\psi(x_1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Результаты моделирования замкнутой системы (3.75) (3.88), (3.89), (3.84), (3.86), (3.87) приведены на рис. 3.5 для следующих значений начальных условий: $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$, $\theta_{1,1} = 2$, $\theta_{1,2} = 3$, $\theta_2 = 2$, $\xi(0) = 2$, $\hat{\theta}_{1,1,I}(0) = 0$, $\hat{\theta}_{1,2,I}(0) = -3$, $\theta_{\xi,1,I}(0) = 0$, $\theta_{\xi,1,I}(0) = -3$, $\hat{\theta}_{2,I}(0) = 0$, $\gamma = 1$. Состояние системы асимптотически достигает целевое множество $\psi(x_1) = 0$, как то и требуется в постановке задачи.

3.3. Задача адаптивного регулирования к инвариантным множествам

В предыдущих параграфах раздела был предложен и обоснован метод синтеза адаптивных систем, гарантирующий решение задачи 3.1 для класса систем с локально ограниченными правыми частями. Основной характеристикой асимптотических

свойств решений замкнутых систем до сих пор считались предельные соотношения вида (3.20) или

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{x}, t) = 0,$$

(см., например, теоремы 3.1, 3.4). Тем не менее, оказывается, что для классов систем решение задачи 3.1 открывает возможность построения регулятора с более сильными свойствами, а именно – способного асимптотически переводить состояние системы на заданное инвариантное множество даже при наличии неопределенностей в модели объекта. Ключевым фактором, позволяющим обеспечить это свойство оказывается механизм, гарантирующий выполнение требований типа (3.19) в задаче 3.1, т. е. сам факт перевода неопределенности (в широком смысле этого слова) в заданное функциональное пространство, в частности, в $L_2[t_0, \infty]$.

3.3.1. Объекты с параметрической неопределенностью

и нелинейной параметризацией

Рассматривается класс систем (3.1) вида:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \zeta(t)) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \zeta(t))u, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \zeta(t)) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \zeta(t))u, \\ \dot{\zeta} &= S(\zeta, \mathbf{x}),\end{aligned}\tag{3.90}$$

где система

$$\dot{\zeta} = S(\zeta, \mathbf{x}), \quad S : \mathbb{R}^\zeta \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\zeta\tag{3.91}$$

полна и обладает свойством “ограниченный вход-ограниченное состояние”. Системы (3.90) могут быть получены из (3.1) в предположении, что существует такое замыкание системы (3.1), что расширенная система, включая уравнения воздействия среды, за исключением, пожалуй, входа u , описывается системой автономных дифференциальных уравнений.

Для систем вида (3.90) справедливо следующее следствие из теоремы 3.1.

С л е д с т в и е 3.2. *Рассмотрим замкнутую систему (3.90), (3.10), (3.29), (3.31) и положим, что выполнены предположения 3.1, 3.2, 3.3, 3.4¹⁶ и 3.5¹⁷. Кроме того, положим, что правые части замкнутой системы локально Липшицевы, выполняются свойства Д1, Д4, Д2, функции $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$, $\partial\psi(\mathbf{x}, t)/\partial t$ локально ограничены по \mathbf{x} и для системы (3.11) определено передаточное отображение $L_2^1[t_0, \infty] \mapsto L_p^1[t_0, \infty]$.*

¹⁶Если $\varepsilon(t) = 0$ в (3.10), то предположение 3.4 можно исключить из условий следствия.

¹⁷В формулировке теоремы предполагается, что явная зависимость функций $\psi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ от времени t заменяется на неявную: $\psi(\mathbf{x}, \zeta(t))$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \zeta(t))$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \zeta(t))$.

Тогда решения замкнутой системы ограничены для любых $\mathbf{x}(t_0)$, $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ и в пределе при $t \rightarrow \infty$ стремятся к наибольшему инвариантному множеству в

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^\zeta, \hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^d | f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}(t)) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\zeta}(t)) = 0\}. \quad (3.92)$$

Следствие 3.2, в дополнение к установлению самого факта возможности регулирования состояния объекта к инвариантным множествам, формулирует еще одно важное свойство алгоритмов адаптивного управления (3.29), (3.31) и виртуальных алгоритмов (3.28). Это свойство состоит в том, что все предельные состояния управляемой системы находятся на ограничении

$$\dot{\psi} = -\varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}(t)). \quad (3.93)$$

Другими словами, пересечение инвариантных множеств целевой динамики (3.93) и множества (3.92) “скомпенсированных неопределенностей” полностью определяют, точнее, регулируют, положение предельных множеств замкнутой системы. Это свойство открывает возможность адаптивного регулирования состояния систем, целевые множества которых заранее не известны, определяются неконтролируемым взаимодействием со средой или вовсе не могут быть определены по каким-либо причинам. Результат справедлив, однако, лишь для систем с параметрической неопределенностью. Аналогичные результаты для систем с сигнальными возмущениями приводятся в следующем параграфе.

3.3.2. Объекты с сигнальными возмущениями и линейной параметризацией

Рассмотрим следующий класс систем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G_u(\phi(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta} + \mathbf{u}), \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= S(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta}(t_0) \in \Omega_\theta \subset \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (3.94)$$

где $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$, – это \mathcal{C}^0 -гладкие векторные поля, $G_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\boldsymbol{\theta}$ – вектор неизвестных и нестационарных параметров, а $S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $S \in \mathcal{C}^1$ некоторая известная функция. Вектор начальных условий $\boldsymbol{\theta}(t_0) \in \Omega_\theta$ предполагается неизвестным. Без потери общности предположим, что $\Omega_S(\Omega_\theta) \subseteq \Omega_\theta$, и Ω_θ ограничена. Целью управления является перевод состояния системы в *целевое множество*:

$$\Omega^*(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n. \quad (3.95)$$

Принципиальное отличие задания целевого множества в виде (3.95) от (3.4) состоит в том, что (3.95) не требует задания целевого множества в виде поверхности

или гладкого многообразия. Не вводятся ограничений на связность, что позволяет рассматривать в качестве целей совокупность аттракторов в стандартном определении [173]. В общем случае целевое множество может быть и неограниченным. Однако, в большинстве задач управления целевые множества, как правило, ограничены в силу физических свойств самого объекта. Поэтому имеет смысл следующее предположение.

Предположение 3.11. Множество $\Omega^*(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$ ограниченное замкнутое подмножество \mathbb{R}^n .

Пространство допустимых возмущений $\boldsymbol{\theta}(t)$ ограничим классом:

Предположение 3.12. Существует положительно определенная матрица $H = H^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$, такая, что функция $S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ в (3.94) удовлетворяет неравенству:

$$H \frac{\partial S(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial S(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}^T H \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d.$$

Класс возмущений $\boldsymbol{\theta}(t)$, определенный предположением 3.12, включает в себя стандартные параметрические возмущения, а также устойчивые по Ляпунову нелинейные колебания неизвестной амплитуды и, вообще говоря, формы. Наконец, определим свойства замкнутой системы с регулятором основного контура.

Предположение 3.13. Для заданного множества $\Omega^*(\mathbf{x})$ и системы (3.94) существует функция $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ такая, что

$$G_u \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}).$$

Более того, для всех $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ справедливо условие: $\Omega^*(\mathbf{x}) \subset \Omega_{\mathbf{f}_0}(\mathbf{x})$, где поток $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t)$ генерируется дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}). \quad (3.96)$$

Перед тем, как сформулировать основной результат параграфа, введем две альтернативные гипотезы о целевом множестве (3.95), различающиеся степенью доступной информации как о свойствах системы, так и о самом множестве (3.95). Первая гипотеза составляет условия предположений 3.14, 3.15 и 3.16. Вторая сформулирована в предположении 3.17.

Предположение 3.14. Существуют и известны функции $\psi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что:

$$\Omega^* \subseteq \Omega_{\mathbf{f}_0}(\Omega_\psi), \quad \Omega_\psi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} : \varphi(\psi(\mathbf{x})) = 0\},$$

т. е. $\Omega^*(\mathbf{x})$ является наибольшим инвариантным множеством системы (3.96) в области Ω_ψ .

Предположение 3.15. Для заданной функции $\psi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(\mathbf{x}) \in C^1$ и векторного поля $\mathbf{f}_0(\mathbf{x})$ в (3.96) существует функция $\beta(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\beta(\mathbf{x})$ отделена от нуля и удовлетворяет неравенству:

$$\begin{aligned} \psi \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) &\leq -\beta(\mathbf{x}) \varphi(\psi) \psi, \\ \int_0^\psi \varphi(\sigma) d\sigma &\geq 0, \quad \lim_{\psi \rightarrow \infty} \int_0^\psi \varphi(\sigma) d\sigma = \infty. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Предположение 3.16. Для заданной $\psi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(\mathbf{x}) \in C^1$ справедливо предположение 3.1.

Отметим, что функции $\psi(\mathbf{x})$ в предположениях 3.15, 3.16 не обязательно знакоопределены. То же самое относится и к произведению $\varphi(\psi)\psi$. Альтернативой предположениям 3.15, 3.16 является следующее свойство.

Предположение 3.17. Рассмотрим систему (3.96) с аддитивным входом $\varepsilon_0(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_0(t) \in C^1$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon_0(t), \quad \varepsilon_0 \in L_2. \quad (3.98)$$

Для системы (3.98) определено передаточное отображение $L_2 \rightarrow L_\infty$. Кроме того, $\Omega^* \subseteq \Omega_{\mathbf{f}_0}$.

Поставим цель: дать ответ на вопрос о возможности синтеза адаптивного управления для системы (3.94) такого вида, что обратная связь

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{f}_\xi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$$

обеспечивает, во-первых, ограниченность всех решений; во-вторых, гарантирует, что $\mathbf{x}(t) \rightarrow \Omega^*$ при $t \rightarrow \infty$.

Для построения такого адаптивного регулятора используем метод виртуального алгоритма адаптации. Вначале специфицируются закон обратной связи $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ и виртуальный алгоритм адаптации $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, $\boldsymbol{\xi}(t)$, обеспечивающие желаемые свойства

замкнутой системы с обратной связью: $\mathbf{x}(t) \rightarrow \Omega^*$ при $t \rightarrow \infty$. При этом допускается возможность измерения $\boldsymbol{\theta}$ в явном виде. Этот результат приведен в лемме 9.2. Затем производится вложение виртуального алгоритма в систему более высокой размерности (лемма 9.3), обеспечивающее реализацию этих алгоритмов в интегро-дифференциальной (конечной) форме (3.27).

Формулировки основного результата даются теоремами 3.5, 3.6. С целью компактности изложения материала раздела теоремы 3.5, 3.6 сформулированы в экзистенциальном виде. Тем не менее их доказательство, как и доказательство теоремы 3.4, конструктивно и фактически представляет из себя процедуру синтеза искомого регулятора.

Т е о р е м а 3.5. Пусть задана система (3.94) и выполняются предположения 3.11–3.16. Пусть, в дополнение, существует C^1 -гладкая функция $\kappa(\mathbf{x})$ такая, что справедлива оценка:

$$\left\| \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\| \leq |\kappa(\mathbf{x})|.$$

Тогда существуют система

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}); \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} &= \mathbf{f}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (3.99)$$

закон управления $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\xi})\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, и алгоритм адаптации

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= (H^{-1}\Psi(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x} + \hat{\boldsymbol{\theta}}_I(t)), \\ \Psi(\boldsymbol{\xi}) &= (\kappa^2(\boldsymbol{\xi}) + 1)(G_u\phi(\boldsymbol{\xi}))^T, \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_I &= S(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - H^{-1}\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}}\mathbf{f}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})\mathbf{x} - H^{-1}\Psi(\boldsymbol{\xi})\mathbf{f}_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.100)$$

такие, что выполняются следующие утверждения:

- 1) $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t), \mathbf{x}(t) \in L_{\infty}$;
- 2) траектории $\mathbf{x}(t)$ асимптотически сходятся в область Ω^* при $t \rightarrow \infty$;
- 3) если $G_u\phi(\boldsymbol{\xi}(t))$ предельно невырождена в смысле определения 1.4.1 и $S(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$, то оценка $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}_0, t_0)$ асимптотически стремится к $\boldsymbol{\theta}(t, \boldsymbol{\theta}_0, t_0)$.

Т е о р е м а 3.6. Пусть задана система (3.94), выполнены предположения 3.11–3.13, а также предположение 3.17. Тогда существует система вида (3.99), управление $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\xi})\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ и алгоритм адаптации (3.100) с $\kappa(\boldsymbol{\xi}) \equiv 0$ такие что справедливы утверждения 1)–3) теоремы 3.5.

В заключение отметим основные отличия приведенных результатов от известных решений задачи адаптивного регулирования к инвариантным множествам [269]. Наиболее существенным преимуществом предлагаемого решения на основе метода виртуального алгоритма адаптации состоит в том, что целевые множества могут быть достаточно произвольными, несвязными и неустойчивыми по Ляпунову, в то время как в работе [269] целевое множество предполагается асимптотически устойчивым положением равновесия. Во-вторых, размерность регулятора в нашем случае пропорциональна размерностям вектора состояния \mathbf{x} и вектора $\boldsymbol{\theta}$ и равна $(n + 2d)$, в то время как размерность предложенных в [269] решений растет по мультипликативному закону $(nd + d + n)$. В-третьих, теоремами 3.5, 3.6 дополнительно допускаются сигнальные возмущения $\boldsymbol{\theta}(t)$ в отличие лишь от допускаемых в [269] параметрических.

3.4. Задача адаптивного управления

взаимосвязанными нелинейными системами

Рассматриваются системы вида:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u; \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(t), t) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.\end{aligned}\tag{3.101}$$

Без потери общности будем полагать, что сигналы $\mathbf{q}(t)$ генерируются системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t), \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^s,\tag{3.102}$$

которая является полной на $t \in [t_0, \infty)$ для всех $\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, \infty)$. Задание модели объекта с помощью уравнений (3.101), (3.102) позволяет в зависимости от доступной информации о функциях $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t)$, $\mathbf{f}_q(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t)$ рассматривать задачи управления по выходу при наличии немоделируемой динамики и в условиях постоянно действующих неизмеряемых возмущений.

3.4.1. Системы с немоделируемой динамикой

Рассмотрим уравнение (3.9) и положим, что функция $z(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t) \in \mathcal{C}^1$ удовлетворяет ограничению:

$$|z(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t)| \leq |h_x(\mathbf{x}, t)| + |h_q(\mathbf{q}, t)|,\tag{3.103}$$

где $h_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $h_q : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $h_x(\cdot), h_q(\cdot) \in \mathcal{C}^0$. Для анализа свойств систем (3.101), (3.102) будем использовать теоремы о малом контурном усилении, что дополнительно потребует знания информации о количественных свойствах передаточных

отображений вида (3.12). С этой целью требования к целевой динамике и целевому множеству, сформулированные в предположениях 3.1, 3.2, переформулируем в терминах непрерывных отображений.

Предположение 3.18. *Существуют функции $\gamma_{h_x}, \gamma_{h_q}, \gamma_{\psi,2}, \gamma_{x,\infty} \in \mathcal{K}$ и числа $\beta_{h_x}, \beta_{h_q}, \beta_{\psi,2}, \beta_{x,\infty}$ такие, что выполняются следующие соотношения:*

1) для системы (3.101)

$$\|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2,[t_0,T]} \leq \gamma_{h_x}(\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty,[t_0,T]}) + \beta_{h_x}; \quad (3.104)$$

2) для системы (3.102)

$$\|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2,[t_0,T]} \leq \gamma_{h_q}(\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty,[t_0,T]}) + \beta_{h_q}; \quad (3.105)$$

3) для системы (3.101) и функции $\psi(\mathbf{x}, t)$

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty,[t_0,T]} \leq \gamma_{x,\infty}(\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty,[t_0,T]}) + \beta_{x,\infty}; \quad (3.106)$$

4) для системы (3.11)

$$\|\psi(t)\|_{\infty,[t_0,T]} \leq \gamma_{\psi,2}(\|\zeta(t)\|_{2,[t_0,T]}) + \beta_{\psi,2}. \quad (3.107)$$

В предположении 3.18 неравенства (3.106), (3.107) являются усиленными версиями предположений 3.1, 3.2. Неравенства (3.104) и (3.105) специфицируют характер взаимодействия подсистем немоделируемой динамики (3.102) и собственно уравнений управляемого объекта (3.101). С помощью операторных характеристик исходной системы, целевого множества и целевой динамики, приведенных в условии 3.18, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 3.7. *Рассмотрим систему (3.101), (3.102), (3.8), (3.9), (3.111), (3.31) и предположим, что выполнены предположения 3.3–3.5, 3.18 и существуют функции*

$$\lambda_1(\cdot), \lambda_2(\cdot), \rho_i(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$$

такие, что

$$\left\{ \begin{array}{l} (Id + \lambda_2) \circ (Id - \gamma_{h_{q,q}})^{-1} \circ (\rho_9 + Id) \circ \gamma_{h_{q,x}} \\ \circ (Id + \lambda_1) \circ (Id - \gamma_{h_{x,x}})^{-1} \circ (\rho_8 + Id) \circ \gamma_{h_{x,q}}(s) \leq s; \\ (Id + \lambda_1) \circ (Id - \gamma_{h_{x,x}})^{-1} \circ (\rho_8 + Id) \circ \gamma_{h_{x,q}} \circ \\ (Id + \lambda_2) \circ (Id - \gamma_{h_{q,q}})^{-1} \circ (\rho_9 + Id) \circ \gamma_{h_{q,x}}(s); \leq s \end{array} \right.$$

для всех $s \geq s_0$, где

$$\begin{aligned}\gamma_{h_{x,x}}(s) &= \gamma_{h_x} \circ (\rho_4 + Id) \circ \gamma_{\psi,2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id)(C_D s); \\ \gamma_{h_{x,q}}(s) &= \gamma_{h_x} \circ (\rho_4 + Id) \circ \rho_4^{-1} \circ (\rho_5 + Id) \circ \gamma_{\psi,2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id) \circ \rho_2^{-1}(C_D s); \\ \gamma_{h_{q,x}}(s) &= \gamma_{h_q} \circ (\rho_3 + Id) \circ \gamma_{x,\infty} \circ (\rho_6 + Id) \circ \gamma_{\psi,2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id)(C_D s); \\ \gamma_{h_{q,q}}(s) &= \gamma_{h_q} \circ (\rho_3 + Id) \circ \gamma_{x,\infty} \circ (\rho_6 + Id) \circ \rho_6^{-1} \circ \\ &\quad (\rho_7 + Id) \circ \gamma_{\psi,2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id) \circ \rho_2^{-1}(C_D s); \quad C_D = 1 + \frac{D}{D_1}.\end{aligned}$$

Тогда

1) решение замкнутой системы определено на интервале $[t_0, \infty)$ и $\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, \infty]$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \in L_\infty^d[t_0, \infty]$; кроме того $\mathbf{q}(t) \in L_\infty^s[t_0, \infty]$ при условии, что система (3.102) обладает свойством “ограниченный вход-ограниченный выход”;

2) невязка $f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) \in L_2^1[t_0, \infty]$; более того, если $f(\cdot, \cdot) \in C^1$ и $z(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t)$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ локально ограничены равномерно по t , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) = 0. \quad (3.108)$$

Теорема 3.7 формулирует достаточные условия возможности построения алгоритма адаптации для систем с немоделируемой динамикой и нелинейной параметризацией. Особенность сформулированных результатов состоит в том, что свойства нелинейности (коэффициент C_D) непосредственным образом фигурируют в условиях малого контурного усиления. В дополнение отметим, что формулировка теоремы использует лишь операторные свойства (в частности, передаточные коэффициенты из $L_p[t_0, T]$ в $L_q[t_0, T]$) целевой динамики, свойства динамики системы относительно целевого множества и свойства системы немоделируемой динамики, не привлекая такие ограничительные требования синтеза, как знание функций Ляпунова для соответствующих подсистем.

Полезным с практической точки зрения является тот факт, что в условиях теоремы гарантируется асимптотическая (в пределе до нуля) компенсация (3.108) влияния неопределенности $\boldsymbol{\theta}$ на целевую динамику системы. Это означает, в свою очередь, возможность идентификации параметров $\boldsymbol{\theta}$ при выполнении линейных/нелинейных условий постоянного возбуждения (предельной невырожденности) [130, 323] (см. также теорему 3.10).

В случае, если отображения γ_{h_x} , γ_{h_q} , $\gamma_{\psi,2}$, $\gamma_{x,\infty}$ в предположении 3.18 линейны, ограничения на γ_{h_x} , γ_{h_q} , $\gamma_{\psi,2}$, $\gamma_{x,\infty}$ в теореме 3.7 заменяются упрощенными:

$$\gamma_{h_{x,x}} = \gamma_{h_x} \cdot \gamma_{\psi,2} \cdot C_D < 1, \quad \gamma_{h_{q,q}} = \gamma_{h_q} \cdot \gamma_{x,\infty} \cdot \gamma_{\psi,2} \cdot C_D < 1, \quad \frac{\gamma_{h_{q,x}}}{1 - \gamma_{h_{q,q}}} \frac{\gamma_{h_{x,q}}}{1 - \gamma_{h_{x,x}}} < 1$$

$$\gamma_{h_{x,q}} = \gamma_{h_x} \cdot \gamma_{\psi,2} \cdot C_D, \quad \gamma_{h_{q,x}} = \gamma_{h_q} \cdot \gamma_{x,\infty} \cdot \gamma_{\psi,2} \cdot C_D$$

Перечисленные свойства алгоритмов (3.29), (3.31), однако, получены при условии дополнительной информации о свойствах системы немоделируемой динамики (3.102) (условие 3.18). В случае, если такая информация недоступна, то теорема 3.7 не может быть применена для анализа поведения замкнутой системы. Тем не менее подобный анализ все же возможен, если возмущающие сигналы $z(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t), t)$ могут быть отнесены *a priori* к достаточно широкому классу измеримых функций из $L_{\chi,2}[t_0, \infty]$.

3.4.2. Функциональная нормализация немоделируемых возмущений

Рассмотрим особый случай, когда информация о функции $z(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t)$ и свойствах модели (3.102) ограничена лишь знанием того факта, что $z(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t), t) \in L_{\chi,2}^1[t_0, \infty] \cap C^0$. Пространства $L_{\chi,2}^1[t_0, \infty]$ (в зависимости от “взвешивающей” функции $\chi(t)$) содержат такие пространства, как $L_\infty^1[t_0, \infty]$ (при $\chi(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$) и $L_2^1[t_0, \infty]$ (при $\chi(t) = \text{const}$) и в этом смысле являются удобными для анализа поведения систем под действием неизмеряемых возмущений.

Введем дополнительное соглашение об обозначениях. Принимая во внимание, что зависимость функции $z(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t), t)$ от состояния $\mathbf{x}(t)$ и сигнала $\mathbf{q}(t)$ имеет в данном случае лишь опосредованное значение, для краткости будем считать функцию $z(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t), t)$ просто функцией времени из $L_{\chi,2}^1[t_0, \infty] \cap C^0$. Таким образом, естественно переписать исходное уравнение модели ошибки (3.9) в виде:

$$\dot{\psi} = -\varphi(\psi) + f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + z(t). \quad (3.109)$$

В силу того, что оценки верхней границы равномерной нормы $\|z(t)\|_{\infty, [t_0, \infty]}$ могут быть не известны заранее (строго говоря функция $z(t)$ вполне может быть и неограниченной по равномерной норме), стандартный метод регуляризации [84] такой, как включение “зоны нечувствительности” в алгоритм адаптации, неприменим для данного случая. С другой стороны, факт принадлежности функции $z(t)$ к пространству $L_{\chi,2}^1[t_0, \infty]$ дает определенную дополнительную информацию о самом возмущении. В частности, запись $z(t) \in L_{\chi,2}^1[t_0, \infty]$ эквивалентна свойству: $\chi^{0.5}(t)z(t) \in L_2^1[t_0, \infty]$.

Будем считать, что функции $\chi(t) \in C^1$. Кроме того, положим, что $\chi(t) > 0$ для всех $t > t_0$. Введем следующие обозначения:

$$\|\chi^{0.5}(t)z(t)\|_{2, [t_0, T]} = C_{\chi, z}(t_0, T); \quad \left\| \frac{1}{\chi^{0.5}(t)} \right\|_{2, [t_0, T]} = C_{\chi^{-1}}(t_0, T). \quad (3.110)$$

В силу того, что $z(t) \in C^0$ и $\chi(t) \in C^1$, $\chi(t) > 0$, функция $\frac{z(t)}{\chi^{0.5}(t)}$ непрерывна (произведение и композиция непрерывных функций непрерывны). Тогда для любого конеч-

ного $T > t_0$ нормы

$$\begin{aligned}\|\chi^{0.5}(t)z(t)\|_{2,[t_0,T]} &= \left(\int_{t_0}^T \chi(\tau)z^2(\tau)d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = C_{\chi,z}(t_0, T), \\ \left\| \frac{1}{\chi^{0.5}(t)} \right\|_{2,[t_0,T]} &= \left(\int_{t_0}^T \chi^{-1}(\tau)d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = C_{\chi^{-1}}(t_0, T).\end{aligned}$$

по меньшей мере существуют и ограничены.

Рассмотрим следующий алгоритм адаптации для системы (3.101), (3.8), (3.109)

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, t) &= \chi(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_P(\mathbf{x}, t) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_I(t), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_P(\mathbf{x}, t) &= \psi(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t), \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_I &= \chi(t) \left(\varphi(\psi(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\omega}, t)\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{R}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t), t) \right) - \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\theta}}_P(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\tag{3.111}$$

где функция $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t), t)$ определена согласно (3.31). Тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 3.8. *Рассмотрим систему (3.101), (3.8), (3.109), (3.111), (3.31) и предположим, что выполнены предположения 3.1–3.5. Тогда*

1) *решения системы определены на интервале $[t_0, \infty)$ и, кроме того,*

$$\begin{aligned}(f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))) &\in L_{\chi,2}^1[t_0, \infty], \\ \|(f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)))\|_{L_{\chi,2},[t_0,\infty]} &\leq \left(\frac{D}{2} \right)^{0.5} \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0)\| + \frac{D}{D_1} C_{\chi,z}(t_0, \infty).\end{aligned}$$

Если, в дополнение, для $\zeta(t) = f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) + z(t) \in L_{\chi,2}[t_0, \infty]$ и некоторого $\Delta > 0$ выполнено предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_{\chi,\zeta^2}(t, t + \Delta) C_{\chi^{-1}}(t, t + \Delta) = C^*(\zeta) < \infty\tag{3.112}$$

и, кроме того, система (3.11) интегрально устойчива от входа к состоянию [296]

$$|\psi(t)| \leq \beta(|\psi(t_0)|, t - t_0) + \gamma(\|\zeta(t)\|_{2,[t_0,t]}), \quad \gamma \in \mathcal{KL}, \quad \beta \in \mathcal{KL},\tag{3.113}$$

причем

$$\beta(|\psi(t_0)|, \Delta) \leq \rho(\Delta) \cdot |\psi(t_0)|, \quad \rho(\Delta) < 1\tag{3.114}$$

равномерно по $|\psi(t_0)| \in \mathbb{R}_+$, то

2) *решения системы ограничены и, более того, сходятся в окрестность множества*

$$\Omega^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\psi(\mathbf{x}, t)| \leq \gamma(\sqrt{C^*(\zeta)})(1 - \rho(\Delta))^{-1}\}.$$

Теорема 3.8 (положение 1)) позволяет сделать практически важный вывод о том, что несмотря на наличие немоделируемой динамики в уравнениях (3.101), (3.109) решения системы с алгоритмом (3.111), (3.31) по меньшей мере определены на всем интервале $[t_0, \infty)$. Другими словами, в системе не происходит нежелательных “взрывных” процессов. При дополнительных условиях (3.112) и при условии равномерной интегральной асимптотической устойчивости “вход-состояние” (3.113) целевой динамики гарантируется ограниченность решений и сходимость траекторий системы к множеству Ω^* (положение 2)).

Наиболее ограничительным требованием, на первый взгляд, выглядит условие (3.112). Тем не менее, оно всегда выполняется для функций $z(t) \in L_\infty[t_0, \infty]$ в правой части (3.109) и при условии, что $\alpha(\mathbf{x}, t)$ ограничена по \mathbf{x} равномерно по t . Положим для определенности $\|\alpha(\mathbf{x}, t)\| \leq D_\alpha$. Последнее свойство гарантирует, что

$$|(f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)))| \leq D \|\alpha(\mathbf{x}(t), t)^T (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))\| \leq D_\alpha \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)\|.$$

Принимая во внимание, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ ограничена (см. доказательство теоремы 3.8), получим, что разность $f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))$ ограничена. Следовательно, условие (3.112) выполняется при

$$\chi(t) = \frac{1}{(t + \delta)^2}, \quad \delta > 0.$$

Следовательно, алгоритм (3.111), (3.31) с $\chi(t) = 1/(t + \delta)^2$ обеспечивает работоспособность системы при возмущениях $z(t)$ из класса непрерывных и ограниченных функций. При этом не требуется дополнительной информации о системе (3.102), генерирующей ограниченное возмущение $z(t)$.

3.4.3. Децентрализованное адаптивное управление

До настоящего времени рассматривались задачи адаптивного управления взаимосвязанными системами, состоящих из собственно управляемой подсистемы (3.101) и системы неизмеряемых возмущений (3.102). Теперь рассмотрим случай взаимодействующих систем \mathcal{S}_x и \mathcal{S}_y , каждая из которых имеет управляющие входы и соответствующие целевые функционалы. Математические модели систем \mathcal{S}_x и \mathcal{S}_y выберем в классе:

$$\mathcal{S}_x : \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_x; \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x) + \gamma_y(\mathbf{y}, t) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_x; \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\mathcal{S}_y : \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_1 &= \mathbf{q}_1(\mathbf{y}) + \mathbf{z}_1(\mathbf{y})u_y; \\ \dot{\mathbf{y}}_2 &= \mathbf{q}_2(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_y) + \gamma_x(\mathbf{x}, t) + \mathbf{z}_2(\mathbf{y})u_y, \end{aligned} \quad (3.116)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектора состояния систем \mathcal{S}_x и \mathcal{S}_y , $\boldsymbol{\theta}_x \in \mathbb{R}^{n_{\theta_x}}$, $\boldsymbol{\theta}_y \in \mathbb{R}^{n_{\theta_y}}$ – вектора неизвестных параметров, функции $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \oplus \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_{\theta_x}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$,

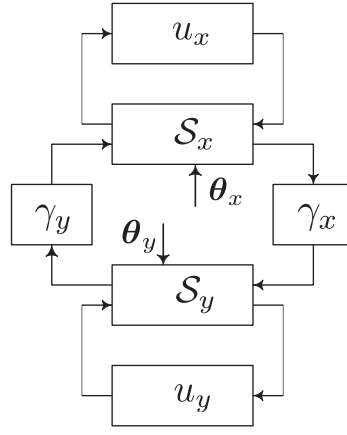


Рисунок 3.6. Обобщенная структурная схема соединения (3.115), (3.116)

$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1(\mathbf{y}) \oplus \mathbf{q}_2(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_y) : \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_{\theta_y}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \oplus \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1(\mathbf{y}) \oplus \mathbf{z}_2(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ непрерывны и локально ограничены. Функции $\gamma_y : \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_n$, $\gamma_x : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ задают непрерывные, нелинейные и нестационарные и в общем случае неизвестные связи между системами \mathcal{S}_x , \mathcal{S}_y ; $u_x \in \mathbb{R}$, $u_y \in \mathbb{R}$ – управляющие входы.

Положим, что функции $\psi_x : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_y : \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ задают целевые ограничения для систем \mathcal{S}_x и \mathcal{S}_y соответственно. Другими словами, для некоторых $\varepsilon_x \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon_y \in \mathbb{R}_+$ и момента времени $t^* \in \mathbb{R}_+$, неравенства

$$\|\psi_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t^*, \infty]} \leq \varepsilon_x, \quad \|\psi_y(\mathbf{y}(t), t)\|_{\infty, [t^*, \infty]} \leq \varepsilon_y \quad (3.117)$$

определяют желаемое состояние соединения (3.115), (3.116). Целью синтеза адаптивного управления является определение функций $u_x(\mathbf{x}, t)$, $u_y(\mathbf{y}, t)$, обеспечивающих решение части 1 задачи 3.3. В частности, гарантирующих, что для всех $\boldsymbol{\theta}_x \in \mathbb{R}^{n_{\theta_x}}$, $\boldsymbol{\theta}_y \in \mathbb{R}^{n_{\theta_y}}$

- 1) соединение систем (3.115), (3.116) полно;
- 2) траектории $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ ограничены;
- 3) для заданных значений ε_x , ε_y , и некоторого $t^* \in \mathbb{R}_+$ выполняются неравенства (3.117), и, возможно, функции $\psi_x(\mathbf{x}(t), t)$, $\psi_y(\mathbf{y}(t), t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

При этом функция $u_x(\cdot)$ не должна в явном виде зависеть от состояния \mathbf{y} системы \mathcal{S}_y и, аналогично, функция $u_y(\cdot)$ не должна зависеть от состояния \mathbf{x} системы \mathcal{S}_x . Обобщенная схема желаемой конфигурации управляемой системы приводится на рис. 3.6.

Введем в рассмотрение следующие функции

$$u_x(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_x, \boldsymbol{\omega}_x, t) = (L_{\mathbf{g}(\mathbf{x})}\psi_x(\mathbf{x}, t))^{-1} \left(-L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_x)}\psi_x(\mathbf{x}, t) - \varphi_x(\psi_x, \boldsymbol{\omega}_x, t) - \frac{\partial \psi_x(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right), \quad \varphi_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^w \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}; \quad (3.118)$$

$$u_y(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_y, \boldsymbol{\omega}_y, t) = (L_{\mathbf{z}(\mathbf{y})}\psi_y(\mathbf{y}, t))^{-1} \left(-L_{\mathbf{q}(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_y)}\psi_y(\mathbf{y}, t) - \varphi_y(\psi_y, \boldsymbol{\omega}_y, t) - \frac{\partial \psi_y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \right), \quad \varphi_y : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^w \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.119)$$

Эти функции приводят уравнения (3.115), (3.116) к следующему виду

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_x &= -\varphi_x(\psi_x, \boldsymbol{\omega}_x, t) + f_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x, t) - f_x(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_x, t) + h_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \\ \dot{\psi}_y &= -\varphi_y(\psi_y, \boldsymbol{\omega}_y, t) + f_y(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_y, t) - f_y(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_y, t) + h_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \end{aligned} \quad (3.120)$$

где

$$\begin{aligned} h_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= L_{\gamma_y(\mathbf{y}, t)}\psi_x(\mathbf{x}, t), \quad h_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = L_{\gamma_x(\mathbf{x}, t)}\psi_y(\mathbf{y}, t), \\ f_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x, t) &= L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x)}\psi_x(\mathbf{x}, t), \quad f_y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_y, t) = L_{\mathbf{q}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_y)}\psi_y(\mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Рассмотрим алгоритмы адаптации

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_x(\mathbf{x}, t) &= \Gamma_x(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{P,x}(\mathbf{x}, t) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,x}(t)); \quad \Gamma_x \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad \Gamma_x > 0; \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{P,x}(\mathbf{x}, t) &= \psi_x(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\alpha}_x(\mathbf{x}, t) - \Psi_x(\mathbf{x}, t); \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{I,x} &= \varphi_x(\psi_x(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\omega}_x, t)\boldsymbol{\alpha}_x(\mathbf{x}, t) + \mathcal{R}_x(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_x, u_x(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_x, t), t), \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_y(\mathbf{y}, t) &= \Gamma_y(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{P,y}(\mathbf{y}, t) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,y}(t)); \quad \Gamma_y \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad \Gamma_y > 0; \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{P,y}(\mathbf{y}, t) &= \psi_y(\mathbf{y}, t)\boldsymbol{\alpha}_y(\mathbf{y}, t) - \Psi_y(\mathbf{y}, t); \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{I,y} &= \varphi_y(\psi_y(\mathbf{y}, t), \boldsymbol{\omega}_y, t)\boldsymbol{\alpha}_y(\mathbf{y}, t) + \mathcal{R}_y(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_y, u_y(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_y, t), t), \end{aligned} \quad (3.122)$$

где функции $\mathcal{R}_x(\cdot)$, $\mathcal{R}_y(\cdot)$ определены выражением (3.31), а функции $\Psi_x(\cdot)$, $\Psi_y(\cdot)$ будут определены позднее.

Свойства замкнутой системы (3.115), (3.116), (3.118), (3.119), (3.121), (3.122) сформулированы в следующей теореме.

Т е о р е м а 3.9. Пусть заданы системы (3.115) и (3.116). Кроме того, предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) функции $\psi_x(\mathbf{x}, t)$, $\psi_y(\mathbf{y}, t)$ удовлетворяют предположению 3.1 для систем (3.115), (3.116) соответственно;
- 2) системы

$$\dot{\psi}_x = -\varphi_x(\psi_x, \boldsymbol{\omega}_x, t) + \zeta_x(t), \quad \dot{\psi}_y = -\varphi_y(\psi_y, \boldsymbol{\omega}_y, t) + \zeta_y(t) \quad (3.123)$$

удовлетворяют предположению 3.2 с соответствующими отображениями

$$\gamma_{x\infty,2}(\psi_{x_0}, \boldsymbol{\omega}_x, \|\zeta_x(t)\|_{2,[t_0,T]}), \quad \gamma_{y\infty,2}(\psi_{y_0}, \boldsymbol{\omega}_y, \|\zeta_y(t)\|_{2,[t_0,T]});$$

3) для систем (3.123) определены передаточные отображения $L_2^1[t_0, \infty] \mapsto L_2^1[t_0, \infty]$:

$$\begin{aligned} \|\psi_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2,[t_0,T]} &\leq C_{\gamma_x} + \gamma_{x2,2}(\|\zeta_x(t)\|_{2,[t_0,T]}), \\ \|\psi_y(\mathbf{y}(t), t)\|_{2,[t_0,T]} &\leq C_{\gamma_y} + \gamma_{y2,2}(\|\zeta_y(t)\|_{2,[t_0,T]}), \\ C_{\gamma_x}, C_{\gamma_y} &\in \mathbb{R}_+, \gamma_{x2,2}, \gamma_{y2,2} \in \mathcal{K}_\infty; \end{aligned} \quad (3.124)$$

4) функции $f_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x, t)$, $f_y(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_y, t)$ удовлетворяют предположениям 3.3, 3.4 с соответствующими константами D_x , D_{x1} , D_y , D_{y1} и функциями $\alpha_x(\mathbf{x}, t)$, $\alpha_y(\mathbf{y}, t)$ из (3.121), (3.122);

5) функции $h_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $h_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ удовлетворяют неравенствам:

$$\|h_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\| \leq \beta_x \|\psi_x(\mathbf{x}, t)\|, \quad \|h_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\| \leq \beta_y \|\psi_y(\mathbf{y}, t)\|, \quad \beta_x, \beta_y \in \mathbb{R}_+. \quad (3.125)$$

Наконец, функции $\Psi_x(\mathbf{x}, t)$, $\Psi_y(\mathbf{y}, t)$ в (3.121), (3.122) удовлетворяют предположению 3.5 при $B = 0$ для систем (3.115), (3.116) соответственно; существуют функции $\rho_1(\cdot)$, $\rho_2(\cdot)$, $\rho_3(\cdot) > Id(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ и константа $\bar{\Delta} \in \mathbb{R}_+$ такие, что для всех $\Delta \geq \bar{\Delta}$ выполняется неравенство:

$$\beta_y \circ \gamma_{y2,2} \circ \rho_1 \circ \left(\frac{D_y}{D_{y,1}} + 1 \right) \circ \rho_3 \circ \beta_x \circ \gamma_{x2,2} \circ \rho_2 \circ \left(\frac{D_x}{D_{x,1}} + 1 \right) (\Delta) < \Delta. \quad (3.126)$$

Тогда:

C1) соединение (3.115), (3.116) с управлением (3.118), (3.119) полно, и траектории $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ ограничены.

Кроме того,

C2) выполнение свойств Д1, Д4 для $f_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x, t)$, $f_y(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_y, t)$, $h_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $h_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ и функций $\varphi_x(\psi_x, \boldsymbol{\omega}_x, t)$, $\varphi_y(\psi_y, \boldsymbol{\omega}_y, t)$ влечет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_x(\mathbf{x}(t), t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_y(\mathbf{y}(t), t) = 0. \quad (3.127)$$

В дополнение:

C3) если выполнено свойство Д2 для функций $f_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x, t)$, $f_y(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_y, t)$, а функции

$$\alpha_x(\mathbf{x}, t), \quad \partial \psi_x(\mathbf{x}, t) / \partial t, \quad \alpha_y(\mathbf{y}, t), \quad \partial \psi_y(\mathbf{y}, t) / \partial t$$

локально ограничены по \mathbf{x} , \mathbf{y} равномерно по t , то справедливы следующие предельные соотношения

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} f_x(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_x, t) - f_x(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}_x(t), t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f_y(\mathbf{y}(t), \boldsymbol{\theta}_y, t) - f_y(\mathbf{y}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}_y(t), t) &= 0.\end{aligned}\tag{3.128}$$

Прокомментируем условия теоремы 3.9. Условия 1), 2) специфицируют ограничения на целевые функционалы, аналогично теореме 3.1. Условие 3) аналогично требованию 3) теоремы 3.1, условие 5) специфицирует ограничения на неопределенность функций $h_x(\cdot)$, $h_y(\cdot)$ в терминах их показателей роста относительно функций $\psi_x(\cdot)$, $\psi_y(\cdot)$. Отметим, что это свойство использовано в доказательстве лишь для определения $L_2[t_0, T]$ норм функций $h_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)$, $h_y(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)$ в терминах $L_2[t_0, T]$ норм целевых функций $\psi_x(\mathbf{x}(t), t)$, $\psi_y(\mathbf{y}(t), t)$. Следовательно, в общем случае требование (3.125) можно заменить на эквивалентный набор условий:

$$\begin{aligned}\|h_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2, [t_0, T]} &\leq \beta_x \|\psi_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T]} + C_x, \\ \|h_y(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2, [t_0, T]} &\leq \beta_y \|\psi_y(\mathbf{y}(t), t)\|_{2, [t_0, T]} + C_y.\end{aligned}\tag{3.129}$$

Это, в свою очередь, позволяет распространить применимость теоремы 3.9 на соединения систем, в которых функции связи не зависят в явном виде от $\psi_x(\mathbf{x}(t), t)$, $\psi_y(\mathbf{y}(t), t)$. Такая возможность иллюстрируется ниже в примере 3.4.1.

Условие (3.126) является условием малого контурного усиления, записанным относительно $L_2^1[t_0, T]$ норм сигналов $\psi_x(\mathbf{x}(t), t)$, $\psi_y(\mathbf{y}(t), t)$, $h_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)$, $h_y(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)$ соединения (3.115), (3.116) с управлением (3.118), (3.119). В случаях, когда отображения $\gamma_{x2,2}(\cdot)$, $\gamma_{y2,2}(\cdot)$ в (3.123) мажорируются линейными функциями

$$\gamma_{x2,2}(\Delta) \leq g_{x2,2}\Delta, \quad \gamma_{y2,2}(\Delta) \leq g_{y2,2}\Delta, \quad \Delta \geq 0,$$

условие (3.126) сводится к более простому виду

$$\beta_y \beta_x g_{x2,2} g_{y2,2} \left(\frac{D_y}{D_{y,1}} + 1 \right) \left(\frac{D_x}{D_{x,1}} + 1 \right) < 1.$$

Кроме того, отметим, что отображения $\gamma_{x2,2}(\cdot)$, $\gamma_{y2,2}(\cdot)$ полностью определяются свойствами целевой динамики системы (3.123) и следовательно могут быть выбраны сколь угодно малыми. Этот факт с учетом ограничения (3.126) влечет следующий вывод о связи классов допустимой целевой динамики и нелинейной параметризации: чем меньше L_2 -коэффициенты передаточных отображений целевой динамики систем \mathcal{S}_x , \mathcal{S}_y , тем шире классы допустимых неопределенностей (шире диапазоны изменения коэффициентов β_x , β_y и констант D_x , $D_{1,x}$, D_y , $D_{1,y}$), допускающих существование решения задачи 3.3.

Пример 3.4.1. Проиллюстрируем применение теоремы 3.9 к задаче децентрализованного управления парой взаимосвязанных осцилляторов с нелинейным демпфированием. В частности, рассмотрим следующие системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_x(x_1, \theta_x) + k_1 y_1 + u_x, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = f_y(y_1, \theta_y) + k_2 x_1 + u_y, \end{cases} \quad (3.130)$$

где $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ – неизвестные параметры связи, функции $f(x_1, \theta_x)$, $f(y_1, \theta_y)$ моделируют собственно нелинейное демпфирование, а θ_x, θ_y – неизвестные параметры демпфирования. Для иллюстрации ограничимся следующим классом функций $f_x(\cdot)$, $f_y(\cdot)$ в (3.130):

$$\begin{aligned} f_x(x_1, \theta_x) &= \theta_x(x_1 - x_0) + 0.5 \sin(\theta_x(x_1 - x_0)), \\ f_y(y_1, \theta_y) &= \theta_y(y_1 - y_0) + 0.6 \sin(\theta_y(y_1 - y_0)) \end{aligned} \quad (3.131)$$

Кроме того, будем полагать, что переменные x_0, y_0 известны.

Целью управления выберем перевод состояний \mathbf{x} и \mathbf{y} в начало координат. Рассмотрим следующие целевые функции

$$\psi_x(\mathbf{x}, t) = x_1 + x_2, \quad \psi_y(\mathbf{y}, t) = y_1 + y_2 \quad (3.132)$$

Принимая во внимание выражения (3.130) и (3.132), получим

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \psi_x(\mathbf{x}(t), t), \quad \dot{y}_1 = -y_1 + \psi_y(\mathbf{y}(t), t). \quad (3.133)$$

Это автоматически влечет выполнение следующих оценок:

$$\begin{aligned} \|x_1(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \|x_1(t_0)\| + \|\psi_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, T]}; \\ \|y_1(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \|y_1(t_0)\| + \|\psi_y(\mathbf{y}(t), t)\|_{\infty, [t_0, T]}. \end{aligned}$$

Таким образом, предположение 3.1 выполняется для выбранных целевых функций $\psi_x(\cdot)$ и $\psi_y(\cdot)$. В дополнение, равенства (3.133) влекут справедливость следующих оценок:

$$\begin{aligned} \|x_1(t)\|_{2, [t_0, T]} &\leq 2^{-1/2} \|x_1(t_0)\| + \|\psi_x(\mathbf{x}, t)\|_{2, [t_0, T]}; \\ \|y_1(t)\|_{2, [t_0, T]} &\leq 2^{-1/2} \|y_1(t_0)\| + \|\psi_y(\mathbf{y}, t)\|_{2, [t_0, T]}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Более того, в силу уравнений (3.133) выполнение предельных соотношений

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_x(\mathbf{x}(t), t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) + x_2(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_y(\mathbf{y}(t), t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) + y_2(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.135)$$

гарантирует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0.$$

Следовательно, выполнение свойства (3.135) обеспечивает достижение исходной цели управления.

В силу уравнений (3.118), (3.119) управления

$$\begin{aligned} u_x &= -\lambda_x \psi_x - x_2 - f_x(x_1, \hat{\theta}_x); \\ u_y &= -\lambda_y \psi_y - y_2 - f_y(y_1, \hat{\theta}_y), \quad \lambda_x, \lambda_y > 0 \end{aligned} \quad (3.136)$$

приводят систему (3.130) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_x &= -\lambda_x \psi_x + f_x(x_1, \theta_x) - f_x(x_1, \hat{\theta}_x) + k_1 y_1; \\ \dot{\psi}_y &= -\lambda_y \psi_y + f_y(y_1, \theta_y) - f_y(y_1, \hat{\theta}_y) + k_2 x_1. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Заметим, что системы

$$\dot{\psi}_x = -\lambda_x \psi_x + \xi_x(t), \quad \dot{\psi}_y = -\lambda_y \psi_y + \xi_y(t)$$

удовлетворяют предположению 3.2 с

$$\gamma_{x2,2} = \frac{1}{\lambda_x} \|\psi_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2,[t_0, T]}, \quad \gamma_{y2,2} = \frac{1}{\lambda_y} \|\psi_y(\mathbf{y}(t), t)\|_{2,[t_0, T]}.$$

соответственно, а функции $f_x(\cdot)$, $f_y(\cdot)$, в свою очередь, удовлетворяют предположениям 3.3, 3.4 при

$$D_x = 1.5, \quad D_{x,1} = 0.5, \quad \alpha_x(\mathbf{x}, t) = x_1 - x_0,$$

$$D_y = 1.6, \quad D_{y,1} = 0.4, \quad \alpha_y(\mathbf{y}, t) = y_1 - y_0.$$

Таким образом условия 1)-4) теоремы 3.9 выполняются. Более того, в силу замечания об условии 5) в формулировке теоремы, требование (3.125) может быть заменено неявным ограничением вида (3.129). Это ограничение, очевидно, также выполняется в силу свойства (3.134) при $\beta_x = k_1$, $\beta_y = k_2$.

Принимая во внимание, что функции $\alpha_x(\mathbf{x}, t)$, $\alpha_y(\mathbf{y}, t)$ имеют вид: $\alpha_x(\mathbf{x}, t) = x_1 - x_0$, $\alpha_y(\mathbf{y}, t) = y_1 - y_0$, предположение 3.5 выполняется при $\Psi_x(\cdot) = 0$, $\Psi_y(\cdot) = 0$. Тогда, алгоритмы адаптации (3.121), (3.122) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_x &= \Gamma_x((x_1 + x_2)(x_1 - x_0) + \hat{\theta}_{x,I}), \\ \dot{\hat{\theta}}_{x,I} &= \lambda_x(x_1 + x_2)(x_1 - x_0) - (x_1 + x_2)x_2, \\ \hat{\theta}_y &= \Gamma_y((y_1 + y_2)(y_1 - y_0) + \hat{\theta}_{y,I}), \\ \dot{\hat{\theta}}_{y,I} &= \lambda_y(y_1 + y_2)(y_1 - y_0) - (y_1 + y_2)y_2. \end{aligned} \quad (3.138)$$

В соответствии с теоремой 3.9, полнота и ограниченность решений в замкнутой системе (3.137), (3.138) вытекает из условия

$$\frac{k_1 k_2}{\lambda_x \lambda_y} \left(1 + \frac{D_x}{D_{x,1}}\right) \left(1 + \frac{D_y}{D_{y,1}}\right) < 1 \Rightarrow k_1 k_2 < \frac{\lambda_x \lambda_y}{20}. \quad (3.139)$$

Кроме того, в силу того, что для функций $\psi_x(\mathbf{x}, t)$, $\psi_y(\mathbf{y}, t)$ выполняются свойства Д1– Д4, условие (3.139) гарантирует выполнение предельных соотношений (3.127), (3.128).

Графики траекторий замкнутой системы (3.130), (3.136), (3.138) при $\Gamma_x = \Gamma_y = 1$, $\lambda_x = \lambda_y = 2$, $x_0 = y_0 = 1$, $\theta_x = \theta_y = 1$ с начальными условиями $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 0$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $\hat{\theta}_{x,I}(0) = -1$, $\hat{\theta}_{y,I}(0) = -2$ приведены на рис. 3.7. Из рисунка видно, что несмотря на относительно существенный разброс значений параметров связи между подсистемами (порядка 100%), различия между траекториями замкнутой системы незначительны.

3.5. Задача параметрической идентификации объектов

с нелинейно параметризованными моделями одного класса

Сформулируем условия, обеспечивающие асимптотическую сходимость оценок $\hat{\theta}(t)$ к θ в замкнутой системе (3.1), (3.10), (3.29), (3.31). В случае линейно параметризованных моделей, когда $f(\mathbf{x}, \theta, t) = \zeta(\mathbf{x}, t)^T \theta$, стандартное достаточное условие сходимости оценок состоит в том, что сигнал $\zeta(\mathbf{x}(t), t)$ является *предельно невырожденным* в смысле определения 1.4.1 [292], а именно: для $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ существуют такие числа $\delta > 0$ и $L > 0$, что для всех $t \in \mathbb{R}_+$ справедливо неравенство

$$\int_t^{t+L} \zeta(\tau) \zeta(\tau)^T d\tau \geq \delta I. \quad (3.140)$$

Понятие предельной невырожденности требует, чтобы для сигналов $\zeta(t)$ регрессора $f(\mathbf{x}, \theta, t) = \zeta(\mathbf{x}(t), t)^T \theta$ как функций времени выполнялось свойство (3.140). В замкнутых системах регрессор $f(\mathbf{x}, \theta, t) = \zeta(\mathbf{x}, t)^T \theta$ как правило зависит от состояния и как следствие, в неявной форме, от неизвестных параметров θ , начальных условий $\mathbf{x}(t_0)$ и момента времени t_0 . Поэтому для задач параметрической идентификации в замкнутых системах в [236] вводится понятие равномерной предельной невырожденности.

О п р е д е л е н и е 3.5.1. Пусть задана функция $\zeta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^k$ и $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \theta_0)$ является решением системы (3.1), где вектор $\theta_0 \in \mathbb{R}^s$ обозначает вектор всех параметров (известных и неизвестных) системы (3.1), а обратная связь задается

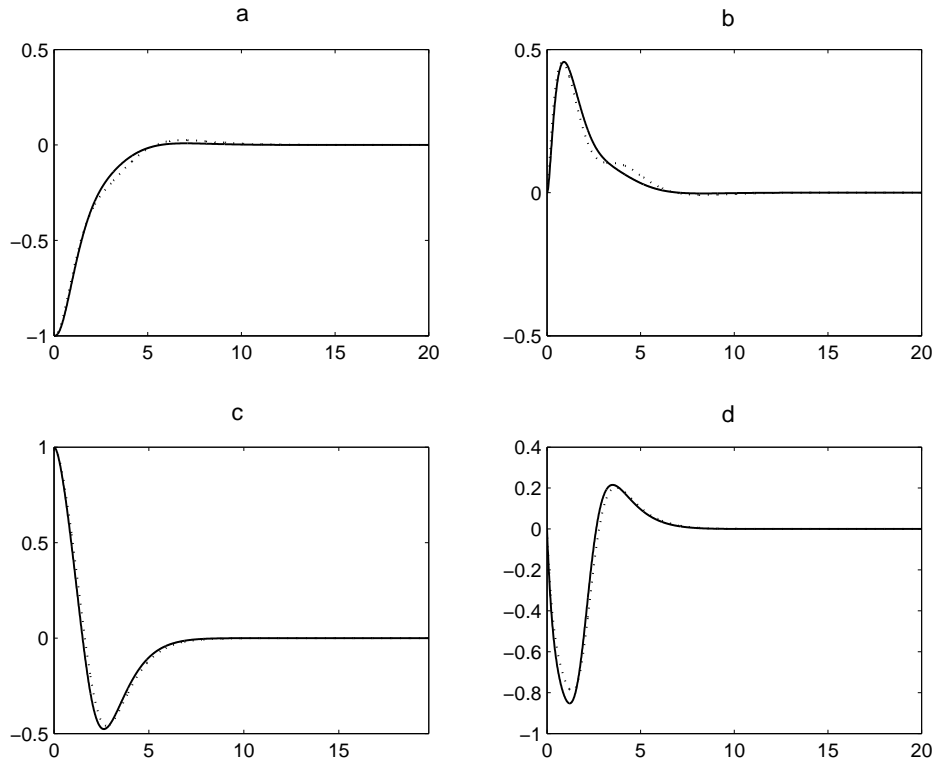


Рисунок 3.7. Графики траекторий $x_1(t)$ (панель а), $x_2(t)$ (панель б), $y_1(t)$ (панель с), $y_2(t)$ (панель d) как функции времени t в замкнутой системе (3.130), (3.136), (3.138). Пунктирными линиями изображены траектории в системе со следующими параметрами связи между подсистемами $k_1 = k_2 = 0.4$; сплошными линиями изображены траектории замкнутой системы при $k_1 = 1$, $k_2 = 0.1$

уравнениями (3.8), (3.29), (3.31). Функция $\zeta(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0, \boldsymbol{\theta}_0), t)$ называется *равномерно предельно невырожденной*, если найдутся такие константы $\delta > 0$ и $L > 0$, что для всех $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{R}^s$ выполняется интегральное неравенство

$$\int_t^{t+L} \zeta(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}_0, t_0, \boldsymbol{\theta}_0), \tau) \zeta(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}_0, t_0, \boldsymbol{\theta}_0), \tau)^T d\tau \geq \delta I. \quad (3.141)$$

В системах с нелинейной параметризацией в дополнение к свойствам (3.141) сигналов регрессора полезно иметь информацию о свойствах нелинейности модели. В линейном случае предельная невырожденность сигнала $\zeta(\mathbf{x}(t), t)$ (неравенство (3.140)) влечет выполнение оценки

$$\exists t' \in [t, t+L] : |\zeta(\mathbf{x}(t'), t')^T (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2)| \geq \delta \|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2\| \quad (3.142)$$

Другими словами, разность $|\zeta(\mathbf{x}(t), t)^T (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2)|$ в некоторый момент времени $t' \in [t, t+L]$ оказывается *пропорциональна* расстоянию $\|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2\|$ в пространстве параметров.

В системах с нелинейной параметризацией естественно заменить линейный член

$$\zeta(\mathbf{x}(t'), t')^T (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2)$$

в (3.142) на нелинейный вида

$$f(\mathbf{x}(t'), \boldsymbol{\theta}_1, t') - f(\mathbf{x}(t'), \boldsymbol{\theta}_2, t'),$$

как предлагается, например, в [130] для систем с выпуклой/вогнутой параметризацией. Развитие этой идеи приводит к замене $\delta \|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2\|$ в правой части (3.142) на произвольную нелинейную функцию. Таким образом, для формального описания свойства *нелинейной* предельной невырожденности регрессора будем использовать следующее определение:

О п р е д е л е н и е 3.5.2. Функция $f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ называется *предельно невырожденной по параметрам* $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta \subset \mathbb{R}^d$, если существует такое число $L > 0$ и функция $\varrho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\varrho \in \mathcal{K} \cap C^0$, что для всех $t \in \mathbb{R}_+$, $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in \Omega_\theta$ выполняется неравенство:

$$\exists t' \in [t, t+L] : |f(\mathbf{x}(t'), \boldsymbol{\theta}_1, t') - f(\mathbf{x}(t'), \boldsymbol{\theta}_2, t')| \geq \varrho(\|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2\|). \quad (3.143)$$

Свойства (3.140) и (3.143) в определениях 1.4.1, 3.5.1 и 3.5.2 являются альтернативными характеристиками возбуждения или предельных свойств регрессора в динамических системах. В то время, как неравенство (3.140) учитывает свойства сигналов в самом регрессоре, неравенство (3.143) специфицирует возможность обнаружения параметрических ошибок по разности $f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_1, t) - f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}_2, t)$. С учетом этих, вообще говоря, различных характеристик регрессора сформулируем набор альтернативных условий сходимости оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ к $\boldsymbol{\theta}$. Результат приводится в теореме 3.10.

Т е о р е м а 3.10. Пусть система (3.1), (3.9), (3.29), (3.31) удовлетворяет предположениям 3.1–3.3. Пусть, в дополнение, выполняется предположение 3.5 при $B(\mathbf{x}, t) = 0$. Тогда $\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, \infty]$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \in L_\infty^d[t_0, \infty]$. Более того, если функции $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ локально ограничены по \mathbf{x} равномерно по t и выполнена хотя бы одна из следующих альтернатив:

- 1) функция $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}(t), t)$ предельно невырождена и выполняется свойство Д3;
 - 2) функция $f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t)$ нелинейно предельно невырождена, т. е. выполняется условие (3.143), и удовлетворяет условиям Д1, Д2; функция $\varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t)$ удовлетворяет условию Д4; функция $\partial\psi(\mathbf{x}, t)/\partial t$ локально ограничена по \mathbf{x} равномерно по t ,
- то имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}(t), t) = \boldsymbol{\theta}.$$

Если выполнена альтернатива 1), оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}(t), t)$ сходятся к $\boldsymbol{\theta}$ экспоненциально быстро. Кроме того, если функции $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}(t), t)$ равномерно предельно невырождены и выполняется предположение 3.4, то оценки сходятся равномерно. Степень сходимости оценок удовлетворяет следующему неравенству:

$$\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}\| \leq e^{-\rho t} \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0) - \boldsymbol{\theta}\|_{D_\Gamma}; \quad (3.144)$$

$$\rho = \frac{\delta D_1 \lambda_{\min}(\Gamma)}{2L(1 + \lambda_{\max}^2(\Gamma)L^2 D^2 \alpha_\infty^4)}, \quad D_\Gamma = \left(\frac{\lambda_{\max}(\Gamma)}{\lambda_{\min}(\Gamma)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_\infty = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, \infty]}, t \geq t_0} \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)\|.$$

Отметим, что формулировка теоремы 3.10 предполагает модели по ошибке вида (3.9), где возмущения $\varepsilon(t)$ отсутствуют. Несмотря на это, теорема 3.10 может быть распространена и на случай моделей (3.10) с наличием возмущений. Действительно, как вытекает из альтернативы 1), подсистема оценки параметров становится экспоненциально устойчивой в случае если функции $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}(t), t)$ предельно невырождены. Это, в свою очередь, обеспечивает робастность системы к достаточно малым возмущениям в правой части (3.9). Если выполняется условие равномерной предельной невырожденности, сходимость оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ в окрестность $\boldsymbol{\theta}$ гарантируется для любых $\varepsilon(t) \in L_\infty^1[t_0, \infty]$ в соответствии с обратной теоремой об экспоненциальной устойчивости по Ляпунову [207].

В случае альтернативы 2) нелинейная версия предельной невырожденности (3.143) обеспечивает выполнение предельного соотношения (3.22) без использования предположения 3.4 или свойства Д3. В этом случае, однако, робастность сходимости

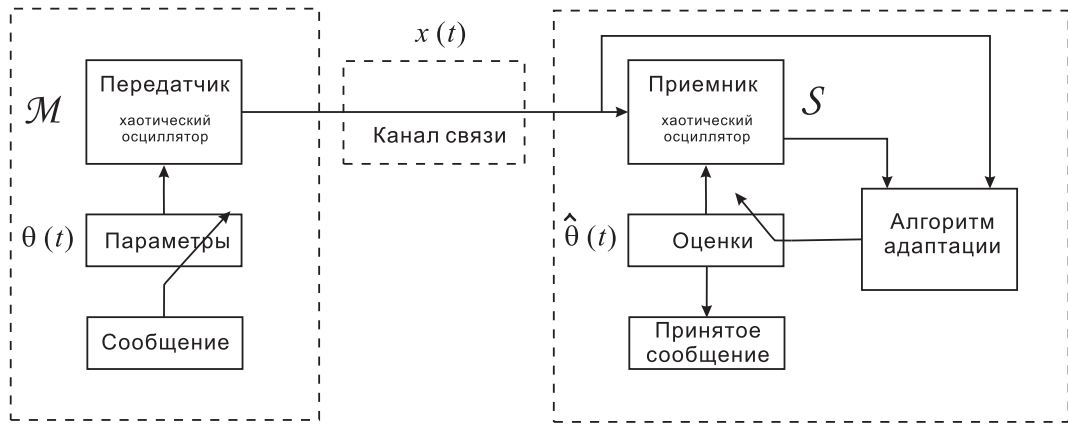


Рисунок 3.8. Схема системы передачи закодированных сообщений на основе нелинейных хаотических осцилляторов.

по отношению к малым возмущениям не гарантируется, что служит естественной платой за более широкий класс допустимых нелинейностей $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$.

Проиллюстрируем применение теоремы 3.10 для решения задач оценки параметров в системах с неустойчивой целевой динамикой на примере решения задачи передачи сообщений в системе из пары нелинейных осцилляторов.

Пример 3.5.1. Рассмотрим пару связанных нелинейных возмущенных осцилляторов \mathcal{M} (передатчик) и \mathcal{S} (приемник), входы которых задаются функцией времени и параметра $\theta \in \mathbb{R}$ для \mathcal{M} и $\hat{\theta} \in \mathbb{R}$ для \mathcal{S} соответственно. Параметр θ выполняет роль “сообщения”, посылаемого передатчиком. Параметр $\hat{\theta}$ в системе \mathcal{S} должен отслеживать сообщение, переданное системой \mathcal{M} . Подобные задачи часто возникают в системах безопасной передачи информации (см., например, обзор [342] и рис. 3.8). Традиционно решение этой проблемы требует построение адаптивного наблюдателя при условии возникновения устойчивой синхронизации между системами \mathcal{M} и \mathcal{S} при $\hat{\theta} = \theta$ а также в предположении о линейной параметризации систем по параметру θ .

Использование результатов, сформулированных в теоремах 3.1, 3.10, позволяет решить эту проблему не требуя ни устойчивой синхронизации между подсистемами при $\theta = \hat{\theta}$ ни линейности моделей по θ , что позволяет передавать сообщения в асинхронном режиме. Кроме того, нелинейная параметризация неопределенности позволяет распространить исходную задачу передачи сообщений в область моделирования биологических систем и цепей. В этих системах стимуляция как правило нелинейно параметризована и синхронизация неустойчива.

Итак, рассмотрим пару связанных осцилляторов, например, хорошо известную

модель Хиндрмарша-Роуза мембранного потенциала клеток [180]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) + I(\theta, r(t)) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \\ \mathcal{S} : \begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2, y_3) + c(t)(y_1 - x_1) + I(\hat{\theta}, r(t)) \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2, y_3) \\ \dot{y}_3 = f_3(y_1, y_2, y_3) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.145)$$

где $f_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^3 + 3x_1^2 + x_2 - x_3$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = 1 - 5x_1^2 - x_2$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = 0.006(4(x_1 + 1.6) - x_3)$. Переменная $c : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ – варьирующий коэффициент связи между подсистемами, $I(\theta, r(t)) = \kappa / (1 + \exp(-\theta - r(t)))$ – нелинейное преобразование входного сигнала $r(t)$, а $\theta, \hat{\theta}$ – пороги или “сообщения”. Значение κ определяет верхнюю границу “стимуляции” $I(\theta, r(t))$. Функция $I(\theta, r(t))$ моделирует синаптические ворота, которые открываются когда значение $r(t)$ превысит порог θ . Для выбранных $f_i(\cdot)$ задание $\kappa = 4$ позволяет моделировать широкий спектр поведения отдельных осцилляторов в (3.145) в зависимости от входа $r(t)$ и порогов $\theta, \hat{\theta}$: от равновесного до хаотических колебаний.

Достаточное условие асимптотически устойчивой синхронизации между подсистемами \mathcal{M} и \mathcal{S} при $\hat{\theta} = \theta$ состоит в поддержании коэффициента связи $c(t)$ между подсистемами выше порогового: $c(t) \geq c^* = 21.5$ (см. [266]). Проблема, однако, состоит в том чтобы определить закон изменения параметра $\hat{\theta}$ как функцию состояния системы (3.145), возможно, входа $r(t)$ и времени t , обеспечивающий возможность асимптотического слежения за значениями θ для значений $c(t) \geq 0$ ниже критического порога c^* .

Прежде всего отметим, что $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ ограничены при условии, что $I(\theta, r(t))$, $I(\hat{\theta}, r(t))$ являются ограниченными функциями времени: обе системы \mathcal{M} и \mathcal{S} оказываются строго полу-пассивными с квадратичными, положительно определенными вне ограниченной области функциями запаса [266]. В качестве функции ψ выберем разность $x_1(t) - y_1(t)$. В силу того, что состояние системы ограничено для всех $\hat{\theta}, \theta, r(t)$ в силу строгой полу-пассивности систем \mathcal{M}, \mathcal{S} в (3.145), проверка предположения 3.1, очевидно, не требуется для применения теорем 3.1, 3.10. Рассмотрим динамику переменной ψ :

$$\dot{\psi} = f_1(x_1, x_2, x_3) - f_1(y_1, y_2, y_3) - c(t)\psi + I(\theta, r(t)) - I(\hat{\theta}, r(t)) \quad (3.146)$$

В силу того, что $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $I(\theta, r(t))$, $I(\hat{\theta}, r(t))$ ограничены, предположение 3.2 выполняется для (3.146) при $c(t) \geq \delta$, где $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ произвольно мало. Функцию $\varphi(\psi, \omega, t)$ уравнения целевой динамики естественно определить в виде $\varphi(\psi, \omega, t) = -f_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) + f_1(y_1(t), y_2(t), y_3(t)) + c(t)\psi$. В силу того, что $I(\theta, r(t))$ дифференцируема, то применяя лемму Адамара разность $I(\theta, r(t)) - I(\hat{\theta}, r(t))$ можно представить в виде:

$$I(\theta, r(t)) - I(\hat{\theta}, r(t)) = \int_0^1 \frac{\partial f(\theta\lambda + (1-\lambda)\hat{\theta}, r(t))}{\partial(\theta\lambda + (1-\lambda)\hat{\theta})} d\lambda(\theta - \hat{\theta}). \quad (3.147)$$

Функция $I(\theta, r(t))$ строго монотонна по θ , следовательно, интеграл

$$\int_0^1 \frac{\partial f(\theta\lambda + (1-\lambda)\hat{\theta}, r(t))}{\partial(\theta\lambda + (1-\lambda)\hat{\theta})} d\lambda$$

положителен. Более того, частная производная $\frac{\partial I(\theta, r(t))}{\partial \theta}$ ограничена сверху для всех θ , $r(t)$. Таким образом, справедливо предположение 3.3, где $\alpha = \text{const} = 1$. В силу того, что $\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x} \oplus \mathbf{y}} = 0$, предположение 3.5 также выполняется, причем $\Psi(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}, t) = 0$.

Запишем алгоритм адаптации для $\hat{\theta}$ в соответствии с уравнениями (3.29), (3.31):

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma((x_1(t) - y_1(t) + \hat{\theta}_I(t)), \quad \dot{\hat{\theta}}_I = -f_1(x_1, x_2, x_3) + f_1(y_1, y_2, y_3) + c(t)(x_1 - y_1), \quad \gamma \in \mathbb{R}_{>0}. \quad (3.148)$$

Согласно теореме 3.1 и Следствию 3.1 переменная $\hat{\theta}$ ограничена и не возрастает со временем. Тогда, согласно равенству (3.147) и с учетом того, что частные производные $\frac{\partial I(\theta, r(t))}{\partial \theta}$ отделены от нуля для всех ограниченных θ , $r(t)$, функция $I(\theta, r(t))$ удовлетворяет предположению 3.4 для всех ограниченных $r(t)$. Более того, функция $\alpha = \text{const} = 1$ очевидно предельно невырождена. Следовательно, согласно теореме 3.10 оценка $\hat{\theta}$ сходится к θ в (3.145) экспоненциально быстро. Другими словами, сообщение θ системы \mathcal{M} может быть реконструировано системой \mathcal{S} с алгоритмом (3.148) экспоненциально быстро. Это свойство иллюстрируется рис. 3.9.

3.6. Задача недоминирующего управления объектами с нелинейной параметризацией общего вида

В предыдущих параграфах раздела рассматривались задачи недоминирующего управления и идентификации объектов с нелинейно параметризованными моделями неопределенностей, удовлетворяющих предположениям 3.3, 3.4. Несмотря на то, что класс таких нелинейностей достаточно широк и обоснован кругом практически значимых моделей физических процессов, в некоторых случаях требуется иметь дело

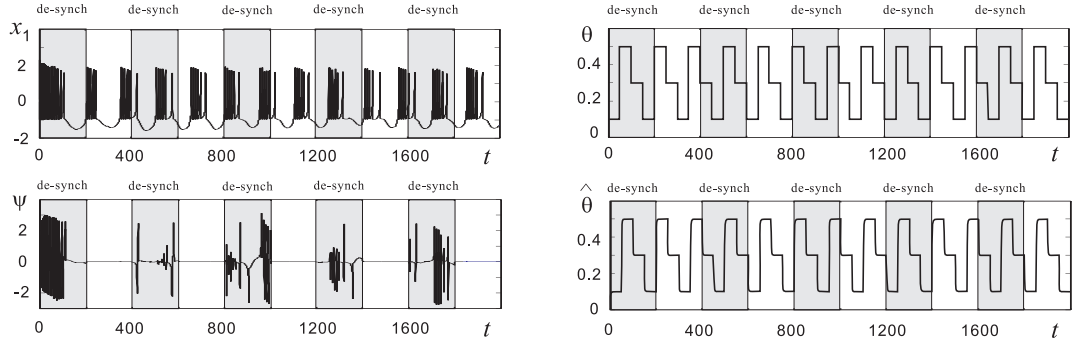


Рисунок 3.9. Траектории системы (3.145), (3.148) как функции времени t . Белый цвет соответствует интервалам времени, в которых коэффициент связи $c(t)$ превосходит пороговое значение $c^* = 21.5$: $c(t) = 21.55$, обеспечивая глобальную асимптотически устойчивую синхронизацию между подсистемами \mathcal{M} и \mathcal{S} при $\hat{\theta} = \theta$. Затененные области соответствуют моментам времени, в которых условие устойчивой синхронизации нарушается: $c(t) = 0.05$. Несмотря на то, что подсистемы \mathcal{M} и \mathcal{S} не синхронизируются в эти моменты времени, сообщения θ , высланные передатчиком \mathcal{M} успешно отслеживаются приемником \mathcal{S} .

с нелинейностями, не удовлетворяющими этим условиям. Поэтому актуальна задача недоминирующего управления объектами с нелинейной параметризацией общего вида.

В качестве возможной цели управления выберем достижение множества

$$\Omega_\psi(\epsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \psi(\mathbf{x})| \leq \epsilon\}, \quad \psi \in \mathcal{C}^2. \quad (3.149)$$

При этом множество допустимых функций $\psi(\cdot)$ в уравнении целевой динамики (3.11) ограничим следующим классом:

$$\mathcal{C}_\varphi(k) = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | \varphi \in C^1, \varphi(\psi)\psi \geq \psi^2 k, k \in \mathbb{R}_+\}. \quad (3.150)$$

Синтез недоминирующего адаптивного управления в этом классе функций означает, что цель управления (3.149) достигается при сколь угодно малых по амплитуде отрицательных обратных связях по ψ в системе (3.1), (3.8), (3.9).

Как показано в [323], специфика проблемы недоминирующего адаптивного управления в случае нелинейной параметризации общего вида состоит в том, что ее решения выходят за рамки привычных понятий устойчивости по Ляпунову и аттрактивности целевых множеств в стандартном смысле [173]. Особенно, если основной единицей анализа является динамика системы в терминах макропеременной $\psi(\mathbf{x})$. Невозможность использовать методы функций Ляпунова в этом случае может быть проиллюстрирована следующим образом. Рассмотрим уравнения (3.9) и (3.23), где $\varphi(\psi, \omega, t) = \varphi(\psi) - v(t)$, в виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi_\psi & \mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta, \hat{\theta}) \\ \mathcal{A}_\psi(\psi, \mathbf{x}, \hat{\theta}, t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v(t), \quad \tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}. \quad (3.151)$$

Функции ϕ_ψ , $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\mathcal{A}_\psi(\psi, \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$ в (3.151) вытекают из леммы Адамара¹⁸, а слабое $v(t)$ играет роль потенциально возможного вспомогательного компенсатора. В отличие от случая линейной параметризации, явная зависимость функции $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ от вектора неизвестных параметров $\boldsymbol{\theta}$ не позволяет компенсировать влияние неопределенности выбором лишь функции $\mathcal{A}_\psi(\psi, \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$ в (3.151). Таким образом, обеспечение ограниченности решений и устойчивости по Ляпунову движений в системе оказывается в общем случае невозможным без использования дополнительного управления $v(t)$ в (3.151).

Введенный в предыдущих параграфах подход к управлению системами с нелинейной параметризацией на основе перевода (регулирования) функции влияния неопределенности на целевую динамику в пространство функций $L_2[t_0, T]$ и затем использования теоремы 2.6 обоснован лишь для класса нелинейностей, удовлетворяющих предположениям 3.3, 3.4. Вопрос о применимости такого способа к нелинейностям более широкого класса остается открытым.

Таким образом, применение стандартных методов синтеза в задаче отыскания недоминирующего адаптивного управления оказывается неприемлемым в силу возможного нарушения свойства устойчивости по Ляпунову замкнутой системы. С другой стороны, применение функциональных подходов ограничено требованиями предположений 3.3, 3.4 на класс допустимых нелинейностей $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$.

Возможным выходом из этой ситуации предлагается решение задачи синтеза недоминирующего адаптивного управления как задачи асимптотического регулирования состояния системы к притягивающим по Милнору множествам [245] (имеется в виду также определение 2.6.1). Концепция слабых притягивающих множеств позволяет описывать процессы, которые, с одной стороны, неустойчивы по Ляпунову, а, с другой стороны, асимптотически сходятся к заданным целевым множествам. Эта идея может быть проиллюстрирована следующим примером.

П р и м е р 3.6.1. Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2^2; \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2,\end{aligned}\tag{3.152}$$

фазовый портрет которой изображен на рис. 3.10. Окружностью обозначена область притяжения аттрактора $(0, 0)$ в смысле Милнора. В системе (3.152) точка $\mathbf{x} = (0, 0)^T$ является неустойчивым по Ляпунову положением равновесия. С другой стороны, почти для всех начальных условий, за исключением множества начальных условия

¹⁸В частности, эти функции определяются выражениями $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \int_0^1 \frac{\partial f(\mathbf{x}, \lambda \boldsymbol{\theta} + (1-\lambda)\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \lambda \boldsymbol{\theta} + (1-\lambda)\hat{\boldsymbol{\theta}}} d\lambda$, $\phi_\psi = \int_0^1 \frac{\partial \varphi(\lambda \psi)}{\partial \lambda \psi} d\lambda$, $\mathcal{A}_\psi(\psi, \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) = \int_0^1 \frac{\partial A_{\text{lg}}(\lambda \psi, \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)}{\partial \lambda \psi} d\lambda$.

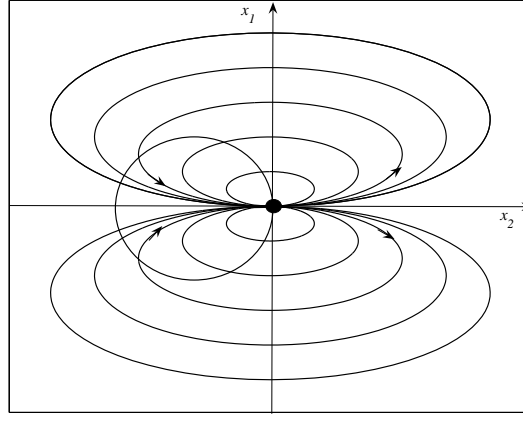


Рисунок 3.10. Фазовый портрет системы (3.152)

меры нуль, окрестности положения равновесия решения асимптотически сходятся в точку $\mathbf{x} = (0, 0)^T$.

Таким образом, корректной постановкой задачи в данном случае оказывается синтез такого алгоритма адаптации, что множество $\Omega_\psi(\epsilon)$ содержит притягивающее по Милнору множество с областью захвата, совпадающей со всем множеством допустимых значений состояния \mathbf{x} и оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. В работе рассматриваются два альтернативных набора требований к качеству адаптивного регулятора в зависимости от доступной информации об объекте и цели, а именно:

1) *целевая динамика системы известна*, оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, t, \delta)$ не меняются вдоль $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$ и норма $\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|$ не возрастает со временем;

2) *целевая динамика не известна*, но известны оценки сходимости $\psi(\mathbf{x}(t))$ к целевому множеству при отсутствии параметрических возмущений. Требуется обеспечить достижение целевого множества под действием квазистационарных моделируемых возмущений.

Решение первой задачи дается теоремами 3.11, 3.12, решение задачи 2 вытекает из следствия 3.3. Для начала рассмотрим случай, когда функция $f(\cdot, \cdot)$ параметризована скаляром $\theta \in \Omega_\theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \subset \mathbb{R}$, $\underline{\theta} < \bar{\theta}$, то есть $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) = f(\mathbf{x}, \theta)$. Для каждого $\theta \in \Omega_\theta$ и неотрицательного $\Delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ определим следующее отношение эквивалентности:

$$\theta \sim \theta' \Leftrightarrow |f(\mathbf{x}, \theta) - f(\mathbf{x}, \theta')| \leq \Delta \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

и соответствующие классы эквивалентности

$$[\theta]_\Delta = \{\theta' \in \Omega_\theta | \theta \sim \theta'\}.$$

Для заданных $\varphi(\psi)$ и $\alpha(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(t) \in C^1$ определим следующую функцию:

$$S_\delta(\varphi(\psi), \alpha(t)) = \begin{cases} 1, & |\varphi(\psi) + \alpha(t)| > \delta; \\ 0, & |\varphi(\psi) + \alpha(t)| \leq \delta. \end{cases}$$

С функцией $S_\delta(\varphi(\psi(\mathbf{x}(t))), \alpha(t))$ ассоциируем последовательность T моментов времени

$$T = \underline{t}_0 \leq \bar{t}_0 < \underline{t}_1 < \bar{t}_1 < \dots < \underline{t}_i < \bar{t}_i < \underline{t}_{i+1} < \bar{t}_{i+1} < \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \underline{t}_0 &= t_0; \\ \bar{t}_i &= \inf_{t \geq \underline{t}_i} \{t : |\varphi(\psi(\mathbf{x}(t))) + \alpha(t)| < \delta\}; \\ \underline{t}_i &= \inf_{t \geq \bar{t}_{i-1}} \{t : |\varphi(\psi(\mathbf{x}(t))) + \alpha(t)| > \delta\}. \end{aligned} \quad (3.153)$$

Элементами этой последовательности являются моменты времени \underline{t}_i (или \bar{t}_i), в которые сумма $\varphi(\psi(\mathbf{x}(t))) + \alpha(t)$ покидает (или входит в) область $|\varphi(\psi(\mathbf{x}(t))) + \alpha(t)| \leq \delta$. Положим, что $\underline{t}_0 = \bar{t}_0$, если $|\varphi(\psi(\mathbf{x}(t_0))) + \alpha(t_0)| < \delta$. В дополнение, введем функцию λ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R} &\rightarrow [\underline{\theta}, \bar{\theta}], \quad \lambda \in C^1, \quad \mathcal{I}m(\lambda) \supset [\underline{\theta}, \bar{\theta}]; \\ \forall s \in \mathbb{R}, \theta \in \Omega_\theta &\exists T, \tau(s) > 0; \\ \theta &= \lambda(s + \tau(s)), \quad 0 < \tau(s) < T. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Примером такой функции является

$$\lambda(s) = \underline{\theta} + \bar{\theta} \frac{1}{2} (\sin(s) + 1).$$

В качестве класса допустимых алгоритмов адаптации $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t, \delta)$ выберем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\mathbf{x}, t, \delta) &= \lambda(\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t, \delta)); \\ \hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t, \delta) &= \gamma \left(\hat{\theta}_P(\mathbf{x}, t) + \theta_I(t) + C_\theta(t) \right); \\ \hat{\theta}_P(\mathbf{x}, t) &= \psi(\mathbf{x}) \left(\alpha(t) + \frac{1}{2} \psi(\mathbf{x}) \right); \\ \dot{\hat{\theta}}_I &= S_\delta(\varphi(\psi), \alpha(t)) (\psi(\mathbf{x}) \varphi(\psi) - \psi(\mathbf{x}) \dot{\alpha}(t)); \\ \alpha(t) &= (1, 0) (\xi_1, \xi_2)^T \\ \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \psi, \\ b_1 &\neq 0, \quad a_1, a_2 < 0; \\ C_\theta(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \hat{\theta}(\bar{t}_{i-1}) - \hat{\theta}_I(\bar{t}_{i-1}) - \hat{\theta}_P(t), & t \in (\bar{t}_{i-1}, \underline{t}_i), \\ C_\theta(\bar{t}_{i-1}) + \hat{\theta}_P(\bar{t}_{i-1}) - \hat{\theta}_P(t), & t \in [\underline{t}_i, \bar{t}_i]. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.155)$$

Свойства решений замкнутой системы с алгоритмами адаптации (3.155) приводятся в следующей теореме.

Т е о р е м а 3.11. *Рассмотрим систему (3.1), (3.8), (3.10), удовлетворяющую предположению 3.1. Будем считать, что функция $\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t) \in L_\infty$ и $\|\varepsilon(t)\|_\infty \leq \Delta$. Кроме того, предположим, что $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ограничена. Тогда*

1) для любого $\epsilon > 0$ и $\varphi \in \mathcal{C}_\varphi(k)$, $k > 0$ существуют функции $\delta_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\delta_0 \in C^0$, $\delta(0) = 0$, $\delta(\epsilon, \Delta) = \delta_0(\epsilon) + \Delta$ и функция $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t, \delta)$, заданная системой (3.155) такие что для произвольных $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ и начальных условий множество $\Omega_\psi(\epsilon + \frac{\Delta}{k})$ содержит ω -предельное множество замкнутой системы;

2) все траектории системы ограничены и решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ сходятся в область $\Omega_\psi(\epsilon + \frac{\Delta}{k})$ за конечное время;

3) если, в дополнение, для любого $\theta \in \Omega_\theta$ существуют константы $T_1 > 0$, $M > 2\delta_0(\epsilon) + \Delta > 0$ и функция $\tau(t) : \mathbb{R} \rightarrow (0, T_1)$ такие, что

$$|f(\mathbf{x}(t + \tau(t)), \theta) - f(\mathbf{x}(t + \tau(t)), \hat{\theta})| > M \quad \forall \hat{\theta} \in \Omega_\theta \setminus \mathcal{U}_\epsilon([\theta]), \quad (3.156)$$

тогда $\hat{\theta}$ сходится в $\mathcal{U}_\epsilon([\theta])$ за конечное время.

Теорема 3.11 устанавливает, что для произвольной C^1 -гладкой и ограниченной функции $f(\mathbf{x}, \theta)$ найдется недоминирующее адаптивное управление в классе $\mathcal{C}_\varphi(k)$. Для того, чтобы в этом убедиться достаточно положить $\Delta = 0$. При наличии неизвестных возмущений $\varepsilon(t)$ гарантируется сходимость траекторий $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ в произвольно малую окрестность множества $\Omega_\psi(\frac{\Delta}{k})$ в зависимости от выбора константы $\delta_0 > 0$.

Алгоритм (3.155) обеспечивает ограниченность решений расширенной системы и, более того, при условии (3.156), гарантирует сходимость оценок $\hat{\theta}$ в произвольно малую окрестность множества $\mathcal{U}_\epsilon([\theta]_\Delta)$ или класса эквивалентности $[\theta]_\Delta$. В случае если $[\theta]_\Delta = \{\theta\}$ (единственность) гарантируется оценка параметра θ с заданной точностью. Условие (3.156), требуемое для сходимости оценок $\hat{\theta}$ к \mathcal{U}_ϵ , является версией нелинейного условия *предельной невырожденности регрессора* (см. определение 3.5.2).

Обобщим результаты теоремы 3.11 на многомерный случай $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta \subset \mathbb{R}^d$. С этой целью введем следующее предположение:

Предположение 3.19. Множество Ω_θ ограничено и существует C^1 – гладкая функция $\eta : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^d$, такая, что для всех $\theta \in \Omega_\theta$ найдется $\lambda^*(\theta) \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$:

$$|f(\mathbf{x}, \theta) - f(\mathbf{x}, \eta(\lambda^*))| \leq \Delta, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Применимость алгоритмов (3.155) для многомерных θ в этом случае следует непосредственно из теоремы 3.11.

Теорема 3.12. Рассмотрим систему (3.1), (3.8), (3.10), положим, что функция $f(\mathbf{x}, \theta)$ ограничена и выполнены предположения 3.1, 3.19. Тогда справедливы положения 1) – 3) теоремы 3.11.

Алгоритм адаптации (3.155) может быть рассмотрен как нелинейная динамическая система со входом \mathbf{x} , которая не является устойчивой по Ляпунову. Неустойчивость алгоритма, однако, не приводит к неограниченному росту его состояния или к невозможности достижения цели управления для произвольных начальных условий $\mathbf{x}(t_0)$, $\hat{\theta}_I(t_0)$, $\xi(t_0)$. Скорее наоборот, она является тем свойством, которое обеспечивает саму возможность достижения цели.

В основе синтеза такого алгоритма адаптации находятся две идеи: *монотонная эволюция* параметра $\hat{\theta}_0(t)$ и *множественность положений равновесия* для соответствующей подсистемы, генерирующей решения $\hat{\theta}_0$ и заданной уравнением (ПЗ.100) в Приложении 2. Множественность положений равновесия обеспечивается функцией $\lambda(\cdot)$, определенной в (3.154) и инвариантностью $\hat{\theta}_0(t)$ на множестве

$$\{\mathbf{x}, \hat{\theta}_0 \mid \mathbf{x}, \hat{\theta}_0 : f(\mathbf{x}, \theta) - f(\mathbf{x}, \lambda(\hat{\theta}_0)) = 0\}.$$

Именно эти два свойства: монотонность $\hat{\theta}_0(t)$, с одной стороны, и бесконечное множество положений равновесия вдоль $\hat{\theta}_0(t)$, с другой стороны, и обеспечивают существование предела $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_0(t) = \hat{\theta}_{0,\infty}$ для любых начальных условий $\mathbf{x}(t_0)$, $\hat{\theta}_I(t_0)$, $\xi(t_0)$. Принципиальное отличие этого подхода от стандартных иллюстрируется рис. 3.11.

На рис. 3.11, а, изображены решения $\hat{\theta}_0(t, \hat{\theta}_0(t_0), t_0)$ дифференциального уравнения (ПЗ.100), где стрелки указывают направление, в котором увеличивается независимая переменная вдоль кривой решения. Для произвольного θ и начального условия $\hat{\theta}_0(t_0)$ функция $\lambda(\hat{\theta}_0)$ генерирует бесконечное множество положений равновесия $\hat{\theta}_{0,i}$, $i \in \mathbb{N}$. Под действием квазистационарного параметрического возмущения система покидает текущее положение равновесия (например, $\hat{\theta}_0 = \hat{\theta}_{0,1}$) и движется вдоль оси $\hat{\theta}_0$. В силу монотонности возрастания $\hat{\theta}_0(t, \hat{\theta}_0(t_0), t)$ по t она через некоторое время достигает окрестности точки $\hat{\theta}_0 = \hat{\theta}_{0,2}$ и остается в ней при отсутствии дальнейших возмущений. При достижении границ области допустимых значений знак γ в

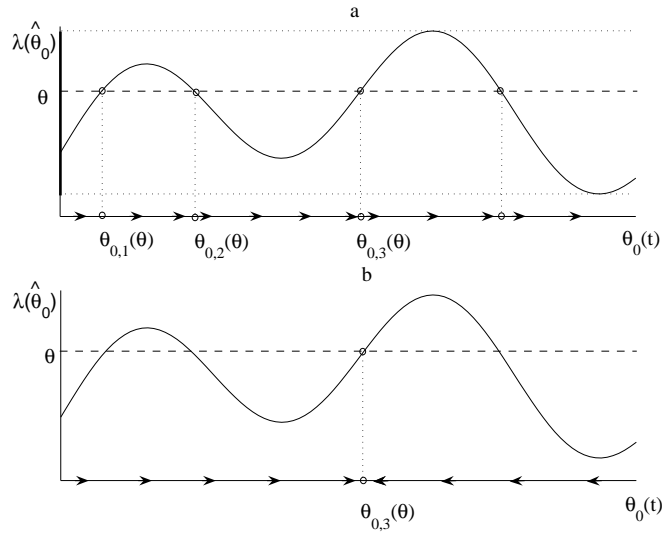


Рисунок 3.11. Адаптация с множественными положениями равновесия, а) и адаптация с единственным положением равновесия, б)

(ПЗ.100) меняется на противоположный. Рис. 3.11, б, иллюстрирует поведение системы в случае асимптотически устойчивого по Ляпунову регулятора. Система способна вырабатывать решение под действием малых возмущений, однако большие возмущения выводят состояние системы из области притяжения устойчивого аттрактора и в этом смысле работоспособность устойчивой системы оказывается ограниченной.

Отметим еще одно свойство алгоритмов (3.155). Эти алгоритмы способны в принципе учитывать информацию о возможных частотах расположения параметров θ в Ω_θ . Подобная информация может быть учтена подходящим выбором функций $\eta(\cdot)$ и $\lambda(\cdot)$, что иллюстрируется рис. 3.12. На рис. 3.12 кривая $\eta(\lambda)$ проходит в окрестности центральной точки существенно чаще (16 раз за период) чем в окрестности других точек (2 раза за период) области. Несмотря на то, что проблема выбора таких кривых $\eta(\lambda)$ не является тривиальной, подобная возможность может существенно улучшить качество адаптивной системы в смысле, например, времени, затраченного на адаптацию.

Перейдем теперь к решению задачи 2. Будем рассматривать классы систем, которые могут быть преобразованы с помощью статической либо динамической обратной связи к следующему виду:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad (3.157)$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) \in L_\infty^m[t_0, \infty], \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\|_{\infty, [t_0, t]} \leq \Delta_\varepsilon$$

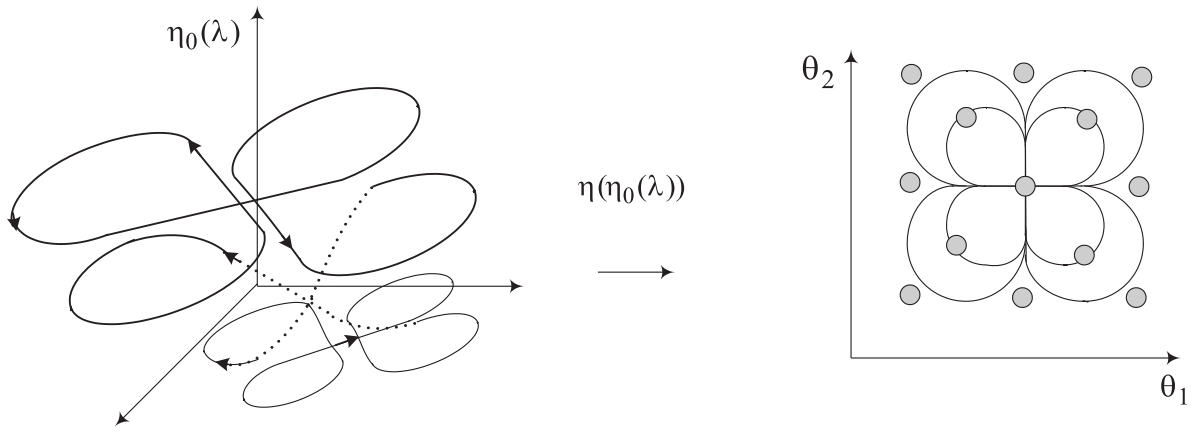


Рисунок 3.12. Траектории $\eta(\lambda)$ как проекции гладких замкнутых кривых. Серыми точками обозначены узлы параметрической сетки, удовлетворяющие предположению 3.19.

это внешнее возмущение известной амплитуды Δ_ε , а $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Функции $\xi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^\xi$ – некоторые функции времени, которые, возможно, включают доступные для измерения функции состояния. Положим, что функция $\mathbf{f}(\xi(t), \theta)$ локально ограничена по θ равномерно по ξ :

$$\|\mathbf{f}(\xi(t), \theta) - \mathbf{f}(\xi(t), \hat{\theta})\| \leq D_f \|\theta - \hat{\theta}\| + \Delta_f$$

и значение параметров $\Delta_f, D_f \in \mathbb{R}_+$ известно. Функции $\mathbf{f}_0(\cdot)$ в (3.157) удовлетворяют следующему условию:

Предположение 3.20. Система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(t) \quad (3.158)$$

полна и кроме того для всех $\mathbf{u}(t)$ таких что

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{\infty, [t_0, t]} \leq \Delta_u + \|\mathbf{u}_0(\tau)\|_{\infty, [t_0, t]}, \quad \Delta_u \in \mathbb{R}_+$$

существует ограниченное множество \mathcal{A} , $c > 0$ и функция $\Delta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяющие неравенству:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}_{\Delta(\Delta_u)}} \leq \beta(t - t_0) \|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}_{\Delta(\Delta_u)}} + c \|\mathbf{u}_0(\tau)\|_{\infty, [t_0, t]}$$

где $\beta(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 0$ строго убывающая непрерывная функция.

Рассмотрим следующую вспомогательную систему

$$\dot{\lambda} = S(\lambda), \quad \lambda(t_0) = \lambda_0 \in \Omega_\lambda \subset \mathbb{R}^\lambda, \quad (3.159)$$

где $\Omega_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и $S(\lambda)$ локально Липшицева. Более того, положим, что для системы (3.159) выполняется следующее.

Предположение 3.21. Система (3.159) устойчива по Пуассону в Ω_λ , т. е.

$$\forall \lambda' \in \Omega_\lambda, t' \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \exists t'' > t' : \|\lambda(t''), \lambda'\| \leq \epsilon,$$

где $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ произвольно мало. Более того, траектория $\lambda(t, \lambda_0)$ плотна в Ω_λ :

$$\forall \lambda' \in \Omega_\lambda, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}_+ : \|\lambda' - \lambda(t, \lambda_0)\| < \epsilon.$$

Предположения 3.20, 3.21 позволяют сформулировать следующий полезный результат.

Следствие 3.3. Рассмотрим систему (3.157) и положим, что выполнены следующие условия

C4) векторное поле $f_0(x, t)$ в (3.157) удовлетворяет предположению 3.20;

C5) существует и известна система (3.159), удовлетворяющая предположению 3.21;

C6) существует локально липшицева функция $\eta : \mathbb{R}^\lambda \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$\|\eta(\lambda') - \eta(\lambda'')\| \leq D_\eta \|\lambda' - \lambda''\|$$

такая, что множество $\eta(\Omega_\lambda)$ плотно в Ω_θ ;

C7) для системы (3.157) определена статическая характеристика по норме

$$\|\cdot\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}}, \quad M = 2\Delta_f + \Delta_\epsilon + \delta$$

относительно входа $\hat{\theta}$, где $\delta > 0$ – некоторая (сколь угодно малая) константа.

Рассмотрим следующее соединение систем (3.157), (3.159):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x, t) + f(\xi(t), \theta) - f(\xi(t), \hat{\theta}) + \epsilon(t); \\ \hat{\theta} &= \eta(\lambda); \\ \dot{\lambda} &= \gamma \|\dot{x}(t)\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}} S(\lambda), \end{aligned} \quad (3.160)$$

где $\gamma > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\gamma \leq \left(\beta_t^{-1} \left(\frac{d}{\kappa \cdot \beta_t(0)} \right) \right)^{-1} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1}{D_\lambda (\beta_t(0) (1 + \frac{\kappa}{1-d}) + 1)}, \quad (3.161)$$

$$D_\lambda = c \cdot D_f \cdot D_\eta \cdot \max_{\lambda \in \Omega_\lambda} \|S(\lambda)\|$$

для некоторых $d \in (0, 1)$, $\kappa \in (1, \infty)$. Тогда для $\lambda(t_0) = \lambda_0$, некоторого $\theta' \in \Omega_\theta$ и всех $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta' \in \Omega_\theta. \quad (3.162)$$

Отметим, что в случае, когда система (3.158) экспоненциально устойчива с показателем сходимости ρ , то с учетом обозначения $\beta(0) = D_\beta$ условие (3.161) имеет вид:

$$\gamma \leq -\rho \left(\ln \frac{d}{\kappa D_\beta} \right)^{-1} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1}{D_\lambda (D_\beta (1 + \frac{\kappa}{1-d}) + 1)}.$$

Согласно следствию 3.3, для широкого класса систем (3.157) оказывается возможным синтез алгоритма адаптации $\hat{\theta}(t)$, который гарантирует не только сходимость вектора $\mathbf{x}(t)$ в окрестность заданного множества, но также и то, что оценки $\hat{\theta}(t)$ имеют предел в Ω_θ . Эти факты при дополнительном условии нелинейной предельной невырожденности:

$$\exists T > 0, \rho \in \mathcal{K} : \forall \mathcal{T} = [t, t+T], t \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \exists \tau \in \mathcal{T} : |\mathbf{f}(\xi(\tau), \theta) - \mathbf{f}(\xi(\tau), \theta')| \geq \rho(\|\theta - \theta'\|)$$

позволяют определить области сходимости оценок $\hat{\theta}(t)$.

Для иллюстрации следствия 3.3 рассмотрим следующий пример

П р и м е р 3.6.2. Пусть уравнения объекта имеют вид

$$\dot{x} = -kx + \sin(x\theta + \theta) + u, \quad k > 0, \quad \theta \in [-a, a], \quad (3.163)$$

где θ – неизвестный параметр, а u – управляющий вход. Без потери общности положим $a = 1$, $k = 1$. Требуется оценить параметр θ по измерениями x , а также обеспечить перевод состояния в начало координат. Очевидно, что выбор $u = -\sin(x\hat{\theta} + \hat{\theta})$ преобразует систему (3.163) к следующему уравнению:

$$\dot{x} = -kx + \sin(x\theta + \theta) - \sin(x\hat{\theta} + \hat{\theta}), \quad (3.164)$$

которое удовлетворяет предположению 3.20. Более того, система

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \lambda_1, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_2, \quad \lambda_1^2(t_0) + \lambda_2^2(t_0) = 1 \end{aligned}$$

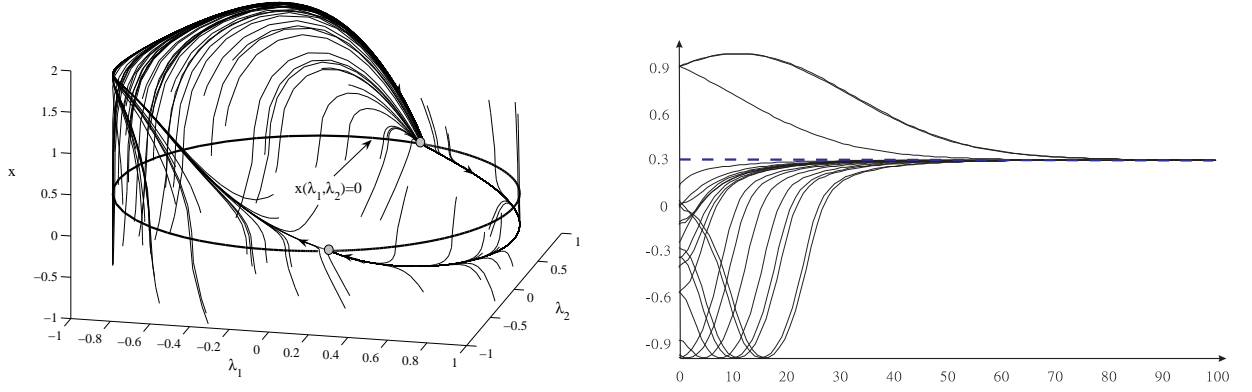


Рисунок 3.13. Траектории замкнутой системы (3.164), (3.165) (слева) и семейство оценок $\hat{\theta}(t)$ параметра θ как функции времени t (справа)

с отображением $\hat{\theta}(\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\eta} = (1, 0)^T \boldsymbol{\lambda}$ удовлетворяет предположению 3.21 и поэтому система

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= \gamma|x|\lambda_1, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\gamma|x|\lambda_2, \quad \lambda_1^2(t_0) + \lambda_2^2(t_0) = 1\end{aligned}\tag{3.165}$$

может быть выбрана в качестве кандидата на “вспомогательную” подсистему алгоритма оценки параметров. В соответствии со следствием 3.3, цель управления достигается, если параметр γ в (3.165) удовлетворяет неравенству

$$\gamma \leq -\rho \left(\ln \frac{d}{\kappa D_\beta} \right)^{-1} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1}{D_\lambda (D_\beta (1 + \frac{\kappa}{1-d}) + 1)}, \quad \rho = k = 1, \quad D_\beta = 1, \quad D_\lambda = 1$$

для некоторых $d \in (0, 1)$, $\kappa \in (1, \infty)$. Тогда, выбирая $d = 0.5$, $\kappa = 2$, получим, что удовлетворение неравенства

$$0 < \gamma < -\ln \left(\frac{0.5}{2} \right)^{-1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = 0.0601$$

обеспечивает желаемые свойства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta.$$

Результаты моделирования системы (3.164), (3.165) при $\theta = 0.3$, $\gamma = 0.05$ с начальными условиями $x(t_0)$, из интервала $[-1, 1]$ представлены на рис. 3.13

4. Искусственные нейронные сети в задаче адаптивного управления

Искусственные нейронные сети, в частности, обучаемые многослойные нейронные сети прямого распространения с нелинейными функциями активации осуществляет настраиваемое нелинейное преобразование многомерной информации на ее входах. Динамика такого преобразования описывается векторными нелинейными дифференциальными уравнениями, общая размерность которых определяется числом настраиваемых весовых коэффициентов синаптических связей. Как нелинейная динамическая структура, обучаемая нейросеть характеризуется сложными виртуальными фазовыми состояниями, зависимыми как от внешних воздействий, так и от текущего состояния искусственных нейронов. Замыкание выходов и входов нейросети прямого распространения через динамический нелинейный объект приводит к возникновению целенаправленной обработки информации, в которой сеть выполняет функцию управления объектом. Такое встраивание нейронной сети в нелинейную динамическую систему “нелинейный динамический объект – настраиваемая нейронная сеть” оказывается интересным предметом исследования и с точки зрения нелинейной динамики, и с точки зрения теории управляемых динамических систем [69, 59, 60, 54, 66, 39, 57]. Обучаемые (настраиваемые) нейронные сети прямого распространения, являются универсальными аппроксиматорами с настраиваемым базисом, что придает системам с нейросетями адаптивные свойства. Многослойные нейронные сети с нелинейными функциями активации в классе сигмоидных в процессе обучения способны к воспроизведению на своих выходах, а, следовательно, на входах управляемых объектов “почти” любую функцию управления. По этой причине многослойные нейронные сети являются адекватным средством для формирования адаптивных нелинейных законов управления.

В разделе дается решение задачи адаптивного управления классом нелинейных объектов, математическая модель неопределенности которых неизвестна, но может быть восстановлена по эмпирическим данным. В отличие от известных подходов, модель неопределенности реконструируется в классе универсальных аппроксиматоров с настраиваемым базисом, а адаптация осуществляется за счет целесообразно выбранных обратных связей, построенных на основе применения результатов разд. 2 и 3. Это позволяет в полной мере использовать эффективность аппроксимации нелинейностей системами функций с настраиваемым базисом при одновременном

обеспечении адаптации к *a priori* неизвестным параметрам среды и возмущений.

В соответствии с постановкой задачи о реализации адаптивного управления с помощью аппроксимационных схем, удовлетворяющих условиям монотонности по множеству входов, обосновывается выбор подходящей архитектуры сети – количества элементов и настраиваемого базиса, и приводятся оценки сходимости аппроксимационного ряда.

Использование универсальных аппроксиматоров в качестве моделей объектов порождает набор прикладных и теоретических проблем, связанных как со спецификой применения самих схем аппроксимации, так и с последующим использованием полученных моделей в задачах адаптивного управления. К числу таких проблем прежде всего следует отнести выбор способа использования аппроксимированных моделей неопределенности в схемах адаптивного управления, вопросы качества аппроксимации и проблему отыскания параметров аппроксиматора или настройки базиса.

Для класса настраиваемых базисов с нелинейной параметризацией предлагается метод параметрической настройки, основанный на эквивалентном представлении нелинейно параметризованных функций в виде суммы решений нелинейных дифференциальных уравнений с линейными по параметрам правыми частями. Вводятся алгоритмы оценки параметров, приводятся условия устойчивости таких процедур и критерии оценки степени приближения к глобальному минимуму по результатам применения алгоритмов.

4.1. Задача адаптивного управления объектами с неопределенной физической моделью возмущений

Теоретические результаты, изложенные в разделах 2, 3 позволяют проводить анализ и синтез законов адаптивного управления для систем (3.1), приводимых управлением (3.8) в форму модели по ошибке (3.10)

$$\dot{\psi} = -\varphi(\psi, \omega, t) + f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) + \varepsilon(t)$$

или, в общем случае, к виду (3.157)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \varepsilon(t).$$

При этом, согласно формулировкам теорем 3.1–3.11 и следствию 3.3, выбор функций $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, обеспечивающих достижение целей управления, осуществляется на основе качественной информации о классах допустимых функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta})$. В этом смысле предложенные алгоритмы адаптации не зависят явным образом от конкретной нелинейности самого объекта.

С другой стороны, управляющие сигналы (3.8), обеспечивающие преобразование уравнений исходной системы к виду (3.10) или (3.157), в явном виде содержат слагаемые $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta})$ и, следовательно, зависят от модели неопределенности самого объекта. Таким образом, результирующие законы адаптивного управления оказываются зависимыми явным образом от конкретной модели неопределенности. В случае, когда физика возмущения известна, естественным кандидатом на роль такой модели являются уравнения физических законов, описывающих возмущение. В случае, если физические модели неточны или их получение оказывается трудоемким и дорогостоящим делом встает задача управления объектами с неопределенной физической моделью.

Отметим, что зависимость управления от модели неопределенности присуща не только рассматриваемым в работе схемам адаптации. В той или иной мере это свойственно любой системе регулирования в условиях неопределенности. Теоретическое обоснование этого факта следует из работ [138, 160, 308], согласно которым наличие модели возмущения является необходимым условием достижения цели в задаче управления по выходу¹. Следовательно, наличие модели неопределенности необходимо для построения адаптивного регулятора.

Строго говоря, недоступность информации о конкретной физической модели неопределенности самого объекта, влечет необходимость использования таких моделей неопределенности в адаптивном регуляторе, которые способны реализовывать процессы максимально широкого диапазона. В нашем случае речь идет прежде всего о непрерывных отображениях $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta})$. Следовательно, модель неопределенности в адаптивном регуляторе должна реализовывать широкие классы непрерывных отображений.

Наиболее естественным механизмом воспроизведения непрерывных отображений являются всевозможные универсальные аппроксиматоры функций многих переменных [134]. Стандартная форма таких моделей может быть определена в виде отображений (регрессоров) $\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$:

$$\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n_{\xi}} c_i \xi_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad \xi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор измеряемого состояния объекта, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$ – вектор известных, но недоступных для непосредственного измерения величин, $\xi_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ – базисные функции регрессора $\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. В силу специфики задач адаптивного управления, в подавляющем большинстве случаев модель неопределенности является функцией как минимум

¹Задача адаптивного управления в широком смысле этого слова может трактоваться как задача управления по выходу уже в силу того обстоятельства, что возмущение предполагается недоступным для непосредственного измерения.

двух аргументов – параметра θ и состояния. Поэтому речь идет прежде всего об универсальных аппроксиматорах функций многих переменных.

Возникает естественный вопрос о выборе наиболее предпочтительного универсального аппроксиматора из всего множества доступных систем функций. Для систем с ненастраиваемым базисом известен результат Бэррона [113], устанавливающий, что скорость сходимости аппроксимационного ряда в системах с ненастраиваемым базисом (в частном случае – полиномами, а в общем случае – в виде регрессора (4.1)) в пространствах $L_2^{n+d}(\Omega)$, $\Omega = [0, 1]^{n+d}$, удовлетворяет оценке

$$\|f(\mathbf{x}, \theta) - \phi(\mathbf{x}, \theta)\|_{2,\Omega}^2 \geq O\left(\frac{1}{n_\xi^{\frac{2}{d+n}}}\right). \quad (4.2)$$

Оценка (4.2) является, по-сути, запретительной для использования систем с ненастраиваемым базисом в задачах аппроксимации отображений с $n + d > 2$. Другими словами, “проклятие размерности” проявляется в полной мере уже для зависимостей с числом аргументов более 2.

Альтернативой ненастраиваемым базисам являются системы аппроксимации функций с настраиваемым базисом вида

$$\phi(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{i=1}^{n_\xi} c_i \sigma_i(\mathbf{w}_i^T(\mathbf{x} \oplus \theta) + b_i), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^{n+d}, \quad \sigma_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Для систем с настраиваемым базисом (4.3), лемма Джонса [198] гарантирует инкрементальную оценку скорости сходимости аппроксимационного ряда в виде

$$\|f(\mathbf{x}, \theta) - \phi(\mathbf{x}, \theta)\|_{2,\Omega}^2 \leq O\left(\frac{1}{n_\xi}\right) \quad (4.4)$$

при условии, что система функций $\sigma_i(\cdot)$ плотна в $L_2^{n+d}(\Omega)$ и функции $\sigma_i(\cdot)$ ограничены по норме в $L_2^{n+d}(\Omega)$. Для негильбертовых пространств $L_p^{n+d}(\Omega)$, $p \neq 2$ аналогичные оценки получены в работе [288].

В фундаментальной работе [183] К. Хорник доказал, что регрессоры вида (4.3) плотны в пространстве $\mathcal{C}(\Omega) \subset L_2^{n+d}(\Omega)$ при условии, что $\sigma_i(\cdot)$ ограничены, непрерывны и не являются постоянными. Это в свою очередь послужило финальным основанием для широкого практического использования регрессоров вида (4.3) с “функциями активации” $\sigma_i(\cdot)$ в классе непостоянных, ограниченных и непрерывных функций – нейронных сетей прямого распространения². Причем, как замечает сам автор [183], именно архитектура нейронных сетей, а не конкретная функция $\sigma_i(\cdot)$ в известном смысле определяет их исключительные особенности эффективно аппроксимировать многомерные зависимости.

²Название нейронные сети регрессоры (4.3) получили за сходство сигмоидных функций активации с передаточной функцией биологического нейрона в самом первом приближении.

Таким образом, результаты Хорника [183], Бэррона [113] и Джонса [198] обосновывают сам факт выбора модели неопределенности в виде *настраиваемых* регрессоров (4.3) с однородными функциями активации $\sigma_i(\cdot) = \sigma(\cdot)$ в качестве моделей неопределенности адаптивного регулятора. Несмотря на эффективность этих моделей, в определенном смысле оптимальность в плане аппроксимации, а также техническую простоту реализации, специфика задач управления накладывает дополнительные ограничения на их использование [59, 60, 54, 66, 39, 57]. Эти ограничения существенно зависят от способа включения модели (4.3) в контур управления. Рассмотрим наиболее распространенные из них.

1. Нейросетевое управление с обучением в режиме off-line (рис. 4.1, а) [59, 39, 66, 60, 320]. В этом случае регрессор (4.3) реализует управляющую функцию, включая внутренние модели возмущений и объекта \mathcal{P} . Достоинством такого включения является возможность точной верификации воспроизводимых управляющих функций с последующей коррекцией качества аппроксимации если это необходимо. Недостатком, очевидно, оказывается отсутствие встроенных механизмов адаптации, что требует полной перенастройки системы при изменении свойств объекта.
2. Нейросетевое управление с обучением в режиме off-line и рекуррентными обратными связями (рис. 4.1, б). Этот способ включения регрессора (4.3) в контексте задач адаптивного управления был введен и проанализирован в [284, 79]. Достоинством является возможность реализации механизмов адаптации к изменению параметров или сигнальным возмущениям. Наиболее существенным недостатком оказывается потенциальная потеря внутренней устойчивости таких регуляторов и необходимость учета этого неприятного свойства в алгоритмах обучения [112].
3. Нейросетевое управление с обучением в режиме on-line (рис. 4.1, в). Свойства схем подобного типа проанализированы автором в работах [1, 56, 55, 58, 15, 39, 75, 59, 54, 16, 65]. К достоинствам таких структур следует отнести потенциальную возможность реализации механизмов адаптации при отсутствии обратных связей в самом регуляторе и, как следствие, разрешение проблем внутренней устойчивости регулятора. Недостатком является необходимость настройки всех базисных функций регрессора (4.3) в реальном времени. Это приводит во-первых, к существенному увеличению числа фактических неизвестных параметров по сравнению с исходным набором неопределенностей, что сказывается на качестве системы. Во-вторых, существуют проблемы достижения цели управления в силу существенной нелинейной параметризации и многомерности результирующей системы.

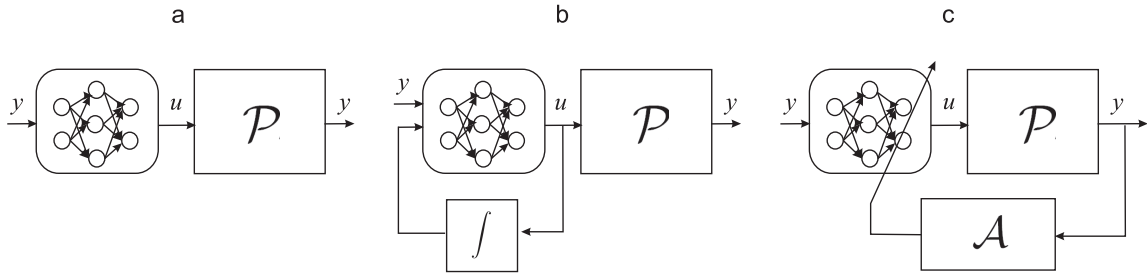


Рисунок 4.1. Типовые способы включения регрессора (4.3) в контур управления. Символами \mathcal{P} , \mathcal{A} на рисунке обозначены объект управления и алгоритм настройки базисных функций соответственно.

Как вытекает из приведенного анализа использования регрессоров с настраиваемым базисом (4.3), существующие схемы управления оказываются либо квазиадаптивными с настройкой вне темпа процессов управления, либо, будучи по сути адаптивными, недостаточно обоснованными из-за сложностей анализа качества, работоспособности и достижения целей управления. Идеальной ситуацией, следовательно, является такое включение регрессора (4.3), которое, с одной стороны, гарантирует высокую точность аппроксимации и ее верифицируемость *a priori* для широкого класса неопределенностей, а с другой стороны, обеспечивает возможность адаптации в темпе управления.

Несмотря на кажущуюся противоречивость и несовместность подобных требований в свете проведенного анализа, использование результатов разд. 2, 3 позволяет получить компромиссное решение этой задачи. Роль регрессора (4.3) в этом случае сводится к аппроксимации модели *влияния неопределенности* на целевые движения:

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) = L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)} \psi(\mathbf{x}, t)$$

в функции управления (3.8)

$$u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}, t) = (L_{\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)} \psi(\mathbf{x}, t))^{-1} \left(-L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)} \psi(\mathbf{x}, t) - \varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t) - \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right),$$

а алгоритмы настройки параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ выбираются согласно теоремам 3.1–3.11 и следствию 3.3. Структурная схема подобного включения регрессора (4.3) в контур управления приведена на рис. 4.2. При этом конкретная модель неопределенности может быть получена непосредственно по экспериментальным характеристикам самого объекта. Алгоритмы адаптации, в свою очередь, согласно условиям их применимости, исследованным в разделе 3, оказываются независимыми от вида конкретной нелинейности из допустимого класса. Более того, согласно теоремам 3.10, 3.7–3.9, а также в силу возможности использования известных способов огрубления алгоритмов адаптации за счет использования зон нечувствительности и шунтирования, алгоритмы настройки параметров оказываются работоспособными при малых погрешностях

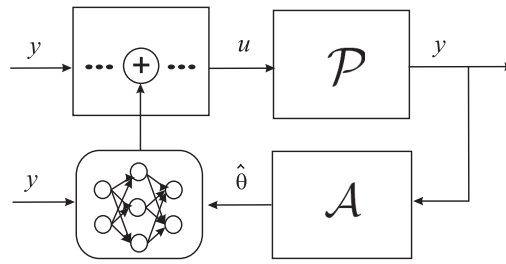


Рисунок 4.2. Структура нейросетевого адаптивного регулятора.

аппроксимации неизвестной модели неопределенности. Следовательно, при условии достаточно хорошей аппроксимации нелинейных характеристик объекта, обеспечивается достижение цели управления в условиях действия возмущений и при неопределенности информации о среде и самом объекте.

При аппроксимации эмпирических зависимостей по экспериментальным измерениям, однако, требуется обеспечить сохранение физически значимых свойств самих процессов. Так, например, от модели упругого взаимодействия, естественно ожидать, что сила упругости действительно пропорциональна или ко-монотонна отклонению. Кроме того, эти физически значимые свойства могут оказаться существенными с точки зрения применимости алгоритмов адаптации (3.29). Так, например, для ряда алгоритмов раздела 3 требуется выполнение предположений 3.3, 3.4, которые локально эквивалентны строгой монотонности $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ по $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}$. Поэтому актуальна задача построения аппроксимационных схем, сохраняющих качественные свойства исходных эмпирических зависимостей. Формально это требование может быть выражено как сохранение свойств выпуклости или монотонности по части переменных хотя бы в пределах доступных эмпирических данных. Не менее актуальна и задача обеспечения наименьшей ошибки аппроксимации. Решению этих проблем посвящены следующие параграфы раздела.

4.2. Задача ко-монотонной нейросетевой аппроксимации функций

Результаты о ко-монотонной и ко-выпуклой аппроксимации функций как по равномерной норме, так и в пространствах $L_p^1[0, 1]$, вообще говоря, известны в литературе (см., например, работы [115, 189, 299] и [345, 213] соответственно). Кроме того, известны и результаты, устанавливающие возможность ко-монотонной и ко-выпуклой интерполяции [161, 293, 286, 164, 147]. Важной особенностью этих работ является тот факт, что предлагаемые в них схемы аппроксимации и интерполяции основаны на полиномиальных рядах. Оценки скорости сходимости таких аппрокси-

мационных рядов известны, и в случае функций одной переменной они определяются выражением $O\left(\frac{1}{n_\xi}\right)$. Для многомерных зависимостей (т. е. уже в случае $d + n \geq 2$) ситуация существенно усложняется.

Возможность ко-монотонной и ко-выпуклой аппроксимации гладких функций при сохранении скорости сходимости (4.4) подтверждаются работами [183, 341] для случая, когда частные производные функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ всюду отделены от нуля. Однако возможность построения такой аппроксимации ограничивается необходимостью решать задачу нелинейного программирования. Таким образом, решение второй проблемы состоит в ответе на вопрос: возможно ли решение задачи ко-монотонной и ко-выпуклой аппроксимации с помощью регрессоров (4.3) без привлечения собственно методов нелинейного программирования?

В качестве объекта исследования рассмотрим класс функций $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, представимых в виде

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = f^*(s, \mathbf{x}), \quad s = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}, \quad f^* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^* \in \mathcal{C}^1. \quad (4.5)$$

Функции класса (4.5) удовлетворяют условиям 3.3, 3.4 по меньшей мере локально. Этот факт следует непосредственно из леммы Адамара и теоремы о среднем:

$$\begin{aligned} f^*(s, \mathbf{x}) - f^*(s', \mathbf{x}) &= \int_0^1 \frac{\partial f^*(\zeta(\lambda), \mathbf{x})}{\partial \zeta} d\lambda (s - s'), \quad \zeta(\lambda) = s\lambda + (1 - \lambda)s' \Rightarrow \\ f^*(s, \mathbf{x}) - f^*(s', \mathbf{x}) &= \frac{\partial f^*(s'', \mathbf{x})}{\partial s''} (s - s'). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Замена $s = \boldsymbol{\alpha}_s(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\theta}$, $s' = \boldsymbol{\alpha}_s(\mathbf{x})^T \hat{\boldsymbol{\theta}}$ в (4.6) дает требуемые уравнения. При этом условие

$$D_1 \nu(\mathbf{x}) \leq \frac{\partial f^*(s'', \mathbf{x})}{\partial s''} \leq D \nu(\mathbf{x}) \quad \forall s'' \in \mathbb{R}$$

гарантирует глобальное (по $\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$) выполнение предположений 3.3, 3.4 с $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \nu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}_s(\mathbf{x})$. Таким образом, гарантия ко-монотонной по s аппроксимации функции $f^*(s, \mathbf{x})$ гарантирует применимость алгоритмов адаптации (3.29), (3.31) в нейросетевых системах управления.

К настоящему времени существует немало результатов (см., например, работы [183, 184]), устанавливающих саму возможность ко-монотонной аппроксимации при определенных условиях. К недостаткам подобных результатов следует отнести, однако, тот факт, что доказательства, как правило, не дают самого механизма построения ко-монотонных аппроксимаций с гарантией ко-монотонности для любого конечного числа элементов в аппроксимирующем ряде (4.3).

Рассмотрим возможность конструктивного построения требуемой ко-монотонной аппроксимации на множестве $\Omega^* \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Для простоты будем считать, что частные производные

$$\frac{\partial f^*(s, \mathbf{x})}{\partial s} = y(s, \mathbf{x}) \geq 0 \quad (4.7)$$

функции $f^*(s, \mathbf{x})$ могут быть измерены непосредственно в результате эксперимента. Подобное ограничение не является существенным ограничением, т. к. согласно результатам, приведенным в работах [147, 345, 213, 161], функцию $f^*(s, \mathbf{x})$ всегда можно интерполировать/аппроксимировать ко-монотонными сплайнами, частные производные которых по аргументу s вычисляются согласно правилам формального дифференцирования полиномов.

Суть предлагаемой ниже процедуры аппроксимации состоит в том, что ко-монотонность аппроксимации достигается за счет использования промежуточного шага в виде аппроксимации отображения $\varrho^{-1}(y(s, \mathbf{x}))$, $\varrho(s) \in \mathcal{K}_\infty \cap \mathcal{C}^0 \forall s \geq 0$, $\varrho(s) = \varrho(-s)$:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_\xi} c_i \sigma_i(\mathbf{w}_i^T(s \oplus \mathbf{x}) + b_i) - \varrho^{-1}(y(s, \mathbf{x})) \right\|_{p, \Omega} \leq \|\varepsilon(s \oplus \mathbf{x})\|_{p, \Omega}, \quad p \geq 1 \quad (4.8)$$

с последующим восстановлением искомого приближения в виде интегрального преобразования

$$\hat{f}^*(s, \mathbf{x}) = \int_{s_0}^s \varrho \left(\sum_{i=1}^{n_\xi} c_i \sigma_i(\mathbf{w}_i^T(\xi \oplus \mathbf{x}) + b_i) \right) d\xi + f^*(s_0, \mathbf{x}). \quad (4.9)$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $\hat{f}^*(s, \mathbf{x})$ действительно монотонна по s в силу симметричности $\varrho(\cdot)$. Этот факт в дополнение к оценкам погрешности аппроксимации (4.9) по норме в $L_p^{n+1}(\Omega)$ для квадратичных ϱ сформулирован в следующей теореме.

Т е о р е м а 4.1. Пусть задана скалярная функция (4.5)

$$f^*(\cdot) \in L_2^{n+1}(\Omega) \cap \mathcal{C}^1, \quad \frac{\partial f^*(s, \mathbf{x})}{\partial s} \in L_2^{n+1}(\Omega),$$

и, кроме того, справедлива оценка (4.8) для $p = 2$ с квадратичной функцией $\varrho(s) = s^2$. Тогда существует ко-монотонная аппроксимация $\hat{f}^*(s, \mathbf{x})$ функции $f^*(s, \mathbf{x})$ вида (4.9), удовлетворяющая оценке

$$\left\| \frac{\partial \hat{f}^*(s, \mathbf{x})}{\partial s} - \frac{\partial f^*(s, \mathbf{x})}{\partial s} \right\|_{1, \Omega} \leq 2 \left\| \frac{\partial f^*(s, \mathbf{x})}{\partial s} \right\|_{2, \Omega}^{1/2} \cdot \|\varepsilon(s, \mathbf{x})\|_{2, \Omega} + \|\varepsilon(s, \mathbf{x})\|_{2, \Omega}^2. \quad (4.10)$$

Если оценка (4.8) выполняется для равномерной нормы ($p = \infty$), то

$$\|\hat{f}^*(s, \mathbf{x}) - f^*(s, \mathbf{x})\|_{\infty, \Omega} \leq 2 \int_{s_0}^s \left(\frac{\partial f^*(\xi, \mathbf{x})}{\partial \xi} \right)^{1/2} d\xi \|\varepsilon(s, \mathbf{x})\|_{\infty, \Omega} + |s - s_0| \|\varepsilon(s, \mathbf{x})\|_{\infty, \Omega}^2. \quad (4.11)$$

Теорема 4.1 дает возможность оценить погрешность ко-монотонной аппроксимации функций по схеме (4.9). Так, в частности, при условии что функции активации

$\sigma_i(\cdot)$ ограничены и $y^{0.5}(s, \mathbf{x}) \in \bar{co}\{\sigma_i\}$, применение леммы Джонса [198] дает следующую итеративную оценку сходимости аппроксимационного ряда

$$\left\| \frac{\partial \hat{f}^*(s, \mathbf{x})}{\partial s} - \frac{\partial f^*(s, \mathbf{x})}{\partial s} \right\|_{1, \Omega} \leq 2 \left\| \frac{\partial f^*(s, \mathbf{x})}{\partial s} \right\|_{2, \Omega}^{1/2} \cdot O\left(\frac{1}{n_\xi^{1/2}}\right) + O\left(\frac{1}{n_\xi}\right). \quad (4.12)$$

С другой стороны, несмотря на относительно высокую скорость сходимости (4.12), структура схемы (4.9) накладывает ряд ограничений на выбор функции активации σ_i . Так, в частности, для возможности реализации (4.9) с $\varrho(s) = s^2$ в виде суммы (4.3) с однородной функцией “активации” $\sigma_i = \sigma$ необходимо разрешить интегральное уравнение

$$\int_{s_0}^s \sigma(\omega_i \xi + \beta_i) \sigma(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^N \tilde{\sigma}_j(\mathbf{w}_j(s \oplus \mathbf{x}) + b_j) \quad (4.13)$$

относительно функций $\tilde{\sigma}(\cdot)$. Решения уравнения (4.13) с сигмоидными функциями активации $\sigma(\xi) = \frac{1}{1+e^\xi}$ могут приводить к необходимости численной аппроксимации функций $\tilde{\sigma}_j$ в правой части (4.13). Экспоненциальные базисные функции активации $\sigma(\xi) = e^\xi$, допускающие аналитическое решение (4.13) и обладающие способностью аппроксимировать функции из $L_p(\Omega)$ [200], однако не являются ограниченными, и в этом смысле они не удовлетворяют условиям леммы Джонса, гарантирующей скорость сходимости вида (4.12). Решение этой проблемы, тем не менее, возможно в классе функций вида $\sigma(\cdot) = \sin(\cdot)$, которые ограничены, плотны как в $L_p(\Omega)$ [183], так и в $L_\infty(\Omega)$ по теореме Вейерштрасса-Стоуна. Решение же уравнения (4.13) в этом случае может быть получено в силу тождества

$$\int_{s_0}^s \sin(\xi) \sin(\omega_i \xi + \beta_i) d\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\omega_i - 1)\xi + \beta_i}{\omega_i - 1} - \frac{\sin(\omega_i + 1)\xi + \beta_i}{\omega_i + 1} \right) \Big|_{s_0}^s.$$

Таким образом, обеспечивается возможность использования оценок погрешности аппроксимации как по равномерной норме (4.11), так и по норме в $L_2(\Omega)$ при сохранении скорости сходимости (4.12).

4.3. Задача синтеза алгоритмов настройки параметров

Рассмотрим задачу отыскания параметров функциональных базисов с нелинейной параметризацией в задаче аппроксимации функций. Более точно, пусть для заданной функции $g(t)$, определенной на интервале $[0, T]$, существует такая функция $y(t)$ вида

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i f(a_i t + b_i), \quad (4.14)$$

где $f(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные функции, что для некоторого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие n, a_i, b_i и c_i , что для всех $t \in [0, T]$ выполняется неравенство:

$$|g(t) - y(t)| \leq \varepsilon. \quad (4.15)$$

Требуется синтезировать процедуры поиска параметров a_i , b_i , c_i и, возможно, n , гарантирующие выполнение неравенства (4.15).

Несмотря на обилие методов нелинейной оптимизации и алгоритмов настройки нейронных сетей (см., например, содержательную монографию [178]), отыскание параметров a_i , b_i , c_i в (4.14) до сих пор остается трудной задачей. Простые в реализации методы локальной оптимизации, например, методы градиентного спуска, работы [61, 71, 151, 321, 74]), не гарантируют получения требуемых оценок в силу невыпуклости функции по параметрам; методы глобальной оптимизации [209, 177, 44] оказываются трудоемкими с вычислительной точки зрения [334]. Для разрешения этой дилеммы в работе [170] предложено решать задачу отыскания параметров a_i , b_i , c_i в (4.14) при дополнительных упрощающих допущениях. В частности, в предположении, что функции $f(a_i t + b_i)$ в (4.14) доступны для измерения на всем интервале $[0, T]$. Это требование, однако эквивалентно тому, что базисные функции предполагаются заранее известными, что вырождает саму задачу отыскания такого базиса. Другая стратегия состоит в использовании методов модификации самого целевого критерия с тем, чтобы измененный критерий был выпуклым по искомым параметрам (см., например, работу [237]). Гарантий сходимости оценок к параметрам a_i , b_i , c_i , тем не менее, до сих пор не получено в рамках этой стратегии.

Ниже исследуется альтернативный метод оценки параметров a_i , b_i , c_i на основе *эквивалентных преобразований статических нелинейных по параметру уравнений (4.14) в систему нелинейных дифференциальных уравнений с линейными параметрами*³ [78, 324]. Эта линейность, в свою очередь, позволяет в принципе применять стандартные методы теории адаптивного управления для поиска оптимальных параметров базисных функций.

Необходимо отметить, что исчерпывающее решение задачи идентификации линейных параметров нелинейных систем до сих пор не получено. Известные решения получены для специальных классов систем, при условии измерения состояния [146] или возможности трансформации системы в специальные канонические формы [241]. Нестандартные подходы, такие как итеративные обучающие схемы [99, 100, 258, 277] дают в результате нестационарные решения, т. е. параметры a_i , b_i , c_i оказываются функциями времени. Работы [270, 193, 295], где утверждается возможность получения стационарных решений в применении итеративных обучающих схем, строят выводы лишь на результатах моделирования без теоретического обоснования результатов.

³Идеи эквивалентных преобразований проблем нелинейной оптимизации в задачи оценки параметров систем дифференциальных уравнений были предложены также и в более ранних работах [63, 64, 75, 95]. Однако в этих работах результирующие системы оказывались нелинейными по параметрам.

Итак, рассмотрим метод синтеза процедур настройки параметров поиска параметров a_i, b_i, c_i на основе методов адаптивного управления со спецификацией областей сходимости и отклонений оценок от оптимальных значений.

4.3.1. Формальная постановка задачи

Рассмотрим проблему поиска параметров $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ нелинейно параметризованного отображения $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, t)$. Решение этой общей задачи можно выполнить как последовательность решений следующих частных задач:

1) найти преобразование исходного нелинейно параметризованного отображения (4.14) в систему нелинейных по состоянию, но линейных по неизвестному параметру дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\mathbf{x})\alpha_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\mathbf{x})\beta_i, \quad y(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}, \quad (4.16)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T \in \mathbb{R}^n$, функции $\xi_{1,i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\xi_{2,i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны и $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$;

2) для класса систем (4.16) найти процедуры оценки параметров α, β .

Решение задачи 1) приводится в классе логистических дифференциальных уравнений [307]. Решение задачи 2) сводится к построению специфического адаптивного наблюдателя вида:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\alpha}_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\beta}_i + \eta(y(\mathbf{x}), y(\hat{\mathbf{x}}), t), \quad y(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{x}}, \\ \dot{\hat{\alpha}} &= \mathcal{A}(y(\mathbf{x}), y(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{x}}, t), \quad \dot{\hat{\beta}} = \mathcal{B}(y(\mathbf{x}), y(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{x}}, t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n)^T, \hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^n$ – оценки неизвестных параметров исходной системы и, соответственно, искомым базисных функций, $\mathcal{A}(\cdot)$ и $\mathcal{B}(\cdot)$ – функции настройки параметров. Для компактности записи в последующем тексте символами $\mathbf{x}(t)$, $\hat{\mathbf{x}}(t)$ будем обозначать решения дифференциальных уравнений (4.16), (4.17), подразумевая зависимость последних от параметров α, β ($\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$) и начальных условий $\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0$ соответственно.

Уравнения расширенной системы, таким образом, имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\mathbf{x})\alpha_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\mathbf{x})\beta_i, \quad y(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}; \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\alpha}_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\beta}_i + \eta(y(\mathbf{x}), y(\hat{\mathbf{x}}), t), \quad y(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{x}}; \\ \dot{\hat{\alpha}} &= \mathcal{A}(y(\mathbf{x}), y(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{x}}, t), \quad \dot{\hat{\beta}} = \mathcal{B}(y(\mathbf{x}), y(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{x}}, t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

⁴Отметим, что векторы α и β не обязательно имеют размерность n , совпадающую с размерностью векторов \mathbf{a}, \mathbf{b} .

Поиск подходящих вектор-функций $\mathcal{A}(\cdot)$ и $\mathcal{B}(\cdot)$ в процедурах настройки параметров, а также функции $\eta(y(\mathbf{x}), y(\hat{\mathbf{x}}))$ составляют существо задачи 2).

Совместное решение задач 1) и 2), очевидно, дает решение искомой проблемы нелинейной оптимизации.

4.3.2. Аппроксимация функций

с помощью логистических уравнений

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 (1 - \beta_1 x_1); \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 x_2 (1 - \beta_2 x_2); \\ \dots &= \dots; \\ \dot{x}_n &= \alpha_n x_n (1 - \beta_n x_n); \\ y(\mathbf{x}) &= \mathbf{C}^T \mathbf{x} = \sum_i c_i x_i, \quad x_i(0) = \Delta_i,\end{aligned}\tag{4.19}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ – параметры системы (4.19), y – функция выхода или измерения состояния, $\mathbf{C} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор параметров функции y , $x_i(0) \in \mathbb{R}$ – начальные условия.

Для системы (4.19) справедлив следующий результат:

Т е о р е м а 4.2. Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, $0 < T < \infty$ и $t \in [0, T]$ существуют такие n , α_i , β_i , c_i и начальные условия $x_i(0) = \Delta_i$, что справедливо следующее неравенство:

$$|y(\mathbf{x}(t)) - g(t)| \leq \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 4.2 основано на известном факте о том, что решение логистического дифференциального уравнения является сигмоидной функцией [238].

З а м е ч а н и е 4.1. Как вытекает из доказательства теоремы 4.2, решение задачи 1) оказывается возможным в классе систем логистических дифференциальных уравнений, которые, в свою очередь, линейно зависят от параметров α_i и c_i . Отметим дополнительно, что линейное преобразование $x_i \mapsto x_i/c_i$ ($c_i \neq 0$) позволяет считать, что параметры \mathbf{C} известны и заданы (см. также замечание 10.1 после леммы 10.1 в приложении 3) и переводит систему (4.19) в систему вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \alpha_i x_i + \beta_i x_i^2; \\ y(\mathbf{x}) &= \sum_i x_i, \quad x_i(0) = \Delta_i/c_i.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение

С л е д с т в и е 4.1. *Рассмотрим систему (4.20) и непрерывно дифференцируемую функцию $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $0 < T < \infty$ и $t \in [0, T]$ существуют такие n , α_i , β_i и начальные условия $x_i(0)$, что справедливо неравенство:*

$$|y(\mathbf{x}(t)) - g(t)| \leq \varepsilon.$$

Этот результат открывает принципиальную возможность трансформации задачи поиска нелинейных параметров гладких функций в задачу поиска линейных параметров α_i , β_i нелинейной системы (4.20). Ограничением является тот факт, что значения $x_i(0)$ должны быть известны. На практике эта проблема решается равномерным распределением начальных условий в заданной области, что по теореме о непрерывной зависимости решений от начальных условий позволяет надеяться на получение достаточно точных приближений.

З а м е ч а н и е 4.2. Теорема 4.2, устанавливая взаимно однозначное отображение между (4.14) и решениями системы (4.20) показывает, по-существу, эквивалентность проблем нелинейной оптимизации и задач синтеза адаптивного наблюдателя для отыскания параметров и состояния системы (4.20) по измерениям y .

В следующем параграфе рассматриваются вопросы поиска значений параметров α_i , β_i .

4.3.3. Синтез алгоритмов оценки параметров систем логистических уравнений

Решение задачи оценки параметров в работе проводится в два этапа. На первом этапе предполагается, что начальные условия $\mathbf{x}(0)$ известны и неопределенность сосредоточена в параметрах α_i , β_i эквивалентной системы. Это свойство формулируется предположением 4.1. С учетом этого предположения синтезируется алгоритм настройки параметров. На следующем этапе рассматривается случай, когда функция $g(t)$ не удовлетворяет предположению 4.1 в силу неизбежной погрешности аппроксимации. Показывается, что в этом случае оказывается возможным использование модифицированной версии предложенных алгоритмов настройки параметров.

В соответствии с описанной стратегией синтеза введем следующее предположение:

Предположение 4.1. Для заданной непрерывно дифференцируемой функции $g(t)$, числа n и начальных условий $x_i(0)$ найдутся значения параметров α_i и β_i такие, что для всех $t \in [0, T]$ вдоль решений системы (4.20) выполняется следующее равенство:

$$g(t) - \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = 0.$$

Предположение 4.1, очевидно, эквивалентно утверждению, что функция $g(t)$ может быть представлена в виде решений системы (4.20):

$$g(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(\alpha_i, \beta_i, x_i(0), t).$$

Отметим, что предположение 4.1 в этом смысле утверждает лишь возможность представления функции $g(t)$ суперпозицией сигмоидных функций.

Для компактности переопределим запись системы (4.20) следующим образом $\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\mathbf{x})\alpha_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\mathbf{x})\beta_i$, где

$$\xi_{1,i}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (i-1) \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \\ x_i \\ (n-i) \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \xi_{2,i}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (i-1) \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \\ x_i^2 \\ (n-i) \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения расширенной системы могут быть записаны в виде системы (4.18), введенной в параграфе 4.3.1:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\mathbf{x})\alpha_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\mathbf{x})\beta_i, \quad y(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}; \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\alpha}_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\beta}_i + \eta(y(\mathbf{x}), y(\hat{\mathbf{x}}), t), \quad y(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}} = (1, \dots, 1)^T$, а функция $\eta(y(\mathbf{x}), y(\hat{\mathbf{x}}), t)$ подлежит определению. Одним из возможных вариантов определения этой функции является выбор:

$$\eta(y(\mathbf{x}), y(\hat{\mathbf{x}}), t) = K(t)(y(\hat{\mathbf{x}}) - y(\mathbf{x})),$$

где $K(t) = (k_1(t), \dots, k_n(t))^T$, а функции $k_i(t)$ будут уточнены позднее. С учетом этих обозначений уравнения расширенной системы (4.20) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\mathbf{x})\alpha_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\mathbf{x})\beta_i, \quad y(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}; \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\alpha}_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\beta}_i + K(t)(y(\hat{\mathbf{x}}) - y(\mathbf{x})), \quad y(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Кроме того, положим, что сигнал $g(t)$, определенный на интервале $[0, T]$ периодически повторяется при $t > T$. Без потери общности в терминах динамических систем это может быть реализовано за счет доопределения эквивалентной системы, генерирующей сигнал $g(t)$ нестационарной обратной связью, действующей на некотором интервале времени ΔT . Формально это требование вводится в следующем предположении.

Предположение 4.2. *Существует положительное число $l_0 > 0$ и функция $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \lambda(t, D) &= \begin{cases} 0, & t \in [(j-1)T_1, jT_1 - \Delta T_2) \cap [(j-1)T_1, (j-1)T_1 + \Delta T(j)); \\ 1, & t \in [jT_1 - \Delta T_2, jT_1) \cup [(j-1)T_1 + \Delta T(j), jT_1); \\ & \Delta T(j) : (j-1)T_1 < \Delta T(j) < jT_1 - \Delta T_2, \end{cases} \\ &\forall \tau \in [(j-1)T_1, (j-1)T_1 + \Delta T(j)) \Rightarrow \|\hat{\mathbf{x}}(\tau)\| < D; \\ &j \in \{1, 2, \dots, \infty\}, \end{aligned}$$

такие, что функция $\tilde{g}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \left(\sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\mathbf{x}) \alpha_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\mathbf{x}) \beta_i \right) (1 - \lambda(t, D)) - \lambda(t, D) l_0 \sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)); \\ y(\mathbf{x}(t)) &= \tilde{g}(t), \end{aligned}$$

где $\sigma(\cdot)$:

$$\sigma(\cdot) = (\sigma_1(\cdot), \dots, \sigma_n(\cdot))^T; \quad \sigma_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)) = \text{sign}(\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)); \quad l_0 \geq D/\Delta T_2, \quad \tilde{g}(t_1), t_1 \in [0, \infty),$$

является периодическим расширением сигнала $g(t)$, $t \in [0, T]$, где $T_1 = T + \Delta T_2$.

Предположение 4.2 утверждает, что эталонная система возвращается в исходное состояние либо при условии, что норма $\|\hat{\mathbf{x}}\|$ достигает заранее заданного критического значения D , либо при условии, что аргумент t достигает значений на которых исходная функция $g(t)$ не определена. Эти значения определены как $[jT_1 - \Delta T_2, jT_1)$. На интервалах времени $[(j-1)T_1, (j-1)T_1 + \Delta T(j))$ эталонный сигнал $y(\mathbf{x}(t))$ совпадает с функцией $g(t - (j-1)T_1)$, определенной в предположении 4.1. Траектории, по которым состояние системы возвращается в исходное, не имеет значения. Существенно, однако, чтобы состояния системы в моменты времени jT_1 , $j = 0, 1, \dots$ совпадали. Для этого вводится регуляризационный коэффициент l_0 , обеспечивающий выполнение равенства $x_i(jT_1) = \hat{x}_i(t) = \hat{x}_i(jT_1) = x_i(0)$.

С учетом предположения 4.2 и исходя из общего принципа построения наблюдателей типа Люенбергера (наблюдатель "копирует" наблюдаемую систему), уравнения

расширенной системы принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \left(\sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\mathbf{x})\alpha_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\mathbf{x})\beta_i \right) (1 - \lambda(t, D)) - \lambda(t, D)l_0\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)); \\
 \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \left(\sum_{i=1}^n \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\alpha}_i + \sum_{i=1}^n \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\beta}_i + K(t)(y(\hat{\mathbf{x}}) - y(\mathbf{x})) \right) (1 - \lambda(t, D)) \\
 &\quad - \lambda(t, D)l_0\sigma(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}(0)); \\
 \hat{y}(t) &= y(\hat{\mathbf{x}}(t)) = \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{x}}(t); \\
 y(t) &= y(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}(t).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Перед тем, как сформулировать алгоритмы настройки параметров наблюдателя, рассмотрим следующую лемму:

Л е м м а 4.1. Пусть задана система (4.22) и $\hat{\mathbf{C}}^T \neq 0$. Рассмотрим

$$|\hat{\mathbf{C}}^T \sum_{i=1}^n (\alpha_i(\xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{1,i}(\mathbf{x})) + \beta_i(\xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{2,i}(\mathbf{x}))) (1 - \lambda(t, D))| + \epsilon \sum_{i=1}^n k_i \hat{c}_i.$$

Тогда для любого числа $\delta > 0$ найдутся $k_i = k_i^* \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{aligned}
 &|\hat{\mathbf{C}}^T \sum_{i=1}^n (\alpha_i(\xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{1,i}(\mathbf{x})) + \beta_i(\xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{2,i}(\mathbf{x}))) (1 - \lambda(t, D))| \\
 &+ \epsilon \sum_{i=1}^n k_i^* \hat{c}_i < 0
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

для каждого $\epsilon > \delta$.

В соответствии с леммой 4.1 ошибка $e = \hat{y}(t) - y(t)$ асимптотически сходится в область $|e| \leq \delta$ при $\hat{\alpha} = \alpha$, $\hat{\beta} = \beta$, $\lambda(t, D) = 0$ и $k_i(t) = k_i^*$ в силу равенства

$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= \left(\hat{\mathbf{C}}^T \sum_{i=1}^n (\alpha_i(\xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{1,i}(\mathbf{x})) + \beta_i(\xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{2,i}(\mathbf{x}))) + e \sum_{i=1}^n k_i^* \hat{c}_i \right) \times \\
 &\quad (1 - \lambda(t, D))
 \end{aligned}$$

и с учетом того, что

$$\frac{d}{dt}(0.5e^2) = ee' < 0, \quad \forall |e| > \delta.$$

Введем следующие алгоритмы настройки параметров $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\alpha}}_i &= -\gamma e(t) S_\delta(e) \hat{\mathbf{C}}^T \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) (1 - \lambda(t, D)), \\
 \dot{\hat{\beta}}_i &= -\gamma e(t) S_\delta(e) \hat{\mathbf{C}}^T \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) (1 - \lambda(t, D)), \\
 S_\delta(e) &= \begin{cases} 1, & |e| > \delta \\ 0, & |e| \leq \delta, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

где $e(t) = \hat{y}(t) - y(t)$ – траекторная ошибка, $\gamma > 0$ – положительная константа. Отметим, что параметры $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$ изменяются лишь на тех интервалах времени, где эталонный сигнал полностью совпадает с исходной функцией $g(t)$.

Свойства устойчивости по Ляпунову замкнутой системы (4.22) с алгоритмом (4.24) вытекают из условий следующей теоремы.

Т е о р е м а 4.3. Пусть выполняются предположения 4.1, 4.2, вектор $\hat{C} \neq 0$, и функция $K(t) = (k_1(t), \dots, k_n(t))^T$ в (4.22) задана уравнениями:

$$\dot{k}_i = -\gamma S_\delta(e) e^2 \hat{c}_i (1 - \lambda(t, D)). \quad (4.25)$$

Тогда для любого $\gamma > 0$ траектории системы (4.22) ограничены, и существует такой момент времени $t_1 > 0$, что для всех $t > t_1$ выполняется условие:

$$|y(\mathbf{x}(t)) - y(\hat{\mathbf{x}}(t))| \lambda(t, D) < \delta + \delta_1, \delta_1 > 0.$$

З а м е ч а н и е 4.3. Теорема 4.3 гарантирует, что функция $e(t)\lambda(t, D)$ в (4.22) сходится в область $|e(t)\lambda(t, D)| < \delta$, где значение δ определяется алгоритмом (4.24). Отметим, однако, что выполнение неравенства $|e(t)\lambda(t, D)| < \delta$ не влечет в общем случае сходимости оценок $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ к $\hat{\alpha} = \alpha$, $\hat{\beta} = \beta$ в пространстве параметров. Тем не менее, в соответствии с формулой (П4.8) (см. Приложение 3, доказательство теоремы 4.3), оказывается возможным оценить близость оценок к идеальным значениям

$$\begin{aligned} & \|\hat{\alpha}(t_0) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|\hat{\beta}(t_0) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|\hat{\alpha}(t) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|\hat{\beta}(t) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 \\ & \geq \|K(t) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|K(t_0) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 + 2 \int_{t_0}^t S_\delta(e) |e(\tau) \lambda(\tau, D)| \sum_{j=1}^n k_j^* \hat{c}_j |\delta_1| d\tau \end{aligned} \quad (4.26)$$

Выражение (4.26) может служить мерой качества оценок параметров α и β . В частности, выбор $K(t_0) = 0$ влечет

$$\begin{aligned} & \|\hat{\alpha}(t_0) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|\hat{\beta}(t_0) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|\hat{\alpha}(t) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|\hat{\beta}(t) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 \\ & \geq \|K(t) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 + 2 \int_{t_0}^t S_\delta(e) |e(\tau) \lambda(\tau, D)| \sum_{j=1}^n k_j^* \hat{c}_j |\delta_1| d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, чем меньше значение нормы $\|K(t)\|$, тем выше шанс, что разность

$$\|\hat{\alpha}(t_0) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|\hat{\beta}(t_0) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|\hat{\alpha}(t) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|\hat{\beta}(t) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2. \quad (4.27)$$

неотрицательна. С другой стороны, информация о значениях δ , δ_1 , D , \hat{C} и границах допустимых областей параметров α , β в принципе позволяет получить оценки значений параметров k^* , обеспечивающих выполнение неравенства (4.23). Следовательно,

в этом случае формула (4.26) дает верхние границы отклонений оценок $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ от *a priori* неизвестных α и β . Если значения k^* известны, то функции времени $k_i(t)$ в (4.22) можно заменить на константы k_i^* . Тогда разность (4.27) окажется неотрицательной при дополнительном условии, что найдется некоторый момент времени t_1 , такой что значение функции $|e(t_1)\lambda(t_1, D)|$ превысит порог δ .

В общем случае для того, чтобы обеспечить положительность разности (4.27) для заданной параметризации эталонной системы, необходим более глубокий анализ свойств решений $\rho = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ при $\hat{\alpha} = \alpha$ и $\hat{\beta} = \beta$ для $\lambda(t, D) = 0$:

$$\dot{\rho} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (\xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{1,i}(\mathbf{x})) + \beta_i (\xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{2,i}(\mathbf{x})) \right) + K(t) \hat{\mathbf{C}}^T (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}).$$

Так, в частности, отметим что функции $\xi_{1,i}$ и $\xi_{2,i}$ дифференцируемы по своим аргументам. Следовательно, существуют такие $\Xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ и $\Xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$, что справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \Xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) &= \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{1,i}(\mathbf{x}), \\ \Xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) &= \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{2,i}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Тогда производные $\dot{\rho}$ имеют вид:

$$\dot{\rho} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \Xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) + \beta_i \Xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) + K(t) \hat{\mathbf{C}}^T \right) \rho. \quad (4.28)$$

Как вытекает из доказательства теоремы 4.3, монотонное возрастание функции (4.27) гарантируется, если существуют положительно определенные функции $V(y(\hat{\mathbf{x}}), y(\mathbf{x}))$ и $W(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ такие, что:

$$\dot{V}(y(\hat{\mathbf{x}}), y(\mathbf{x})) \leq -W(y(\hat{\mathbf{x}}) - y(\mathbf{x})) \quad (4.29)$$

при $\hat{\alpha} = \alpha$, $\hat{\beta} = \beta$. Таким образом, отыскание вектор-функции $K(t)$, асимптотически стабилизирующей систему (4.28) в заданной области параметров α , β при выполнении неравенства (4.29), автоматически гарантирует требуемую положительность функции (4.27). Решение последней задачи математически формулируется как проблема Броккета⁵ [125] в нелинейной постановке, успешное разрешение которой для линейного случая было относительно недавно получено в работах [34, 35, 228, 247].

⁵Рассмотрим тройку матриц $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Требуется найти условия, при которых существует матрица $K(t)$ такая, что система

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + BK(t)C\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

оказывается асимптотически устойчивой.

Рассмотрим теперь практически важный случай, когда предположение 4.1 не выполняется. Это эквивалентно наличию ненулевой ошибки $\varepsilon(t)$ между выходом $y(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}(t)$ эталонной системы и действительным сигналом $g(t)$:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) - g(t).$$

Положим, что функция $g(t)$ непрерывно дифференцируема, тогда ошибка $\varepsilon(t)$ также непрерывно дифференцируема. Обозначим ее производную по времени символом $d\varepsilon(t)$:

$$\frac{d}{dt}(y(\mathbf{x}(t)) - g(t)) = \sum_{i=1}^n c_i \dot{x}_i - \dot{g}(t) = d\varepsilon(t). \quad (4.30)$$

В силу ограниченности интервала $[0, T]$ можно заключить, что $d\varepsilon(t)$ ограничена:

$$|d\varepsilon(t)| < s.$$

Рассмотрим ошибку $e(t) = y(\hat{\mathbf{x}}) - g(t) = y(\hat{\mathbf{x}}) + \varepsilon(t) - y(\mathbf{x})$ с учетом равенства $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}}$:

$$\begin{aligned} \dot{e} = & \hat{\mathbf{C}}^T \left(\sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_i \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \alpha_i \xi_{1,i}(\mathbf{x}) + \hat{\beta}_i \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \beta_i \xi_{2,i}(\mathbf{x}) \right) (1 - \lambda(t, D)) \\ & + d\varepsilon(t) + \hat{\mathbf{C}}^T (K(t)(y(\hat{\mathbf{x}}) - y(\mathbf{x}) + \varepsilon(t))(1 - \lambda(t, D)) \\ & + l_0(\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \sigma(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0))\lambda(t, D)). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Отличие системы (4.31) от исходной записи эталонного сигнала в предположении 4.1 заключается в слагаемом $d\varepsilon(t) + \mathbf{C}^T K(t)\varepsilon(t)$, которое соответствует немоделируемой динамике эталонной системы.

Стандартным способом регуляризации алгоритмов настройки в этом случае является введение зоны нечувствительности. Так, например, для $K(t) = \text{const}$ алгоритмы настройки будут иметь вид, идентичный уравнениям (4.24):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\alpha}}_i &= -\gamma e(t) S_\delta(e) \hat{\mathbf{C}}^T \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) (1 - \lambda(t, D)), \\ \dot{\hat{\beta}}_i &= -\gamma e(t) S_\delta(e) \hat{\mathbf{C}}^T \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) (1 - \lambda(t, D)), \\ S_\delta(e) &= \begin{cases} 1, & |e| > \delta, \\ 0, & |e| \leq \delta, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.32)$$

за исключением того, что параметр δ зоны нечувствительности зависит от оценок верхних границ $|d\varepsilon(t)|$ и $\|\mathbf{C}^T K \varepsilon(t)\|$. Теоретический анализ поведения системы оценивания с алгоритмом (4.32) может быть проведен стандартным способом (см., например, алгоритмы с зоной нечувствительности в [84]), а результаты этого анализа являются очевидным расширением сформулированных ранее свойств для системы с алгоритмом (4.24) и поэтому в явном виде не приводятся.

Очевидно также, что точность полученных оценок зависит от значений параметра δ , которые, в свою очередь, зависят от значений верхних границ для $|d\varepsilon(t)|$ и $\|\mathbf{C}^T K \varepsilon(t)\|$. Следовательно, в общем случае применимость подхода зависит в значительной мере от гладкости функции $\varepsilon(t)$. Эта проблема, однако, в принципиальном плане решается в силу свойств сигмоидных аппроксиматоров в соболевских пространствах [184, 185]. Так, в частности, может быть показано, что для любого сколь угодно малого $\delta_2 > 0$ найдется суперпозиция сигмоидных функций, способных аппроксимировать функцию $g(t)$ с заданной точностью по равномерной норме при условии, что $d\varepsilon(t)$ и $\varepsilon(t)$ удовлетворяют оценке $|d\varepsilon(t) + \mathbf{C}^T K \varepsilon(t)| < \delta_2$. Следовательно, алгоритм (4.32) оказывается применим даже в случае ненулевых дифференцируемых ошибок $\varepsilon(t)$. Величина параметра δ при этом определяется размерностью системы.

Рассмотрим теперь расширение приведенных результатов на случай аппроксимации функций векторного аргумента. Теорема 4.2 утверждает, что произвольная непрерывно дифференцируемая функция скалярного аргумента t на интервале $[0, T]$ может быть аппроксимирована решениями системы (4.20). Выберем функцию $g(t)$ следующим образом:

$$g(t) = \tilde{g}(\xi(t)), \quad (4.33)$$

где $g \in C^1$, $\xi(t)$ – непрерывные функции параметра t . Положим, что система (4.20) реализует функцию $\tilde{g}(\xi)$. Это означает, что

$$\tilde{g}(\xi) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(\xi),$$

где $\dot{x}_i = \alpha_i x_i(1 - \beta_i x_i)$. Рассмотрим функцию $\tilde{g}(\xi)$ как функцию времени t , удовлетворяющую равенству (4.33). Тогда, в соответствии с (4.33) имеем:

$$\tilde{g}(\xi(t)) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(\xi(t)).$$

Более того,

$$\dot{g}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{g}(\xi(t)) = \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{g}(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(1 - \beta_i x_i) \dot{\xi}(t).$$

Следовательно, при условии, что: $\dot{g}(t) = \dot{\tilde{g}}(t)$ при $t = 0$ и $g(0) = \tilde{g}(\xi(0))$ линейная комбинация $\sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$ решений системы

$$\dot{x}_i = \alpha_i x_i(1 - \beta_i x_i) \dot{\xi}(t)$$

реализует функцию $g(t)$ и наоборот. Это простое наблюдение позволяет расширить сформулированные результаты на векторный случай.

Рассмотрим эталонную функцию $g(\xi_1, \dots, \xi_m)$ с m входами как функцию времени t : $g(\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$. Тогда система, реализующая функцию $g(\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$

представима в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} \dot{\xi}_j(t) \right) x_i (1 - \beta_{i,j} x_i); \\ y(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{i=1}^n c_i x_i(t).\end{aligned}\tag{4.34}$$

Согласно теореме 4.2 система (4.34) аппроксимирует функцию $g(\xi_1, \dots, \xi_m)$ на заданном интервале таким образом, что для выбранной траектории $(\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся параметры $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, c_i , начальные условия и число n , удовлетворяющие оценке:

$$|g(\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)) - y(\mathbf{x}(t))| \leq \varepsilon.$$

Кривая $\xi(t)$ в этом случае должна быть выбрана таким образом, чтобы хорошая аппроксимация вдоль $\xi(t)$ обеспечивала хорошую аппроксимацию всей поверхности. Это зависит от того насколько хорошо кривая $\xi(t)$ покрывает заданную область. Возможным классом таких кривых является класс гладких кривых Пеано, заполняющих пространство.

П р и м е р 4.3.1. Проиллюстрируем применение теоремы 4.3 к задаче поиска значений неизвестных параметров сигмоидной функции и затем покажем эффективность предложенного метода в сравнении с общепринятыми схемами для решения двумерной оптимизационной задачи.

Покажем возможность одновременного поиска параметров α_i и c_i . Эталонную функцию $g(t)$ выберем в виде:

$$g(t, \alpha, c) = \frac{c}{1 + e^{-\alpha t + 2.944}},$$

где $c = 2$, $\alpha = 2/3$. Эталонная система и наблюдатель могут быть построены следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\alpha x - \beta x^2)(1 - \lambda(t)) - \lambda(t)(l_0 \sigma(x - x(0))), \\ \dot{\hat{x}} &= (\hat{\alpha} \hat{x} - \hat{\beta} \hat{x}^2)(1 - \lambda(t)) - \lambda(t)(l_0 \sigma(\hat{x} - x(0))) - K(t)e,\end{aligned}\tag{4.35}$$

где $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$, $l_0 = 2$, $x(0) = 0.1$, $K(t) = 2.02$, $e = \hat{x} - x$. Выберем функцию $\lambda(t)$ как периодическую с периодом $T = 10$ с, шириной импульса равным 1 с и единичной амплитудой (можно легко проверить, что выбор таких параметров гарантирует точное совпадение функций $g(t)$ и $x(t)$ за интервал времени $[0, 9]$). Параметр l_0 вычисляется таким образом, чтобы гарантировать, что $x(j10) = 0.1$ для $j = 1, 2, \dots$.

Закон адаптации для настройки параметров $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\alpha}} &= -0.2e(t)\hat{x}(t)(1 - \lambda(t)); \\ \dot{\hat{\beta}} &= 0.2e(t)\hat{x}^2(t)(1 - \lambda(t)).\end{aligned}\quad (4.36)$$

Выбором соответствующей величины $K(t)$ можно гарантировать, что для любого e выполняется следующее

$$|\alpha(x - \hat{x}) + \beta(x^2 - \hat{x}^2)| = |(x - \hat{x})(\alpha + \beta(x + \hat{x}))| \leq |e|\frac{6}{3} = 2|e| = K(t)|e|.$$

Выбор $K(t) = 2$ обеспечивает выполнение этого неравенства. При этом коэффициент $K(t)$ можно считать оценкой параметра k^* . Следовательно, применение алгоритма (4.36) гарантирует сходимость оценок $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ к α и β (см. лемму 4.1 и замечание 4.3).

Для того, чтобы пример выглядел более иллюстративным, сравним эффективность алгоритма (4.36) с традиционной градиентной схемой с локальным целевым функционалом (поэлементное сравнение без памяти):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\alpha}} &= -0.2e(t)\frac{\partial g(t, \hat{\alpha}, \hat{c})}{\partial \hat{\alpha}}, \\ \dot{\hat{c}} &= -0.2e(t)\frac{\partial g(t, \hat{\alpha}, \hat{c})}{\partial \hat{c}},\end{aligned}\quad (4.37)$$

и схемой с интегральным целевым функционалом:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\alpha}} &= -0.2\frac{\partial J(\hat{\alpha}, \hat{c})}{\partial \hat{\alpha}}, \\ \dot{\hat{c}} &= -0.2\frac{\partial J(\hat{\alpha}, \hat{c})}{\partial \hat{c}},\end{aligned}\quad (4.38)$$

где

$$J(\hat{\alpha}, \hat{c}) = \int_0^9 (g(\tau, \hat{\alpha}, \hat{c}) - g(\tau, \alpha^*, c^*))^2 d\tau.$$

Результаты такого сравнения показаны на рис. 4.3–4.6. На рис. 4.3 изображены две траектории параметров $\hat{\alpha}(t)$ и $\hat{c}(t)$ в двухмерном пространстве. Первая кривая получена по траекториям параметров $\hat{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)$, $\hat{c}(t) = \hat{\alpha}(t)/\hat{\beta}(t)$ в результате применения алгоритма (4.36) с начальными условиями $\hat{\alpha}(0) = -3$, $\hat{\beta}(0) = 1$. Кривая 2 – результат применения (4.37) при начальных условиях $\hat{\alpha}(0) = -3$, $\hat{c}(0) = -3$. Отметим, что алгоритм (4.36) достигает глобальный минимум, тогда как традиционный алгоритм градиентного спуска не справляется с поставленной задачей. Результирующая

траектория оказывается неустойчивой и проходит в стороне от глобального минимума вдоль оврага. Этот процесс показан на рис. 4.3. Кроме того, быстродействие алгоритма (4.36) намного превышает быстродействие (4.37) (см. рис. 4.4).

На рис. 4.5 отображена другая интересная особенность алгоритма (4.36). В то время как традиционный градиентный алгоритм начинается при $\hat{\alpha}(0) = 3, \hat{c}(0) = -3$ и движется в направлении цели вдоль изолиний (кривая 2), траектория, определяемая алгоритмом (4.36) не “приклеивается” к изолиниям. Вместо этого она проходит через бесконечные значения в координатах $\hat{\alpha}, \hat{c}$. Этот эффект возникает, очевидно, в силу преобразования $\hat{c} = \hat{\alpha}/\hat{\beta}$, когда оценка $\hat{\beta}$ проходит через нуль.

На рис. 4.6 представлены траектории решений, полученных в результате применения алгоритма (4.38). Кривая 1 соответствует траектории с начальными условиями $\hat{\alpha}(0) = -3, \hat{c}(0) = -3$, кривая 2 – с начальными условиями $\hat{\alpha}(0) = 3, \hat{c}(0) = -3$. Легко увидеть, что этот алгоритм застревает в точке локального минимума.

Более эффективные результаты применения алгоритма (4.36) объясняются тем, что в нем используется информация о системе и ее свойствах более “интеллектуальным” образом, чем это делается в градиентных подходах. Кроме того, в силу неявного преобразования координат, процесс поиска минимума осуществляется де-факто в другой координатной системе. Отметим, в дополнение, что все результаты, относящиеся к устойчивости, останутся справедливыми и для иных функций, не только сигмоидных.

В дополнение к рассмотренному выше простому примеру, который иллюстрирует лишь сам процесс синтеза законов настройки параметров, предложенных в разделе, и их эффективность в сравнение со стандартными градиентными схемами, представим результаты оценивания параметров для суперпозиций большего числа функций. Рассмотрим, например, сумму 10 сигмоидных функций:

$$g(t, \alpha, \mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{10} \frac{c_i}{1 + e^{-\alpha_i t + b_i}},$$

где параметры b_i и c_i предполагаются известными и $t \in [0, T]$. Согласно приведенным в разделе результатам, эта сумма эквивалентна сумме решений соответствующей системы логистических уравнений (4.19) с известными β_i, c_i и начальными условиями. Неизвестными являются только параметры α_i . Прежде всего, продолжим эталонный сигнал $g(t)$ таким образом, чтобы он был периодически повторяющейся функцией на

интервале $[0, \infty)$:

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & t \leq T, \\ 0, & T < t < T + \Delta T_2, \\ g(t) = g(t - T - \Delta T_2), & t > T + \Delta T_2. \end{cases}$$

Построим наблюдатель:

$$\dot{\hat{x}}_i = \hat{\alpha}_i \hat{x}_i (1 - \hat{x}_i) (1 - \lambda(t, D)) + k_i(t) e (1 - \lambda(t, D)) - \lambda(t, D) l_0 \sigma(\hat{x}_i - x_i(0)), \quad (4.39)$$

и алгоритм адаптации:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\alpha}}_i &= -\gamma S_\delta(e) e \hat{x}_i (1 - \hat{x}_i) (1 - \lambda(t, D)), \\ \dot{k}_i(t) &= -\gamma S_\delta(e) e^2 c_i (1 - \lambda(t, D)), \end{aligned} \quad (4.40)$$

где $D = 10$ (с учетом того, что $|x_i| \leq 1$, естественно выбрать $D \geq \|x\| \geq 10$), $\lambda(t, D)$ – $(T + \Delta T_2)$ –периодическая функция с шириной импульса ΔT_2 , $\delta = 0.0001$, $\gamma = 0.001$, $T = 2$, $\Delta T_2 = 1$, $l_0 = 10$. Начальные условия $x_i(0)$ и параметры c_i выберем согласно:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0.1, & c_1 &= 3, \\ x_2(0) &= 0.2, & c_2 &= 5, \\ x_3(0) &= 0.3, & c_3 &= -3, \\ x_4(0) &= 0.2, & c_4 &= 0.5, \\ x_5(0) &= 0.5, & c_5 &= -1, \\ x_6(0) &= 0.1, & c_6 &= 2, \\ x_7(0) &= 0.7, & c_7 &= -0.7, \\ x_8(0) &= 0.2, & c_8 &= 5.5, \\ x_9(0) &= 0.6, & c_9 &= -3, \\ x_{10}(0) &= 0.4, & c_{10} &= 2. \end{aligned}$$

В принципе, функции $k_i(t)$ можно выбрать в классе постоянных на интервале $[0, \infty)$. Для корректного применения результатов раздела подобный выбор, однако, неизбежно потребует информации об оценках точных значений зоны нечувствительности (параметр δ) в алгоритме настройки.

Компьютерное моделирование проводилось для наблюдателя (4.39) с алгоритмом (4.40). При этом начальные условия для оценок $\hat{\alpha}(0)$ выбирались случайным образом в гиперкубе $[0, 12]^{10}$ для каждого из 400 экспериментов, начальные условия для $k_i(t)$ были установлены равными нулю. Каждый цикл моделирования состоял

из 10000 периодов (эпох) длительностью $T + \Delta T_2 = 3$ с. Для того, чтобы проверить чувствительность алгоритма к численному интегрированию, для аппроксимации решений $\hat{x}_i(t)$, $\hat{\alpha}_i(t)$ и $k_i(t)$ был использован метод Эйлера первого порядка с шагом интегрирования $\delta t = 0.0001$ с. Для оценки эффективности алгоритма использовался следующий критерий:

$$d(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (\hat{\alpha}_i(t) - \alpha_i)^2},$$

$$R(t) = \sum_{i=0}^{(T+\Delta T_2)/\Delta t} \frac{e^{(t-T-\Delta T_2+i\Delta t)^2 \Delta t}}{T + \Delta T_2}.$$

Гистограммы распределения расстояний $d(t)$ и индексы качества $R(t)$, вычисленные в конце каждой процедуры моделирования, изображены на рис. 4.7 и рис. 4.8, соответственно (нетрудно убедиться, что $d(0) - d((T + \Delta T_2)10000) > 0$ для любых начальных условий. На основе результатов моделирования, приведенных на рисунках, можно заметить, что применение алгоритмов (4.40) обеспечивает значительный сдвиг влево (по направлению к нулю) апостериорных распределений норм $d((T + \Delta T_2)10000)$ и $R((T + \Delta T_2)10000)$ ошибок оценивания параметров и значений индекса качества.

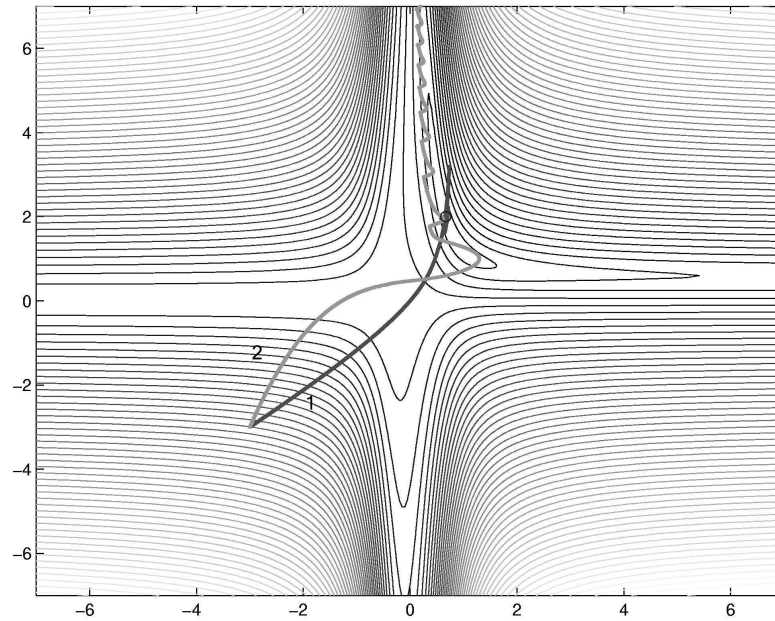


Рисунок 4.3. Траектории $\hat{\alpha}(t), \hat{c}(t)$ в системе (4.35) с алгоритмом (4.36) (кривая 1) и алгоритмом (4.37) (кривая 2) для начальных условий $(-3, -3)$. Глобальный минимум отмечен окружностью

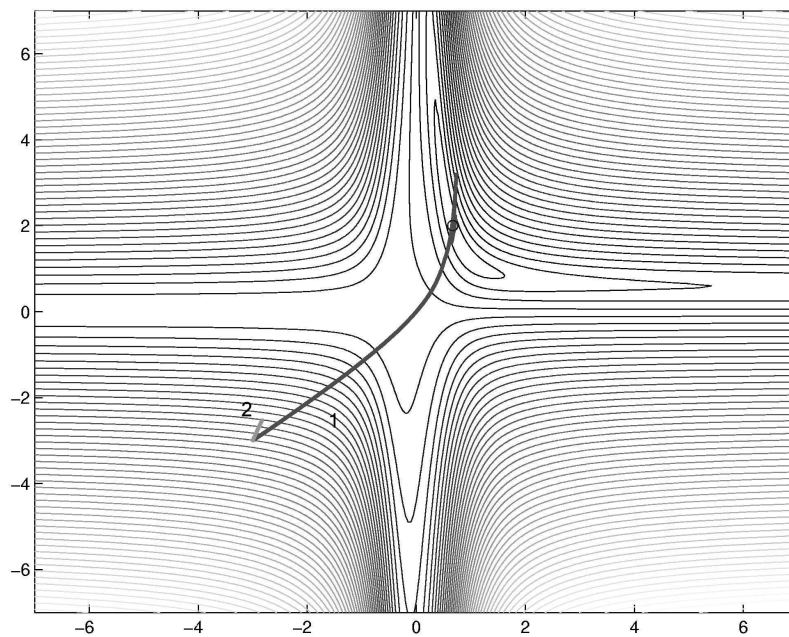


Рисунок 4.4. Траектории $\hat{\alpha}(t), \hat{c}(t)$ в системе (4.35) с алгоритмом (4.36) (кривая 1) и алгоритмом (4.37) (кривая 2) для начальных условий $(-3, -3)$. Траектории определены на интервале времени $[0, 900]$ с.

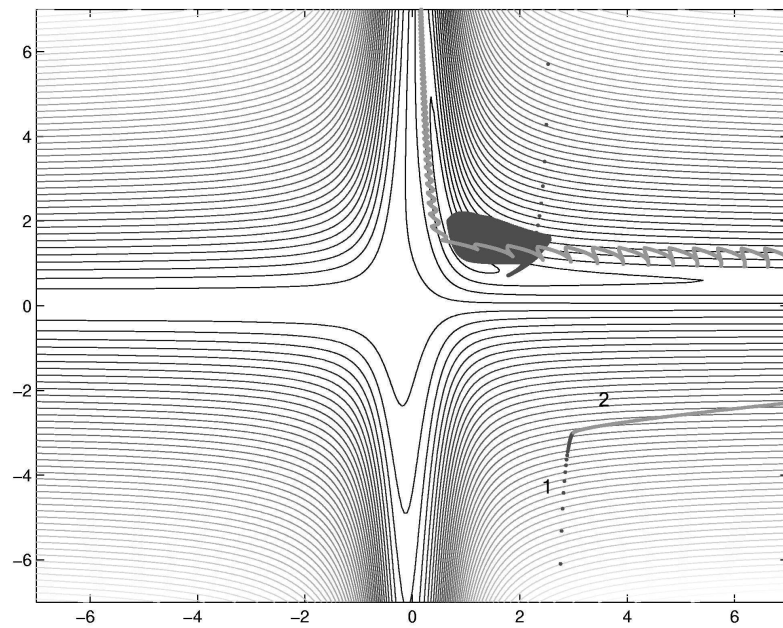


Рисунок 4.5. Траектории $\hat{\alpha}(t), \hat{c}(t)$ системы (4.35) с алгоритмом (4.36) (кривая 1) и алгоритмом (4.37) (кривая 2) для начальных условий $(3, -3)$. Алгоритм (4.36) обеспечивает достижение глобального минимума за короткий промежуток времени с последующими затухающими колебаниями в пространстве параметров ("клякса" на заключительной части траектории).

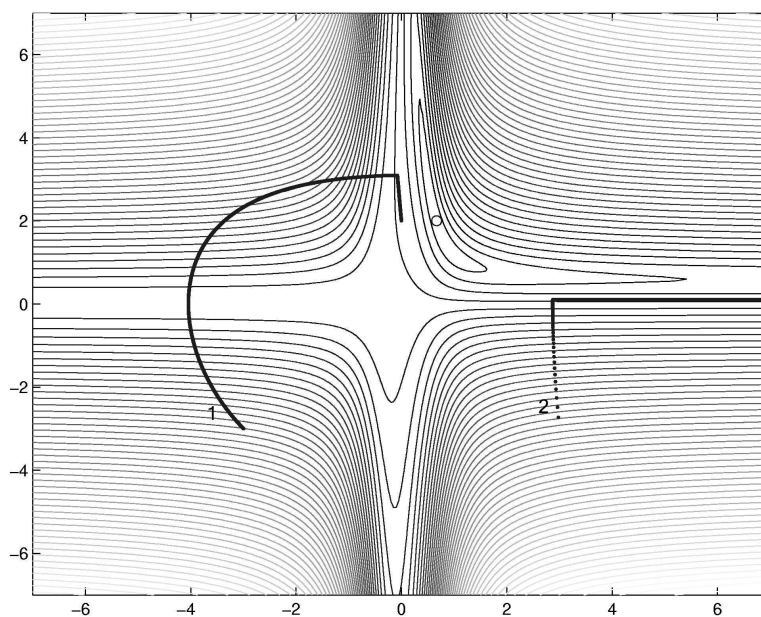


Рисунок 4.6. Траектории $\hat{\alpha}(t), \hat{c}(t)$ в системе (4.35) с алгоритмом (4.38) для начальных условий $(-3, -3)$ (кривая 1) и $(3, -3)$ (кривая 2). Ни одно решение не достигает глобального минимума (отмеченного окружностью на рисунке)

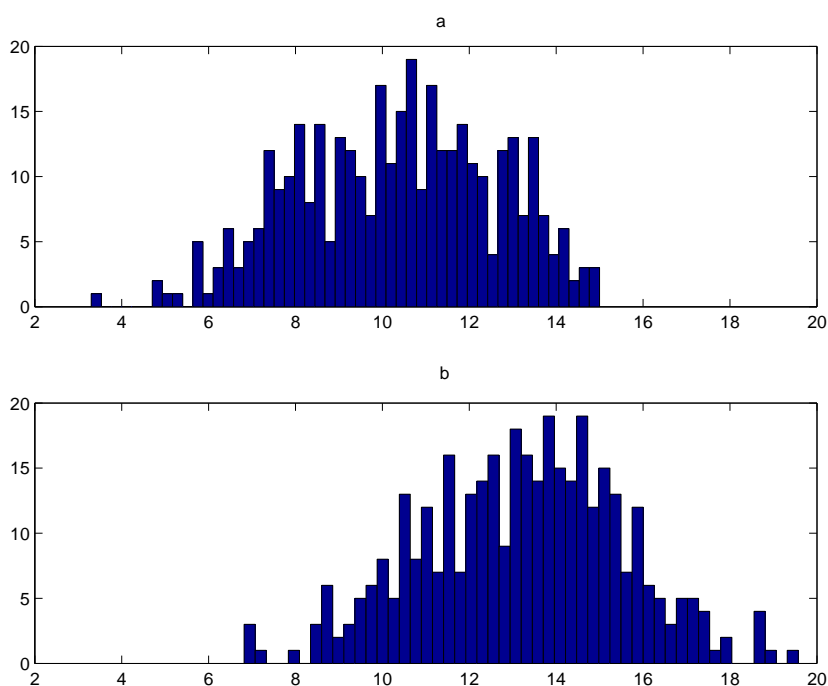


Рисунок 4.7. Гистограммы распределений расстояний $d((T + \Delta T_2)10000)$ (графики *a*) и $d(0)$ (графики *b*) в результате 400-от экспериментов со случайными начальными условиями для $\hat{\alpha}_i(0)$.

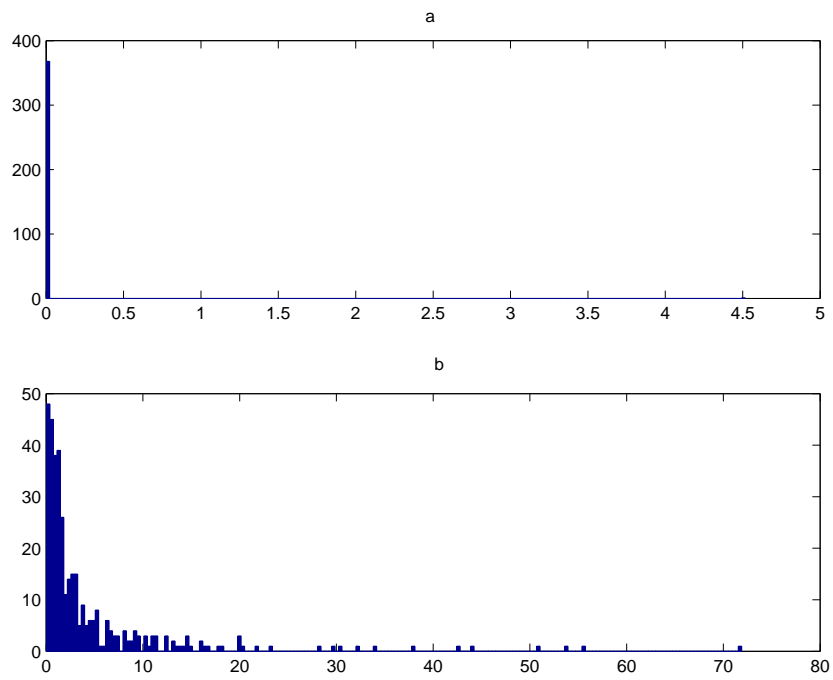


Рисунок 4.8. Гистограммы распределений значений индекса качества $R((T + \Delta T_2)10000)$ (графики *a*) и $R(0)$ (графики *b*) в результате 400-от экспериментов со случайными начальными условиями для $\hat{\alpha}_i(0)$.

5. Решения прикладных задач адаптивного управления и идентификации нелинейных динамических систем

В разделе приводятся примеры использования теории и методов адаптации для решения прикладных задач управления и идентификации в различных предметных областях. Это задачи точной оценки и компенсации трения (параграф 5.1), актуальные в механике и автомобилестроении; задачи измерения параметров кинетики процессов и проводимости клеточных мембран по электрическим измерениям “вход-выход” (параграф 5.2), актуальные в экспериментальной биофизике; задачи адаптивного сравнения шаблонов в системах технического зрения и обработки информации (параграф 5.3).

Несмотря на очевидные содержательные различия рассматриваемых задач, их формальные постановки имеют общие специфические особенности. Это, во-первых, недостаток измерительной информации об объекте; во-вторых, нелинейно параметризованные модели неопределенности и, в-третьих, нелинейность естественных для системы режимов функционирования. Каждая из этих особенностей в отдельности оказывается серьезной преградой для использования известных методов адаптивного управления, в то время как введенные в предыдущих разделах методы и алгоритмы адаптации позволяют находить решения подобных задач и, более того, создавать унифицировать процедуры получения эти решений.

Приводимые примеры иллюстрируют исключительную важность этапа выбора и обоснования математических моделей, адекватных физическим принципам функционирования объектов, для достижения поставленных технических целей управления, оценивания и идентификации. Ведь именно неадекватность используемых для решения поставленных задач адаптации математических моделей исходно более полным нелинейным моделям приводит к решениям, имеющим мало общего с реальными целями. Это обстоятельство является причиной более пристального внимания к формулированию приводимых в разделе задач с точки зрения обоснования исходных нелинейных моделей по сравнению с общепринятой практикой.

5.1. Задача управления динамикой автомобиля в режиме разгона-торможения в условиях неопределенности качества дорожного покрытия

Эффективное управление проскальзыванием колес в режиме торможения или разгона является одной из наиболее известных и в то же время далеких от полного разрешения проблем в области конструирования подвижных аппаратов. Эта проблема была обозначена в 1947 году, когда первые антиблокировочные системы управлением движения колес были установлены на американские бомбардировщики В-47. Последующие приложения этой системы в автомобилестроении в промышленных масштабах показало, что эффективность торможения зависит не столько от самого факта отсутствия блокировки колес, сколько от обеспечения оптимального значения проскальзывания между дорожным покрытием и шиной автомобиля.

К настоящему времени существует обширное количество публикаций, посвященных решению проблемы идентификации кривых трения между контактными поверхностями дорожного покрытия и резиной шин [174, 289, 208]. Однако применение этих процедур ограничено лишь лабораторными условиями и широко не применяется на практике в силу существенных временных затрат на такую идентификацию, особенно в режиме реального управления автомобилем, где масштаб времени изменений качества покрытия составляет доли секунды. С другой стороны, использующиеся до настоящего времени схемы робастного управления [338, 197, 167] не в состоянии решать задачи идентификации и адаптации и как следствие обречены на функционирование лишь в квазиоптимальных режимах, причем для конкретных типов покрытий.

С потребительской точки зрения наиболее желаемый результат – это, с одной стороны, быстрое и эффективное робастное управление проскальзыванием, которое, с другой стороны, способно адаптироваться к быстро меняющимся условиям среды [316]. Проблема, однако, заключается в том, что применение стандартных процедур синтеза либо приводит к неудовлетворительному качеству системы, либо, если используются скользящие режимы, к быстрому износу исполнительных механизмов [167, 129].

В качестве альтернативного способа управления в этом случае можно рассматривать стандартные методы адаптивного управления, однако условия применимости этих методов в данной задаче нарушаются по меньшей мере в силу нелинейной параметризации физической модели трения самого процесса торможения [267, 129], не говоря уже о последствиях нарушения гипотезы квазистационарности возмущений и известной чувствительности к немоделируемым возмущениям.

В параграфе приводится решение этой задачи в рамках изложенной в разд. 3 метода синтеза адаптивных систем управления. Решение основано на использова-

нии экспериментально проверенных данных о коэффициенте трения как функции скорости и проскальзывания [145] в совокупности с предлагаемой процедурой идентификации параметров текущих свойств контактных поверхностей. В данном случае удастся ограничиться единственным параметром на кривой коэффициента трения. В частности, показывается, что разработанный алгоритм управления гарантирует регулирование проскальзывания к эталонному значению, при этом идентифицирующие свойства алгоритма адаптации (экспоненциально быстрая сходимость) позволяют уточнять само значение эталонного проскальзывания в реальном времени.

5.1.1. Система прямого адаптивного управления

Рассмотрим задачу минимизации тормозного пути колеса, катящегося вдоль поверхности. Контактные свойства поверхности предполагаются неизвестными и меняющимися в зависимости от расстояния, пройденного колесом. Динамика движения колеса описывается следующими уравнениями [338]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{m}F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta); \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}(F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta)r - u); \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{m}(1 - x_3) + \frac{r^2}{J}\right)F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) - \frac{r}{J}u,\end{aligned}\tag{5.1}$$

где x_1 – скорость продольного движения, x_2 – круговая скорость,

$$x_3 = (x_1 - rx_2)/x_1$$

является величиной проскальзывания колеса, m – масса системы, J – момент инерции, r – радиус колеса, u управляющий вход (тормозной момент), а $F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta)$ – кривая, специфицирующая силу трения в зависимости от параметра θ свойства поверхности и ограниченной силы нагрузки F_n . Эта функция, например, может быть вычислена как состояние установившегося режима более общей модели ЛуГре [129, 145]:

$$F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) = F_n \text{sign}(x_1 - rx_2) \frac{\frac{\sigma_0}{L} g(x_2, x_3, \theta) \frac{x_3}{1-x_3}}{\frac{\sigma_0}{L} \frac{x_3}{1-x_3} + g(x_2, x_3, \theta)},\tag{5.2}$$

$$g(x_2, x_3, \theta) = \theta(\mu_C + (\mu_S - \mu_C)e^{-\frac{|rx_2x_3|}{|1-x_3|v_s}}),$$

где μ_C , μ_S – коэффициенты статического кулоновского трения, v_s – штрибековская скорость, σ_0 – нормализованная продольная жесткость, L – длина контактной поверхности шины. С целью избежания сингулярностей решений в уравнениях модели (5.1), по аналогии с [338], будем полагать, что система управления торможением автоматически выключается при достижении достаточно малых скоростей (например,

при $x_1 < \delta_{x_1}$, $\delta_{x_1} \in \mathbb{R}_{>0}$). Кроме того, дополнительно будем полагать, что проскальзывание остается ненулевым в моменты времени после отключения системы при условии продолжения движения. Исходя из физики модели отметим и тот факт, что значения проскальзывания ограничены сверху числом $x_3 = 1$. Таким образом, естественно полагать, что существует $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ такое, что $0 < \delta < x_3 < 1 - \delta^1$.

Типичная форма функции $F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta)$ изображена на рис. 5.1. Как видно из рисун-

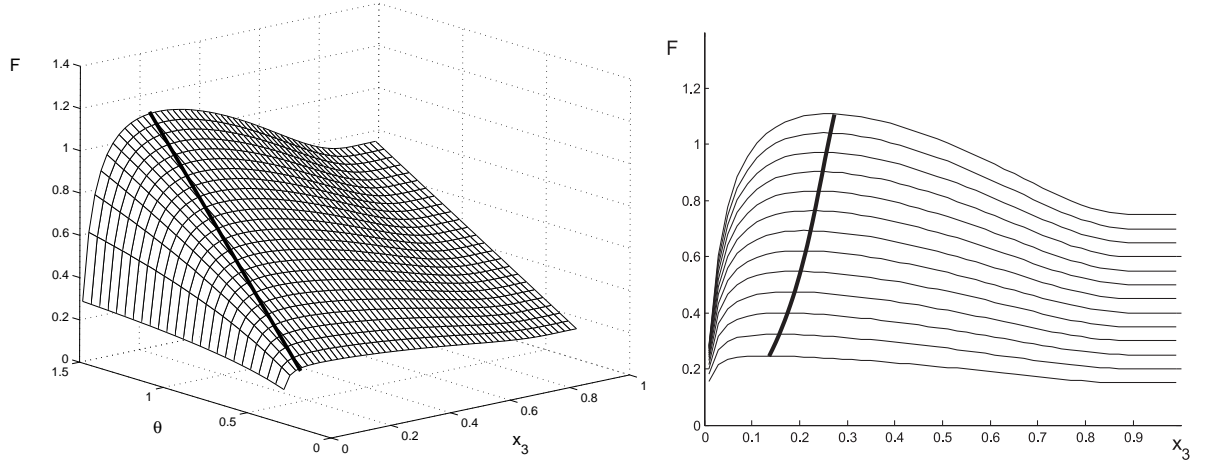


Рисунок 5.1. Коэффициент трения $F_s(1, \mathbf{x}, \theta)$ как функция параметра θ и проскальзывания x_3 для фиксированного значения скорости поступательного движения $x_1 = 30$ м/с (графики слева). Проекция функции $F_s(1, \mathbf{x}, \theta)$ на ось x_3 (графики справа). Сплошная жирная линия изображает множество точек $(x_3, F_s(1, \mathbf{x}, \theta))$, которое соответствует максимальным значениям коэффициента $F_s(1, \mathbf{x}, \theta)$ для каждого θ

ка, значения x_3^* проскальзывания, соответствующие максимальным коэффициентам трения, варьируются в широких пределах в зависимости от дорожных условий и скоростей движения. На практике эталонное значение проскальзывания выбирается в окрестности $x_3 = 0.2$. Несмотря на то, что подобный выбор существенно упрощает задачу синтеза регулятора, он не является оптимальным решением задачи в силу непредсказуемого характера изменений дорожных условий. Следовательно, для обеспечения эффективного торможения необходимо учитывать фактические изменения параметра θ . Одним из возможных подходов реализации такого учета является оценка в реальном времени параметра θ как функции проскальзывания и времени и лишь затем вычислять эталонные значения

$$x_3^* = \arg \max_{x_3} F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta). \quad (5.3)$$

¹Принимая во внимание, что переменные x_2 , x_1 доступны для измерения, можно отслеживать моменты времени, когда значения $x_3 = (x_1 - rx_2)/x_1$ достигают критической окрестности точки $x_3 = 1$. При достижении этих критических значений переменных x_3 всегда возможно переключение к стандартной схеме управления, которая обеспечит перевод системы в допустимую область состояний.

Значения x_3^* затем используются в регуляторе основного контура, который решает задачу адаптивного регулирования состояния к заданному x_3^* , обеспечивая максимальную силу торможения и как следствие минимальный тормозной путь.

Для оценки коэффициента трения используется модель (5.2). В этой модели большинство параметров могут быть определены *a priori*, и лишь параметр θ зависит главным образом от состояния дорожного покрытия. Для начала положим, что выполняется гипотеза квазистационарности изменения параметра θ , т. е. модель вариации этого параметра – кусочно-постоянная функция. В силу (5.3), точная идентификация параметра θ автоматически влечет точную оценку эталонного x_3^* .

В соответствии с принципом непосредственной компенсации, регулятор основного контура выберем в виде:

$$u(\mathbf{x}, \hat{\theta}, x_3^*) = \frac{J}{r} \left(\left(\frac{1}{m} (1 - x_3) + \frac{r^2}{J} \right) F_s(F_n, \mathbf{x}, \hat{\theta}) - K_s x_1 (x_3 - x_3^*) \right), \quad K_s > 0. \quad (5.4)$$

Для оценки параметра θ по измерениям x_1, x_2 и x_3 , введем следующую систему:

$$\dot{\hat{x}}_3 = -\frac{1}{x_1} \left(\left(\frac{1}{m} (1 - x_3) + \frac{r^2}{J} \right) F_s(F_n, \mathbf{x}, \hat{\theta}) - \frac{r}{J} u \right) + (x_3 - \hat{x}_3)$$

и рассмотрим динамику модели по ошибке $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(x_3, \hat{x}_3) = x_3 - \hat{x}_3$:

$$\dot{\psi} = -\psi - \frac{1}{x_1} \left(\left(\frac{1}{m} (1 - x_3) + \frac{r^2}{J} \right) (F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) - F_s(F_n, \mathbf{x}, \hat{\theta})) \right). \quad (5.5)$$

Функция $\kappa = \frac{1}{x_1} \left(\left(\frac{1}{m} (1 - x_3) + \frac{r^2}{J} \right) F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) \right)$ монотонна по θ и удовлетворяет предположениям 3.3, 3.4 для

$$\alpha(\mathbf{x}, t) = \alpha_c, \quad \alpha_c \in \mathbb{R}_+. \quad (5.6)$$

Монотонность κ гарантируется тем, что величина

$$F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) = F_n \operatorname{sign}(x_1 - r x_2) \frac{\frac{\sigma_0}{L} g(x_2, x_3, \theta) \frac{x_3}{1 - x_3}}{\frac{\sigma_0}{L} \frac{x_3}{1 - x_3} + g(x_2, x_3, \theta)}$$

монотонна по $g(x_2, x_3, \theta)$ и возрастает с ростом $g(x_2, x_3, \theta)$ (значение $x_3/(1 - x_3)$ положительно). Более того, функция $g(x_2, x_3, \theta)$ монотонна по θ , и последовательность $g(x_2, x_3, \theta_i)$ не убывает для любой неубывающей последовательности θ_i . Таким образом, можно заключить, что $\kappa = \frac{1}{x_1} \left(\left(\frac{1}{m} (1 - x_3) + \frac{r^2}{J} \right) F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) \right)$ монотонна по обоим аргументам θ и $g(x_2, x_3, \theta)$. В дополнение отметим, что состояние \mathbf{x} системы (5.1) ограничено (в силу физики самого объекта). Следовательно, в силу непрерывности и монотонности функции $F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta)$ по $g(x_2, x_3, \theta)$, можно оценить функцию $F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) - F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta')$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) - F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta')| &\leq D_{g,1} |g(x_2, x_3, \theta) - g(x_2, x_3, \theta')| \frac{x_3}{1 - x_3} = \\ &D_{g,1} |g(x_2, x_3, 1) \frac{x_3}{1 - x_3}| |\theta - \theta'|, \quad |F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) - F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta')| \geq \\ &D_{g,2} |g(x_2, x_3, \theta) - g(x_2, x_3, \theta')| \frac{x_3}{1 - x_3} = D_{g,2} |g(x_2, x_3, 1) \frac{x_3}{1 - x_3}| |\theta - \theta'| D_{g,1}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $D_{g,2} > 0$. Учитывая, что $0 < \delta < x_3 < 1 - \delta$, а также ограниченность состояния \mathbf{x} и непрерывность $g(x_2, x_3, 1)$, перепишем (5.7) в виде:

$$\begin{aligned} |F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) - F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta')| &\leq \bar{D}_{g,1} \frac{1 - \delta}{\delta} |\theta - \theta'|; \\ |F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) - F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta')| &\geq \bar{D}_{g,2} \frac{\delta}{1 - \delta} |\theta - \theta'|; \\ \bar{D}_{g,1} &= D_{g,1} \max_{x_2, x_3} \{g(x_2, x_3, 1)\}, \quad \bar{D}_{g,2} = D_{g,2} \max_{x_2, x_3} \{g(x_2, x_3, 1)\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Следовательно, предположения 3.3, 3.4 действительно выполняются для постоянных функций $\alpha(\mathbf{x}, t) = \text{const}$, в частности, заданных выражением (5.6).

Факт выполнения предположений 3.3, 3.4 позволяет применить теоремы 3.1, 3.10. Учитывая, что $\alpha = \text{const} > 0$, и $\varphi(\psi) = \psi$ – это следует из (5.5) – уравнения (3.29) в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\gamma((x_3 - \hat{x}_3) + \hat{\theta}_I), \quad \gamma > 0, \\ \dot{\hat{\theta}}_I &= x_3 - \hat{x}_3, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $\gamma = \Gamma\alpha$, а $\alpha = \alpha_c$, очевидно, удовлетворяет условию предельной невырожденности. По свойству 1) теоремы 3.10 алгоритм (5.9) обеспечивает экспоненциально быструю сходимость $\theta - \hat{\theta}$, $x_3 - \hat{x}_3$ в начало координат. С учетом гладкости функции $F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta)$ for $x_1 > 0$, можно сделать вывод о том, что управление (5.4) гарантирует экспоненциально быстрое регулирование переменной x_3 к эталонному x_3^* . При этом скорость сходимости определяется константами K_s , $\gamma > 0$. Этот результат может быть сформулирован следующим образом.

С л е д с т в и е 5.1. Для заданной системы (5.1), управления

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, \hat{\theta}, x_3^*) &= \frac{J}{r} \left(\left(\frac{1}{m} (1 - x_3) + \frac{r^2}{J} \right) F_s(F_n, \mathbf{x}, \hat{\theta}) - K_s x_1 (x_3 - x_3^*) \right), \quad K_s > 0; \\ \dot{\theta} &= -\gamma((x_3 - \hat{x}_3) + \hat{\theta}_I), \quad \gamma > 0; \\ \dot{\hat{\theta}}_I &= x_3 - \hat{x}_3, \end{aligned} \quad (5.10)$$

любого ограниченного $F_n > 0$ и произвольно малого $\delta > 0$ существует такое $K_s > 0$, что для всех x_3^* , $x_3(0) \in [2\delta, 1 - 2\delta]$, $\theta \in \mathbb{R}_+$, и $x_1(t) > \delta_0 \in \mathbb{R}_+$, оценки $\hat{\theta}(t)$ ограничены и $x_3(t) - x_3^*$ и $\hat{\theta} - \theta$ сходятся в начало координат экспоненциально быстро для всех моментов времени, удовлетворяющих условию $x_1(t) > \delta_0 \in \mathbb{R}_+$.

Для доказательства этого следствия требуется показать, что $x_3 \in [\delta, 1 - \delta]$ и $\hat{\theta}$ ограничена.

Дифференцируя $\hat{\theta}$ по времени получим

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \frac{1}{x_1} \left(\left(\frac{1}{m} (1 - x_3) + \frac{r^2}{J} \right) F_n \text{sign}(x_1 - r x_2) \frac{\frac{\sigma_0}{L} g(x_2, x_3, 1) \frac{x_3}{1 - x_3}}{\frac{\sigma_0}{L} \frac{x_3}{1 - x_3} + g(x_2, x_3, 1)} (\theta - \hat{\theta}) \right), \quad (5.11)$$

где $x_3 \in [0, 1]$ и, следовательно,

$$\frac{\frac{\sigma_0}{L} g(x_2, x_3, 1) \frac{x_3}{1-x_3}}{\frac{\sigma_0}{L} \frac{x_3}{1-x_3} + g(x_2, x_3, 1)}$$

неотрицательна. Тогда для всех $\hat{\theta}(0)$ и ограниченных θ , решения $\hat{\theta}(t)$ системы (5.11) ограничены.

Покажем, что существует K_s такой, что x_3 остается в области $[\delta, 1 - \delta]$. Это свойство следует из ограниченности F_n и (5.2). Значения $(g(x_2, x_3, \hat{\theta}), g(x_2, x_3, \theta))$ ограничены для ограниченных θ , а функция F_s ограничена для всех $x_3 \in [0, 1]$ и ограниченных g . Тогда разность

$$\frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{m} (1 - x_3) + \frac{r^2}{J} \right) (F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) - F_s(F_n, \mathbf{x}, \hat{\theta}))$$

всегда ограничена сверху некоторой константой M . Это, в свою очередь, влечет существование $K_s > 0$ таких, что для любого x_3^* , $x_3(0) \in [2\delta, 1 - 2\delta]$ решения $x_3(t)$ управляемой системы

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{m} (1 - x_3) + \frac{r^2}{J} \right) (F_s(F_n, \mathbf{x}, \theta) - F_s(F_n, \mathbf{x}, \hat{\theta})) - K_s (x_3^* - x_3) \quad (5.12)$$

принадлежат интервалу $[\delta, 1 - \delta]$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно выбрать квадратичную функцию вида $V = 0.5(x_3 - x_3^*)^2$ и оценить ее производную по времени в силу уравнений системы

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -K_s (x_3 - x_3^*)^2 + |(x_3 - x_3^*)| M \leq 0, \\ \forall |x_3 - x_3^*| \geq \delta, \quad K_s &\geq \frac{M}{\delta}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Неравенство (5.13) гарантирует, что траектории системы (5.12) равномерно сходятся в область $|x_3 - x_3^*| \leq \delta$. Принимая во внимание x_3^* , $x_3(0) \in [2\delta, 1 - 2\delta]$ получаем, что $x_3(t) \in [\delta, 1 - \delta]$ для всех $t > \delta_0$. Следствие доказано.

5.1.2. Результаты моделирования

Проиллюстрируем полученные аналитические решения задачи экстренного торможения с помощью численного моделирования. Рассмотрим систему (5.1) – (5.9) для следующих значений параметров: $\sigma_0 = 200$, $L = 0.25$, $\mu_C = 0.5$, $\mu_S = 0.9$, $v_s = 12.5$, $r = 0.3$, $m = 200$, $J = 0.23$, $F_n = 3000$, $K_s = 30$, $\gamma = 100$. Эффективность алгоритма (5.9) иллюстрируется рис. 5.2 и 5.3. На рис. 5.2 приводятся траектории

системы при следующих значениях параметра дорожных условий:

$$\theta(s) = \begin{cases} 0.3, & s \in [0, 10] \\ 1.3, & s \in (10, 20] \\ 0.7, & s \in (20, 30] \\ 0.4, & s \in (30, 40] \\ 1.5, & s \in (40, 50] \\ 0.6, & s \in (50, \infty) \end{cases}, s = \int_0^t x_1(\tau) d\tau. \quad (5.14)$$

В обоих случаях предложенные алгоритмы адаптации (с фиксированным x_3^* и настраиваемым $x_3^*(t)$ в соответствии с (5.3)) демонстрируют приемлемое качество управления. Оценки $\hat{\theta}$ приближаются к действительным значениям параметра θ за достаточно короткое время (см. рис. 5.3), обеспечивающее вычисление регулятором значения эталонного проскальзывания x_3^* с последующим регулированием проскальзывания системы в это желаемое состояние. Тормозной момент при этом остается в рамках допустимых значений (см. [338], где приводятся данные о типичных значениях тормозных моментов в экспериментальных антиблокировочных системах).

Эффективность управления с идентификацией эталонных значений проскальзывания может быть продемонстрирована сравнением длин тормозного пути в системе с оценкой x_3^* при $\theta = \hat{\theta}$ в соответствии с (5.3) и в системе с фиксированным x_3^* . Для приведенных параметров модели и дорожных условий 5.14, моделирование длины тормозного пути дало следующие результаты: длина тормозного пути для первой системы составила 49.7 метра, а для второй 53.2 – 49.9 метра (в зависимости от значения $x_3^* \in [0.1, 0.2]$). Подобные результаты наблюдались и для других начальных условий и дорожных условий.

Рассмотрим теперь возможность нейросетевой реализации адаптивного регулятора (5.10). Прежде всего заметим, что структура уравнений (5.1) определяется механикой движения колеса, в частности, законами Ньютона. Следовательно, в структурном смысле модель (5.1) не обладает неопределенностью. Коэффициенты правых частей и внешние возмущения в (5.1), однако, могут и не иметь достоверной и приемлемой математической модели. Так, например, физически обоснованная модель коэффициента трения $F_s(1, \mathbf{x}, \theta)$, использованная в работе, может быть недостаточно точной для некоторого класса покрытий и материалов. Причина этого прежде всего состоит в том, что функция $F_s(1, \mathbf{x}, \theta)$ получена как редукция более сложной динамической модели ЛуГре [129], которая в свою очередь является конечномерной аппроксимацией модели коэффициента сцепления в частных производных. Таким образом, несмотря на хорошую аппроксимацию экспериментально полученных кривых коэффициента сцепления моделью (5.2) в рассматриваемом примере [145], соответствие экспериментальных данных и модели (5.2) не во всех случаях будет достаточно

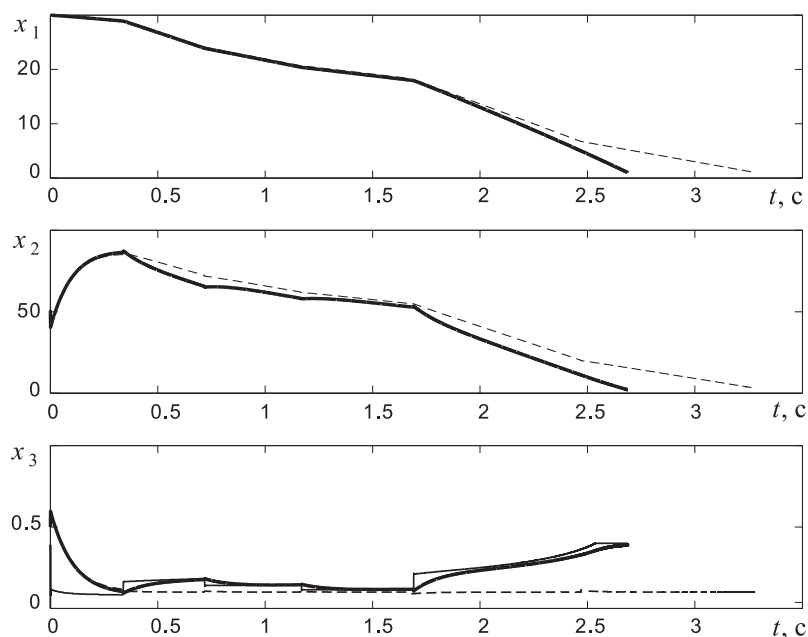


Рисунок 5.2. Графики траекторий системы (5.1). Верхняя панель содержит графики скорости поступательного движения, средняя – угловой скорости, нижняя – проскальзывания как функций времени. Оценки оптимальных значений проскальзывания (5.3) при $\hat{\theta} = \theta(s)$ показаны сплошными тонкими линиями; траектории проскальзывания \hat{x}_3 в системе с оценкой x_3^* в реальном времени показаны сплошными жирными линиями; динамика проскальзывания с предустановленными значениями x_3^* в адаптивном регуляторе показаны пунктиром.

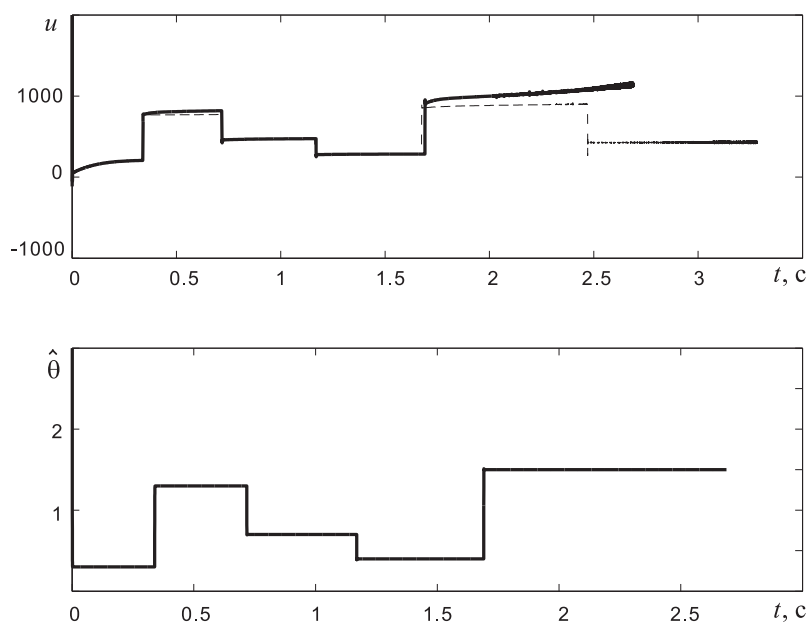


Рисунок 5.3. Графики тормозного момента u (верхняя панель) и оценок параметра $\hat{\theta}$ (нижняя панель) дорожных условий (5.14). Сплошные жирные линии показывают тормозной момент в системе с оценкой x_3^* в реальном времени, пунктирные линии показывают тормозной момент в системе с предустановленным $x_3^* = 0.1$. На второй панели можно заметить, что оценки $\hat{\theta}(t)$ практически совпадают с действительными значениями параметра θ реальных дорожных условий.

точным. Следовательно, для дальнейшего повышения эффективности управления с одной стороны и расширения класса допустимых материалов покрытий с другой, имеет смысл задача построения регулятора, где значения коэффициента трения $F_s(1, \mathbf{x}, \theta)$ моделируются непосредственно по измеряемым данным и с произвольной точностью в рамках погрешности измерений. В силу потенциальной зависимости коэффициента сцепления F_s от множества переменных, естественным кандидатом на роль подходящего эффективного аппроксиматора многомерных функций является многослойная нейронная сеть [113].

Переопределим закон управления (5.10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, \hat{\theta}, x_3^*) &= \frac{J}{r} \left(\left(\frac{1}{m} (1 - x_3) + \frac{r^2}{J} \right) F_N(F_n, \mathbf{x}, \hat{\theta}) - K_s x_1 (x_3 - x_3^*) \right), \quad K_s > 0; \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\gamma ((x_3 - \hat{x}_3) + \hat{\theta}_I), \quad \gamma > 0; \\ \dot{\hat{\theta}}_I &= x_3 - \hat{x}_3, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где

$$F_N(F_n, \mathbf{x}, \hat{\theta}) = F_n \text{sign}(x_1 - r x_2) \text{net}(\mathbf{x}, \theta), \quad (5.16)$$

а $\text{net}(\mathbf{x}, \theta)$ есть нейросетевая аппроксимация коэффициента сцепления. Для определенности рассмотрим систему, где функция $\text{net}(\mathbf{x}, \theta)$ в (5.16) аппроксимируется двухслойной сетью прямого распространения с 50-ю нейронами в скрытом слое:

$$\text{net}(\mathbf{x}, \theta) = \text{net}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{50} c_j \left(\frac{1 - \exp(-\mathbf{w}_j^T \mathbf{p} + b_j)}{1 + \exp(-\mathbf{w}_j^T \mathbf{p} + b_j)} \right), \quad \mathbf{p} = x_2 \oplus x_3 \oplus \theta, \quad \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^3, \quad c_j, b_j \in \mathbb{R}.$$

В качестве “эталонных” данных были выбраны значения функции $F_s(1, \mathbf{x}, \theta)$ где переменные x_2, x_3, θ варьировались в интервалах $[0, 100]$, $[0, 1]$ и $[0, 2]$ соответственно. Обучение сети проводилось стандартными средствами Neural Network Toolbox пакета MATLAB 7.0. Графики $F_N(1, \mathbf{x}, \hat{\theta})$ в сравнение с эталонными $F_s(1, \mathbf{x}, \hat{\theta})$ и ошибками аппроксимации представлены на рис. 5.4. Возникает естественный вопрос о работоспособности полученной системы управления. Для ответа на этот вопрос запишем уравнения $\hat{\theta}$ в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{\theta} - \theta) &= -\gamma F_n \text{sign}(x_1 - r x_2) (F_s(1, \mathbf{x}, \theta) - F_N(1, \mathbf{x}, \hat{\theta})) \\ &= -\gamma F_n \text{sign}(x_1 - r x_2) (F_s(1, \mathbf{x}, \theta) - F_s(1, \mathbf{x}, \hat{\theta})) - \gamma F_n \text{sign}(x_1 - r x_2) F_e(1, \mathbf{x}, \hat{\theta}). \end{aligned}$$

Тогда в силу экспоненциальной устойчивости процедуры оценки параметра $\hat{\theta}$ невозмущенной системы (см. следствие 5.1) при условии монотонности функции $F_s(1, \mathbf{x}, \hat{\theta})$ по параметру θ в области допустимого состояния системы и малости ошибок $F_e(\cdot)$ аппроксимации, можно сделать вывод о том, что оценка $\hat{\theta}$ экспоненциально быстро приходит в малую окрестность параметра θ . Этим, в свою очередь, автоматически гарантируется работоспособность системы (5.1), (5.15).

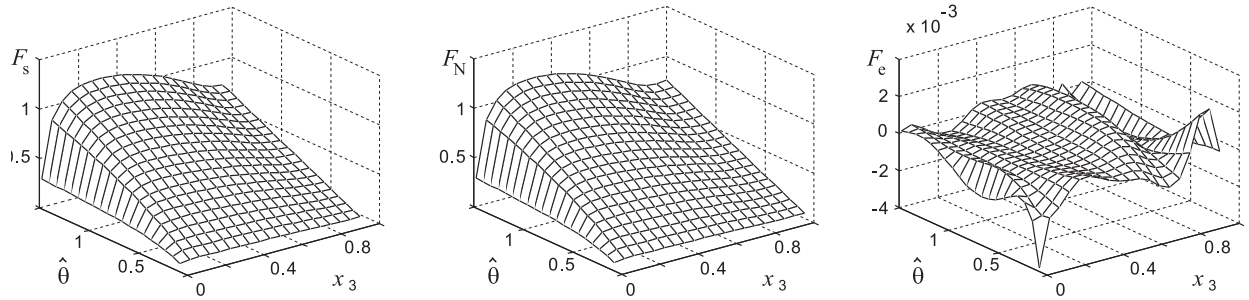


Рисунок 5.4. Графики коэффициента трения $F_s(1, \mathbf{x}, \theta)$, нейросетевой аппроксимации, $F_N(1, \mathbf{x}, \theta)$ и ошибок $F_e(1, \mathbf{x}, \theta) = F_s(1, \mathbf{x}, \theta) - F_N(1, \mathbf{x}, \theta)$ как функции параметра θ и проскальзывания x_3 для фиксированного значения скорости поступательного движения $x_1 = 6$ м/с.

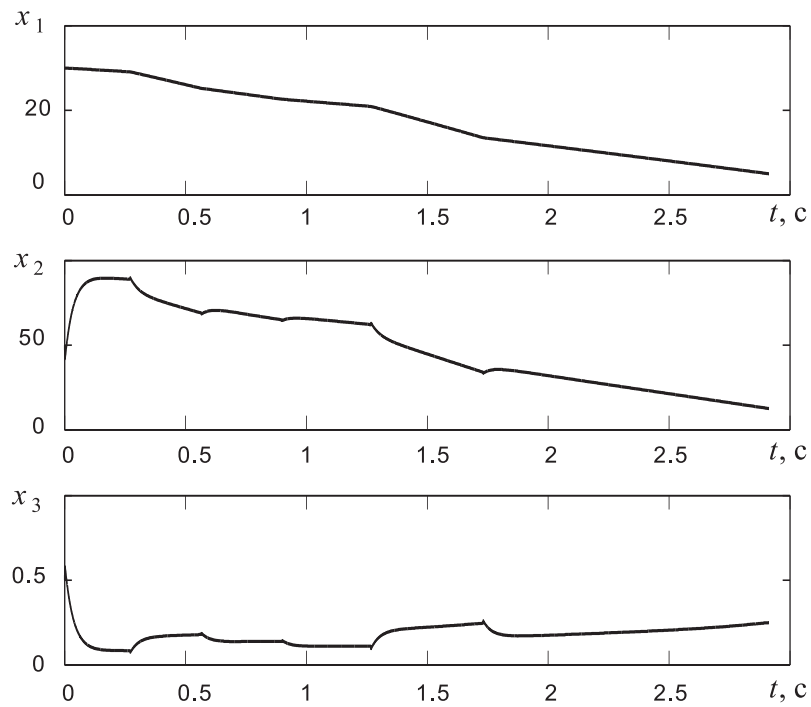


Рисунок 5.5. Графики траекторий системы (5.1) с нейросетевым регулятором. Верхняя панель содержит графики скорости поступательного движения, средняя – угловой скорости, нижняя – проскальзывания как функций времени.

Траектории системы (5.1) с нейросетевым адаптивным алгоритмом управления (5.15) изображены на рис. 5.5. Для выбранных начальных условий тормозной путь составил 50.99 м, что в пределах вычислительной точности моделирования совпадает с тормозным путем в эталонной системе при идентичных начальных условиях.

Таким образом, использованный метод синтеза с нейросетевой реализацией адаптивного регулятора решает задачу экстренного торможения как в случае известной модели самой неопределенности, так и при условии возможной реконструкции модели по измеряемым данным. В силу монотонности и одномерности самой неопределенности по неизвестному параметру удается совместить эффективное управление торможением с одновременным оцениванием оптимальных параметров торможения в темпе самих процессов.

Полученные законы управления обеспечивают выполнение маневра при одновременном выводе параметров движения системы в область, гарантирующую максимальные значения коэффициента сцепления. Особенностью введенных схем управления являются, во-первых, отсутствие скольльзящих режимов, что позволяет избежать чрезмерного износа исполнительных механизмов; во-вторых, простота схем настройки системы, что открывает возможность реализации самого алгоритма настройки с использованием стандартных средств, например, таких, как ПИ-регуляторы; в-третьих, независимость алгоритмов настройки параметров от конкретного вида используемых нелинейных моделей трения при условии, что они остаются монотонными по параметру качества дорожного полотна.

5.2. Задача идентификации моделей электрической активности клеток нервной системы по измерениям мембранного потенциала

Модели неопределенности в данной задаче уже не являются одномерными. Кроме того, вектор состояния оказывается недоступен для измерения и, в дополнение, уравнения системы не приводятся в каноническую форму адаптивного наблюдателя. Начиная с фундаментальной работы Ч. Шеррингтона [298] начала 20-го века, а также его ученика Дж. Экклса [152], механизмы распространения информации в нервной системе являются одной из актуальных задач естествознания. Последующие работы физиологов А.Ходжкина и А.Хаксли [181] показали принципиальную возможность описания распространения сигналов в нервной системе в терминах дифференциальных уравнений взаимодействия ионных токов и мембранных потенциалов. Это, в свою очередь, открыло возможность качественного исследования физических законов функционирования клеток с помощью аппарата нелинейной динамики.

Однако несмотря на эти фундаментальные результаты, использование моделей в виде дифференциальных уравнений в биофизике до сих пор не является общепринятым инструментом анализа. Причинами такого положения дел являются:

- 1) чрезвычайная сложность и вместе с тем неопределенность биофизических процессов в клетке [211];
- 2) существенное влияние тонических токов внесинаптического взаимодействия нейромедиаторов непосредственно через стенки самой мембраны [312];
- 3) отсутствие эффективных методов измерения всех внутриклеточных токов.

В силу этих факторов наиболее распространенной парадигмой анализа стала теория синаптического распространения сигналов и гипотеза о частотном кодировании информации в нервных системах. Анализ свойств клетки сводится в этом случае к простому подсчету статистики импульсов за единицу времени при подаче сигнала заданной амплитуды.

Несмотря на очевидную простоту и достоинства использования упрощенного анализа, на сегодняшний день имеются неоспоримые доказательства важности динамики интервалов между самими импульсами [5, 282, 190] для понимания функционирования нервной системы. Кроме того, доказано существенное влияние нестационарных внесинаптических ионных токов на функции отдельных клеток [246, 133]. Таким образом, для более глубокого анализа принципов функционирования клеток в частности и нервной системы в целом, возникает необходимость анализа *динамики* клеточной активности и, соответственно, использования моделей на основе дифференциальных уравнений.

Для анализа свойств и функций клеток с помощью математических моделей динамики клеточных процессов требуется прежде всего возможность получения самой модели по информации “вход-выход”. В качестве входа или стимула обычно используются импульсы тока (напряжения), а выходом служит мембранный потенциал клетки (дендритный ток). Таким образом, актуальна задача реконструкции дифференциальной модели электрической активности клеток по измерениям мембранного потенциала.

5.2.1. Формальная постановка задачи

Простейшей принципиальной математической моделью электрической активности клеток нервной системы, (см., например, обзор [194]) которая способна воспроизводить такой же широкий спектр биофизических явлений, как и более сложные физические модели в виде уравнений Ходжкина-Хаксли [181, 211] при возбуждении

импульсами тока, является модель Хиндмарша и Роуза [179, 180]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax^3 + bx^2 + y - z + \alpha u; \\ \dot{y} &= c - \beta y - dx^2; \\ \dot{z} &= \varepsilon x - \tau z + g,\end{aligned}\tag{5.17}$$

где переменная x обозначает мембранный потенциал; y моделирует динамику (быстрых) ионных токов; z моделирует (медленный) ток адаптации, u – внешний ток, индуцируемый в клетку; $a, b, c, d, \alpha, \beta, \varepsilon, \tau, g \in \mathbb{R}$ – параметры, причем $\beta, \tau > 0$. Для удобства дальнейшей работы с уравнением (5.17) введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}\theta_1 &= (-a, b, \alpha), \quad \theta_2 = (-d, -\beta, c), \quad \theta_3 = (\varepsilon, -\tau, g); \\ \phi_1(x, u) &= (x^3, x^2, u), \quad \phi_2(x, y) = (x^2, y, 1), \quad \phi_3(x, z) = (x, z, 1).\end{aligned}\tag{5.18}$$

Тогда с учетом обозначений (5.18) уравнения (5.17) примут следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta_1^T \phi_1(x, u) + x - y; \\ \dot{y} &= \theta_2^T \phi_2(x, y); \\ \dot{z} &= \theta_3^T \phi_3(x, z).\end{aligned}\tag{5.19}$$

В уравнениях (5.19) вектор θ_1 имеет смысл параметров функции проводимости мембраны, а вектора θ_2, θ_3 являются параметрами внутриклеточных ионных токов. Существенные отличия в морфологии (формы) клеток одной и той же группы не позволяют пользоваться усредненными значениями параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ в задаче реконструкции модели конкретной клетки. С другой стороны непосредственные измерения проводимости ионных каналов мембраны конкретной клетки оказывается затруднительным в силу сложностей непосредственного неинвазивного измерения соответствующих ионных токов. Тогда параметры $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ системы (5.19), вообще говоря, играют роль неизвестных параметров модели, переменная x является измеряемым выходом, а величина u , соответственно, входом. Переменные y, z являются неизмеряемыми состояниями модели.

В силу приведенных естественных ограничений на доступность информации об исследуемом объекте, модель (5.19) не удовлетворяет стандартным требованиям канонической формы адаптивного наблюдателя [114], что, в свою очередь, не позволяет использовать стандартные подходы к идентификации модели (5.19) по измерениям “вход-выход”. Таким образом, для решения задачи реконструкции дифференциальной модели электрической активности клеток по измерениям мембранного потенциала актуально решение задачи идентификации нелинейных динамических систем класса (5.19), не представимых в канонической форме адаптивного наблюдателя.

Для решения этой задачи используем теоретический аппарат, представленный в разделах 2, 3, в частности, следствие 3.3 из теоремы 2.7.

5.2.2. Анализ модели

С целью синтеза эффективного алгоритма оценки параметров модели (5.17) по измерениям “вход-выход”, прежде всего проведем анализ структурных и функциональных свойств системы (5.19). Во-первых, отметим что аргументы функции $\phi_1(x, u)$ доступны для непосредственного измерения, в то время как аргументы функций $\phi_2(x, y)$, $\phi_3(x, z)$ зависят от переменных y , z , измерение которых в явном виде не представляется возможным².

Таким образом, в зависимости от степени определенности аргументов регрессора в уравнениях модели, исходная система (5.19) может быть декомпозирована на две взаимодействующие подсистемы

$$S_1 : u_2(t) \mapsto x(t), \dot{x} = \theta_1^T \phi_1(x, u) + u_2(t), u_2(t) = y(t) - z(t) \quad (5.20)$$

и

$$S_2 : u_1(t) \mapsto (y(t), z(t)) \begin{cases} \dot{y} = \theta_2^T \phi_2(u_1, y); \\ \dot{z} = \theta_3^T \phi_3(u_1, z). \end{cases} \quad (5.21)$$

Принимая во внимание, что переменные y , z недоступны для непосредственного измерения, модель системы S_2 в виде уравнений (5.21) с неопределенностью в виде линейно параметризованного, но фактически неизвестного регрессора не удобна для решения задач идентификации. Наиболее предпочтительным классом моделей системы S_2 являются уравнения, зависящие лишь от измеряемых переменных x , y и неизвестных параметров. Для преобразования модели (5.21) к желаемому виду рассмотрим возможность представления переменных y , z как функции времени t , неизвестных параметров и начальных условий.

Прежде всего отметим, что в соответствии с (5.18) имеют место следующие равенства

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \theta_2^T \phi_2(x, y) = -\theta_{2,2}y + \theta_{2,3} + \theta_{2,1}x^2; \\ \dot{z} &= \theta_3^T \phi_3(x, z) = -\theta_{3,2}z + \theta_{3,3} + \theta_{3,1}x. \end{aligned}$$

Тогда

$$y(t, \theta_{2,1}, \theta_{2,2}, \theta_{2,3}) = e^{-\theta_{2,2}t} \left(y_0 + \frac{\theta_{2,3}}{\theta_{2,2}} \right) + \int_0^t e^{-\theta_{2,2}(t-\tau)} \theta_{2,1}x^2(\tau) d\tau - \frac{\theta_{2,3}}{\theta_{2,2}}; \quad (5.22)$$

$$z(t, \theta_{3,1}, \theta_{3,2}, \theta_{3,3}) = e^{-\theta_{3,2}t} \left(z_0 + \frac{\theta_{3,3}}{\theta_{3,2}} \right) + \int_0^t e^{-\theta_{3,2}(t-\tau)} \theta_{3,1}x(\tau) d\tau - \frac{\theta_{3,3}}{\theta_{3,2}}. \quad (5.23)$$

Уравнения (5.22), (5.23) зависят уже от доступных для измерений функций времени $x(t)$ и неизвестных параметров. Отметим, что в этом случае регрессоры (5.22), (5.23) оказываются нестационарными и нелинейно параметризованными.

²Здесь следует отметить, что переменные y , z – это *агрегированные* переменные быстрых и соответственно медленных ионных токов в теле клетки, точная идентификация компонент которых сама по себе является сложной задачей.

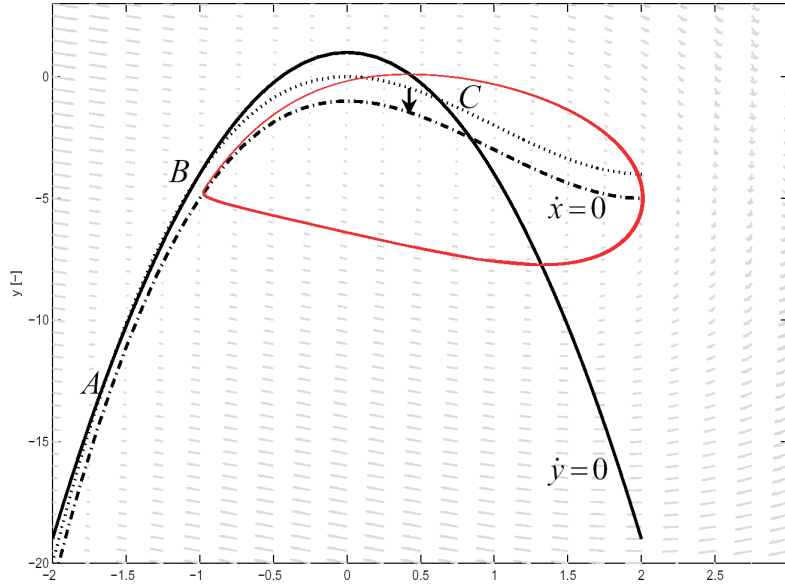


Рисунок 5.6. Положения равновесия и предельный цикл в системе (5.25): A – устойчивый фокус, B – седловая точка, C – неустойчивый фокус. Предельный цикл, соответствующий режиму периодических колебаний, на рисунке отмечен красной линией

Рассмотрим возможность редукции уравнений (5.20), (5.22), (5.23) к системе более низкого порядка за счет использования информации о механизме генерации импульсов в исходной модели (5.17). Для этого проанализируем уравнения мембранного потенциала x и быстрых ионных токов y из исходной системы (5.17):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax^3 + bx^2 + y + \alpha u; \\ \dot{y} &= c - \beta y - dx^2.\end{aligned}\tag{5.24}$$

Положения равновесия системы (5.24) определяются решениями уравнений

$$\begin{aligned}0 &= -ax^3 + bx^2 + y + \alpha u; \\ 0 &= c - \beta y - dx^2,\end{aligned}\tag{5.25}$$

причем для режима генерации импульсов в системе характерно наличие неустойчивого фокуса, седловой точки и устойчивого положения равновесия в фазовом пространстве системы [180] (см. рис. 5.6). Уменьшение переменной u приводит к сдвигу кривой $\dot{x} = 0$ вниз, до тех пор пока положения равновесия A, B не вырождаются в единственный устойчивый фокус и система естественным образом придет в состояние покоя. Отметим, что частота колебаний (количество импульсов в единицу времени) оказывается прямо пропорциональна амплитуде входного сигнала в установившемся режиме [179].

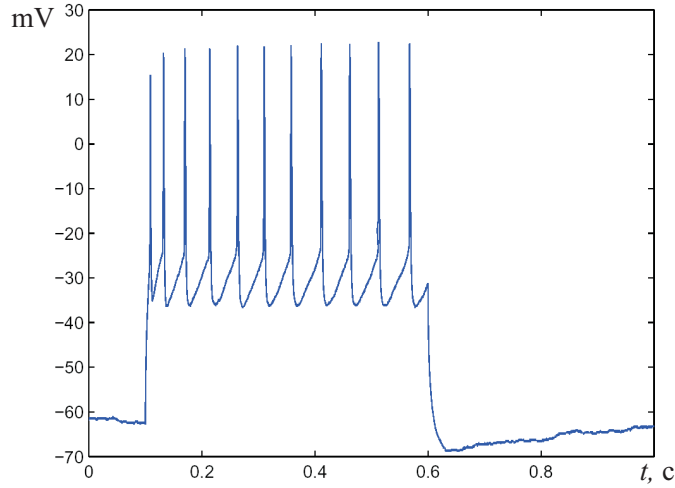


Рисунок 5.7. График мембранного потенциала клетки при внешней стимуляции постоянным током в 100пкА на протяжении 0.5 с как функция времени

Рассмотрим теперь результаты реальных измерений *in vitro*³ и сопоставим их с приведенными свойствами модели (5.24) (рис. 5.7). Оказывается, что изменение частоты импульсов от начала и до конца стимуляции для индивидуальных клеток может быть аппроксимировано экспоненциальной функцией с фиксированным временем затухания (рис. 5.7). Таким образом, динамика возбужденной клетки описывается неавтономной системой второго порядка вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax^3 + bx^2 + y + \alpha u - u_0 e^{-rt}; \\ \dot{y} &= c - \beta y - dx^2,\end{aligned}\tag{5.26}$$

где r , u , x – известные сигналы и параметры, а a , b , α , β , d подлежат определению. Третье уравнение в исходной модели, описывающее динамику переменной z , в данной задаче выполняет роль фильтра высоких частот, что хорошо согласуется с физическим смыслом токов адаптации [211].

Принимая во внимание уравнения (5.20), (5.22), (5.26) модель для идентификации динамики нервных клеток имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta_0^T \phi_0(x, u, t) + f(\theta_{2,2}, \theta_{2,1}, t) + \varepsilon(t); \\ f(\theta_{2,2}, \theta_{2,1}, t) &= \int_0^t e^{-\theta_{2,2}(t-\tau)} \theta_{2,1} x^2(\tau) d\tau; \\ \phi_0(x, u, t) &= (x^3, x^2, 1, e^{-r\sigma(t)}, u(t)),\end{aligned}\tag{5.27}$$

³ Данные для анализа предоставлены А. Семейновым и И. Зонг, группа исследования механизмов функционирования нейронных схем (neuronal circuit mechanisms research group) Института Физических и Химических Исследований RIKEN, Институт Мозга, г. Вако, Япония

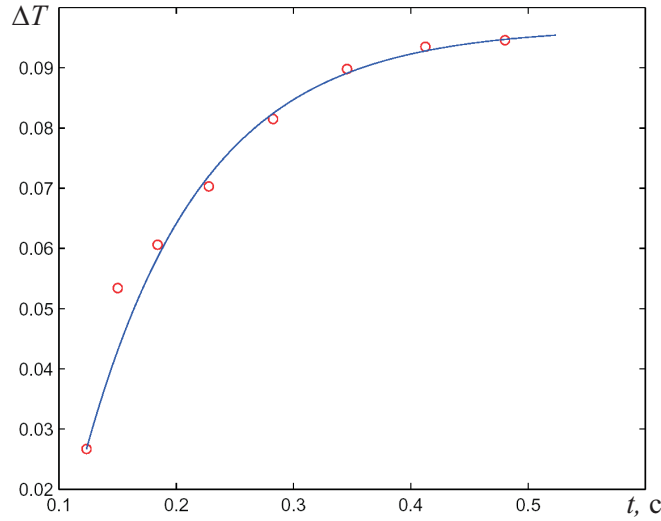


Рисунок 5.8. График интервалов между импульсами возбужденной клетки как функция времени (красные кружки) и аппроксимация (сплошная линия)

где $\sigma(t)$ – периодическая известная кусочно-линейная функция

$$\sigma(t) = \sigma(t + T), \quad T = 1, \quad \sigma(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 0.5]; \\ 10, & t \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

а $\varepsilon(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ экспоненциально затухает. Следовательно, задача идентификации параметров модели (5.19) с неопределенностью в уравнениях линейно параметризованных регрессоров сводится к задаче идентификации параметров редуцированной модели (5.27) с нелинейно параметризованными, но полностью определенными уравнениями регрессоров.

5.2.3. Синтез алгоритма идентификации

Для решения задачи одновременной идентификации параметров и состояния модели (5.27) примем предположение, что траектория $x(t)$ в состоянии воспроизвести экспериментальные данные.

Прежде всего введем в рассмотрение наблюдатель состояния следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= -\alpha_0(\hat{x} - x) + \hat{\theta}_0^T \phi_0(x, u(t), t)u + f(\hat{\theta}_{2,2}, \hat{\theta}_{2,1}, t), \quad \alpha_0 \in \mathbb{R}_{>0}; \\ \dot{\hat{\theta}}_0 &= -\Gamma(x - \hat{x})\phi_0(x, u(t), t), \end{aligned} \quad (5.28)$$

где $\Gamma \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ положительно определенная симметричная матрица, а функция $f(\hat{\theta}_{2,2}, \hat{\theta}_{2,1}, t)$ определена в соответствии с уравнениями (5.27). Вводя обозначения

$$\tilde{x} = \hat{x} - x, \quad \tilde{\theta}_0 = \hat{\theta}_0 - \theta_0,$$

запишем уравнения системы (5.27) с наблюдателем (5.28) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\theta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_0 & \phi_0(x(t), u(t), t)^T \\ -\phi_0(x(t), u(t), t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\theta}_0 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (f(\hat{\theta}_{2,2}, \hat{\theta}_{2,1}, t) - f(\theta_{2,2}, \theta_{2,1}, t)) - \varepsilon(t). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Особенностью уравнений (5.27) является то, что подсистема

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\theta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_0 & \phi_0(x(t), u(t), t)^T \\ -\phi_0(x(t), u(t), t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\theta}_0 \end{pmatrix} + v(t)$$

оказывается экспоненциально устойчивой при условии предельной невырожденности регрессора $\phi_0(x(t), u(t), t)$ [250] и $v(t) = 0$. Кроме того, при условии предельной невырожденности регрессора $\phi_0(x(t), u(t), t)$ она удовлетворяет предположению 3.20.

С другой стороны, функция $f(\theta_{2,2}, \theta_{2,1}, t)$ удовлетворяет следующему ограничению:

$$\begin{aligned} |f(\theta_{2,2}, \theta_{2,1}, t) - f(\hat{\theta}_{2,2}, \hat{\theta}_{2,1}, t)| &\leq |f(\theta_{2,2}, \theta_{2,1}, t) - f(\hat{\theta}_{2,2}, \theta_{2,1}, t)| + |f(\hat{\theta}_{2,2}, \theta_{2,1}, t) \\ &- f(\hat{\theta}_{2,2}, \hat{\theta}_{2,1}, t)| \leq D_{f, \theta_{2,2}} |\theta_{2,2} - \hat{\theta}_{2,2}| + D_{f, \theta_{2,1}} |\theta_{2,1} - \hat{\theta}_{2,1}| + \epsilon(t), \end{aligned}$$

где член $\epsilon(t)$ экспоненциально затухает, а

$$D_{f, \theta_{2,2}} = \max_{\hat{\theta}_{2,2}, \theta_{2,1}} \left\{ \frac{1}{\theta_{2,2} \hat{\theta}_{2,2}} \theta_{2,1} \|x(\tau)\|_{\infty, [t_0, \infty]} \right\}, \quad D_{f, \theta_{2,1}} = \max_{\hat{\theta}_{2,2}} \left\{ \frac{1}{\hat{\theta}_{2,2}} \|x(\tau)\|_{\infty, [t_0, \infty]} \right\}. \quad (5.30)$$

Определим теперь подсистему (3.159). С этой целью рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \lambda_2; \\ \dot{\lambda}_2 &= -\omega_1^2 \lambda_1; \\ \dot{\lambda}_3 &= \lambda_4; \\ \dot{\lambda}_4 &= -\omega_2^2 \lambda_3, \quad \lambda_0 = (1, 0, 1, 0)^T, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где Ω_λ является ω -предельным множеством точки λ_0 , а $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$. Система (5.31), очевидно, удовлетворяет предположению 3.21. Принимая во внимание, что области $\Omega_{\theta_{2,2}} = [\underline{\theta}_{2,2}, \bar{\theta}_{2,2}]$, $\Omega_{\theta_{2,1}} = [\underline{\theta}_{2,1}, \bar{\theta}_{2,1}]$ изменения параметров $\theta_{2,2}, \theta_{2,1}$ могут быть оценены *a priori*, выберем следующий закон оценки параметров $\hat{\theta}_{2,2}, \hat{\theta}_{2,1}$:

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \eta = (\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)); \\ \hat{\theta}_{2,2} &= \eta_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \arcsin(\lambda_1)}{\pi} + 1 \right) (\bar{\theta}_{2,2} - \underline{\theta}_{2,2}) + \underline{\theta}_{2,2}; \\ \hat{\theta}_{2,1} &= \eta_2(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \arcsin(\lambda_3)}{\pi} + 1 \right) (\bar{\theta}_{2,1} - \underline{\theta}_{2,1}) + \underline{\theta}_{2,1}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Выбором $\omega_1/\omega_2 = \pi$ обеспечивается плотность $\boldsymbol{\eta}(\Omega_\lambda)$ в множестве $\Omega_{\theta_{2,2}} \times \Omega_{\theta_{2,1}}$.

Принимая во внимание, что $\hat{\theta}_{2,2}$, $\hat{\theta}_{2,1}$ ограничены по построению, а константы $D_{f,\theta_{2,2}}$ и $D_{f,\theta_{2,1}}$ в (5.30) и сигнал $x(t)$ ограничены по условию задачи, в соответствии со следствием 3.3, соединение (5.28), (5.32) и

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= \gamma \|\tilde{x}(t)\|_{\Delta(\delta)} \cdot \lambda_2; \\ \dot{\lambda}_2 &= -\gamma \|\tilde{x}(t)\|_{\Delta(\delta)} \cdot \omega_1^2 \lambda_1; \\ \dot{\lambda}_3 &= \gamma \|\tilde{x}(t)\|_{\Delta(\delta)} \cdot \lambda_4; \\ \dot{\lambda}_4 &= -\gamma \|\tilde{x}(t)\|_{\Delta(\delta)} \cdot \omega_2^2 \lambda_3, \quad \boldsymbol{\lambda}_0 = (1, 0, 1, 0)^T\end{aligned}$$

с произвольно малым $\delta > 0$ и достаточно малым $\gamma > 0$ гарантирует выполнение предельных соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t)\|_{\Delta(\delta)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{2,2}(t) = \theta'_{2,2} \in \Omega_{\theta_{2,2}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{2,1}(t) = \theta_{2,1} \in \Omega_{\theta_{2,1}}.$$

Это, в свою очередь, означает возможность оценки параметров модели (5.17), обеспечивающих сколь угодно точное воспроизведение экспериментальных данных.

Для оценки эффективности разработанной процедуры оценки при решении практических задач идентификации моделей мембран проводились вычислительные и натурные эксперименты, результаты которых приведены на рис. 5.9 и 5.10. В первом случае (рис. 5.9) эталонный сигнал $x(t)$ был сгенерирован системой (5.17) с параметрами

$$a = 1, \quad b = 4, \quad \alpha = 1, \quad c = 1, \quad d = 6, \quad \beta = 1, \quad \tau = 0.01, \quad \epsilon = 1, \quad g = 1.$$

Во втором случае (рис. 5.10) в качестве эталонного сигнала $x(t)$ были использованы реальные измерительные данные мембранного потенциала. В обоих случаях полученные результаты показывают эффективность возможного использования теоретических положений разд. 3 применительно к решению задач идентификации и наблюдения состояния и параметров электрохимических процессов в клеточных мембранах.

Введенные алгоритмы идентификации позволяют оценивать состояние и параметры моделей по измерениям мембранного потенциала клетки в ответ на электрическую стимуляцию, т. е. по измерениям “вход – выход”. Особенностью предложенных алгоритмов является, во-первых, их применимость к процессам, математические модели которых не приводятся к каноническим формам адаптивного наблюдателя; во-вторых, эти алгоритмы допускают возможность нелинейной параметризации модели по части параметров. В-третьих, в отличие от известных минимаксных алгоритмов [130] они не требуют дополнительных внешних воздействий на наблюдаемый объект, что позволяет оставаться в рамках существующих протоколов экспериментов.

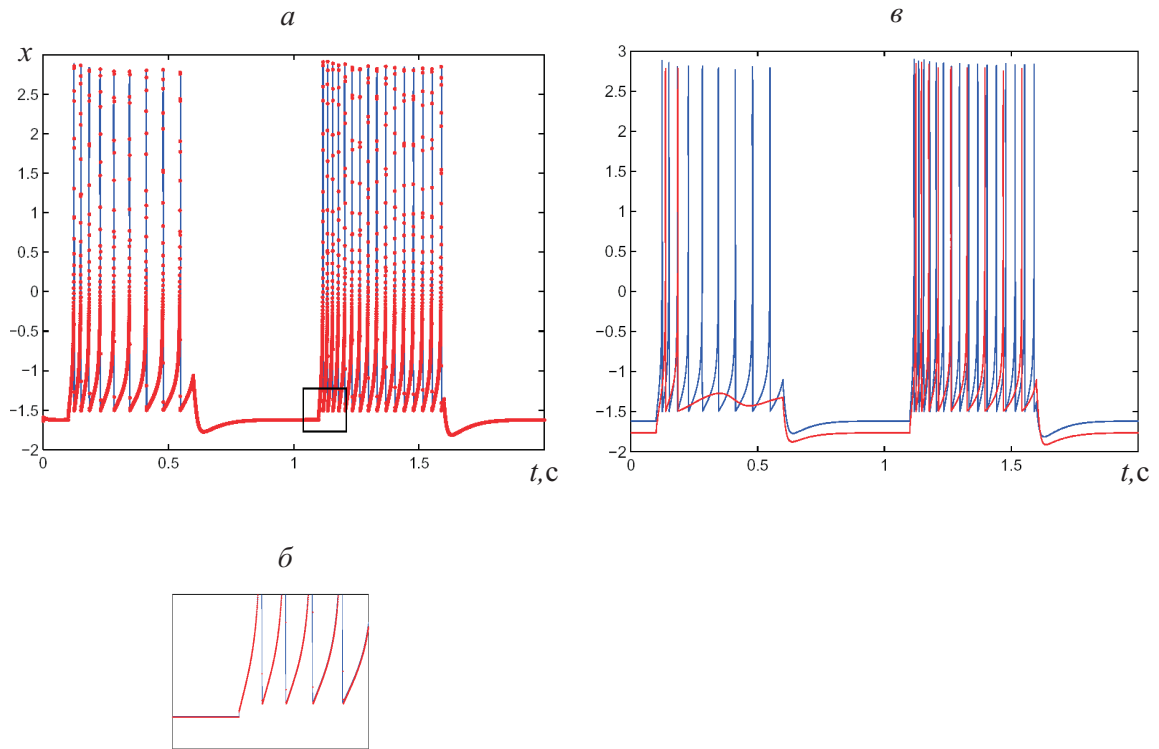


Рисунок 5.9. Графики на панелях а), б) – траектории сигнала $x(t)$ как решения системы (5.17) при эталонных значениях параметров (синие сплошные линии) и восстановленные с помощью адаптивного наблюдателя (5.29), (5.32), (5.33) (красные пунктирные линии); графики на панели в) – траектории эталонного сигнала и возмущенного эталонного сигнала при изменении параметра $\theta_{2,2}$ на пять процентов от номинального значения

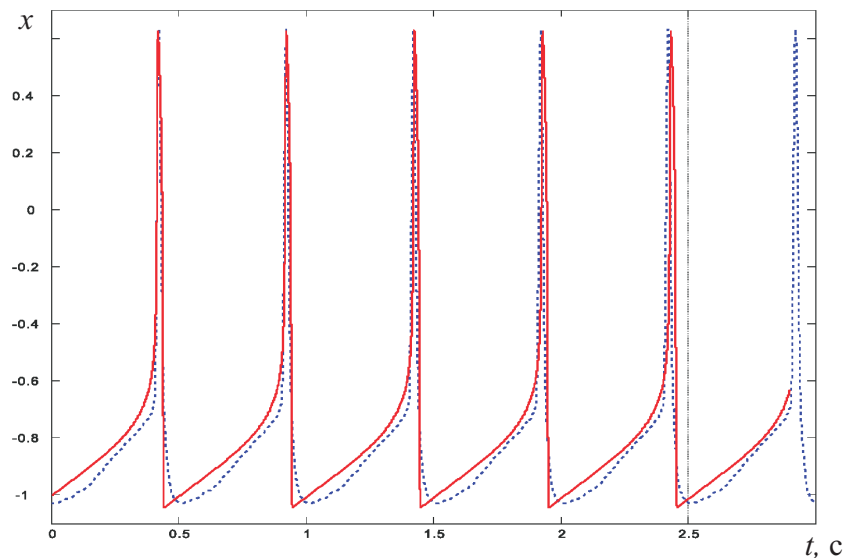


Рисунок 5.10. Графики эталонного сигнала (синие пунктирные линии) и восстановленного с помощью адаптивного наблюдателя (5.29), (5.32), (5.33) (красные сплошные линии) по измерениям мембранного потенциала клетки в режиме периодических колебаний

5.3. Задача адаптивного сравнения шаблонов в системах обработки визуальной информации

Рассмотренные в предыдущих параграфах раздела задачи адаптивного управления и идентификации можно отнести к числу традиционных проблем теории управления. Проиллюстрируем теперь возможность применения излагаемой теории адаптивных систем в нетрадиционной для “классических методов” области – в задаче классификации и распознавания объектов в системах обработки визуальной информации.

5.3.1. Постановка задачи

В качестве математической модели объектов будем рассматривать локально ограниченные отображения $S(x, y)$ из $\mathcal{S} \subseteq L_\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$, $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}$, $\Omega_y \subseteq \mathbb{R}$, где x, y имеют смысл пространственных координат, а значение $S(x, y)$ является значимой характеристикой объекта (интенсивность, яркость, контраст и т. п.).

На сегодняшний день существует обширная литература, посвященная методам решения задач распознавания и классификации объектов с использованием статистических методов [14, 7, 332, 195], синтаксического или структурного анализа [166], а также нейронных сетей [40, 153]. Однако несмотря на очевидные различия математического аппарата и требований к априорной информации об объекте, одной из центральных задач этих методов неизменно остается задача обнаружения элементарного объекта (шаблона) $S_i(x, y) \in \mathcal{S}$, $i \in \mathcal{I}$, где \mathcal{I} – множество индексов шаблонов, в исходном объекте $S(x, y) \in \mathcal{S}$ [229, 195].

Наиболее простые и, вместе с тем, распространенные способы сравнения шаблонов формально могут быть представлены, как действие некоторого оператора $\mathcal{F}_s\{\cdot\}$ на объекты $S_i(\cdot)$ из $L_\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$:

$$\mathcal{F}_s : L_\infty(\Omega_x \times \Omega_y) \rightarrow L_\infty(\Omega_x \times \Omega_y). \quad (5.33)$$

Оператор (5.33), в частности, может быть простейшей процедурой вычисления корреляций или пространственной фильтрации объектов $S_i(\cdot)$:

$$\mathcal{F}_s\{S_i, \boldsymbol{\theta}\}(x, y) = \int_{\Omega_x \times \Omega_y} F(S_i, \boldsymbol{\theta}, x, y, \xi, \nu, \Omega_x \times \Omega_x) d\xi d\nu, \quad \xi \in \Omega_x, \quad \nu \in \Omega_y, \quad (5.34)$$

где $F(S_i, \boldsymbol{\theta}, x, y, \xi, \nu, \Omega_x \times \Omega_x)$ – некоторое, в общем случае нелинейное, локальное преобразование объектов S_i , а $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ – вектор параметров фильтра. При этом процедура сравнения сводится к сравнению $L_\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$ норм, например, следующим образом:

$$\{S_i\} \succeq \{S_j\} \Leftrightarrow \|\mathcal{F}_s\{S_i, \boldsymbol{\theta}\}\|_{\infty, \Omega_x \times \Omega_y} \geq \|\mathcal{F}_s\{S_j, \boldsymbol{\theta}\}\|_{\infty, \Omega_x \times \Omega_y}. \quad (5.35)$$

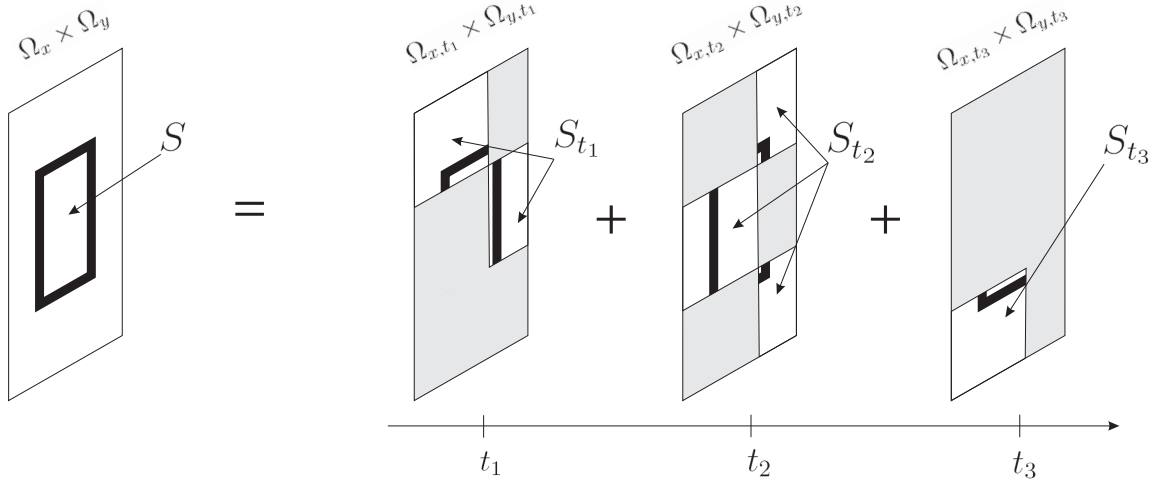


Рисунок 5.11. Развертка объекта $S(x, y) : \Omega_x \times \Omega_y \rightarrow \mathbb{R}_+$ в силу факторизации множества $\Omega_x \times \Omega_y$ на подмножества $\Omega_{x,t_1} \times \Omega_{y,t_1}$, $\Omega_{x,t_2} \times \Omega_{y,t_2}$, $\Omega_{x,t_3} \times \Omega_{y,t_3}$

Однако несмотря на простоту алгоритмической реализации процедур (5.33), (5.35), такой подход обладает рядом существенных недостатков. К их числу относятся:

1. Относительно большая вычислительная сложность процедуры (5.35).
2. Нечувствительность значений $\|\mathcal{F}_s\{S_i + \delta_i, \boldsymbol{\theta}\}\|_{\infty, \Omega_x \times \Omega_y}$ к малым вариациям $\delta_i \in L_\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$ объекта $S_i \in L_\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$ для наиболее распространенных операторов \mathcal{F}_s , например, нормированных корреляций.
3. Сингулярность процедур сравнения (5.35) в силу неединственности значений норм $\|\mathcal{F}_s\{S_i, \boldsymbol{\theta}\}\|_{\infty, \Omega_x \times \Omega_y}$ для различных шаблонов S_i ⁴.

Для устранения недостатков процедур (5.33), (5.35) обработки и сравнения объектов естественно использовать возможность факторизации множеств Ω_x и Ω_y по некоторому параметру $t \in \Omega_t \subset \mathbb{R}$:

$$\Omega_x \times \Omega_y = \bigcup_t \Omega_{x,t} \times \Omega_{y,t}, \quad t \in \Omega_t, \quad \Omega_{x,t} \subseteq \Omega_x, \quad \Omega_{y,t} \subseteq \Omega_y. \quad (5.36)$$

Эта операция эквивалентна “развертке” всего множества $\Omega_x \times \Omega_y$ по t , что иллюстрируется рис. 5.11. При этом значение оператора $\mathcal{F}_s\{S_i\}$ в точке (x, y) отображается в индексированное семейство

$$\mathcal{F}_s\{S_i, \boldsymbol{\theta}\}(x, y) \xrightarrow{t} (\mathcal{F}_s\{S_{i,t}, \boldsymbol{\theta}\}(x, y))_{t \in \Omega_t} \rightarrow \mathcal{F}_{s,t}\{S_i, \boldsymbol{\theta}\}(x, y, t) \quad (5.37)$$

⁴См. также работу [94], где показана сингулярность сравнения шаблонов с использованием операторов вида (5.33) и сравнения на основе информационной метрики Фишера.

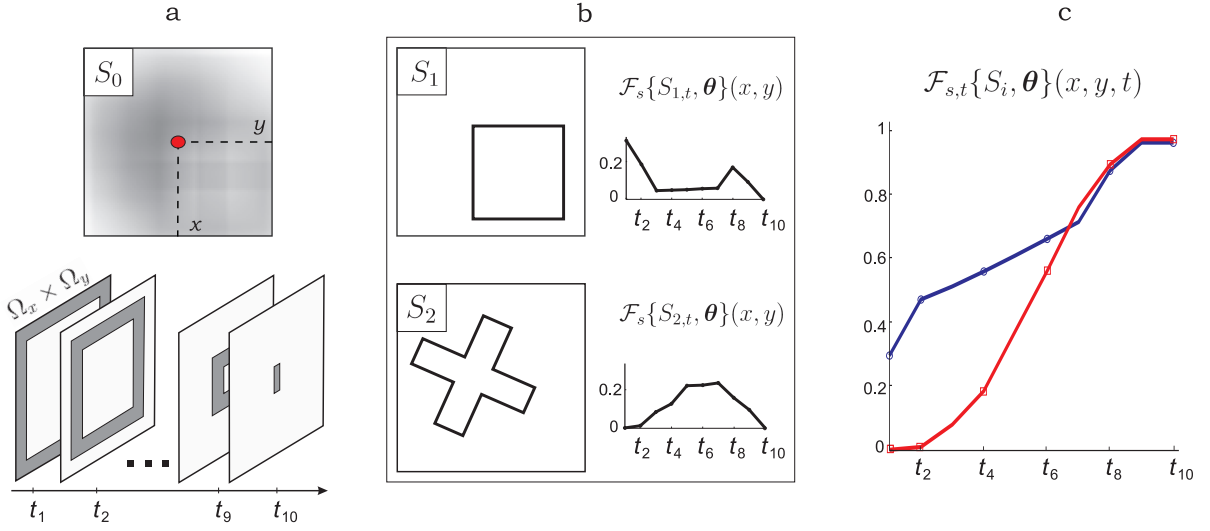


Рисунок 5.12. “Развертка” интегрального оператора вычисления корреляций. Панель a – исходный объект, S_0 ; точка (x, y) , относительно которой производится вычисление нормированных корреляций; разбиение области $\Omega_x \times \Omega_y$ определения объекта S_0 на десять непересекающихся подмножеств $\Omega_x \times \Omega_y = \cup_{j=1}^{10} \Omega_{x,t_j} \times \Omega_{y,t_j}$. Панель b – шаблоны S_1, S_2 и графики $\mathcal{F}\{S_{i,t}, \theta\}(x, y)$ значений нормированных корреляции шаблонов S_i и объекта $S_0(\Omega_{x,t_j} \times \Omega_{y,t_j})$. Панель c – графики интеграла (5.38) как функции параметра t для шаблона S_1 (синяя линия) и S_2 (красная линия).

или в общем случае - функцию параметра t . Отметим, что в случае когда оператор $\mathcal{F}_s\{S_i, \theta\}$ является интегральным (5.34), множества $\Omega_{x,t} \times \Omega_{y,t}$ не пересекаются, а $\Omega_t = [0, T]$, значение $\mathcal{F}_{s,t}\{S_i, \theta\}(x, y, t)$ естественно определить в виде интеграла:

$$\mathcal{F}_{s,t}\{S_i, \theta\}(x, y, t) = \int_0^t \int_{\Omega_x \times \Omega_y} F(S_i, \theta, x, y, \xi, \nu, \Omega_{x,\tau} \times \Omega_{y,\tau}) d\xi d\nu d\tau \quad (5.38)$$

или его аппроксимации в виде решений уравнения

$$\dot{\phi}_i = -\frac{1}{\tau_\phi} \phi_i + k_\phi f_i(x, y, \theta, t), \quad \tau_\phi, k_\phi \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (5.39)$$

где

$$f_i(x, y, \theta, t) = \int_{\Omega_x \times \Omega_y} F(S_i, \theta, x, y, \xi, \nu, \Omega_{x,t} \times \Omega_{y,t}) d\xi d\nu.$$

При этом, очевидно, имеет место равенство

$$\mathcal{F}_s\{S_i, \theta\}(x, y) = \mathcal{F}_{s,t}\{S_i, \theta\}(x, y, T).$$

Преобразование (5.37) в соответствии с выражением (5.38) для интегрального оператора $\mathcal{F}_s\{S_i, \theta\}$ вычисления корреляций иллюстрируется рис. 5.12. Из рисунка видно, что несмотря на то, что корреляции объекта S_0 и шаблонов S_1, S_2 в точке (x, y) достигают своего максимального значения и в этом смысле неразличимы (панель c , значения $\mathcal{F}\{S_i, \theta\}(x, y, t_{10})$), факторизация множества $\Omega_x \times \Omega_y$ порождает уникальные “развертки” значений этих корреляций как функции параметра t . Это приводит

к различным профилям функций $\mathcal{F}_{s,t}\{S_i, \boldsymbol{\theta}\}(x, y, t)$ и как следствие к возможности разрешения сингулярностей в процедуре сравнения.

В литературе представлению информации об объекте в виде параметризованного семейства (5.37) или функции (5.38) соответствует понятие временного или пространственно-временного кодирования информации [182], где параметр t выполняет роль независимой переменной или времени. В практическом отношении использование преобразований (5.37), (5.38) приводит к тому, что информация о пространственных параметрах объектов S_i во всей области $\Omega_x \times \Omega_y$ содержится в измерениях $\mathcal{F}_{s,t}\{S_i, \boldsymbol{\theta}\}(x, y, t)$ в единственной точке $(x, y) \in \Omega_x \times \Omega_y$. Это, в свою очередь, позволяет заменить процедуру сравнения объектов с помощью $L_\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$ норм на сравнение сигналов $\mathcal{F}_{s,t}\{S_i, \boldsymbol{\theta}\}(x, y, t)$ по нормам $L_\infty(\Omega_t)$

$$\{S_i\} \succeq \{S_j\} \Leftrightarrow \|\mathcal{F}_{s,t}\{S_i, \boldsymbol{\theta}\}(x, y, t)\|_{\infty, \Omega_t} \geq \|\mathcal{F}_{s,t}\{S_j, \boldsymbol{\theta}\}(x, y, t)\|_{\infty, \Omega_t}. \quad (5.40)$$

Очевидно, что подобная замена значительно снижает вычислительную сложность самого сравнения в силу того, что размерность множества $\Omega_x \times \Omega_y$ превосходит размерность Ω_t .

Второе преимущество использования факторизации состоит в том, что исходно двумерные объекты в \mathbb{R}^2 получают дополнительную размерность t . Следовательно, согласно теореме Такенса о вложении [310], такое представление объекта позволяет рассматривать объекты с самопересечениями как единое целое, что открывает возможность естественным образом решать задачи интеграции и группировки объектов.

Дополнительные преимущества временного кодирования с точки зрения информационной емкости сигналов исследованы в работах [262, 139, 98]. Кроме того, известны экспериментально подтвержденные факты, что временное кодирование и обработка информации являются центральными механизмами функционирования сенсорных систем животных и человека [131, 331]. Таким образом, задача синтеза систем сравнения шаблонов на основе схем временного кодирования или, в общем случае схем типа (5.40), является актуальной.

На сегодняшний день известны примеры успешного моделирования систем, построенных на основе временного кода, гарантирующих отсутствие сингулярностей в процедурах распознавания [287], а также обеспечивающих инвариантность распознавания к сдвигам изображений [126, 340]. Обобщенная структурная схема таких систем изображена на рис. 5.13. Блоки \mathcal{S}_{ϕ_i} в схеме на рис. 5.13 выполняют функции адаптивной фильтрации объекта S_i , в частности, преобразование (5.38) согласно (5.39). При этом блок \mathcal{A} реализует алгоритмы адаптивной самонастройки фильтра. Блоки \mathcal{S}_{D_i} являются детекторами совпадений сигналов $\phi_i(t)$. Совокупность элементов \mathcal{S}_{D_i} представляет из себя как правило систему нелинейных осцилляторов, частичная синхронизация которых сигнализирует о совпадении стимулов S_i .

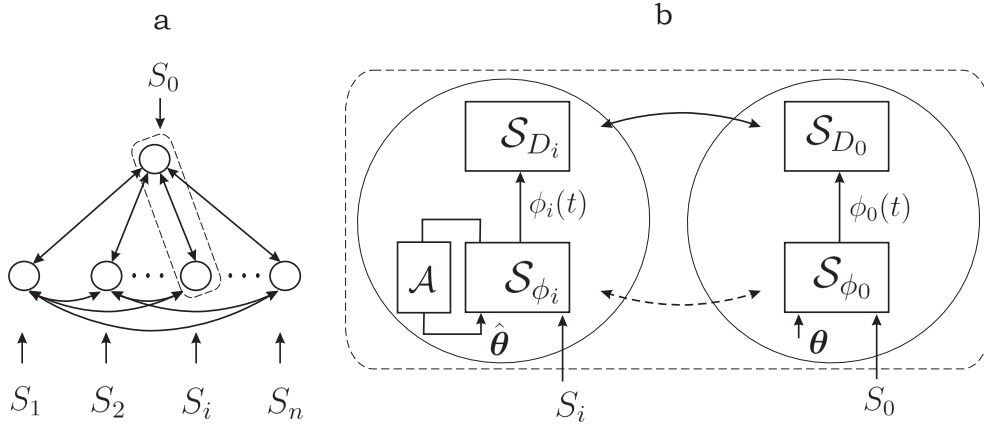


Рисунок 5.13. Структурная схема системы адаптивного сравнения шаблонов на основе временного кодирования информации. Панель *a* – обобщенная структурная схема. Панель *b* – принципиальная структура подсистемы обработки шаблона S_i и ее связи с подсистемой обработки объекта S_0 .

Несмотря на относительную простоту структур на рис. 5.13, теория синтеза систем подобного типа, однако, до сих пор отсутствует. В значительной мере это связано с противоречивыми требованиями к желаемым свойствам рассматриваемых систем. С одной стороны, идеальная система обработки визуальной информации должна быть неустойчивой и мультистабильной – с целью обеспечения высокой чувствительности к малым изменениям объекта [326]. С другой стороны, она должна обеспечивать инвариантность распознавания к типовым возмущениям и преобразованиям из заданного класса.

Формально решение первой задачи требует настройки систем \mathcal{S}_{D_i} в режимы, близкие к критическим, когда инвариантное многообразие оказывается либо вблизи границы устойчивости по Ляпунову, либо неустойчиво [98]. Решение второй задачи требует наличия методов синтеза алгоритмов адаптации для систем, целевая динамика которых допускает возможность неустойчивых по Ляпунову движений. При этом следует учитывать и то обстоятельство, что самые простейшие модели оптических возмущений в виде линейных пространственных фильтров [285, 225]:

$$f_i(x, y, \boldsymbol{\theta}, t) = \int_{\Omega_x \times \Omega_y} H_i(x, y, \xi, \nu, \boldsymbol{\theta}, t) S_i(\xi, \nu) d\xi d\nu, \quad (5.41)$$

$$H_i(x, y, \xi, \nu, \boldsymbol{\theta}, t) = \theta_{i,1} \exp(-\theta_{i,2}((\xi - x(t))^2 + (\nu - y(t))^2)),$$

где параметры $\theta_{i,1}$, $\theta_{i,2}$ моделируют возмущение интенсивности и фокуса изображения, приводят к нелинейно параметризованным уравнениям во временной области и как следствие к невозможности использования стандартных методов и алгоритмов адаптации.

Решению этих двух проблем посвящены следующие секции параграфа. В секции 5.3.2 приводятся условия глобальной и локальной синхронизации систем \mathcal{S}_{D_i} в за-

висимости от параметров самого детектора, определяющих режим его колебаний – хаотический/периодический. В секции 5.3.3, с использованием результатов разделов 2, 3, приводятся и обосновываются алгоритмы настройки параметров фильтра (5.41) по измерениям $S_i(x, y)$ и $S_0(x, y)$.

5.3.2. Условия синхронизации

осцилляторов-детекторов совпадений

Рассмотрим уравнения элементарных блоков простейшей системы сравнения шаблонов, изображенной на рис. 5.13. В качестве простейшей модели осциллятора-детектора совпадений выберем модель Хиндмарша-Роуза (5.17), которая обладает широким спектром практически значимых режимов работы и вместе с тем является вычислительно эффективной [194]. Согласно (5.17), уравнения подсистемы \mathcal{S}_{D_i} имеют вид:

$$\mathcal{S}_{D_i} : \begin{cases} \dot{x}_i = -ax_i^3 + bx_i^2 + \phi_i(t) + y_i - z_i + u_i, \\ \dot{y}_i = c - dx_i^2 - y_i, \\ \dot{z}_i = \varepsilon(s(x_i + x^*) - z_i), \end{cases} \quad (5.42)$$

где индексом $i \in \{1, \dots, n\}$ обозначен номер шаблона, а u_i – функция связи между системами. Параметры уравнений (5.42) выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} a = 1, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad d = 5, \\ s = 4, \quad x^* = 1.6, \quad \varepsilon = 0.001, \end{aligned} \quad (5.43)$$

что соответствует режиму хаотических колебаний отдельных осцилляторов [176]. Будем считать, что связь между подсистемами задается уравнением вида:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \gamma \begin{pmatrix} -(n+1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -(n+1) & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & -(n+1) \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}_+. \quad (5.44)$$

Прежде всего проанализируем условия возникновения режимов глобальной синхронизации $n+1$ подсистем вида (5.42) при условии, что

$$\phi_i(t) = \phi_j(t), \quad i, j \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \phi_i(t) \in C^1[0, \infty] \cap L_\infty^1[0, \infty]. \quad (5.45)$$

Другими словами, нас интересуют условия аттрактивности инвариантного многообразия

$$x_i(t) = x_j(t), \quad y_i(t) = y_j(t), \quad z_i(t) = z_j(t), \quad \forall i, j \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (5.46)$$

Эти условия могут быть сформулированы в виде следующего результата⁵:

⁵ Доказательства предложений 5.1 и 5.2 приводятся в [266].

Предложение 5.1. Пусть задана система (5.42), где функция \mathbf{u} определена согласно (5.44), и выполняется условие (5.45). Тогда

- 1) для любых $\gamma \in \mathbb{R}_+$ решения системы ограничены;
- 2) если, в дополнение, выполняется неравенство

$$\gamma > \bar{\gamma}_g = \frac{0.5d^2 + b^2}{n+1}, \quad (5.47)$$

то для всех $i, j \in \{0, \dots, n\}$ справедливы следующие предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_j(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) - y_j(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) - z_j(t) = 0. \quad (5.48)$$

Предложение 5.1 дает оценку нижней границы области значений параметра γ функции связи (5.44), гарантирующих глобальную синхронизацию траекторий системы (5.42) при условии (5.45). Для настройки системы в режим перемежающейся, мультистабильной синхронизации необходимо также иметь оценки нижней границы параметров связи, обеспечивающие локальную аттрактивность инвариантного многообразия (5.46). Эти оценки вытекают из предложения 5.2

Предложение 5.2. Рассмотрим систему (5.42), где функция $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ определена в соответствии с (5.44) и кроме того справедливы равенства (5.45). Пусть, в дополнение, выполняется условие

$$\gamma > \bar{\gamma}_l = \frac{1}{n+1} \left(\left(\frac{|b - \frac{1}{2}d|}{2|d|} + \frac{1}{4} \right) \frac{d^2 + 2|b - \frac{1}{2}d||d|}{3} + \left| 1 - \frac{3d^2}{4d^2 + 2|d||b - \frac{1}{2}d|} \right| \delta^2 + \right. \\ \left. \left(|b - \frac{1}{2}d| + 3 \left| 1 - \frac{d^2}{d^2 + 2|d||b - \frac{1}{2}d|} \right| \mathcal{B}_x \right) \delta \right), \quad \mathcal{B}_x = \|x_i(t)\|_{\infty, [t_0, \infty]}. \quad (5.49)$$

Тогда для любых начальных условий из области

$$\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0), \mathbf{z}(0) : 2V(\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0), \mathbf{z}(0))/C_x < \delta^2,$$

где $V(\cdot)$ определена в виде

$$V = 0.5 \sum_{i=1}^{n-1} \left(C_x(x_i - x_{i+1})^2 + C_y(y_i - y_{i+1})^2 + C_z(z_i - z_{i+1})^2 \right),$$

имеют место следующие предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_j(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) - y_j(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) - z_j(t) = 0. \quad (5.50)$$

Сформулированные в предложениях 5.1, 5.2 результаты позволяют оценить диапазон значимых параметров связи между подсистемами как функцию параметров самих осцилляторов и как следствие, желаемого режима колебаний в системе (5.42)

– хаотический, периодический или устойчивое положение равновесия. Так, в частности, для хаотического режима колебаний, при $b = 3, d = 5$ выражения (5.47), (5.49) дают следующие значения параметра $\bar{\gamma}_g$ и, предельные, (при $\delta \rightarrow 0$), параметра $\bar{\gamma}_l$:

$$\bar{\gamma}_g = \frac{21.5}{n+1}, \quad \bar{\gamma}_l = \frac{3}{n+1}.$$

Таким образом, для любых $\gamma > \frac{21.5}{n+1}$ система оказывается сверхчувствительной к форме сигнала $\phi_i(t)$, но нечувствительной к разности $\phi_i(t) - \phi_j(t)$, $i \neq j$. С другой стороны, в области $\gamma < \frac{3}{n+1}$ система оказывается сверхчувствительной как к форме сигналов $\phi_i(t)$, так и к разности $\phi_i(t) - \phi_j(t)$ в силу того, что инвариантное многообразие (5.46) оказывается на границе устойчивости.

В заключение анализа отметим, что в условиях предложений 5.1, 5.2, движение системы (5.42) относительно многообразия (5.46) в некоторой его окрестности оказывается экспоненциально устойчивым. Следовательно, выполнение предельных соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_i(t) - \phi_j(t) = 0$$

для произвольных пар i, j автоматически влечет выполнение (5.48) при условии, что система остается в этой окрестности. В задаче сравнения шаблонов первостепенное значение имеет синхронизация элементов (5.42), $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ с элементом при $i = 0$, соответствующим индексу исходного сравниваемого объекта. В этом смысле условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_0(t) - \phi_i(t) = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.51)$$

имеют смысл целевых ограничений для систем S_{ϕ_i} , обеспечивающих инвариантность системы к типовым оптическим возмущениям. Условия выполнения ограничений (5.51) для классов возмущений (5.41) приводятся ниже.

5.3.3. Синтез подсистемы адаптивной

фильтрации оптических возмущений

Согласно уравнениям (5.39) система S_{ϕ_i} временного кодирования исходного сигнала, подвергнутого действию фильтра (5.41) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= -\frac{1}{\tau_\phi} \phi_i + k_\phi f_i(x, y, \hat{\theta}_i, t), \\ f_i(x, y, \hat{\theta}_i, t) &= \hat{\theta}_{i,1} \int_{\Omega_x \times \Omega_y} \exp(-\hat{\theta}_{i,2}((\xi - x(t))^2 + (\nu - y(t))^2)) S_i(\xi, \nu) d\xi d\nu, \\ \tau_\phi k_\phi &\in \mathbb{R}_{>0}, \quad \hat{\theta}_i = (\hat{\theta}_{i,1}, \hat{\theta}_{i,2})^T, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где вектор $\hat{\theta}_i \in \mathbb{R}^2$ имеет смысл оценок параметров фильтра (5.41). Для компактности записи введем обозначение

$$(\xi - x(t))^2 + (\nu - y(t))^2 = \|(x, y)(t) - (\xi, \nu)\|^2.$$

Тогда функция $f_i(x, y, \hat{\theta}_i, t)$ в (5.52) примет вид:

$$f_i(x, y, \hat{\theta}_i, t) = \hat{\theta}_{i,1} \int_{\Omega_x \times \Omega_y} e^{-\hat{\theta}_{i,2} \|(x,y)(t) - (\xi, \nu)\|^2} S_i(\xi, \nu) d\xi d\nu.$$

Целью синтеза является отыскание закона изменения параметров $\hat{\theta}_i$ такого, что для всех $\theta \in \Omega_\theta \subset \mathbb{R}^2$ обеспечивается выполнение предельных соотношений (5.51) при условии, что наблюдаемый объект S_0 совпадает с шаблоном S_i с точностью до параметров θ_i фильтра (5.41). При этом будем полагать, что

$$\Omega_\theta = [\theta_{1,\min}, \theta_{1,\max}] \times [\theta_{2,\min}, \theta_{2,\max}], \quad \theta_{j,\min}, \theta_{j,\max} \in \mathbb{R}_{>0}, \quad j \in \{1, 2\}$$

и, кроме того, значения $\theta_{j,\min}, \theta_{j,\max}$ известны. В дополнение, положим, что области Ω_x, Ω_y покрываются интервалами $[x_{\min}, x_{\max}], [y_{\min}, y_{\max}]$ соответственно.

Учитывая тот факт, что объект S_0 совпадает с шаблоном S_i с точностью до неизвестного параметра θ_i , запишем дифференциальное уравнение ошибки $e_i(t) = \phi_i(t) - \phi_0(t)$:

$$\dot{e}_i = -\frac{1}{\tau_\phi} e_i + k_\phi (f_i(x, y, \hat{\theta}_i, t) - f_i(x, y, \theta_i, t)). \quad (5.53)$$

Принимая во внимание модель возмущений (5.52), разность $f_i(x, y, \hat{\theta}_i, t) - f_i(x, y, \theta_i, t)$ можно записать в следующем виде

$$f_i(x, y, \hat{\theta}_i, t) - f_i(x, y, \theta_i, t) = \Delta_{1,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t) + \Delta_{2,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{1,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t) &= (\hat{\theta}_{i,1} - \theta_{i,1}) \int_{\Omega_x \times \Omega_y} e^{-\hat{\theta}_{i,2} \|(x,y)(t) - (\xi, \nu)\|^2} S_i(\xi, \nu) d\xi d\nu, \\ \Delta_{2,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t) &= \theta_{i,1} \int_{\Omega_x \times \Omega_y} \left(e^{-\hat{\theta}_{i,2} \|(x,y)(t) - (\xi, \nu)\|^2} - e^{-\theta_{i,2} \|(x,y)(t) - (\xi, \nu)\|^2} \right) S_i(\xi, \nu) d\xi d\nu. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Тогда, с учетом (5.54) исходное уравнение (5.53) примет следующий вид:

$$\dot{e}_i = -\frac{1}{\tau_\phi} e_i + k_\phi (\Delta_{1,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t) + \Delta_{2,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t)). \quad (5.55)$$

Модель неопределенности в уравнениях (5.53), (5.55) находится в классе нелинейно параметризованных моделей общего вида и в явном виде не удовлетворяет условиям применимости теорем 3.1, 3.10. Тем не менее декомпозиция (5.54) позволяет представить разность $f_i(x, y, \hat{\theta}_i, t) - f_i(x, y, \theta_i, t)$ как сумму двух монотонных по аргументам $\hat{\theta}_{i,1} - \theta_{i,1}, \hat{\theta}_{i,2} - \theta_{i,2}$ функций для которых, по меньшей мере локально, выполняются предположения 3.3, 3.4. Этот факт, с учетом возможного применения результатов параграфа 3.6 и в частности следствия 3.3, открывает следующие альтернативные направления решения задачи синтеза алгоритмов одновременной настройки параметров $\hat{\theta}_{i,1}, \hat{\theta}_{i,2}$:

1. *Быстрая адаптация к изменениям яркости, медленная адаптация к фокальным возмущениям.* Определить закон изменения параметра $\hat{\theta}_{i,1}(t)$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость системы (5.53) от входа $d_1(t) = \Delta_{2,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t)$ к состоянию e_i . Эквивалентная запись системы (5.53) в этом случае имеет вид:

$$\dot{e}_i = -\frac{1}{\tau_\phi} e_i + k_\phi \left(\Delta_{1,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t) + d_1(t) \right), \quad d_1(t) \in L_\infty[t_0, t] \cap C^0[t_0, t]. \quad (5.56)$$

Для асимптотически устойчивой от входа $d_1(t)$ к состоянию e_i системы (5.56) на основе результатов следствия 3.3 синтезировать функцию $\hat{\theta}_{i,2}(t)$, гарантирующую выполнение предельного соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{i,2}(t) = \theta_{2,i}.$$

2. *Быстрая адаптация к фокальным возмущениям, медленная адаптация к изменениям яркости.* Определить закон изменения параметра $\hat{\theta}_{i,2}(t)$, обеспечивающий экспоненциальную устойчивость системы (5.53) от входа $d_2(t) = \Delta_{1,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t)$ к состоянию e_i . Эквивалентная запись системы (5.53) в этом случае имеет вид:

$$\dot{e}_i = -\frac{1}{\tau_\phi} e_i + k_\phi \left(\Delta_{2,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t) + d_2(t) \right), \quad d_2(t) \in L_\infty[t_0, t] \cap C^0[t_0, t]. \quad (5.57)$$

Для асимптотически устойчивой от входа $d_2(t)$ к состоянию e_i системы (5.57) определить функцию $\hat{\theta}_{i,1}(t)$, гарантирующую выполнение предельного соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{i,1}(t) = \theta_{1,i}.$$

Рассмотрим решение задачи синтеза алгоритма настройки параметров $\hat{\theta}_{i,1}, \hat{\theta}_{i,2}$ согласно альтернативе 1. Будем полагать, что $\hat{\theta}_{i,2} \in [\theta_{2,\min}, \theta_{2,\max}]$. Кроме того, налагаем на объекты $S_i(x, y)$ следующее дополнительное ограничение:

Предположение 5.1. Для любого $S_i(x, y) : \Omega_x \times \Omega_y \rightarrow \mathbb{R}_+$, $i \in \{0, \dots, n\}$ существует и известна положительная константа $\mathcal{B}_{S,1} \in \mathbb{R}_{>0}$, такая, что имеет место следующее неравенство:

$$L(x, y, \theta_{2,\max}) = \int_{\Omega_x \times \Omega_y} e^{-\theta_{2,\max} \|(x,y)(t) - (\xi, \nu)\|^2} S_i(\xi, \nu) d\xi d\nu \geq \mathcal{B}_{S,1}, \quad \mathcal{B}_{S,1} \in \mathbb{R}_{>0}. \quad (5.58)$$

Физический смысл условия (5.58) состоит в том, что объект $S_i(x, y)$ имеет ненулевую меру или, другими словами, ненулевую площадь. При этом оценка $\mathcal{B}_{S,1}$ минимально допустимой площади объектов $S_i(x, y)$ с учетом процедуры фильтрации (5.41) известна *a priori*.

С другой стороны, в соответствии с теоремой о среднем, выполняется неравенство:

$$|\Delta_{1,f_i}(x, t, \theta_i, \hat{\theta}_i, t)| \leq (x_{\max} - x_{\min})(y_{\max} - y_{\min}) \max_{(x', y') \in \Omega_x \times \Omega_y} \{S_i(x', y')\} = \mathcal{B}_{S,2}. \quad (5.59)$$

Тогда, в силу предположения 5.1, (5.58), имеет место неравенство

$$|(\hat{\theta}_{i,1} - \theta_{i,1})\mathcal{B}_{S,1}| \leq |\Delta_{1,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t)| \leq |(\hat{\theta}_{i,1} - \theta_{i,1})\mathcal{B}_{S,2}|, \quad (5.60)$$

где $\mathcal{B}_{S,2}$ – положительная константа. Кроме того, выполняется свойство

$$(\hat{\theta}_{i,1} - \theta_{i,1}) \cdot \Delta_{1,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t) \geq 0.$$

Следовательно, для функции $\Delta_{1,f_i}(\cdot)$ выполняются предположения 3.3, 3.4 при $\alpha_{1,i} = 1$. Последнее автоматически влечет выполнение предположения 3.5 с $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t) = 0$. Наконец, очевидно выполнение предположения 3.1, 3.2 для системы (5.56).

Таким образом, согласно теореме 3.10, разд. 3, алгоритм адаптации

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{i,1} &= -\gamma_{\theta_{i,1}}(e_i + I_{i,1}), \\ \dot{I}_{i,1} &= \frac{1}{\tau_\phi} e_i, \quad \gamma_{\theta_{i,1}} \in \mathbb{R}_{>0} \end{aligned} \quad (5.61)$$

обеспечивает экспоненциальную сходимость оценок $\hat{\theta}_{i,1}$ к значениям $\theta_{i,1}$ при $d_1(t) = 0$. Следовательно, в силу экспоненциальной устойчивости нулевого решения невозмущенной системы (5.56) (т. е. при $d_1(t) = 0$, $\Delta_{1,f_i}(\cdot) = 0$, $\Delta_{2,f_i}(\cdot) = 0$) система (5.56), (5.61) является глобально экспоненциально устойчивой.

Для доказательства свойства асимптотической устойчивости от входа к состоянию системы (5.56) рассмотрим эквивалентную запись уравнений (5.61) в виде:

$$\dot{\hat{\theta}}_{i,1} = -\gamma_{\theta_{i,1}} \left(\dot{e}_i + \frac{1}{\tau_\phi} e_i \right).$$

Тогда с учетом (5.56) получим:

$$\frac{d}{dt}(\hat{\theta}_{i,1} - \theta_{i,1}) = -\gamma_{\theta_{i,1}} k_\phi L(x(t), y(t), \hat{\theta}_{i,2})(\hat{\theta}_{i,1} - \theta_{i,1}) - \gamma_{\theta_{i,1}} k_\phi d_1(t). \quad (5.62)$$

Введя обозначение $\gamma_{\theta_{i,1}} k_\phi L(x(t), y(t), \hat{\theta}_{i,2}) = \beta(t)$, запишем решение уравнения (5.62):

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}_{i,1}(t) - \theta_{i,1}) &= \exp \left(- \int_0^t \beta(\tau) d\tau \right) (\hat{\theta}_{i,1}(0) - \theta_{i,1}) - \\ &\quad \gamma_{\theta_{i,1}} k_\phi \exp \left(- \int_0^t \beta(\tau) d\tau \right) \int_0^t \exp \left(\int_0^\tau \beta(\tau_1) d\tau_1 \right) d_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \exp \left(\int_0^\tau \beta(\tau_1) d\tau_1 \right) d_1(\tau) d\tau \right| &\leq \frac{1}{\min_{\tau \in [0,t]} |\beta(\tau)|} \cdot \left| \int_0^t \beta(\tau) \exp \left(\int_0^\tau \beta(\tau_1) d\tau_1 \right) d_1(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \frac{\|d_1(\tau)\|_{\infty, [0,t]}}{\min_{\tau \in [0,t]} |\beta(\tau)|} \exp \left(\int_0^t \beta(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая (5.63), а также тот факт, что согласно (5.58) $\min_{\tau \in [0, t]} |\beta(\tau)| = \gamma_{\theta_{i,1}} k_\phi \mathcal{B}_{S,1}$, справедлива оценка:

$$|\hat{\theta}_{i,1}(t) - \theta_{i,1}| \leq \exp(-\gamma_{\theta_{i,1}} k_\phi \mathcal{B}_{S,1} \cdot t) |\hat{\theta}_{i,1}(0) - \theta_{i,1}| + \frac{1}{\mathcal{B}_{S,1}} \|d_1(\tau)\|_{\infty, [0, t]}. \quad (5.64)$$

Принимая во внимание (5.56), (5.60), (5.64), оценим $|e_i(t)|$:

$$|e_i(t)| \leq e^{-\frac{1}{\tau_\phi} t} |e_i(0)| + \tau_\phi k_\phi \left(\frac{\mathcal{B}_{S,2}}{\mathcal{B}_{S,1}} + 1 \right) \|d_1(\tau)\|_{\infty, [0, t]} + \tau_\phi k_\phi \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_\phi} t} \right) \|\varepsilon_i(\tau)\|_{\infty, [0, t]}, \quad (5.65)$$

где $\varepsilon_i(t)$ – экспоненциально затухающий член, не зависящий от $e_i(0)$. Без потери общности положим, что

$$\tau_\phi k_\phi \|\varepsilon_i(\tau)\|_{\infty, [t_0, \infty]} \leq \Delta, \quad \Delta \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Тогда, в силу (5.65), запишем

$$|e_i(t)| \leq e^{-\frac{1}{\tau_\phi} t} |e_i(0)| + \tau_\phi k_\phi \left(\frac{\mathcal{B}_{S,2}}{\mathcal{B}_{S,1}} + 1 \right) \|d_1(\tau)\|_{\infty, [0, t]} + \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_\phi} t} \right) \Delta.$$

Согласно определению нормы $\|\cdot\|_\Delta$ запишем оценку для $\|e_i(t)\|_\Delta$:

$$\|e_i(t)\|_\Delta = \begin{cases} |e_i(t)| - \Delta \leq e^{-\frac{1}{\tau_\phi} t} (|e_i(0)| - \Delta) + \tau_\phi k_\phi \left(\frac{\mathcal{B}_{S,2}}{\mathcal{B}_{S,1}} + 1 \right) \|d_1(\tau)\|_{\infty, [0, t]}, & |e_i(t)| - \Delta > 0; \\ 0, & |e_i(t)| - \Delta \leq 0. \end{cases}$$

Следовательно, принимая во внимание свойства

$$|e_i(0)| - \Delta \leq \|e_i(0)\|_\Delta,$$

$$e^{-\frac{1}{\tau_\phi} t} (|e_i(0)| - \Delta) + \tau_\phi k_\phi \left(\frac{\mathcal{B}_{S,2}}{\mathcal{B}_{S,1}} + 1 \right) \|d_1(\tau)\|_{\infty, [0, t]} \geq 0 \Rightarrow |e_i(t)| - \Delta \geq 0,$$

справедлива следующая оценка:

$$\|e_i(t)\|_\Delta \leq e^{-\frac{1}{\tau_\phi} t} \|e_i(0)\|_\Delta + \tau_\phi k_\phi \left(\frac{\mathcal{B}_{S,2}}{\mathcal{B}_{S,1}} + 1 \right) \|d_1(\tau)\|_{\infty, [0, t]}. \quad (5.66)$$

При этом следует отметить тот факт, что в силу затухания функции $\varepsilon_i(t)$ до нуля, всегда найдется такой момент времени $t' \in \mathbb{R}_+$, что оценка (5.66) будет справедливой при сколь угодно малом $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$ для всех $t \geq t'$. Неравенство (5.66), очевидно, является формулировкой свойства устойчивости “вход-состояние” для системы (5.56) с алгоритмом (5.61) настройки параметра $\hat{\theta}_{i,1}$.

Для завершения синтеза с последующим применением следствия 3.3 нам потребуется выразить $d_1(t) = \Delta_{2, f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t)$ как функцию разности $|\hat{\theta}_{i,2} - \theta_{i,2}|$. Согласно теореме о среднем справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \Delta_{2, f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t) &= \theta_{i,1} (y_{\max} - y_{\min}) (x_{\max} - x_{\min}) \exp(-\theta_{i,2} \|(x, y)(t) - (\xi', \nu')\|^2) S(\xi', \nu') \times \\ &\times \left(\exp((\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2}) \|(x, y)(t) - (\xi', \nu')\|^2) - 1 \right), \end{aligned} \quad (5.67)$$

где ξ', ν' – некоторые элементы из Ω_x, Ω_y соответственно. Равенство (5.67) с учетом обозначения (5.59) приводит к следующей оценке

$$|\Delta_{2,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t)| \leq \theta_{1,\max} \mathcal{B}_{S,2} \left| \exp \left((\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2}) \|(x, y)(t) - (\xi', \nu')\|^2 \right) - 1 \right|. \quad (5.68)$$

Рассмотрим функцию:

$$b(x, k) = \frac{e^{kx} - 1}{x}, \quad k > 0. \quad (5.69)$$

Функция $b(x, k)$ неотрицательна и монотонно возрастает по x на $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$. Следовательно, ее максимальное и минимальное значение достигается на границах интервала $[a, b]$. Введем следующее обозначение

$$D_\theta = \theta_{2,\max} - \theta_{2,\min}.$$

Тогда, принимая во внимание (5.67), можно ограничить функцию $|\Delta_{2,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t)|$ сверху следующим образом:

$$|\Delta_{2,f_i}(x, y, \theta_i, \hat{\theta}_i, t)| \leq \theta_{1,\max} \mathcal{B}_{S,2} b(D_\theta, \|(x_{\max}, y_{\max}) - (x_{\min}, y_{\min})\|^2) \times |\hat{\theta}_{i,2} - \theta_{i,2}|. \quad (5.70)$$

Таким образом, в силу неравенств (5.70), (5.66) и с учетом обозначения

$$c = \tau_\phi k_\phi \left(\frac{\mathcal{B}_{S,2}}{\mathcal{B}_{S,1}} + 1 \right) \theta_{1,\max} \mathcal{B}_{S,2} b(D_\theta, \|(x_{\max}, y_{\max}) - (x_{\min}, y_{\min})\|^2) \quad (5.71)$$

имеет место оценка:

$$\|e_i(t)\|_\Delta \leq e^{-\frac{1}{\tau_\phi} t} \|e_i(0)\|_\Delta + c \cdot \|\hat{\theta}_{i,2}(\tau) - \theta_{i,2}\|_{\infty, [t_0, t]}. \quad (5.72)$$

Приводимость уравнений исходной системы (5.53) к виду (5.72), очевидно, эквивалентно выполнению предположения 3.20.

Для применения следствия 3.3 требуется построить вспомогательную систему (3.159), удовлетворяющую предположению 3.21. В качестве такой системы аналогично построениям в параграфе 5.2 выберем систему вида

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \omega^2, \quad \lambda_0 = (1, 0)^T, \\ \eta(\lambda) &= D_\theta \frac{\lambda_1 + 1}{2} + \theta_{2,\min}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Константа Липшица D_η для функции $\eta(\cdot)$ в (5.73) определяется равенством

$$D_\eta = \frac{D_\theta}{2},$$

а максимум $\|S(\lambda)\|$ на $\Omega_\lambda(\lambda_0)$ ограничен числом

$$\max_{\lambda \in \Omega_\lambda} S(\lambda) = 1 + \omega^2.$$

Таким образом, справедлив следующий результат

Предложение 5.3. Пусть задана система (5.53) и выполняется предположение 5.1. Кроме того, положим, что $\hat{\theta}_{i,1}(t)$ удовлетворяет уравнению (5.61), а $\hat{\theta}_{i,2}(t)$ определяется в виде

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{i,2}(t) &= \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\lambda}(t)) = D_\theta \frac{\lambda_1 + 1}{2} + \theta_{2,\min}; \\ \dot{\lambda}_1 &= \gamma_{\theta_{i,2}} \|e_i(t)\|_\Delta \cdot \lambda_2; \\ \dot{\lambda}_2 &= -\gamma_{\theta_{i,2}} \|e_i(t)\|_\Delta \cdot \lambda_1 \cdot \omega^2, \quad \boldsymbol{\lambda}_0 = (1, 0)^T,\end{aligned}\tag{5.74}$$

где $\gamma_{\theta_{i,2}}$ удовлетворяет ограничениям

$$0 < \gamma_{\theta_{i,2}} \leq -\frac{1}{\tau_\phi} \ln \left(\frac{d}{k} \right)^{-1} \frac{k-1}{k} \frac{1}{D_\lambda \left(2 + \frac{k}{1-d} \right)}, \quad D_\lambda = D_\theta \frac{c(1+\omega^2)}{2}$$

для некоторых $d \in (0, 1)$, $k \in (1, \infty)$ и константы c , заданной выражением (5.71).

Тогда для некоторого $\theta'_{i,2} \in [\theta_{2,\min}, \theta_{2,\max}]$, всех $\boldsymbol{\theta}_i \in \Omega_\theta$ и $e_i(t_0) \in \mathbb{R}$ справедливы предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\|_\Delta = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{i,2}(t) = \theta'_{i,2}.$$

Доказательство предложения 5.3 следует автоматически из следствия 3.3. Области сходимости оценок $\hat{\theta}_{i,1}(t)$, $\hat{\theta}_{i,2}(t)$ определяются нулями статической характеристики системы (5.53) по норме $\|\cdot\|_\Delta$.

Рассмотрим теперь решение задачи синтеза алгоритма настройки параметров $\hat{\theta}_{i,1}$, $\hat{\theta}_{i,2}$ согласно альтернативе 2. Зафиксируем *a priori* область изменения параметра $\hat{\theta}_{i,2}$ интервалом $[\theta_{2,\min}, \theta_{2,\max}]$. Тогда, очевидно, для любого $\hat{\theta}_{i,2}$ будет справедлива оценка

$$|\hat{\theta}_{i,2} - \theta_{i,2}| \leq D_\theta.$$

Введем следующее предположение

Предположение 5.2. Для любого $S_i(x, y) : \Omega_x \times \Omega_y \rightarrow \mathbb{R}_+$, $i \in \{0, \dots, n\}$ существует и известна положительная константа $\mathcal{B}_{S,3} \in \mathbb{R}_{>0}$, такая что справедливо неравенство

$$\theta_{1,\min} \int_{\Omega_x \times \Omega_y} e^{-\theta_{2,\max} \|(x,y)(t) - (\xi,\nu)\|^2} \left| \frac{e^{-D_\theta \|(x,y)(t) - (\xi,\nu)\|^2} - 1}{D_\theta} \right| S_i(\xi, \nu) d\xi d\nu \geq \mathcal{B}_{S,3}.$$

Принимая во внимание (5.70), а также предположение 5.2, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{S,3} |\hat{\theta}_{i,2} - \theta_{i,2}| &\leq |\Delta_{2,f_i}(x, y, \boldsymbol{\theta}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, t)| \leq \mathcal{B}_{S,4} |\hat{\theta}_{i,2} - \theta_{i,2}|, \\ \mathcal{B}_{S,4} &= \theta_{1,\max} \mathcal{B}_{S,2} b(D_\theta, \|(x_{\max}, y_{\max}) - (x_{\min}, y_{\min})\|^2).\end{aligned}\tag{5.75}$$

Неравенство (5.75), а также свойство

$$\Delta_{2,f_i}(x, t, \theta_i, \hat{\theta}_i, t)(\hat{\theta}_{i,2} - \theta_{i,2}) \leq 0$$

влекут выполнение предположений 3.3, 3.4 для функции $\Delta_{2,f_i}(\cdot)$ при $\alpha_{2,i} = -1$. Тогда, аналогично альтернативе 1 и согласно теореме 3.10, раздел 3, алгоритм

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{i,2} &= \gamma_{\theta_{i,2}}(e_i + I_{i,2}) \\ \dot{I}_{i,2} &= \frac{1}{\tau_\phi} e_i \end{aligned} \quad (5.76)$$

влечет экспоненциальную сходимость оценок $\hat{\theta}_{i,2}$ к значениям $\theta_{i,2}$ для любых $\hat{\theta}_{i,2}(t_0) \in [\theta_{2,\min}, \theta_{2,\max}]$ в отсутствие возмущений, т. е. при $d_2(t) = 0$. Однако в отличие предыдущего случая, рассмотренного в альтернативе 1, большие по амплитуде возмущения в системе (5.57) могут приводить к нарушению предположения 5.2.

Рассмотрим эквивалентную запись уравнений (5.76):

$$\frac{d}{dt}(\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2}) = -\beta(t)(\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2}) + \gamma_{\theta_{i,2}} k_\phi d_2(t), \quad (5.77)$$

где

$$\beta(t) = \gamma_{\theta_{i,2}} k_\phi \theta_{i,1} \int_{\Omega_x \times \Omega_y} e^{-\theta_{i,2} \|(x,y)(t) - (\xi, \nu)\|^2} S_i(\xi, \nu) \frac{\left(e^{(\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2}) \|(x,y)(t) - (\xi, \nu)\|^2} - 1 \right)}{\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2}} d\xi d\nu.$$

Учитывая, что функция $b(x, k)$ в (5.69) положительна и строго возрастает по x , можно заключить, что ограниченность снизу функции $\beta(t)$ некоторой положительной константой достигается в области

$$\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2} \in [-|\theta_{2,\max} - \theta_{2,\min}|, \infty).$$

Другими словами, при выполнении следующего ограничения:

$$\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2} \geq -|\theta_{2,\max} - \theta_{2,\min}|. \quad (5.78)$$

Для того, чтобы определить условия выполнения ограничения (5.78) запишем в явном виде решение уравнения (5.77):

$$\begin{aligned} (\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2}(t)) &= \exp\left(-\int_0^t \beta(\tau) d\tau\right) (\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2}(0)) + \\ &\quad \gamma_{\theta_{i,2}} k_\phi \exp\left(-\int_0^t \beta(\tau) d\tau\right) \int_0^t \exp\left(\int_0^\tau \beta(\tau_1) d\tau_1\right) d_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Из уравнения (5.79) следует, что ограничение (5.78) выполняется, начиная с некоторого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и далее для всех $t > t_0$ при выполнении следующего условия:

$$d_2(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.80)$$

Тогда, начиная с некоторого $t > t_0$, аналогично рассмотренному в альтернативе 1 случаю, имеет место оценка

$$|\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2}(t)| = \exp(-\gamma_{\theta_{i,2}} k_\phi \mathcal{B}_{S,3}(t - t_0)) |\theta_{i,2} - \hat{\theta}_{i,2}(t_0)| + \frac{1}{\mathcal{B}_{S,3}} \|d_2(\tau)\|_{\infty, [t_0, t]}.$$

Используя этот факт и проводя вычисления подобно (5.64) – (5.66), получим

$$\|e_i(t)\|_\Delta \leq e^{-\frac{1}{\tau_\phi} t} \|e_i(0)\|_\Delta + \tau_\phi k_\phi \left(\frac{\mathcal{B}_{S,4}}{\mathcal{B}_{S,3}} + 1 \right) \|d_2(\tau)\|_{\infty, [0, t]}. \quad (5.81)$$

Предполагая положительность $\hat{\theta}_{i,2}$, запишем (5.81) относительно $|\hat{\theta}_{i,1} - \theta_{i,1}|$:

$$\|e_i(t)\|_\Delta \leq e^{-\frac{1}{\tau_\phi} t} \|e_i(0)\|_\Delta + c \cdot \|\hat{\theta}_{i,1}(\tau) - \theta_{i,1}\|_{\infty, [0, t]}, \quad (5.82)$$

где

$$c = \tau_\phi k_\phi \left(\frac{\mathcal{B}_{S,4}}{\mathcal{B}_{S,3}} + 1 \right) \mathcal{B}_{S,2}.$$

Введем в рассмотрение алгоритм настройки параметра $\hat{\theta}_{i,1}$. Согласно определению функции $\Delta_{1,fi}(\cdot)$ в (5.54), ограничение (5.78) будет выполнено при условии, что $\hat{\theta}_{i,1}(t) \geq \theta_{i,1} > 0$ для всех $t > 0$. Зададим алгоритм настройки параметра $\hat{\theta}_{i,1}(t)$ в виде:

$$\hat{\theta}_{i,1}(t) = \theta_1 - \gamma_{\theta_{i,1}} \int_0^t \|e_i(\tau)\|_\Delta d\tau, \quad \theta_1 > \theta_{1,\max}. \quad (5.83)$$

Найдем условия, при которых разность

$$\hat{\theta}_{i,1}(t) - \theta_{i,1} = \theta_1 - \theta_{i,1} - \gamma_{\theta_{i,1}} \int_0^t \|e_i(\tau)\|_\Delta d\tau$$

имеет предел в $[\theta_{i,1}, \theta_1]$. Существование предела $\hat{\theta}_{i,1}(t)$ в $[\theta_{i,1}, \theta_1]$, очевидно, обеспечивает выполнение (5.80) и одновременно, в силу монотонности, является условием, гарантирующим выполнение предельного соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\|_\Delta = 0.$$

Начальные условия и параметры алгоритма (5.83) гарантирующие существование предела $\hat{\theta}_{i,1}(t)$ в $[\theta_{i,1}, \theta_1]$ вытекают из следствия 2.3. В частности, они специфицируются условием (2.117), что в рассматриваемом случае сводится к решению неравенства

$$\gamma_{\theta_{i,1}} \leq -\frac{1}{\tau_\phi} \ln \left(\frac{d}{\kappa} \right)^{-1} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\theta_1 - \theta_{i,1}}{D_e + c \cdot |\theta_1 - \theta_{i,1}| \left(1 + \frac{\kappa}{1-d} \right) + c|\theta_1 - \theta_{i,1}|}, \quad \|e_i(0)\|_\Delta \leq D_e \quad (5.84)$$

для некоторых $d \in (0, 1)$, $\kappa \in (1, \infty)$. Отметим, что неравенство (5.84), вообще говоря, зависит явным образом от неизвестных значений параметра $\theta_{i,1}$. Для того, чтобы получить независимые от $\theta_{i,1}$ условия на выбор параметров θ_1 и $\gamma_{\theta_{i,1}}$ отметим, что функция

$$\frac{\theta_1 - \theta_{i,1}}{D_e + c \cdot |\theta_1 - \theta_{i,1}| \left(1 + \frac{\kappa}{1-d} \right) + c|\theta_1 - \theta_{i,1}|}$$

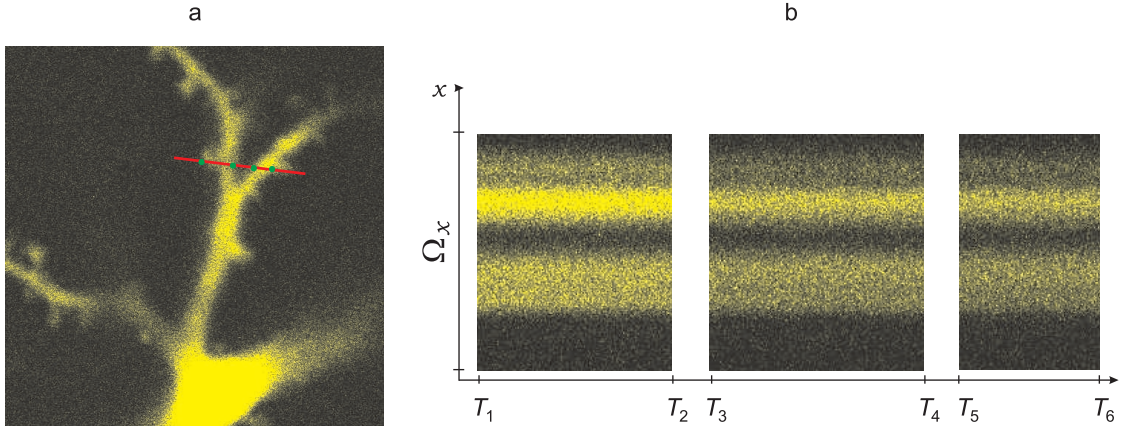


Рисунок 5.14. Изображения со сканирующего лазерного микроскопа. На панели *a* изображены исследуемый дендрит и область сканирования (красная линия) в окрестности двух дендритовых спайнов, видимых как небольшие выступы на дендрите. Размер области сканирования в данном эксперименте составлял 5.95 мкм, а скорость сканирования, v_s , составила 1 единицу длины (точку) за 2 мкс. На панели *b* приводятся результаты сканирования как функция времени на начальном интервале времени, область $[T_1, T_2]$, в середине, область $[T_3, T_4]$ и в конце эксперимента, область $[T_5, T_6]$.

строго монотонно возрастает по $\theta_1 - \theta_{i,1}$. Тогда, принимая во внимание, что $\theta_1 - \theta_{i,1} > \theta_1 - \theta_{1,\max}$, можно заключить, что выполнение

$$\gamma_{\theta_{i,1}} \leq -\frac{1}{\tau_\phi} \ln \left(\frac{d}{\kappa} \right)^{-1} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\theta_1 - \theta_{1,\max}}{D_e + c \cdot |\theta_1 - \theta_{1,\max}| \left(1 + \frac{\kappa}{1-d} \right) + c|\theta_1 - \theta_{1,\max}|}, \quad \|e_i(0)\|_\Delta \leq D_e \quad (5.85)$$

влечет выполнение (5.84). Условие (5.85) в свою очередь не зависит от $\theta_{i,1}$ в явном виде и поэтому может служить рабочим критерием выбора параметров $\theta_1, \gamma_{\theta_{i,1}}$ алгоритма (5.83).

5.3.4. Результаты экспериментальной апробации системы

Описываемая система адаптивной обработки визуальной информации была апробирована на экспериментальных данных со сканирующего лазерного микроскопа в рамках задачи исследования динамики дендритных спайнов. Суть задачи состоит в регистрации динамических изменений геометрии и свойств объектов (спайнов) под действием внешней стимуляции в условиях, приближенных к естественным. С этой целью наблюдения проводятся на объектах, находящихся непосредственно в объемах (срезах) вещества в естественном для них окружении. Возможности использования стандартных оптических средств наблюдения в подобных задачах ограничены тем, что объекты наблюдения находятся не на поверхности, а в объеме окружающего их вещества ограниченной прозрачности. Для наблюдения таких объектов, как правило,

используются лазерные сканирующие микроскопы.

Отличительной особенностью измерений с помощью сканирующего микроскопа является то, что непосредственно перед измерением в исследуемый объект вводится особое вещество-краситель, которое становится видимым ярким цветом при воздействии на него монохромным излучением известной длины волны. В процессе измерения область, в которой находится объект с введенным в него красителем, подвергают излучению лазера. Сам объект наблюдения при этом оказывается “подсвеченным” изнутри и становится визуально отделенным от среды в местах взаимодействия излучения лазера и красителя. Типовые изображения, получаемые с такого микроскопа представлены на рис. 5.14⁶.

К наиболее часто встречающимся проблемам измерений подобного рода стоит отнести возмущения интенсивности изображения вследствие диффузии красителя в теле объекта и его выгорания под действием лазера, а также фокальные возмущения, вызванные флуктуациями в положении самого объекта в срезе. Задача состоит в том, чтобы по измеряемым фрагментам изображения отслеживать параметры фокальных возмущений в условиях дрейфа интенсивности красителя.

В соответствии со спецификой задачи измеряемые фрагменты изображения представляют из себя одномерные области (см. рис. 5.14, панель *a*). Поэтому математической моделью объектов являются одномерные отображения $\Omega_x \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. При этом область Ω_x оказывается интервалом $\Omega_x = [x_{\min}, x_{\max}]$. Для анализируемых изображений относительные параметры $x_{\min} = 1$ и $x_{\max} = 176$, что соответствует области сканирования шириной в 176 единиц длины (точек) или 5.95 мкм.

Объектом измерения, S_0 , будем считать результаты сканирования фрагмента вещества в некоторый момент времени T_i при сканировании 176 единиц длины, начиная от x_{\min} , что соответствует одной полной линии. Время сканирования, T_s , очевидно, определяется выражением $T_s = \frac{176}{v_s} = 352$ мкс. Для устранения влияния шумов в каналах измерения на результаты анализа будем использовать усредненные значения измерений S_0 за интервал времени $T_m = T_s \cdot n$, где n – количество учитываемых предыдущих сканирований объекта. Таким образом,

$$S_0(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} S \left(x, T_i + \frac{x - x_{\min}}{v_s} - j \cdot T_s \right),$$

где $S(x, t)$ – измерение объекта в точке x в момент времени t .

В качестве шаблона, S_1 , выберем усредненные измерения объекта в начальный момент времени T_1 . Набор линий сканирования фрагмента вещества, использованный для

⁶Изображения для анализа были предоставлены С. Гребенюком, группа исследования механизмов функционирования нейронных схем (neuronal circuit mechanisms research group) Института Физических и Химических Исследований RIKEN, Институт Мозга, г. Вако, Япония

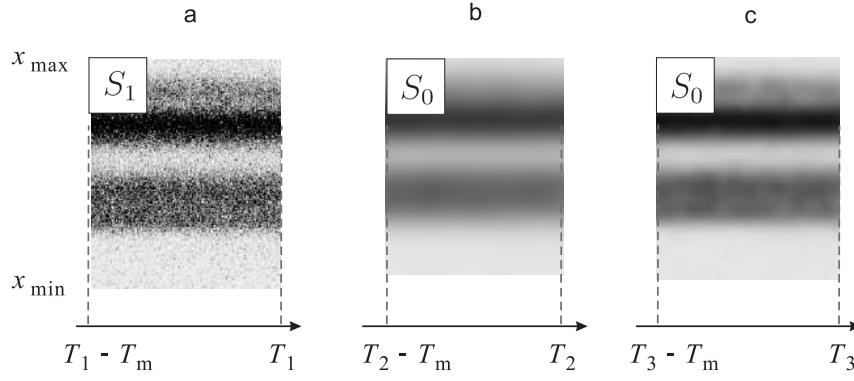


Рисунок 5.15. Данные, использованные для составления шаблона, S_1 (панель a), и возмущенных измерений S_0 в моменты времени T_2 и T_3 (панели b и c соответственно).

получения шаблона S_1 изображен на рис. 5.15, a . Этот набор соответствует интенсивности измерений в красном спектре для данных на рис. 5.14, b , фрагмент 1. Наблюдаемым объектом, S_0 , будем считать усредненные измерения фрагмента вещества в моменты времени $T_i \neq T_1$, кратные времени сканирования T_s . В силу трудоемкости и стоимости проведения дополнительных измерений с использованием лазерного микроскопа, фокальные и диффузионные возмущения были смоделированы с помощью стандартных фильтров пакета Photoshop, приложенных к шаблону S_1 . Соответствующие фрагменты данных приведены на рис. 5.15, панели b и c .

Задача, таким образом, сводится к сравнению временных последовательностей $S_1(x(t))$ (шаблона) и $S_0(x(t))$ (измерений объекта), где “развертка” $x(t)$ переменной x задается функцией⁷:

$$x(t) = \begin{cases} x_{\min} + k_s \cdot t & t \leq x_{\max} - x_{\min} \\ x(t - (x_{\max} - x_{\min})), & t > x_{\max} - x_{\min} \end{cases}, \quad k_s = 1.$$

При этом предполагается, что пространственные характеристики наблюдаемого объекта совпадают с характеристиками шаблона с точностью до модели возмущений (5.41). В силу того, что S_0, S_1 пространственно одномерны, модель возмущения (5.41) примет вид:

$$f_1(x, \hat{\theta}, t) = \int_{\Omega_x} \hat{\theta}_1 e^{-\hat{\theta}_2 (\xi - x(t))^2} S_1(\xi) d\xi, \quad \hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)^T.$$

Тогда уравнения (5.52) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_0 = -\frac{1}{\tau_\phi} \phi_0 + k_\phi S_0(x(t)), \\ \dot{\phi}_1 = -\frac{1}{\tau_\phi} \phi_1 + k_\phi f_1(x, \hat{\theta}, t). \end{cases} \quad (5.86)$$

⁷Параметр k_s задает скорость сравнения сигналов и в общем случае может быть произвольной константой в $\mathbb{R}_{>0}$. Если требуется сравнение в темпе измерений, то естественно выбрать $k_s = v_s$.

Параметры τ_ϕ , k_ϕ в (5.86) были выбраны единичными: $\tau_\phi = k_\phi = 1$. Алгоритм настройки параметров $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, согласно альтернативе 1 и предложению 5.3, выберем в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_{\theta_1}(e + I_1); \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{\tau_\phi}e, \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\theta}_2(t) = \eta(\lambda(t)) = \frac{\theta_{2,\max} - \theta_{2,\min}}{2}(\lambda_1 + 1) + \theta_{2,\min}; \\ \dot{\lambda}_1 = \gamma_{\theta_2}\|e(t)\|_\Delta \cdot \lambda_2; \\ \dot{\lambda}_2 = -\gamma_{\theta_2}\|e(t)\|_\Delta \cdot \lambda_1 \cdot \omega^2, \quad \lambda_0 = (1, 0)^T, \end{cases} \quad (5.87)$$

где

$$e = \phi_1(t) - \phi_0(t), \quad \theta_{2,\min} = 0.002, \quad \theta_{2,\max} = 5, \quad \omega = 1, \quad \Delta = 0.01, \quad \gamma_{\theta_2} = 0.01, \quad \gamma_{\theta_1} = 1.$$

Для сравнения сигналов $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$ и фиксации факта совпадения шаблона, $S_1(x(t))$, и текущего измерения, $S_1(x(t))$, используем детекторы совпадений вида (5.42), (5.43). Для пары сигналов уравнения системы детекторов записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = -ax_0^3 + bx_0^2 + \tilde{\phi}_0 + y_0 - z_0 + u_0, \\ \dot{y}_0 = c - dx_0^2 - y_0, \\ \dot{z}_0 = \varepsilon(s(x_0 + x^*) - z_0), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1^3 + bx_1^2 + \tilde{\phi}_1 + y_1 - z_1 + u_1, \\ \dot{y}_1 = c - dx_1^2 - y_1, \\ \dot{z}_1 = \varepsilon(s(x_1 + x^*) - z_1), \end{cases} \quad (5.88)$$

где индекс $i = 0$ соответствует подсистеме обработки измеряемых данных, $i = 1$ соответствует подсистеме обработки шаблона, а

$$\tilde{\phi}_i = \phi^* + \phi_i(t), \quad \phi^* = 1.$$

Смещение сигналов $\phi_i(t)$ на величину $\phi^* = 1$ обусловлено тем, что в этом случае в системе (5.88) возникают колебания уже при малых амплитудах сигналов переменных $\phi_i(t)$.

Переменные u_0 , u_1 , моделирующие функции связей между подсистемами были выбраны в соответствии с уравнением (5.44):

$$u_0 = \gamma(x_1 - x_0), \quad u_1 = \gamma(x_0 - x_1). \quad (5.89)$$

Параметр γ выбран из условий локальной синхронизации подсистем (5.88). Согласно предложению 5.2 для пары подсистем, выбор $\gamma = 1.6 > 3/2 = 1.5$ обеспечивает локальную аттрактивность инвариантного многообразия

$$x_0 = x_1, \quad y_0 = y_1, \quad z_0 = z_1$$

в системе (5.88).

Результаты моделирования системы (5.86)–(5.89) для двух различных измерений S_0 представлены на рисунках 5.16, 5.17. На рис. 5.16 изображены характеристики

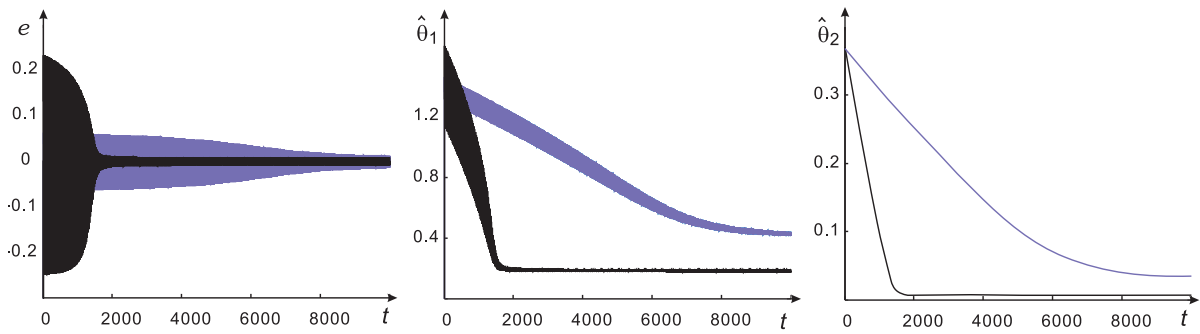


Рисунок 5.16. Траектории $e(t)$, $\hat{\theta}_1(t)$, $\hat{\theta}_2(t)$ в системе (5.86)–(5.89) как функции времени. Черным цветом изображены траектории системы, где в качестве измерений объекта использовались данные, представленные на рис. 5.15 панель *b*. Синий цвет соответствует данным, изображенным на рис. 5.15 панель *c*.

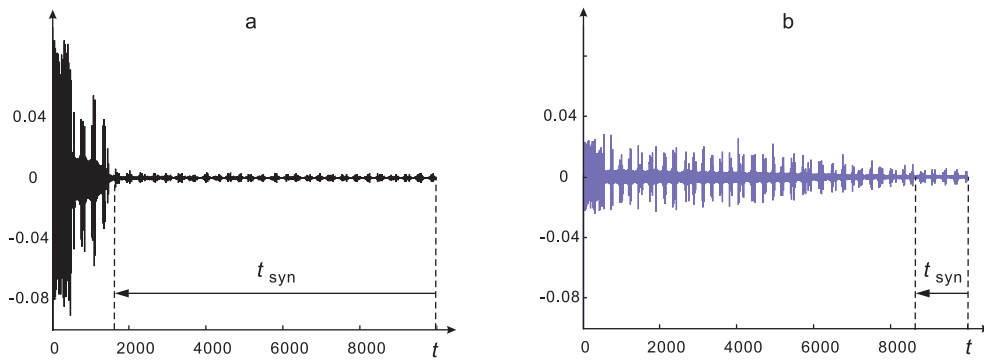


Рисунок 5.17. Графики ошибок $x_0(t) - x_1(t)$ синхронизации в системе (5.86)–(5.89) для двух измерений. Панель *a* соответствует ошибкам в системе, где измеряемый сигнал получен по данным, представленным на рис. 5.15, *b*. Панель *b* соответствует данным, представленным на рис. 5.15, *c*.

подсистем (5.86), (5.87) адаптивной фильтрации. На рис. 5.17 представлены ошибки синхронизации детекторов совпадений сигналов (5.88), (5.89). Символом t_{syn} обозначено время, проведенное системой в заданной окрестности целевого инвариантного многообразия. Как видно из обоих рисунков, система (5.86)–(5.89) успешно отслеживает моделируемые пространственные изменения наблюдаемых объектов с восстановлением информации о параметрах возмущения (рис. 5.16). При этом детекторы совпадений срабатывают лишь при достаточно долгом пребывании состояния системы в области относительно малых ошибок ϵ , что иллюстрируется рис. 5.17.

Итак, применение развиваемого в книге подхода к решению проблемы адаптации показывает хорошую перспективу для решения не только задач управления, идентификации, оценивания, но и для решения задач адаптивной обработки информации, в данном случае, для адаптивного сравнения шаблонов в процессе автоматической обработки и распознавания визуальной информации об объекте в условиях возмущений среды (освещенность, прозрачность) и неопределенности информации об объекте (фокальные возмущения как следствие физического перемещения объекта). Система сравнения шаблонов построена на основе временного кодирования и временной обработки информации об объекте, что является эффективным с позиции использования вычислительного ресурса. Кроме того, этот способ обработки информации позволяет проводить сравнение непосредственно в темпе сканирования информации об объекте. Особенностью системы является, с одной стороны, возможность использования моделей пространственных возмущений, приводящих к нелинейно параметризованным моделям фильтров, что позволяет обеспечить инвариантность распознавания к широкому спектру типовых моделируемых возмущений с восстановлением информации о параметрах возмущения. С другой стороны, использование хаотических осцилляторов в качестве детекторов совпадений позволяет гибко регулировать чувствительность системы (вплоть до сверхчувствительности) к малым немоделируемым возмущениям.

6. Послесловие

Изложенные в книге подход, методы и алгоритмы адаптации в нелинейных динамических системах имеют существенные отличия от известных в “классической теории”, ориентированной преимущественно на задачи управления с компенсационным механизмом адаптации к неконтролируемым функциональным, сигнальным и параметрическим неопределенностям математических моделей в классе дифференциальных уравнений. В большей части такая теория ориентируется на линеаризованные математические модели. В последнее десятилетие прошлого века и в настоящее время идеи и методы анализа нелинейной динамики получили распространение и в задачах адаптивного управления. Однако подходы к синтезу адаптивных систем остались по преимуществу традиционными, такими, какими они сложились за почти полувековую историю развития теории адаптивного управления.

Развиваемый авторами подход не “отменяет” результаты и достижения традиционной теории, но в нем есть ключевые моменты, позволяющие более эффективно решать задачи адаптации в нелинейных динамических системах и не только в системах управления. Само понятие адаптации рассматривается как достаточно универсальный подход к решению разнообразных задач целевой обработки информации в условиях неопределенности. К числу ключевых моментов развиваемого в книге подхода относятся: 1) распространение задач адаптации на классы нелинейных моделей с неустойчивой целевой динамикой, с нелинейной параметризацией и невыпуклыми по параметрам моделями неопределенности, с функциональной неполнотой информации о самой модели; 2) адаптация определяется как асимптотическая компенсация влияния неопределенности с точностью до заданного функционального пространства; 3) использование макроинформации о динамическом объекте (системе) характеризующей возможные состояния (режимы функционирования); 4) отказ от целевых функций, предполагающих задание функций Ляпунова для синтеза адаптивных алгоритмов управления.

Для получения конструктивных результатов в рамках авторской концепции потребовался математический аппарат анализа нелинейных динамических объектов и их соединений в терминах свойств эмпирически проверяемых отображений “вход-выход” и “вход-состояние”, позволяющий формулировать условия реализуемости, полноты, ограниченности состояния и достижения целевых множеств для систем, состоящих из последовательных, параллельных и замкнутых соединений нелиней-

ных объектов в условиях неопределенности информации о математических моделях объекта.

В свою очередь, это дало возможность обосновать принципы макроорганизации и целевые ограничения для систем адаптивного управления нелинейными динамическими объектами в терминах свойств систем как отображений в функциональных пространствах. Сформулированные принципы позволяют гарантировать желаемое поведение объекта при возможном сохранении его исходных и потенциально полезных нелинейных особенностей типа мета- и мультистабильности, неустойчивости по Ляпунову, бифуркаций, неравновесности, перемежаемости. Предложенные принципы и ограничения не требуют вычисления функций Ляпунова для целевых движений расширенной системы и допускают неопределенность модели объекта с точностью до динамики макропеременных.

Логическое развитие сформулированных принципов привело к новым методам синтеза законов адаптивного управления, реализующим желаемую макроорганизацию и целевые ограничения в виде ограничений на свойства регулятора в функциональных нормированных пространствах для нелинейных динамических объектов с моделями в классе нелинейных дифференциальных уравнений. Метод адаптивного управления на основе “виртуального” алгоритма адаптации, в свою очередь, лег в основу методов решения типовых задач адаптивного управления, не требующий знания функций Ляпунова для целевых движений.

Наконец, практическое значение имеет способ реализации адаптивных алгоритмов управления в системах управления. Адаптивный регулятор выполняет, в сущности, функцию аппроксиматора объективно существующих перестраиваемых нелинейных законов управления для компенсации влияния немоделируемой динамики. Для этого, в отличие от известных подходов, модель неопределенности реконструируется в классе универсальных аппроксиматоров с настраиваемым базисом, а адаптация осуществляется за счет целесообразно выбранных обратных связей. Это позволяет использовать аппроксимацию нелинейностей параметризованными настраиваемыми базисными функциями в многослойных нейронных сетях прямого распространения. По этой причине можно говорить о возможности реализации нейросетевых адаптивных регуляторов как о перспективном направлении автоматизации нелинейных объектов со сложной динамикой поведения.

7. Приложение 1. Дополнение к методам нелинейного адаптивного управления

В разделе приводятся краткое описание популярных методов адаптивного обхода интегратора [205] и дальнейшего его усовершенствования, получившего название метода адаптивного обхода интегратора с функциями настройки [217]. Для более полного введения в современное состояние проблемы адаптивного управления нелинейно параметризованными системами приводится описание положений метода минимаксного адаптивного управления, разработанного в [233].

7.1. Адаптивный обход интегратора

Рассматриваются системы вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1} + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_i(x_1, \dots, x_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq n-1; \\ \dot{x}_n &= \phi_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_n(\mathbf{x}) + (\beta_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})) u,\end{aligned}\tag{П1.1}$$

где

$$\phi_0(0) = 0, \phi_1(0) = \phi_2(0) = \dots = \phi_n(0) = 0, |\beta_0(\mathbf{x})| \geq \delta \in \mathbb{R}_{>0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{П1.2}$$

вектор $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ – вектор неизвестных а priori параметров системы, а $\phi_0(\cdot)$, $\phi_i(\cdot)$, $\beta_0(\cdot)$, $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$ – гладкие функции своих аргументов. Целью управления является асимптотическое регулирование состояния \mathbf{x} в начало координат $\mathbf{x} = 0$. Метод синтеза вводится в виде итеративной процедуры, состоящей из n этапов (n – размерность системы (П1.1)). Искомое управление u синтезируется на завершающем n -м этапе процедуры синтеза.

Шаг 1. Введем в рассмотрение переменную $z_1 = x_1$ и параметры $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}_{>0}$, имеющие смысл параметров отрицательных обратных связей. Область допустимых значений параметров c_1, \dots, c_n будет специфицирована на завершающем шаге синтеза из условий устойчивости расширенной системы. Принимая во внимание (П1.1), запишем производную по времени введенной переменной z_1 :

$$\dot{z}_1 = x_2 + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_1(x_1, x_2). \tag{П1.3}$$

Если бы переменная x_2 была бы фактическим управлением, а параметры $\boldsymbol{\theta}$ известны, то формальным выбором

$$x_2 = -c_1 z_1 - \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_1(x_1, x_2) \tag{П1.4}$$

при условии разрешимости (П1.4) относительно x_2 можно добиться стабилизации нулевого положения равновесия системы (П1.3). В силу того, что параметры θ^T неизвестны, регулирование переменной x_1 к нулю достигается “управлением”¹:

$$x_2 = -c_1 z_1 - \hat{\theta}_1^T \phi_1(x_1, x_2), \quad (\text{П1.5})$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = z_1 \phi_1(x_1, x_2). \quad (\text{П1.6})$$

Переменная x_2 , однако, не является фактическим управлением. С целью получения искомого фактического закона управления введем новую переменную z_2 , определенную как разность между x_2 и правой частью уравнения (П1.5):

$$z_2 = c_1 z_1 + x_2 + \hat{\theta}_1^T \phi_1(x_1, x_2). \quad (\text{П1.7})$$

С учетом обозначения (П1.7) и уравнения (П1.3) запишем производную \dot{z}_1 в следующем виде:

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 + (\theta - \hat{\theta}_1)^T \phi_1(x_1, x_2) = -c_1 z_1 + z_2 + (\theta - \hat{\theta}_1)^T \mathbf{w}_1(z_1, z_2, \hat{\theta}_1), \quad (\text{П1.8})$$

где символом $\mathbf{w}_1(z_1, z_2, \hat{\theta}_1)$ обозначена запись $\phi_1(x_1, x_2)$ как функции $z_1, z_2, \hat{\theta}_1$ согласно уравнениям $z_1 = x_1$ и (П1.5)². Принимая во внимание последнее обозначение перепишем уравнение (П1.6) в виде:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = z_1 \mathbf{w}_1(z_1, z_2, \hat{\theta}_1). \quad (\text{П1.9})$$

Шаг 2. Используя уравнения (П1.3), (П1.7), (П1.9), запишем производную по времени переменной z_2 :

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & c_1(-c_1 z_1 + z_2 + (\theta - \hat{\theta}_1)^T \mathbf{w}_1(z_1, z_2, \hat{\theta}_1)) + x_2 + \theta^T \phi_2(x_1, x_2, x_3) \\ & + z_1 \mathbf{w}_1(z_1, z_2, \hat{\theta}_1)^T \phi_1(x_1, x_2) + \hat{\theta}_1^T \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x_2 + \theta^T \phi_1) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(x_3 + \theta^T \phi_2) \right] \\ = & \left(1 + \hat{\theta}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right) (x_3 + \theta^T \phi_2(x_1, x_2, x_3)) + \varphi_2(z_1, z_2, \hat{\theta}_1) + \theta^T \psi_2(z_1, z_2, \hat{\theta}_1), \end{aligned} \quad (\text{П1.10})$$

где символами $\varphi_2(z_1, z_2, \hat{\theta}_1)$, $\psi_2(z_1, z_2, \hat{\theta}_1)$ обозначены выражения

$$\varphi_2 = c_1 \left(-c_1 z_1 + z_2 - \hat{\theta}_1^T \mathbf{w}_1(z_1, z_2, \hat{\theta}_1) \right) + z_1 \mathbf{w}_1(z_1, z_2, \hat{\theta}_1)^T \phi_1(z_1, x_2) + \hat{\theta}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} x_2,$$

$$\psi_2 = c_1 \mathbf{w}_1(z_1, z_2, \hat{\theta}_1) + \hat{\theta}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \phi_1(x_1, x_2)$$

¹Для того, чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно рассмотреть производную по времени положительно определенной функции $V = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \|\hat{\theta}_1 - \theta\|^2$.

²Как мы увидим позднее, условия применимости метода гарантируют возможность такого представления.

как функции $z_1, z_2, \hat{\theta}_1$ соответственно. Введем в рассмотрение новую переменную

$$z_3 = c_2 z_2 + \left(1 + \hat{\theta}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right) \left(x_2 + \hat{\theta}_2^T \phi_2(x_1, x_2, x_3)\right) + \varphi_2(z_1, z_2, \hat{\theta}_1) + \hat{\theta}_2^T \psi_2(z_1, z_2, \hat{\theta}_1), \quad (\text{П1.11})$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_2 &= z_2, \left(\psi_2(z_1, z_2, \hat{\theta}_1) + \left(1 + \hat{\theta}_1^T \frac{\partial \phi_1(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right) \phi_2(x_1, x_2, x_3) \right) \\ &= z_2 \mathbf{w}_2(z_1, z_2, z_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2). \end{aligned} \quad (\text{П1.12})$$

Подставляя (П1.11) в (П1.10), получим следующее выражение для производной \dot{z}_2 :

$$\dot{z}_2 = -c_2 z_2 + z_3 + (\theta - \hat{\theta}_2)^T \mathbf{w}_2(z_1, z_2, z_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2). \quad (\text{П1.13})$$

Таким образом, в результате первых двух шагов синтеза первые два уравнения исходной системы (П1.1) преобразованы в

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -c_1 z_1 + z_2 + (\theta - \hat{\theta}_1)^T \mathbf{w}_1(z_1, z_2, \hat{\theta}_1); \\ \dot{z}_2 &= -c_2 z_2 + z_3 + (\theta - \hat{\theta}_2)^T \mathbf{w}_2(z_1, z_2, z_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2); \\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= z_1 \mathbf{w}_1(z_1, z_2, \hat{\theta}_1); \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= z_1 \mathbf{w}_2(z_1, z_2, z_3, \hat{\theta}_2). \end{aligned} \quad (\text{П1.14})$$

Шаг i. Согласно введенным обозначениям для переменных z_i запишем производную по времени \dot{z}_i :

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \left(1 + \hat{\theta}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right) \cdots \left(1 + \hat{\theta}_{i-1}^T \frac{\partial \phi_{i-1}}{\partial x_i}\right) [x_{i+1} + \theta^T \phi_i(x_1, \dots, x_{i+1})]; \\ &+ \varphi_i(z_1, \dots, z_i, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{i-1}) + \theta^T \psi_i(z_1, \dots, z_i, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{i-1}). \end{aligned} \quad (\text{П1.15})$$

Вводя обозначение

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= c_i z_i + \left(1 + \hat{\theta}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right) \cdots \left(1 + \hat{\theta}_{i-1}^T \frac{\partial \phi_{i-1}}{\partial x_i}\right) [x_{i+1} + \hat{\theta}_i^T \phi_i(x_1, \dots, x_{i+1})], \\ &+ \varphi_i(z_1, \dots, z_i, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{i-1}) + \hat{\theta}_i^T \psi_i(z_1, \dots, z_i, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{i-1}), \end{aligned} \quad (\text{П1.16})$$

и подставляя (П1.16) в (П1.15), получим

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -c_i z_i + z_{i+1} + (\theta - \hat{\theta}_i)^T \left[\psi_i + \left(1 + \hat{\theta}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right) \cdots \left(1 + \hat{\theta}_{i-1}^T \frac{\partial \phi_{i-1}}{\partial x_i}\right) \phi_i \right] \\ &= -c_i z_i + z_{i+1} + (\theta - \hat{\theta}_i)^T \mathbf{w}_i(z_1, \dots, z_{i+1}, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_i). \end{aligned} \quad (\text{П1.17})$$

При этом положим, что вектор $\hat{\theta}_i$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\hat{\theta}}_i = z_i \mathbf{w}_i(z_1, \dots, z_{i+1}, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_i). \quad (\text{П1.18})$$

Шаг n. С учетом обозначений (П1.16) для переменных z_1, \dots, z_n и уравнений (П1.18) для $\dot{\hat{\theta}}_i$, запишем производную по времени переменной z_n :

$$\begin{aligned} \dot{z}_n = & \left(1 + \hat{\theta}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x_n}\right) [\beta_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})] u \\ & + \varphi_n(\mathbf{z}, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{n-1}) + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{z}, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{n-1}) \end{aligned} \quad (\text{П1.19})$$

и формально зададим управление u в виде:

$$u = \frac{1}{\bar{\beta}(\mathbf{x}, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n)} \left[-c_n z_n - \varphi_n - \hat{\theta}_n^T \boldsymbol{\psi}_n \right], \quad (\text{П1.20})$$

где

$$\bar{\beta}(\mathbf{x}, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n) = \left(1 + \hat{\theta}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right) \cdots \left(1 + \hat{\theta}_{n-1}^T \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x_n}\right) [\beta_0(\mathbf{x}) + \hat{\theta}_n^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})], \quad (\text{П1.21})$$

а $\hat{\theta}_n^T$ – некоторый вектор, имеющий смысл оценок параметров $\boldsymbol{\theta}$. Подставляя (П1.20) в (П1.19) получим:

$$\begin{aligned} \dot{z}_n = & -c_n z_n + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\theta}_n)^T \left[\boldsymbol{\psi}_n + \left(1 + \hat{\theta}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right) \cdots \left(1 + \hat{\theta}_{n-1}^T \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x_n}\right) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) u \right] \\ = & -c_n z_n + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\theta}_n)^T \mathbf{w}_n(\mathbf{z}, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n). \end{aligned} \quad (\text{П1.22})$$

Наконец, положим, что оценки $\hat{\theta}_n$ удовлетворяют уравнению

$$\dot{\hat{\theta}}_n = z_n \mathbf{w}_n(\mathbf{z}, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n). \quad (\text{П1.23})$$

Условия применимости полученного закона управления даются следующей теоремой.

Т е о р е м а 7.1. Пусть задана система (П1.1), (П1.2), и для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ выполнены условия:

$$\left| 1 + \boldsymbol{\theta}^T \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x})}{\partial x_{i+1}} \right| \geq \delta_i, \quad (\text{П1.24})$$

$$|\beta_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})| \geq \delta_0, \quad (\text{П1.25})$$

где δ_i , $i = 0, \dots, n$ – константы, не зависящие от выбора \mathbf{x} , $\boldsymbol{\theta}$. Тогда решения системы (П1.1), (П1.2) с управлением (П1.20), где $c_i \geq 2$, а $\hat{\theta}_i$, $i = 1, \dots, n$ удовлетворяют уравнению (П1.18), ограничены. Кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство теоремы 7.1. В силу условий теоремы управление (П1.20) всегда определено, и кроме того, согласно теореме о неявной функции, переменная x_{i+1} всегда может быть представлена как непрерывная функция переменных z_1, z_2, \dots, z_{i+1} и

векторов $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_i$ (см. выражение (П1.16)). Так как уравнения замкнутой системы находятся в классе обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями, то для любых начальных условий решения как минимум локально определены. С другой стороны, в силу непрерывной зависимости x_{i+1} от $z_1, \dots, z_{i+1}, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_i$ ограниченность переменных z_1, z_2, \dots, z_n и векторов $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n$ автоматически влечет ограниченность состояния $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Поэтому для доказательства существования (ограниченного) решения замкнутой системы на полубесконечном интервале достаточно показать ограниченность переменных z_1, z_2, \dots, z_n и векторов $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n$.

Отметим, что преобразования (П1.3) – (П1.23) позволяют записать уравнения замкнутой системы в виде:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -c_1 z_1 + z_2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \mathbf{w}_1(z_1, z_2, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1); \\ \dot{z}_2 &= -c_2 z_2 + z_3 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2)^T \mathbf{w}_2(z_1, z_2, z_3, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2); \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= -c_{n-1} z_{n-1} + z_n + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1})^T \mathbf{w}_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1}); \\ \dot{z}_n &= -c_n z_n + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n)^T \mathbf{w}_n(z_1, \dots, z_n, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_n); \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i &= z_i; \mathbf{w}_i(z_1, \dots, z_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i).\end{aligned}\tag{П1.26}$$

Рассмотрим следующую положительно определенную функцию переменных $z_1, z_2, \dots, z_n, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n$:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta})^T (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}).$$

Ее производная по времени удовлетворяет уравнению

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^n \left[-c_i z_i^2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T (z_i \mathbf{w}_i + \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i) \right] + \sum_{i=1}^{n-1} z_i z_{i+1} = - \sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} z_i z_{i+1}.$$

Принимая во внимание, что $c_i \geq 2$, получим

$$\dot{V} \leq -\|\mathbf{z}\|^2,$$

откуда вытекает ограниченность $\mathbf{z}, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n$ и, как следствие, ограниченность \mathbf{x} .

Покажем теперь, что состояние $\mathbf{x}(t)$ асимптотически стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Применяя лемму Барбалата, можно заключить, что

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} c_i z_{i-1}(t) + \\ &\left(1 + \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right) \dots \left(1 + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-2}^T \frac{\partial \phi_{i-2}}{\partial x_{i-1}} \right) \left[x_i(t) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}^T \boldsymbol{\phi}_{i-1}(x_1(t), \dots, x_i(t)) \right] \\ &+ \varphi_{i-1}(z_1(t), \dots, z_{i-1}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t), \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}(t)) \\ &+ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}^T \boldsymbol{\psi}_{i-1}(z_1(t), \dots, z_{i-1}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t), \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}(t)) = 0.\end{aligned}\tag{П1.27}$$

В силу гладкости правых частей системы (П1.26), а также в силу выполнения предельных соотношений (П1.27), применяя повторно лемму Барбалата, получим:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}_i = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(t))^T \mathbf{w}_i(z_1(t), \dots, z_i(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t), \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(t)). \quad (\text{П1.28})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right) \cdots \left(1 + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-2}^T \frac{\partial \phi_{i-2}}{\partial x_{i-1}} \right) [x_i(t) + \boldsymbol{\theta}^T \phi_{i-1}(x_1(t), \dots, x_i(t))] \\ &+ \varphi_{i-1}(z_1(t), \dots, z_{i-1}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t), \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}(t)) \\ &+ \boldsymbol{\theta}^T \psi_{i-1}(z_1(t), \dots, z_{i-1}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t), \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}(t)) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П1.29})$$

Переменная $x_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ в силу тождества $x_1(t) = z_1(t)$. Для переменной $x_2(t)$ в силу (П1.29) выполнено предельное соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x_2(t) + \boldsymbol{\theta}^T \phi_1(x_1(t), x_2(t))] = 0. \quad (\text{П1.30})$$

В силу равенства

$$x_2(t) + \boldsymbol{\theta}^T \phi_1(x_1(t), x_2(t)) = \left[\int_0^1 \left(1 + \boldsymbol{\theta}^T \frac{\partial \phi_1(x_1(t), \lambda x_2(t))}{\partial \lambda x_2(t)} \right) d\lambda \right] x_2(t),$$

и условий теоремы получим, что (П1.30) влечет выполнение предельного соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0.$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} (z_1, \dots, z_{i-1}, x_1, \dots, x_{i-1}) \rightarrow 0 &\Rightarrow \varphi_{i-1}(z_1, \dots, z_{i-1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}) \rightarrow 0, \\ \psi_{i-1}(z_1, \dots, z_{i-1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

и повторяя аргумент для $i = 3, \dots, n$, аналогичным образом получим, что предельные соотношения $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ выполнены для всех $i = 3, \dots, n$, что завершает доказательство.

Несмотря на очевидную простоту изложенного метода адаптивного обхода интегратора, его основной недостаток заключается в том, что размерность адаптивного регулятора, построенного по этой схеме растет мультипликативно с ростом размерности системы и вектора неизвестных параметров $\boldsymbol{\theta}$. Действительно, для построения закона управления (П1.20) требуемое число интеграторов оказывается не менее $\dim\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \oplus \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 \oplus \dots \oplus \hat{\boldsymbol{\theta}}_n\} = n \cdot \dim\{\boldsymbol{\theta}\} = n \cdot p$. Этот факт отрицательно влияет как на качество переходных процессов в системе, так и на применимость такого подхода в системах, где размерность состояния и неопределенности изначально высока.

Для устранения этого недостатка была разработана процедура адаптивного обхода интегратора с функциями настройки.

7.2. Адаптивный обход интегратора с функциями настройки

Метод адаптивного обхода интегратора с функциями настройки приводится здесь в полном соответствии с оригинальной работой [217]. Рассматривается класс систем в нижнетреугольной форме вида:

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_i(x_1, \dots, x_i), \quad (\text{П1.31})$$

$$\dot{x}_n = \phi_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_n(\mathbf{x}) + \beta_0(\mathbf{x})u, \quad (\text{П1.32})$$

где $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ – вектор неизвестных параметров, а функции $\phi_0(\cdot)$, $\boldsymbol{\phi}_i(\cdot)$, $\beta_0(\cdot)$ – гладкие функции своих аргументов, причем $\beta_0(\mathbf{x})$ отделена от нуля для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : |\beta_0(\mathbf{x})| \geq \delta \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Целью управления является перевод компоненты x_1 вектора состояния в положение $x_1 = x_1^e = 0$ и стабилизация соответствующего значению $x_1 = 0$ положения равновесия системы (П1.31), (П1.32):

$$x_1^e = 0, \quad x_{i+1}^e = -\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_i^e = -\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_i(0, -\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_1^e, \dots, -\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_{i-1}^e).$$

Синтез адаптивного управления проводится рекурсивным образом. На каждом i -м шаге синтеза рассматривается подсистема i -го порядка (уравнения с 1-го по i -е) исходной системы (П1.31), (П1.32), для которой синтезируются стабилизирующее управление α_i и функции настройки $\boldsymbol{\tau}_i$ согласно выбранной функции Ляпунова V_i . Стабилизирующий закон управления $u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ и алгоритм настройки параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ для всей исходной системы синтезируются на финальном шаге процедуры синтеза.

Шаг 1. Введем следующие обозначения: $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2 - \alpha_1$ и перепишем соответственно уравнение $\dot{x}_1 = x_2 + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_1(x_1)$:

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_1(x_1). \quad (\text{П1.33})$$

Переменную α_1 будем рассматривать как *виртуальное* управление. Введем в рассмотрение функцию вида:

$$V_1(z_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} z_1^2 + \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|_{\Gamma^{-1}}^2, \quad \Gamma > 0,$$

где $\hat{\boldsymbol{\theta}} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^p$ – некоторая дифференцируемая функция, подлежащая определению. Принимая во внимание (П1.33), запишем производную по времени функции $V_1(z_1, \hat{\boldsymbol{\theta}})$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1(z_2 + \alpha_1 + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_1(x_1)) + (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})\Gamma^{-1}\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= z_1(z_2 + \alpha_1 + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\phi}_1(x_1)) + (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})\Gamma^{-1}(\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - \Gamma z_1 \boldsymbol{\phi}_1(x_1)). \end{aligned} \quad (\text{П1.34})$$

Если бы система (П1.31), (П1.32) была первого порядка, а переменная x_2 являлась бы действительным управлением u , т. е. $x_2 = \alpha_1 = u$, то выбором $\tau_1(x_1) = \dot{\hat{\theta}}_1$

$$\tau_1 = \Gamma z_1(x_1) \phi_1(x_1), \quad (\text{П1.35})$$

$$\alpha_1(x_1, \hat{\theta}) = -c_1 z_1 - \hat{\theta}^T \phi_1(x_1), \quad c_1 \in \mathbb{R}_{>0} \quad (\text{П1.36})$$

обеспечивается равенство $\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 = -c_1 x_1^2 \leq 0$ и, как следствие, искомая стабилизация точки $x_1 = 0$.

Так как x_2 не является управлением, то $z_2 \neq 0$ и выбор $u = \alpha_1(x_1, \hat{\theta})$, $\dot{\hat{\theta}} = \tau_1(x_1)$ в качестве стабилизирующего закона адаптивного управления оказывается не обоснован. Тем не менее функция $\alpha_1(x_1, \hat{\theta})$ – первая стабилизирующая функция и функция $\tau_1(x_1)$ – первая функция настройки используются в последующих шагах синтеза. На рассматриваемом же этапе производную \dot{V}_1 оставим в виде

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + (\hat{\theta} - \theta) \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_1(x_1)). \quad (\text{П1.37})$$

Слагаемое $z_1 z_2$ в (П1.37) будет скомпенсировано на следующих шагах синтеза. Уравнение же замкнутой системы на данном этапе может быть записано как

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 + (\theta - \hat{\theta})^T \phi_1(x_1). \quad (\text{П1.38})$$

Шаг 2. Введем обозначение $z_3 = x_3 - \alpha_2$ и перепишем второе уравнение в (П1.31), (П1.32), $\dot{x}_2 = x_3 + \theta^T \phi_2(x_1, x_2)$, в виде:

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2 + \theta^T \phi_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1(x_1, \hat{\theta})}{\partial x_1} (x_2 + \theta^T \phi_1(x_1)) - \frac{\partial \alpha_1(x_1, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}. \quad (\text{П1.39})$$

Используем переменную α_2 для стабилизации расширенной (с учетом $\hat{\theta}$) системы (П1.38), (П1.39). С этой целью рассмотрим функцию $V_2 = V_1 + 1/2 z_2^2$ и проанализируем ее производную по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -c_1 z_1^2 + z_2 \left[z_1 + z_3 + \alpha_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \hat{\theta}^T \left(\phi_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1(x_1) \right) \right] \\ & + (\hat{\theta} - \theta)^T \Gamma^{-1} \left[\dot{\hat{\theta}} - \Gamma \left(z_1 \phi_1(x_1) + z_2 \left(\phi_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1(x_1) \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.40})$$

Если бы переменная x_3 являлась управлением u , то тогда $z_3 = 0$ в (П1.39), (П1.40) и избавиться от влияния члена $\hat{\theta} - \theta$ в (П1.40) можно выбором $\dot{\hat{\theta}} = \tau_2(x_1, x_2, \hat{\theta})$, где

$$\begin{aligned} \tau_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) = & \Gamma \left[z_1(x_1) \phi_1(x_1) + z_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) \left(\phi_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1(x_1, \hat{\theta})}{\partial x_1} \phi_1(x_1) \right) \right] \\ = & \tau_1(x_1) + \Gamma z_2 \left(\phi_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1(x_1, \hat{\theta})}{\partial x_1} \phi_1(x_1) \right). \end{aligned} \quad (\text{П1.41})$$

Тогда выбором

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) = & -z_1(x_1) - c_2 z_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) + \frac{\partial \alpha_1(x_1, \hat{\theta})}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1(x_1, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \tau_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) \\ & - \hat{\theta}^T \left(\phi_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1(x_1, \hat{\theta})}{\partial x_1} \phi_1(x_1) \right) \end{aligned} \quad (\text{П1.42})$$

обеспечивается равенство:

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2.$$

В силу того, что x_3 не является управлением u , то $z_3 \neq 0$. Производная \dot{V}_2 в этом случае (с учетом записи (П1.42)) удовлетворяет равенству

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 + \left[z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} + (\theta - \hat{\theta})^T \Gamma^{-1} \right] (\tau_2 - \dot{\hat{\theta}}), \quad (\text{П1.43})$$

а уравнение (П1.39) принимает вид:

$$\dot{z}_2 = -z_1 - c_2 z_2 + z_3 + (\theta - \hat{\theta})^T \left(\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1 \right) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} (\tau_2 - \dot{\hat{\theta}}). \quad (\text{П1.44})$$

Выбор функций $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$, $\tau_2(\cdot)$, произведенный на шаге 1 и 2 синтеза обеспечил, что первые два слагаемых в (П1.43) оказались неотрицательными. Слагаемое $z_2 z_3$ и влияние члена $\tau_2 - \dot{\hat{\theta}}$ будут скомпенсированы на следующем шаге.

Шаг 3. Введем новую переменную $z_4 = x_4 - \alpha_3$ и с учетом введенного обозначения перепишем $\dot{x}_3 = x_4 + \theta^T \phi_3(x_1, x_2, x_3)$ в виде

$$\dot{z}_3 = z_4 + \alpha_3 + \theta^T \phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + \theta^T \phi_1) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + \theta^T \phi_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}. \quad (\text{П1.45})$$

Аналогично шагам 1 и 2, будем считать α_3 новым управлением. Рассмотрим функцию $V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2$ для расширенной $z_1, z_2, z_3, \hat{\theta}$ -системы и запишем ее производную по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} (\tau_2 - \dot{\hat{\theta}}) + \\ & z_3 \left[z_2 + z_4 + \alpha_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \hat{\theta}^T \left(\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2 \right) \right] + \\ & (\hat{\theta} - \theta)^T \Gamma^{-1} \left[\dot{\hat{\theta}} - \Gamma \left(z_1 \phi_1 + z_2 \left(\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1 \right) + z_3 \left(\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2 \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.46})$$

Влияние члена $\hat{\theta} - \theta$ в (П1.46) компенсируется выбором $\dot{\hat{\theta}} = \tau_3$:

$$\begin{aligned} \tau_3 = & \Gamma \left[z_1 \phi_1 + z_2 \left(\phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1 \right) + z_3 \left(\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2 \right) \right] \\ = & \tau_2 + \Gamma z_3 \left(\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{П1.47})$$

Принимая во внимание равенство

$$\dot{\hat{\theta}} - \tau_2 = \dot{\hat{\theta}} - \tau_3 + \tau_3 - \tau_2 = \dot{\hat{\theta}} - \tau_3 + \Gamma z_3 \left(\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2 \right), \quad (\text{П1.48})$$

перепишем (П1.46) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} (\tau_3 - \dot{\hat{\theta}}) + \\ & z_3 \left[z_2 + z_4 + \alpha_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \right. \\ & \left. \left(\hat{\theta}^T - z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \right) \left(\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2 \right) \right] + (\hat{\theta} - \theta)^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_3). \end{aligned} \quad (\text{П1.49})$$

Выбор

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & -z_2 - c_3 z_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \tau_3 \\ & + \left(z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma - \hat{\theta}^T \right) \left(\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2 \right) \end{aligned} \quad (\text{П1.50})$$

(при условии, что $\alpha_3 = x_4$ - фактическое управление и, соответственно, $z_4 = 0$) обеспечивает выполнение равенства

$$\dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2.$$

В силу того, что α_3 не является фактическим управлением, переменная $z_4 \neq 0$. Следовательно,

$$\dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + z_3 z_4 + \left[z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} + z_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} + (\theta - \hat{\theta})^T \Gamma^{-1} \right] (\tau_3 - \dot{\hat{\theta}}) \quad (\text{П1.51})$$

и выражение для \dot{z}_3 с учетом (П1.45), (П1.50) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & -z_2 - c_3 z_3 + z_4 + (\theta - \hat{\theta})^T \left(\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2 \right) + \\ & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} (\tau_3 - \dot{\hat{\theta}}) + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \left(\phi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \phi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \phi_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{П1.52})$$

Шаг i. Введем в рассмотрение переменную $z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$ и перепишем соответственно уравнение $\dot{x}_i = x_{i+1} + \theta^T \phi_i(x_1, \dots, x_i)$:

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + \alpha_i + \theta^T \phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} (x_{k+1} + \theta^T \phi_k) - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}. \quad (\text{П1.53})$$

Будем считать, что α_i - новое виртуальное управление системой в (z_1, \dots, z_i) - координатах и определим вид этого управления, обеспечивающий стабилизацию расширенной системы с вектором состояния $(z_1, \dots, z_i) \oplus \hat{\theta}$. С этой целью рассмотрим

функцию $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2$ и запишем ее производную по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & - \sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} \right) (\tau_{i-1} - \dot{\hat{\theta}}) \\ & + z_i \left[z_{i-1} + z_{i+1} + \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \hat{\theta}^T \left(\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) \right] \\ & + (\hat{\theta} - \theta)^T \Gamma^{-1} \left[\dot{\hat{\theta}} - \Gamma \sum_{l=1}^i z_l \left(\phi_l - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\partial \alpha_{l-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.54})$$

Выбор функции τ_i в $\dot{\hat{\theta}} = \tau_i$

$$\tau_i = \Gamma \sum_{l=1}^i z_l \left(\phi_l - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\partial \alpha_{l-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) = \tau_i + \Gamma z_i \left(\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) \quad (\text{П1.55})$$

обеспечивает компенсацию члена $\hat{\theta} - \theta$ в (П1.54). Принимая во внимание равенство

$$\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-1} = \dot{\hat{\theta}} - \tau_i + \tau_i - \tau_{i-1} = \dot{\hat{\theta}} - \tau_i + \Gamma z_i \left(\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k \right), \quad (\text{П1.56})$$

перепишем \dot{V}_i в виде:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & - \sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 + \sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} (\tau_i - \dot{\hat{\theta}}) + z_i \left[z_{i-1} + z_{i+1} + \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} \right. \\ & \left. - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \left(\hat{\theta}^T - \sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \right) \left(\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) \right] \\ & + (\hat{\theta} - \theta)^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_i). \end{aligned} \quad (\text{П1.57})$$

Если бы переменная x_{i+1} была бы фактическим управлением, то есть $\alpha_i = u = x_{i+1}$ и соответственно $z_{i+1} = 0$, то выбор

$$\begin{aligned} \alpha_i = & - z_{i-1} - c_i z_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_i \\ & + \left[\sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} \Gamma - \hat{\theta}^T \right] \left(\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) \end{aligned} \quad (\text{П1.58})$$

обеспечивает выполнение равенства

$$\dot{V}_i = - \sum_{k=1}^i c_k z_k^2.$$

Переменная x_{i+1} , однако, не является фактическим управлением и поэтому $z_{i+1} \neq 0$. Следовательно имеет место равенство

$$\dot{V}_i = - \sum_{k=1}^i c_k z_k^2 + z_i z_{i+1} + \left[\sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} + (\theta - \hat{\theta})^T \Gamma^{-1} \right] (\tau_i - \dot{\hat{\theta}}), \quad (\text{П1.59})$$

а уравнения переменных z_i в замкнутой системе имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = & -z_{i-1} - c_i z_i + z_{i+1} + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \left(\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) \\ & + \frac{\partial \alpha_i}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} (\boldsymbol{\tau}_i - \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}) + \left(\sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \Gamma \right) \left(\phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k \right). \end{aligned} \quad (\text{П1.60})$$

Шаг n. На шаге $n-1$ использовалась замена $z_n = x_n - \alpha_{n-1}$. На текущем n -м шаге мы завершим построение адаптивного регулятора для исходной системы (П1.31), (П1.32), используя введенные ранее переменные z_1, \dots, z_n , виртуальные управления $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ и функции настройки $\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_{n-1}$. С учетом $\dot{x}_n = \phi_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^T \phi_n(\mathbf{x}) + \beta_0(\mathbf{x})u$ запишем уравнение для производной \dot{z}_n :

$$\dot{z}_n = \phi_0 + \boldsymbol{\theta}^T \phi_n + \beta_0 u - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} (x_{k+1} + \boldsymbol{\theta}^T \phi_k) - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}. \quad (\text{П1.61})$$

Рассмотрим положительно определенную (по $z_1, \dots, z_n, \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$) функцию $V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2$. Ее производная по времени удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & - \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \right) (\boldsymbol{\tau}_{n-1} - \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}) \\ & + z_n \left[z_{n-1} + \beta_0 u + \phi_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \left(\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) \right] \\ & + (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \Gamma^{-1} \left[\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - \Gamma \sum_{l=1}^n z_l \left(\phi_l - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\partial \alpha_{l-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.62})$$

С целью компенсации члена $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ в (П1.62) выберем финальную функцию настройки в виде:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\tau}_n = \Gamma \sum_{l=1}^n z_l \left(\phi_l - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\partial \alpha_{l-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) = \boldsymbol{\tau}_{n-1} + \Gamma z_n \left(\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k \right). \quad (\text{П1.63})$$

Принимая во внимание равенство

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau}_{n-1} = \boldsymbol{\tau}_n - \boldsymbol{\tau}_{n-1} = \Gamma z_n \left(\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k \right), \quad (\text{П1.64})$$

перепишем (П1.62) следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + z_n \left[z_{n-1} + \beta_0 u + \phi_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right. \\ & \left. + \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^T - \sum_{k=1}^{n-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \Gamma \right) \left(\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.65})$$

Тогда выбор управления u в виде

$$u = \frac{1}{\beta_0} \left[-z_{n-1} - c_n z_n - \phi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_n + \left(\sum_{k=1}^{n-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\theta}} \Gamma - \hat{\theta}^T \right) \left(\phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \phi_k \right) \right] \quad (\text{П1.66})$$

обеспечивает требуемую неположительность производной \dot{V}_n :

$$\dot{V}_n = - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2,$$

что гарантирует ограниченность переменных z_i , $\hat{\theta}$.

Согласно принципу инвариантности Ла-Салля, состояние системы сходятся к максимальному инвариантному множеству M , определяемому нулями производной \dot{V}_n :

$$M = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_i = 0\}.$$

Другими словами,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) = 0. \quad (\text{П1.67})$$

Принимая во внимание замену

$$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2 + \alpha_1(z_1, \hat{\theta}), \quad x_3 = z_3 + \alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) = z_3 + \alpha_2(z_1, z_2 + \alpha_1(z_1, \hat{\theta}), \hat{\theta}), \dots$$

гладкость функций $\alpha_i(x_1, \dots, x_i, \hat{\theta})$ и ограниченность z_i , $\hat{\theta}$ можно заключить, что функция состояние $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ исходной системы также ограничена как непрерывная функция ограниченного аргумента.

Для доказательства того, что решение $\mathbf{x}(t)$ как функция времени имеет предел при $t \rightarrow \infty$, запишем уравнения замкнутой системы в z_i -координатах. С учетом обозначения

$$\mathbf{w}_i(x_1, \dots, x_i, \hat{\theta}) = \phi_i(x_1, \dots, x_i) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k(x_1, \dots, x_k) \quad (\text{П1.68})$$

эти уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -c_1 z_1 + z_2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{w}_1(x_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
\dot{z}_2 &= -z_1 - c_2 z_2 + z_3 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{w}_2(x_1, x_2, \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \sum_{k=3}^n \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \Gamma z_k \mathbf{w}_k(x_1, \dots, x_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}); \\
\dot{z}_3 &= -z_2 - c_3 z_3 + z_4 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{w}_3(x_1, x_2, x_3, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&\quad - \sum_{k=4}^n \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \Gamma z_k \mathbf{w}_k(x_1, \dots, x_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \Gamma \mathbf{w}_3(x_1, x_2, x_3, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&\quad \vdots \\
\dot{z}_i &= -z_{i-1} - c_i z_i + z_{i+1} + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{w}_i(x_1, \dots, x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&\quad - \sum_{k=i+1}^n \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \Gamma z_k \mathbf{w}_k(x_1, \dots, x_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \Gamma \mathbf{w}_i(x_1, \dots, x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&\quad \vdots \\
\dot{z}_n &= -z_{n-1} - c_n z_n + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{w}_n(x_1, \dots, x_n, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \sum_{k=1}^{n-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \Gamma \mathbf{w}_n(x_1, \dots, x_n, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \\
\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \Gamma \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{w}_i(x_1, \dots, x_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}).
\end{aligned} \tag{П1.69}$$

Правая часть системы (П1.69) – гладкое векторное поле своих аргументов. Следовательно, производные \ddot{z}_i ограничены в силу ограниченности состояния \mathbf{x} , переменных z_i и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Тогда согласно лемме Барбалата существование предела (П1.67) влечет выполнение предельного соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}(t) = 0.$$

Таким образом, в силу (П1.69) существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) \mathbf{w}_i(x_1(t), \dots, x_i(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) = 0. \tag{П1.70}$$

Покажем, что переменные $x_i(t)$ также имеют предел при $t \rightarrow \infty$.

Так как $x_1 = z_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = 0$ влечет $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$. Отмечая, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1(x_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \boldsymbol{\phi}_1(x_1), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))^T \mathbf{w}_1(x_1(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))^T \boldsymbol{\phi}_1(x_1(t)) = 0 \Rightarrow \\
\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_1(x_1(t)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\phi}_1(x_1(t)) = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_1(0),
\end{aligned}$$

получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) + \alpha_1(z_1(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) - c_1 z_1(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)^T \boldsymbol{\phi}_1(x_1(t)) = -\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_1(0).$$

Используя (П1.70), (П1.69), получим

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))^T \mathbf{w}_2(x_1, x_2, \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))^T \boldsymbol{\phi}_2(x_1(t), x_2(t)) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(t) \boldsymbol{\phi}_2(x_1(t), x_2(t)) &= \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_2(0, x_2^e). \end{aligned}$$

Учитывая (П1.58) перепишем выражение для α_i в виде:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -z_{i-1} - c_i z_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} (x_{k+1} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\phi}_k) + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \boldsymbol{\tau}_i \\ &+ \left[\sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \Gamma - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \right] \boldsymbol{\phi}_i, \end{aligned}$$

откуда для $i = 2$ получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} = -\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_2(0, x_2^e).$$

Следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_3(t) + \alpha_2(t) = -\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_2(0, x_2^e)$. Продолжая эти рассуждения для $i = 3, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(t) \boldsymbol{\phi}_i(x_1(t), \dots, x_i(t)) &= \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_i(0, x_2^e, \dots, x_i^e), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) &= -\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\phi}_{i-1}(0, x_2^e, \dots, x_{i-1}^e). \end{aligned}$$

Таким образом, справедлив следующий результат [217]

Т е о р е м а 7.2. Пусть задана система (П1.31), (П1.32), где управление u определено в виде (П1.66). Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^e = (x_1^e, \dots, x_n^e)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}$ расширенной системы глобально устойчиво по Ляпунову. Кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^e.$$

7.3. Минимаксный алгоритм адаптивного управления

для систем с нелинейной параметризацией

Рассматривается класс нелинейных динамических систем, представимых в виде моделей по ошибке [233]:

$$\dot{e}_c = -k_1 e_c + k_2 \left[\boldsymbol{\varphi}_\ell^T(\boldsymbol{\alpha}_\ell - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_\ell) + \sum_{i=1}^m \left(f_i(\boldsymbol{\phi}_i, \theta_i) - f_i(\boldsymbol{\phi}_i, \hat{\theta}_i) \right) - u_a(t) \right], \quad (\text{П1.71})$$

где e_c имеет смысл собственно ошибки или отклонения, $\boldsymbol{\alpha}_\ell \in \mathbb{R}^\ell$, $\theta_i \in \Theta_i \subset \mathbb{R}$ – неизвестные параметры, а $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_\ell \in \mathbb{R}^\ell$ и $\hat{\theta}_i$ являются их оценками. Области Θ_i допустимых значений θ_i полагаются замкнутыми интервалами в \mathbb{R} , $k_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $k_2 \in \mathbb{R}$ – известные

параметры, а функции $\phi_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\varphi_\ell : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ полагаются известными функциями времени (в т.ч. состояния как функции времени), $u_a(t)$ – дополнительный управляющий сигнал, подлежащий определению. Функции $f_i(\cdot)$ в (П1.71) являются непрерывными функциями своих аргументов.

Целью управления ставится отыскание алгоритма настройки параметров $\hat{\alpha}_\ell$, $\hat{\theta}_i$ и функции дополнительного управления $u_a(t)$, обеспечивающих ограниченность ошибки e_c и оценок $\hat{\alpha}_\ell$, $\hat{\theta}_i$. Приведем решение этой задачи в классе минимаксных алгоритмов адаптации, изложенное в работе [233].

Введем в рассмотрение переменную e_ϵ , $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$

$$e_\epsilon = e_c - \epsilon S\left(\frac{e_c}{\epsilon}\right), \quad S\left(\frac{e_c}{\epsilon}\right) = \begin{cases} 1, & \frac{e_c}{\epsilon} \geq 1; \\ \frac{e_c}{\epsilon}, & \left|\frac{e_c}{\epsilon}\right| \leq 1; \\ -1, & \frac{e_c}{\epsilon} \leq -1, \end{cases} \quad (\text{П1.72})$$

и зададим алгоритм настройки параметров и дополнительный управляющий сигнал в виде:

$$u_a = \text{sign}(k_2) S\left(\frac{e_c}{\epsilon}\right) \sum_{i=1}^m a_i^*(\hat{\theta}_i, t), \quad (\text{П1.73})$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_\ell = \text{sign}(k_2) \Gamma_\alpha e_\epsilon \varphi_\ell, \quad \Gamma_\alpha > 0, \quad (\text{П1.74})$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \text{sign}(k_2) \gamma_{\theta_i} e_\epsilon \omega_i^*(\hat{\theta}_i, t), \quad \gamma_{\theta_i} > 0, \quad (\text{П1.75})$$

где $a_i^*(\hat{\theta}_i, t)$, $\omega_i^*(\hat{\theta}_i, t)$ – функции оценок $\hat{\theta}_i$ и времени, являющиеся решениями уравнений

$$a_i^*(\hat{\theta}_i, t) = \min_{\omega_i \in \mathbb{R}} \max_{\theta_i \in \Theta_i} \text{sign}(e_\epsilon k_2) \left[f_i(\phi_i(t), \theta_i) - f_i(\phi_i(t), \hat{\theta}_i) + (\hat{\theta}_i - \theta_i) \omega_i \right] \quad (\text{П1.76})$$

$$\omega_i^*(\hat{\theta}_i, t) = \arg \min_{\omega_i \in \mathbb{R}} \max_{\theta_i \in \Theta_i} \text{sign}(e_\epsilon k_2) \left[f_i(\phi_i(t), \theta_i) - f_i(\phi_i(t), \hat{\theta}_i) + (\hat{\theta}_i - \theta_i) \omega_i \right] \quad (\text{П1.77})$$

Свойства системы (П1.71) с алгоритмом управления (П1.72)–(П1.77) определяются следующей теоремой [233].

Т е о р е м а 7.3. Пусть задана модель по ошибке вида (П1.71), где оценки $\hat{\theta}_i$, $\hat{\alpha}_\ell$ и дополнительное управление $u_a(t)$ удовлетворяют уравнениям (П1.72)–(П1.77). Положим в дополнение, что траектории $\hat{\theta}_i(t)$ ограничены и кроме того³ $\hat{\theta}_i(t) \in \Theta_i$ для всех $t \geq t_0$. Тогда:

³Требование $\hat{\theta}_i(t) \in \Theta_i$, заявленное в оригинальной формулировке теоремы, не требуется в явном виде для ее доказательства. Ограниченность $\hat{\theta}_i$, однако, гарантирует возможность решения минимаксной задачи (П1.76) как функций $\hat{\theta}_i$, $\phi_i(t)$, что мотивировало включение этого требования в формулировку основного результата. Для более подробного знакомства с этими алгоритмами см. работы [233], [130].

1) решения системы (П1.71), (П1.72)–(П1.77) ограничены для любых начальных условий $\hat{\alpha}_\ell(t_0) \in \mathbb{R}^\ell$, $e_c(t_0) \in \mathbb{R}$;

2) если дополнительно функции $\varphi_\ell(t)$, $\phi_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ глобально ограничены по t , то выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_\epsilon(t) = e_c(t) - \epsilon S\left(\frac{e_c(t)}{\epsilon}\right) = 0. \quad (\text{П1.78})$$

Доказательство теоремы 7.3. Доказательство теоремы основано на анализе производной по времени следующей положительно определенной функции:

$$V = \frac{1}{2} \left(e_\epsilon^2 + |k_2| (\hat{\alpha}_\ell - \alpha_\ell)^T \Gamma_{\alpha_\ell}^{-1} (\hat{\alpha}_\ell - \alpha_\ell) + |k_2| \sum_{i=1}^m \gamma_{\theta_i}^{-1} (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2 \right).$$

Производная по времени функции V всюду определена и может быть записана в следующем виде:

$$\dot{V} = \begin{cases} 0, & |e_c| \leq \epsilon, \\ -k_1 e_c e_\epsilon + k_2 e_\epsilon \sum_{i=1}^m \left[f_i(\phi_i(t), \theta_i) - f_i(\phi_i(t), \hat{\theta}_i) + \right. \\ \left. (\hat{\theta}_i - \theta_i) \omega_i^* - a_i^* \text{sign}(k_2) S\left(\frac{e_c}{\epsilon}\right) \right], & |e_c| > \epsilon \end{cases} \quad (\text{П1.79})$$

В силу выбора e_ϵ в виде (П1.73) второе уравнение в (П1.79) влечет выполнение неравенства

$$\dot{V} \leq |k_2| \left(-\frac{k_1}{|k_2|} e_\epsilon^2 + e_\epsilon \sum_{i=1}^m \left[\text{sign}(k_2) \left(f_i(\phi_i(t), \theta_i) - f_i(\phi_i(t), \hat{\theta}_i) \right) + (\hat{\theta}_i - \theta_i) \omega_i^* - a_i^* S\left(\frac{e_c}{\epsilon}\right) \right] \right). \quad (\text{П1.80})$$

Рассмотрим два случая 1) $e_\epsilon \geq 0$ и 2) $e_\epsilon < 0$ и покажем что в обоих случаях производная $\dot{V} \leq 0$.

1) Пусть $e_\epsilon \geq 0$. Тогда принимая во внимание, что $S\left(\frac{e_c}{\epsilon}\right) = \text{sign}(e_c)$ при $|e_c| > \epsilon$, выполнение неравенства

$$a_i^* \geq \text{sign}(k_2) \left[f_i(\phi_i(t), \theta_i) - f_i(\phi_i(t), \hat{\theta}_i) + (\hat{\theta}_i - \theta_i) \omega_i^* \right] \quad (\text{П1.81})$$

для всех $\theta_i \in \Theta_i$ при $|e_c| > \epsilon$ влечет требуемое свойство: $\dot{V} \leq 0$. Неравенство (П1.81), очевидно, будет выполнено если для всех ω_i^* коэффициенты a_i^* удовлетворят условию

$$a_i^*(\hat{\theta}_i, t) = \max_{\theta_i \in \Theta_i} \text{sign}(k_2) \left[f_i(\phi_i(t), \theta_i) - f_i(\phi_i(t), \hat{\theta}_i) + (\hat{\theta}_i - \theta_i) \omega_i^* \right]$$

В силу того, что коэффициенты a_i^* имеют смысл коэффициентов усиления в отрицательной обратной связи замкнутой системы, то естественно их выбирать из условий допустимой минимальности. Тогда выбор

$$\begin{aligned} a_i^*(\hat{\theta}_i, t) &= \min_{\omega_i \in \mathbb{R}} \max_{\theta_i \in \Theta_i} \text{sign}(k_2) \left[f_i(\phi_i(t), \theta_i) - f_i(\phi_i(t), \hat{\theta}_i) + (\hat{\theta}_i - \theta_i) \omega_i \right] \\ \omega_i^* &= \arg \min_{\omega_i \in \mathbb{R}} \max_{\theta_i \in \Theta_i} \text{sign}(k_2) \left[f_i(\phi_i(t), \theta_i) - f_i(\phi_i(t), \hat{\theta}_i) + (\hat{\theta}_i - \theta_i) \omega_i \right] \end{aligned} \quad (\text{П1.82})$$

обеспечивает выполнение неравенства $\dot{V} \leq 0$ в случае $e_\epsilon \geq 0$ при одновременном выполнении требования к минимальности компенсирующих коэффициентов a_i^* .

2) Предположим, что $e_c < 0$. Тогда для выполнения неравенства $\dot{V} \leq 0$ достаточно, чтобы для всех $\theta_i \in \Theta_i$ выполнялось условие:

$$a_i^*(\hat{\theta}_i, t) = \max_{\theta_i \in \Theta_i} \text{sign}(k_2) \left[f_i(\phi_i(t), \hat{\theta}_i) - f_i(\phi_i(t), \theta_i) + (\theta_i - \hat{\theta}_i)\omega_i^* \right].$$

Аналогично предыдущему случаю, требование минимальности компенсирующих обратных связей влечет

$$\begin{aligned} a_i^*(\hat{\theta}_i, t) &= \min_{\omega_i \in \mathbb{R}} \max_{\theta_i \in \Theta_i} \text{sign}(k_2) \left[f_i(\phi_i(t), \hat{\theta}_i) - f_i(\phi_i(t), \theta_i) + (\theta_i - \hat{\theta}_i)\omega_i \right] \\ \omega_i^*(\hat{\theta}_i, t) &= \arg \min_{\omega_i \in \mathbb{R}} \max_{\theta_i \in \Theta_i} \text{sign}(k_2) \left[f_i(\phi_i(t), \hat{\theta}_i) - f_i(\phi_i(t), \theta_i) + (\theta_i - \hat{\theta}_i)\omega_i \right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.83})$$

Отмечая, что запись (П1.76), (П1.77) эквивалентна (П1.82) при $e_\epsilon \geq 0$ и (П1.83) при $e_\epsilon < 0$, можно заключить, что $\dot{V} \leq 0$ для всех $t \geq t_0$ и следовательно, решения замкнутой системы ограничены для любых начальных условий. Это доказывает утверждение 1) теоремы.

Для доказательства утверждения 2) достаточно отметить, что \dot{V} удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} \leq -k_1 e_\epsilon^2.$$

В силу того, что ограниченность функций $\varphi_\ell(t)$, $\phi_i(t)$ для всех $t \geq t_0$ влечет ограниченность производной \dot{e}_c и, следовательно, \dot{e}_c , функция $e_\epsilon(t)$ как функция времени является равномерно непрерывной по t , $t \geq t_0$. Тогда предельное соотношение (П1.78) гарантируется леммой Барбалата. *Теорема доказана.*

8. Приложение 2

8.1. Доказательство Теоремы 2.1

Пусть задано некоторое отображение $\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}_x$, где \mathcal{L}_x – линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_x}$, а норму в \mathbb{R}^n обозначим символом $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$. Согласно определению непрерывности отображений в метрических пространствах, непрерывность $\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0)$ по \mathbf{x}_0 эквивалентна выполнению неравенства:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}''_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}'_0, t_0) - \mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}''_0, t_0)\|_{\mathcal{L}_x} < \varepsilon. \quad (\text{П2.1})$$

Принимая во внимание эквивалентность записей $\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0)$ и $\mathcal{S}_T(\mathbf{x}_0 \oplus t_0)$, получим что запись (П2.1) эквивалентна неравенству

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}''_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\mathcal{S}_T(\mathbf{x}'_0 \oplus t_0) - \mathcal{S}_T(\mathbf{x}''_0 \oplus t_0)\|_{\mathcal{L}_x} < \varepsilon. \quad (\text{П2.2})$$

Заменяя в (П2.2) $\mathcal{S}_T(\mathbf{x}'_0 \oplus t_0)$ на $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}'_0, t_0)$ и $\mathcal{S}_T(\mathbf{x}''_0 \oplus t_0)$ на $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}''_0, t_0)$, получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}''_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}'_0, t_0) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}''_0, t_0)\|_{\mathcal{L}_x} < \varepsilon. \quad (\text{П2.3})$$

Пусть $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ – стандартная евклидова норма в \mathbb{R}^n , а $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_x} = \|\cdot\|_{\infty, [t_0, \infty]}$. Тогда, очевидно, неравенство (П2.3) эквивалентно свойству устойчивости решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}'_0, t_0)$ согласно определению 2.2.3. Следовательно, положение 3) теоремы доказано.

Вместо нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ рассмотрим теперь норму $\|\mathbf{x}\|_{\Omega^*} = \text{dist}\{\Omega^*, \mathbf{x}\}$, где Ω^* – инвариантное множество системы. Норму в \mathcal{L}_x выберем следующим образом $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_x} = \|\cdot\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]}$. В силу того, что Ω^* – инвариантное множество, имеем:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega^* \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega^*.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\|\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} = \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} = 0 \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega^*. \quad (\text{П2.4})$$

Принимая во внимание (П2.4) и свойства нормы (неравенство треугольника), можно утверждать, что имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0) - \mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}'_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} &\leq \|\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} + \|\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}'_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} \\ &= \|\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} \quad \forall \mathbf{x}'_0 \in \Omega^*; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} &\leq \|S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}_0, t_0) - S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}'_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} + \|S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}'_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} \\ &= \|S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}_0, t_0) - S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}'_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} \quad \forall \mathbf{x}'_0 \in \Omega^*.\end{aligned}$$

Таким образом, для всех $\mathbf{x}'_0 \in \Omega^*$ выполняется тождество

$$\|S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}_0, t_0) - S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}'_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} = \|S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]}. \quad (\text{П2.5})$$

Согласно (П2.1), непрерывность отображения $S_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_0, t_0)$ из метрического пространства \mathbb{R}^n с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n} = \|\cdot\|_{\Omega^*}$ в метрическое пространство \mathcal{L}_x с нормой $\|\cdot\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]}$ эквивалентна свойству:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0\|_{\Omega^*} < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}_0, t_0) - S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}'_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} < \varepsilon. \quad (\text{П2.6})$$

Тогда для любого $\mathbf{x}'_0 \in \Omega^*$ запись (П2.6) с учетом (П2.5) эквивалентна неравенству

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*} < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} < \varepsilon. \quad (\text{П2.7})$$

Принимая во внимание $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) = S_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{x}_0, t_0) = S_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_0 \oplus t_0)$, замечаем, что неравенство (П2.7) совпадает с неравенством (2.16) в определении 2.2.1. Это, в свою очередь, доказывает положение 1.1 теоремы.

Докажем положение 1.2. Рассмотрим прежде всего достаточность существования $\gamma_{S, L_\infty}(\cdot)$, определенного в виде (2.19), для устойчивости инвариантного множества Ω^* . Согласно выражениям (2.10), (2.19) имеем

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, \infty]} \leq \gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, T) = \gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{x}_0 \oplus t_0, T) = \gamma_{S, L_\infty}(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0), \quad (\text{П2.8})$$

где $\gamma_{S, L_\infty}(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0)$ по условиям теоремы не убывает по $\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}$ и $\gamma_{S, L_\infty}(0, t_0) = 0$. Очевидно, функция $\gamma_{S, L_\infty}(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0)$ для любого заданного t_0 мажорируется непрерывной и монотонно (неограниченно) возрастающей функцией $\gamma_s : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, такой, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_1(r, t_0) = \infty.$$

Таким образом, с учетом (П2.8), имеет место неравенство

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, \infty]} \leq \gamma_s(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0). \quad (\text{П2.9})$$

Функция $\gamma_s(r, t_0)$, очевидно, имеет обратную $\gamma_s^{-1}(r, t_0)$:

$$\gamma_s(\gamma_s^{-1}(r, t_0), t_0) = r,$$

причем $\gamma_s^{-1}(r, t_0)$ монотонно (неограниченно) возрастает по r . Следовательно, выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\gamma_s(a, t_0) &\leq \gamma_s(b, t_0) \quad \forall a \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}_+; \\ \gamma_s^{-1}(a, t_0) &\leq \gamma_s^{-1}(b, t_0) \quad \forall a \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

Таким образом, для любых $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}(\Omega^*, \delta)$, $\mathcal{V}(\Omega^*, \delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_{\Omega^*} \leq \delta\}$, где $\delta = \gamma_s^{-1}(\varepsilon, t_0)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ справедлива оценка:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, \infty]} \leq \gamma_s(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0) \leq \gamma_s(\gamma_s^{-1}(\varepsilon, t_0), t_0) = \varepsilon. \quad (\text{П2.10})$$

Неравенство (П2.10) в силу произвола выбора ε выполняется для любого $\varepsilon > 0$ при условии, что $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}(\Omega^*, \delta)$, $\delta = \gamma_s^{-1}(\varepsilon, t_0)$. Следовательно, выполняется неравенство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) = \gamma_s^{-1}(\varepsilon, t_0) : \|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*} < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\|_{\Omega^*} < \varepsilon,$$

что доказывает достаточность.

Покажем необходимость положения 1.2 теоремы. Рассмотрим величину ε_1 как функцию δ, t_0 вида

$$\varepsilon_1(\delta, t_0) = \sup_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}(\Omega^*, \delta)} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]}.$$

Очевидно, что $\varepsilon_1(\delta, t_0) \geq \delta$ в силу определения нормы $\|\cdot\|_{\infty, [t_0, \infty]}$. Кроме того, $\varepsilon_1(0, t_0) = 0$ из условия инвариантности множества Ω^* . В дополнение

$$\varepsilon_1(\delta_1, t_0) \geq \varepsilon_1(\delta_2, t_0), \quad \forall \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_+, \quad \delta_1 \geq \delta_2,$$

так как $\mathcal{V}(\Omega^*, \delta_2) \subseteq \mathcal{V}(\Omega^*, \delta_1)$. Следовательно, $\varepsilon_1(\delta, t_0)$ не убывает по δ . Функция $\varepsilon_1(\delta, t_0)$, наконец, непрерывна по δ в точке $\delta = 0$. Тогда выбор

$$\gamma_{S, L_\infty}(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0) = \varepsilon_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0)$$

доказывает необходимость свойства 1.2.

Свойство 2.1 доказывается аналогично свойствам 1.1 и 3. Запишем свойство локальной ограниченности отображения $\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0)$ по \mathbf{x}_0 :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, \mathbf{x}_0, t_0) : \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon \Rightarrow \|\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0) - \mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}'_0, t_0)\|_{\mathcal{L}_x} < \delta(\varepsilon, \mathbf{x}_0, t_0). \quad (\text{П2.11})$$

Тогда для всех $\mathbf{x}'_0 \in \Omega^*$, при условии формальной замены норм $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_x}$ на нормы $\|\cdot\|_{\Omega^*}$, $\|\cdot\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]}$, неравенство (П2.11) примет вид

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, \mathbf{x}_0, t_0) : \|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*} < \varepsilon \Rightarrow \|\mathcal{S}_T^*(\mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} = \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} < \delta(\varepsilon, \mathbf{x}_0, t_0).$$

Докажем 2.2. Достаточность вытекает непосредственно из определения коэффициента передаточного отображения

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} \leq \gamma_{S, \mathcal{L}_x}(\mathbf{e}, \infty) = \gamma_{S, L_\infty}(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0)$$

и локальной ограниченности $\gamma_{S, L_\infty}(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0)$ по $\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) : \|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*} < \varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]} \leq \gamma_{S, L_\infty}(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0) < \delta(\varepsilon, t_0).$$

Покажем необходимость свойства 2.2. Из устойчивости в смысле определения 2.2.2 вытекает, что $\|\mathbf{x}(t)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]}$ существует и ограничена. Рассмотрим

$$\delta_1(\varepsilon, t_0) = \sup_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}(\Omega^*, \varepsilon)} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|_{\Omega^*, [t_0, \infty]}.$$

Функция $\delta_1(\varepsilon, t_0)$ неотрицательна, локально ограничена по t_0 и ε . Кроме того, $\delta_1(0, t_0) = 0$ в силу инвариантности множества Ω^* . Следовательно, выбор

$$\gamma_{S, L_\infty}(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0) = \delta_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\Omega^*}, t_0)$$

доказывает необходимость 2.2 и таким образом завершает доказательство теоремы. *Теорема доказана.*

8.2. Доказательство Теоремы 2.3

Доказательство теоремы следует непосредственно из определения 2.2.6. *Теорема доказана.*

8.3. Доказательство Теоремы 2.4

Рассмотрим параллельное соединение (2.39), (2.40) систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 . Системы \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 реализуемы и поэтому для каждой пары $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1) \in \mathcal{L}_u \times \mathcal{E}_1$, $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2) \in \mathcal{L}_u \times \mathcal{E}_2$ существуют числа $T_1(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1)$ и $T_2(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2)$:

$$\|\mathcal{S}_1(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1)\|_{\infty, [t_0, T_1]} < \infty, \quad \|\mathcal{H}_1(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1)\|_{\infty, [t_0, T_1]} < \infty;$$

$$\|\mathcal{S}_2(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T_2]} < \infty, \quad \|\mathcal{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T_2]} < \infty.$$

Положим

$$T = \min\{T_1, T_2\}. \quad (\text{П2.12})$$

Тогда используя (2.40), получим:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T]} &= \|\mathcal{S}_1(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1)\|_{\infty, [t_0, T]} + \|\mathcal{S}_2(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T]} < \infty; \\ \|\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T]} &= \|\mathcal{H}_1(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1)\|_{\infty, [t_0, T]} + \|\mathcal{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T]} < \infty, \end{aligned} \quad (\text{П2.13})$$

что доказывает реализуемость параллельного соединения. Свойство полноты системы следует непосредственно из (П2.13), (П2.12) и того факта, что числа T_1 и T_2 для полных систем \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 могут быть сколь угодно велики.

Рассмотрим теперь последовательное соединение (2.37), (2.38) систем. Системы \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 реализуемы с передаточными отображениями по нормам $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{u_1}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{u_2}}$ и

поэтому для каждого $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{E}_1$, $\mathbf{e}_2 \in \mathcal{E}_2$ существуют числа $T_1(\mathbf{e}_1) > t_0$ и $T_2(\mathbf{e}_2) > t_0$ такие, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{e}_1)\|_{\infty, [t_0, T_1]} &\leq \gamma_{S_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}, [t_0, T_1]}, T_1); \\ \|\mathcal{H}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{e}_1)\|_{\infty, [t_0, T_1]} &\leq \gamma_{H_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}, [t_0, T_1]}, T_1); \\ \|\mathcal{S}_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T_2]} &\leq \gamma_{S_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathcal{L}_{u_2}, [t_0, T_2]}, T_2); \\ \|\mathcal{H}_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T_2]} &\leq \gamma_{H_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathcal{L}_{u_2}, [t_0, T_2]}, T_2). \end{aligned} \quad (\text{П2.14})$$

Кроме того, по условиям теоремы

$$\|\mathcal{H}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{e}_1)\|_{\mathcal{L}_{u_2}} \leq \gamma_{H, \mathcal{L}_{y_1}}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}}, T_1).$$

Тогда выбирая T согласно (П2.12) и учитывая монотонность функций $\gamma_{S_2, \infty}$, $\gamma_{H_2, \infty}$ по аргументам $\|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathcal{L}_{u_2}}$, получим оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_2(\mathcal{H}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \gamma_{S_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \gamma_{H, \mathcal{L}_{y_1}}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}}, T), T); \\ \|\mathcal{H}_2(\mathcal{H}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \gamma_{H_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \gamma_{H, \mathcal{L}_{y_1}}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}}, T), T). \end{aligned} \quad (\text{П2.15})$$

Таким образом, используя (2.37), (2.38) и (П2.14), получаем:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &= \|\mathbf{x}_1(t) \oplus \mathbf{x}_2(t)\|_{\infty, [t_0, T]} = \|\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{e}_1) \oplus \mathcal{S}_2(\mathcal{H}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T]} \\ &\leq \|\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{e}_1)\|_{\infty, [t_0, T]} + \|\mathcal{S}_2(\mathcal{H}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T]} \\ &\leq \gamma_{S_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}, [t_0, T]}, T) + \gamma_{S_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \gamma_{H, \mathcal{L}_{y_1}}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}}, T), T); \\ \|\mathbf{y}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &= \|\mathbf{y}_2(t)\|_{\infty, [t_0, T]} = \|\mathcal{H}_2(\mathcal{H}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2)\|_{\infty, [t_0, T]} \\ &\leq \gamma_{H_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \gamma_{H, \mathcal{L}_{y_1}}(\mathbf{e}_1, \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{u_1}}, T), T). \end{aligned}$$

Неравенство (П2.16) доказывает свойство реализуемости (полноту) последовательного соединения (2.37), (2.38) с передаточным отображением по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{u_1}}$. При этом выбор (П2.12) гарантирует справедливость оценки (2.48). *Теорема доказана.*

8.4. Доказательство Теоремы 2.5

Рассмотрим последовательное соединение (2.38) систем \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 при условии, что множество входов \mathcal{U}_1 для системы \mathcal{S}_1 ограничено классом (2.59). Система \mathcal{S}_1 (как совокупность отображений из $\mathcal{L}_u[t_0, T_1] \times \mathcal{E}_1$ в $\mathcal{L}_{x_1}[t_0, T_1]$, $\mathcal{L}_{y_1}[t_0, T_1]$) в этом случае может быть переопределена в виде системы $\tilde{\mathcal{S}}_1$, отображающей $\mathcal{L}_\delta[t_0, T_1] \times \mathcal{E}_1$ (где $\mathcal{L}_\delta[t_0, T_1] \subseteq \mathcal{L}_u[t_0, T]$) в $\mathcal{L}_{x_1}[t_0, T_1]$, $\mathcal{L}_{y_1}[t_0, T_1]$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{1, \mathcal{T}} &= \mathcal{S}_{1, \mathcal{T}}(\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_1, t) + \delta(t), \mathbf{e}_1); \\ \tilde{\mathcal{H}}_{1, \mathcal{T}} &= \mathcal{H}_{1, \mathcal{T}}(\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_1, t) + \delta(t), \mathbf{e}_1). \end{aligned} \quad (\text{П2.16})$$

Согласно теореме 2.4 последовательное соединение систем $\tilde{\mathcal{S}}_1$ и \mathcal{S}_2 реализуемо (полно) при условии, что обе системы реализуемы (полны) с заданными коэффициентами передаточных отображений по нормам $\|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T_1]}$ и $\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}, [t_0, T_2]}$ соответственно и для системы $\tilde{\mathcal{S}}_1$ определен коэффициент передаточного отображения $\gamma_{\tilde{H}_1, \mathcal{L}_\delta}$:

$$\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}, [t_0, T_1]} \leq \gamma_{\tilde{H}_1, \mathcal{L}_\delta}(\mathbf{e}_1, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T_1]}, T_1). \quad (\text{П2.17})$$

В соответствии с условием 2) теоремы 2.5, система \mathcal{S}_2 реализуема (полна) с заданными коэффициентами передаточных отображений по нормам $\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}, [t_0, T_2]}$. Покажем реализуемость (полноту) системы $\tilde{\mathcal{S}}_1$. Согласно условию 1), для системы \mathcal{S}_1 существует мажорирующее отображение $\psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_\psi)$. Кроме того, для всех $\mathbf{u}(t)$ из класса функций (2.59) выполнено условие (неравенство (2.56), предположение 2.1):

$$\|\psi(t)\|_{\mathcal{L}_\psi, [t_0, T_1]} \leq \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_\psi, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T_1]}, T_1).$$

В силу условий мажорирования (неравенства (2.50), (2.51), определение 2.4.1) и оценки (2.56) имеем:

$$\|\mathbf{x}_1(t)\|_{\infty, [t_0, T_1]} \leq \mu_{S_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T_1]}, T_1);) \quad (\text{П2.18})$$

$$\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\infty, [t_0, T_1]} \leq \mu_{H_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T_1]}, T_1)). \quad (\text{П2.19})$$

Неравенства (П2.18), (П2.19) доказывают полноту системы $\tilde{\mathcal{S}}_1$, заданной операторами (П2.16). В дополнение, оценка (П2.17) выполняется в силу неравенства (2.57) в предположении 2.1. Следовательно, последовательное соединение систем $\tilde{\mathcal{S}}_1$ и \mathcal{S}_2 реализуемо (полно).

Покажем, что замкнутое соединение этих систем также реализуемо (полно). Пусть $T = \min\{T_1, T_2\}$ ¹. Заметим, что в силу условий теоремы (неравенство (2.58)) на интервале реализуемости системы \mathcal{S}_2 справедлива оценка

$$\|\mathbf{y}_2(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} \leq \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T).$$

Тогда принимая во внимание (П2.18) (П2.19) и вводя обозначение $v(t) = \mathbf{y}_2(t) + \delta(t)$, получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \mu_{S_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, \|v(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}, T)) \\ &\leq \mu_{S_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} + \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T), T)); \end{aligned} \quad (\text{П2.20})$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_1(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \mu_{H_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, \|v(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}, T)) \\ &\leq \mu_{H_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} + \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T), T)). \end{aligned} \quad (\text{П2.21})$$

¹ $T = T_2$ в силу полноты системы $\tilde{\mathcal{S}}_1$.

Используя (П2.17), аналогичным образом оценим норму $\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}, [t_0, T]}$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}, [t_0, T]} &\leq \gamma_{\tilde{H}_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \|v(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]}, T) \\ &\leq \gamma_{\tilde{H}_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} + \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T), T).\end{aligned}$$

Тогда в силу реализуемости (полноты) системы \mathcal{S}_2 имеем:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_2(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \gamma_{S_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}, [t_0, T]}, T) \\ &\leq \gamma_{S_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \gamma_{\tilde{H}_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} + \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T), T), T);\end{aligned}\tag{П2.22}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}_2(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \gamma_{H_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \|\mathbf{y}_1(t)\|_{\mathcal{L}_{y_1}, [t_0, T]}, T) \\ &\leq \gamma_{H_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \gamma_{\tilde{H}_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} + \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T), T), T).\end{aligned}\tag{П2.23}$$

Неравенства (П2.20), (П2.21), (П2.22), (П2.23) в свою очередь гарантируют выполнение соотношений

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \mu_{S_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} + \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T), T) \\ &\quad + \gamma_{S_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \gamma_{\tilde{H}_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} + \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T), T));\end{aligned}\tag{П2.24}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}(t)\|_{\infty, [t_0, T]} &\leq \mu_{H_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \gamma_{P, \mathcal{L}_\psi}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\psi, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} + \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T), T)) \\ &\quad + \gamma_{H_2, \infty}(\mathbf{e}_2, \gamma_{\tilde{H}_1, \infty}(\mathbf{e}_1, \|\delta(t)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} + \gamma_{H_2, \mathcal{L}_\delta}^*(\mathbf{e}_2, T), T), T).\end{aligned}\tag{П2.25}$$

Соотношения (П2.24), (П2.25), очевидно, гарантируют реализуемость замкнутого соединения. Более того, полнота системы \mathcal{S}_2 в этом случае определяет свойство полноты всей системы \mathcal{S} . Неравенства (П2.20), (П2.21) доказывают справедливость (2.60). *Теорема доказана.*

8.5. Доказательство Теоремы 2.6

Прежде всего отметим, что согласно определению 2.3.2 система \mathcal{S}_c является последовательным соединением систем \mathcal{S}_o и \mathcal{S}_a . В силу теоремы 2.4 реализуемость (полнота) \mathcal{S}_a , \mathcal{S}_o (условие 2) автоматически влечет реализуемость (полноту) системы \mathcal{S}_c . Таким образом, реализуемость (полнота) замкнутого соединения будет следовать из реализуемости (полноты) замкнутого соединения \mathcal{S}_c и \mathcal{S}_p . В силу условия 1) теоремы и с учетом (2.73) соединение систем \mathcal{S}_p и \mathcal{S}_c может быть представлено как (замкнутое) соединение систем \mathcal{S}_p^* и $\tilde{\mathcal{S}}_c$ где

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}_{c, T}(\mathbf{y}_p \oplus \mathbf{u}^*, \mathbf{e}_o \oplus \mathbf{e}_a) &= \mathcal{S}_{a, T}(\mathbf{y}_p, \mathcal{H}_{o, T}(\mathbf{y}_p, \mathbf{e}_o), \mathbf{e}_a) \oplus \mathcal{S}_o(\mathbf{y}_p, \mathbf{e}_o); \\ \tilde{\mathcal{H}}_{c, T}(\mathbf{y}_p \oplus \mathbf{u}^*, \mathbf{e}_o \oplus \mathbf{e}_a) &= \mathbf{u}_a(\mathcal{H}_a(\mathbf{y}_p, \mathcal{H}_o(\mathbf{y}_p, \mathbf{e}_o), \mathbf{e}_a), \mathcal{H}_o(\mathbf{y}_p, \mathbf{e}_o), t) - \mathbf{u}^*(t).\end{aligned}\tag{П2.26}$$

В силу условия 3) теоремы отображение $\tilde{\mathcal{H}}_{c, T}$ в (П2.26) ограничено:

$$\|\tilde{\mathcal{H}}_{c, T}(\mathbf{y}_p \oplus \mathbf{u}^*, \mathbf{e}_o \oplus \mathbf{e}_a)\|_{\mathcal{L}_\delta, [t_0, T]} \leq \Delta_{J_x} + \Delta_{J_e}.$$

Тогда согласно теореме 2.5 замкнутое соединение систем \mathcal{S}_p^* и $\tilde{\mathcal{S}}_c$ реализуемо (полно) и, следовательно, соединение \mathcal{S}_p и \mathcal{S}_c также реализуемо (полно). При этом оценки (2.75) вытекают из оценок (2.60) теоремы 2.5. *Теорема доказана.*

8.6. Доказательство Теоремы 2.7

Пусть условия теоремы выполняются для заданных $t_0 \in \mathbb{R}_+$: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$. Отметим, что в этом случае справедливо неравенство $h(\mathbf{z}_0) \geq 0$ так как иначе неравенство (2.99) не выполняется. Рассмотрим последовательность (2.96) объемов Ω_i , индуцированных последовательностью \mathcal{S} :

$$\Omega_i = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{z} \in \mathcal{Z} \mid h(\mathbf{z}(t)) \in H_i\}.$$

Для доказательства теоремы достаточно будет показать, что $0 \leq h(\mathbf{z}(t)) \leq h(\mathbf{z}_0)$ для всех $t \geq t_0$. Для заданного разбиения (2.96) возможны две альтернативы.

В первом, вырожденном случае, состояние $\mathbf{x}(t) \oplus \mathbf{z}(t)$ попадает в некоторый объем Ω_j , $j \geq 0$ и остается там для всех $t \geq t_0$. Это в свою очередь влечет выполнение неравенства $0 \leq |h(\mathbf{z})| \leq h(\mathbf{z}_0)$. Тогда, в соответствии с (2.81) траектория $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет неравенству:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} \leq \beta(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}, t - t_0) + c\|h(\mathbf{z}(t))\|_{\infty, [t_0, t]} \leq \beta(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}, t - t_0) + c|h(\mathbf{z}_0)|. \quad (\text{П2.27})$$

Принимая во внимание, что $\beta(\cdot, \cdot) \in \mathcal{KL}$, можно заключить, что (П2.27) влечет выполнение предельного соотношения

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} = c|h(\mathbf{z}_0)|. \quad (\text{П2.28})$$

Таким образом, для первой альтернативы доказательство теоремы завершено.

Во втором случае состояние $\mathbf{x}(t) \oplus \mathbf{z}(t)$ не принадлежит области Ω_j для всех $t \geq t_0$ и конечного j . В силу того, что $h(\mathbf{z}(t))$ монотонна и невозрастающая по t , это влечет существование упорядоченной последовательности моментов времени t_j :

$$t_0 > t_1 > t_2 \cdots t_j > t_{j+1} \cdots \quad (\text{П2.29})$$

таких, что

$$h(\mathbf{z}(t_i)) = \sigma_i h(\mathbf{z}_0). \quad (\text{П2.30})$$

Следовательно, теорема будет доказана, если мы покажем, что последовательность $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ расходится. Другими словами, граница $\sigma_{\infty} h(\mathbf{z}_0) = 0$ не достигается за конечное время.

С этой целью оценим верхние границы следующих разностей

$$T_i = t_{i+1} - t_i.$$

Принимая во внимание неравенство (2.83) и тот факт что $\gamma_0(\cdot) \in \mathcal{K}_e$, получим

$$h(\mathbf{z}(t_i)) - h(\mathbf{z}(t_{i+1})) \leq T_i \max_{\tau \in [t_i, t_{i+1}]} \gamma_0(\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}}) \leq T_i \gamma_0(\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}_{\infty}, [t_i, t_{i+1}]}). \quad (\text{П2.31})$$

В силу определения t_i в (П2.30) и того, что последовательность \mathcal{S} строго убывает, имеем

$$h(\mathbf{z}(t_i)) - h(\mathbf{z}(t_{i+1})) = (\sigma_i - \sigma_{i+1})h(\mathbf{z}_0) > 0.$$

Тогда свойство $h(\mathbf{z}_0) > 0$ влечет $\gamma_0(\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}_{\infty}, [t_i, t_{i+1}]}) > 0$ и, следовательно, неравенство (П2.31) обеспечивает оценки величин T_i :

$$T_i \geq \frac{h(\mathbf{z}(t_i)) - h(\mathbf{z}(t_{i+1}))}{\gamma_0(\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}_{\infty}, [t_i, t_{i+1}]})} = \frac{h(\mathbf{z}_0)(\sigma_i - \sigma_{i+1})}{\gamma_0(\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}_{\infty}, [t_i, t_{i+1}]})}. \quad (\text{П2.32})$$

Учитывая, что $h(\mathbf{z}(t))$ не возрастает на интервалах $[t_i, t_{i+1}]$ и используя (2.81), можно ограничить нормы $\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}_{\infty}, [t_i, t_{i+1}]}$ следующим образом:

$$\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}_{\infty}, [t_i, t_{i+1}]} \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathcal{A}}, 0) + c\|h(\mathbf{z}(\tau))\|_{\infty, [t_i, t_{i+1}]} \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathcal{A}}, 0) + c \cdot \sigma_i h(\mathbf{z}_0). \quad (\text{П2.33})$$

Тогда, комбинируя (П2.32) и (П2.33), получим:

$$T_i \geq \frac{h(\mathbf{z}_0)(\sigma_i - \sigma_{i+1})}{\gamma_0(\sigma_i(\sigma_i^{-1}\beta(\|\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathcal{A}}, 0) + c \cdot h(\mathbf{z}_0)))}.$$

Следовательно, с учетом свойства (2.84) функции γ_0 можно получить оценку:

$$T_i \geq \frac{h(\mathbf{z}_0)(\sigma_i - \sigma_{i+1})}{\gamma_{0,1}(\sigma_i)} \frac{1}{\gamma_{0,2}(\sigma_i^{-1}\beta(\|\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathcal{A}}, 0) + c \cdot h(\mathbf{z}_0))}. \quad (\text{П2.34})$$

Принимая во внимание условие (2.100), для доказательства теоремы достаточно потребовать выполнение неравенств

$$T_i \geq \tau_i \quad (\text{П2.35})$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Доказательство (П2.35) проведем по индукции по индексу $i = 0, 1, \dots, \infty$. С этой целью проверим базу индукции при $i = 0$ и затем покажем, что для всех $i > 0$ выполняется импликация

$$T_i \geq \tau_i \Rightarrow T_{i+1} \geq \tau_{i+1}. \quad (\text{П2.36})$$

Докажем, что (П2.35) выполняется для $i = 0$. С этой целью рассмотрим выражение $(\sigma_i - \sigma_{i+1})/\gamma_{0,1}(\sigma_i)$. Как вытекает из условий теоремы и (2.98), справедливы неравенства

$$\frac{\sigma_i - \sigma_{i+1}}{\gamma_{0,1}(\sigma_i)} \geq \tau_i \Delta_0 \quad \forall i \geq 0. \quad (\text{П2.37})$$

В частности,

$$\frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\gamma_{0,1}(\sigma_0)} \geq \tau_0 \Delta_0.$$

Следовательно, неравенство (П2.34) влечет

$$T_0 \geq \tau_0 \Delta_0 \frac{h(\mathbf{z}_0)}{\gamma_{0,2}(\sigma_0^{-1}\beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}}, 0) + c \cdot h(\mathbf{z}_0))}. \quad (\text{П2.38})$$

Тогда, учитывая предположение 2.6 и (2.91), (2.92), можно получить следующую оценку:

$$\sigma_0^{-1}\beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}}, 0) \leq \sigma_0^{-1}\phi_0(\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}}) + \sigma_0^{-1}v_0(c \cdot |h(\mathbf{z}_0)|\sigma_0) \leq B_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}) + B_2(|h(\mathbf{z}_0)|, c)$$

По условиям теоремы начальные условия \mathbf{x}_0 и \mathbf{z}_0 удовлетворяют неравенству (2.99). Следовательно,

$$\gamma_{0,2}(\sigma_0^{-1}\beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}}, 0) + c \cdot h(\mathbf{z}_0)) \leq \gamma_{0,2}(B_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}) + B_2(|h(\mathbf{z}_0)|, c) + c \cdot h(\mathbf{z}_0)) \leq \Delta_0 \cdot h(\mathbf{z}_0). \quad (\text{П2.39})$$

Комбинируя (П2.38) и (П2.39), получим неравенство

$$T_0 \geq \tau_0 \Delta_0 \frac{h(\mathbf{z}_0)}{\gamma_{0,2}(\sigma_0^{-1}\beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}}, 0) + c \cdot h(\mathbf{z}_0))} \geq \tau_0 \frac{\Delta_0 h(\mathbf{z}_0)}{\Delta_0 h(\mathbf{z}_0)} = \tau_0,$$

которое доказывает базис индукции.

Предположим, что неравенство (П2.35) выполняется для всех $i = 0, \dots, n$, $n \geq 0$. Покажем, что оно влечет импликацию (П2.36) для $i = n$. Рассмотрим функцию $\beta(\|\mathbf{x}(t_{n+1})\|_{\mathcal{A}}, 0)$:

$$\begin{aligned} \beta(\|\mathbf{x}(t_{n+1})\|_{\mathcal{A}}, 0) &\leq \beta(\beta(\|\mathbf{x}(t_n)\|_{\mathcal{A}}, T_n) + c\|h(\mathbf{z}(\tau))\|_{\infty, [t_n, t_{n+1}]}, 0) \\ &\leq \beta(\beta(\|\mathbf{x}(t_n)\|_{\mathcal{A}}, T_n) + c \cdot \sigma_n \cdot h(\mathbf{z}_0), 0). \end{aligned}$$

Согласно предположению 2.5 (а точнее, неравенству (2.90)) и выражениям (2.91)–(2.93) справедлива следующая оценка

$$\beta(\|\mathbf{x}(t_{n+1})\|_{\mathcal{A}}, 0) \leq \beta(\xi_n \cdot \beta(\|\mathbf{x}(t_n)\|_{\mathcal{A}}, 0) + c \cdot \sigma_n \cdot h(\mathbf{z}_0), 0) \leq \phi_1(\|\mathbf{x}(t_n)\|_{\mathcal{A}}) + v_1(c \cdot |h(\mathbf{z}_0)| \cdot \sigma_n). \quad (\text{П2.40})$$

Отметим, что согласно индуктивному предположению ($T_i \geq \tau_i$) для всех $i = 0, \dots, n$, имеет место неравенство

$$\|\mathbf{x}(t_{i+1})\|_{\mathcal{A}} \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathcal{A}}, T_i) + c \cdot \sigma_i \cdot h(\mathbf{z}_0) \leq \xi_i \beta(\|\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathcal{A}}, 0) + c \cdot \sigma_i \cdot h(\mathbf{z}_0). \quad (\text{П2.41})$$

Следовательно, (П2.40), (П2.41), (2.91)–(2.93) влекут что

$$\begin{aligned} \beta(\|\mathbf{x}(t_{n+1})\|_{\mathcal{A}}, 0) &\leq \phi_1(\xi_n \beta(\|\mathbf{x}(t_n)\|_{\mathcal{A}}, 0) + c \cdot \sigma_n \cdot h(\mathbf{z}_0)) + v_1(c \cdot |h(\mathbf{z}_0)| \cdot \sigma_n) \\ &\leq \phi_2(\|\mathbf{x}(t_n)\|_{\mathcal{A}}) + v_2(c \cdot |h(\mathbf{z}_0)| \cdot \sigma_n) + v_1(c \cdot |h(\mathbf{z}_0)| \cdot \sigma_n) \\ &\leq \phi_{n+1}(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}) + \sum_{i=1}^{n+1} v_i(c \cdot |h(\mathbf{z}_0)| \sigma_{n+1-i}) \leq \phi_{n+1}(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}) + \sum_{i=0}^{n+1} v_i(c \cdot |h(\mathbf{z}_0)| \sigma_{n+1-i}). \end{aligned} \quad (\text{П2.42})$$

По предположению 2.6 сумма

$$\sigma_{n+1}^{-1} \left(\phi_{n+1}(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}) + \sum_{i=0}^{n+1} v_i(c \cdot |h(\mathbf{z}_0)|\sigma_{n+1-i}) \right)$$

ограничена сверху суммой

$$B_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}) + B_2(|h(\mathbf{z}_0)|, c).$$

Тогда в силу монотонности функции $\gamma_{0,2}$ и с учетом оценок (П2.42), (2.99), получим

$$\gamma_{0,2}(\sigma_{n+1}^{-1}\beta(\|\mathbf{x}(t_{n+1})\|_{\mathcal{A}}, 0) + c \cdot h(\mathbf{z}_0)) \leq \gamma_{0,2}(B_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}) + B_2(|h(\mathbf{z}_0)|, c) + c \cdot h(\mathbf{z}_0)) \leq \Delta_0.$$

Более того, справедливость (П2.34), (П2.37) гарантирует выполнение неравенства:

$$T_{n+1} \geq \frac{(\sigma_{n+1} - \sigma_n)}{\gamma_{0,1}(\sigma_{n+1})} \frac{h(\mathbf{z}_0)}{\gamma_{0,2}(\sigma_{n+1}^{-1}\beta(\|\mathbf{x}(t_{n+1})\|_{\mathcal{A}}, 0) + c \cdot h(\mathbf{z}_0))} \geq \tau_{n+1} \frac{\Delta_0 h(\mathbf{z}_0)}{\Delta_0 h(\mathbf{z}_0)} = \tau_{n+1}.$$

Таким образом, импликация (П2.36) доказана. Это, в свою очередь, влечет $h(\mathbf{z}(t)) \in [0, h(\mathbf{z}_0)]$ для всех $t \geq t_0$ и, следовательно, выполняется (П2.28). *Теорема доказана.*

8.7. Доказательство Леммы 2.2

Как вытекает из условий леммы, функция $h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0))$ ограничена. Для определенности положим, что она принадлежит интервалу $[a, h(\mathbf{z}_0)]$, $a \leq h(\mathbf{z}_0)$. Тогда, согласно свойству (2.83), выполняется неравенство

$$0 \leq \int_{t_0}^{\infty} \gamma_1(\|\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{A}}) d\tau \leq h(\mathbf{z}_0) - h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)) \leq \infty. \quad (\text{П2.43})$$

С другой стороны, в силу ограниченности и монотонности функции $h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0))$ по t (каждая подпоследовательность которой монотонна) в соответствии с теоремой Больцано-Вейерштрасса можно сделать вывод том, что $h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0))$ имеет точку сгущения в $[a, h(\mathbf{z}_0)]$. В частности, существует $\bar{h} \in [a, h(\mathbf{z}_0)]$ такое что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)) = \bar{h}. \quad (\text{П2.44})$$

Согласно условиям леммы для системы \mathcal{S}_a определена статическая характеристика. Это означает, что существует константа $\bar{x} \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{A}} = \bar{x}. \quad (\text{П2.45})$$

Положим, что $\bar{x} > 0$. Тогда в соответствии с (П2.45) существует момент времени $t_1 < \infty$ и константа $0 < \delta < \bar{x}$ для которых справедливо утверждение

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} \geq \delta \quad \forall t \geq t_1.$$

Используя (П2.43) и замечая, что $\gamma_1 \in \mathcal{K}_e$, получим

$$\infty > h(\mathbf{z}_0) - h(\mathbf{z}_0) \geq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t_1}^T \gamma_1(\delta) d\tau = \infty.$$

Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, $\bar{x} = 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} = 0.$$

Принимая во внимание свойства статической характеристики в определении 2.6.2, это возможно в том и только том случае, если $\bar{h} \in \chi^{-1}(0)$. *Лемма доказана.*

8.8. Доказательство Леммы 2.3

Аналогично доказательству леммы 2.2 заметим, что выполняется неравенство (П2.43). Это, в свою очередь, влечет что для любой положительной константы T существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} \gamma_1(\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}}) d\tau = 0.$$

Более того, $h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)) \in [0, h(\mathbf{z}_0)]$ для всех $t \geq t_0$. Следовательно, существует момент времени t' такой, что

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} \leq c \cdot h(\mathbf{z}_0) + \varepsilon, \quad \forall t \geq t',$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Тогда, учитывая (2.106) получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} \gamma_1(\|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}}) d\tau \geq \bar{\gamma} \int_t^{t+T} \|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}} d\tau = 0. \quad (\text{П2.46})$$

В силу неравенства (П2.44), с учетом того, что для системы (2.81) определена статическая характеристика в среднем и также учитывая, что $\chi_T(\cdot)$ не имеет нулей в правой полуплоскости, выполнение предельного соотношения (П2.46) возможно лишь при $\bar{h} = 0$. Тогда принимая во внимание выражение (2.81), получим $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}} = 0$. *Лемма доказана.*

8.9. Доказательство Следствия 2.2

Как вытекает из теоремы 2.7, состояние $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \oplus \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ асимптотически стремится к множеству Ω_a , заданному выражением (2.97). Следовательно, $h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0))$ ограничена. Тогда в соответствии с (2.83) выполняется оценка (П2.43). Из этого, с учетом свойства (2.109) следует, что значения $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ ограничены. Другими словами,

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \oplus \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0) \in \Omega' \quad \forall t \geq t_0,$$

где Ω' ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, для каждой точки $\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{z}_0 \in \Omega_\gamma$ существует непустое ω -предельное множество $\omega(\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{z}_0) \subseteq \Omega'$.

Согласно условию С3 и лемме 2.2 имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)) \in \chi^{-1}(0).$$

Тогда, в силу непрерывности $h(\cdot) \in C^0$ получим

$$\lim_{t_i \rightarrow \infty} h(\mathbf{z}(t_i, \mathbf{z}_0)) = h(\lim_{t_i \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t_i, \mathbf{z}_0)) = h(\omega_z(\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{z}_0)) \in \chi^{-1}(0).$$

Другими словами:

$$\omega_z(\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{z}_0) \subseteq \Omega_h = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \mid h(\mathbf{z}) \in \chi^{-1}(0)\}.$$

Более того,

$$\omega_x(\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{z}_0) \subseteq \Omega_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = 0\}.$$

По условию С1 поток $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \oplus \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ генерируется автономной системой дифференциальных уравнений с локально липшицевой правой частью. Следовательно, согласно лемме 4.1 из [207], стр. 127, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \oplus \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0), \omega(\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{z}_0)) = 0.$$

Замечая, что

$$\text{dist}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \oplus \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0), \omega(\mathbf{x}_0 \oplus \mathbf{z}_0)) \geq \text{dist}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \Omega_a) + \text{dist}(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0), \Omega_h),$$

получим искомые предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \Omega_a) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0), \Omega_h) = 0.$$

Следствие доказано.

8.10. Доказательство Следствия 2.3

Согласно теореме 2.7 следствие будет доказано при условии выполнения предположений 2.4 – 2.6 и условий (2.98), (2.99), (2.100). Для выполнения предположения 2.4 достаточно выбрать последовательность \mathcal{S} в следующем виде:

$$\mathcal{S} = \{\sigma_i\}_{i=0}^\infty, \quad \sigma_i = \frac{1}{\kappa^i}, \quad \kappa \in \mathbb{R}_+, \quad \kappa > 1. \quad (\text{П2.47})$$

Последовательности \mathcal{T} и Ξ выберем исходя из условий:

$$\mathcal{T} = \{\tau_i\}_{i=0}^\infty, \quad \tau_i = \tau^*, \quad (\text{П2.48})$$

$$\Xi = \{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}, \quad \xi_i = \xi^*, \quad (\text{П2.49})$$

где τ^* , ξ^* некоторые положительные константы. Отметим, что выбор последовательности \mathcal{T} согласно (П2.48) автоматически удовлетворяет условию (2.100) теоремы 2.7. С другой стороны, принимая во внимание (2.114) и монотонное убывание функции $\beta_t(t)$ по t , этот выбор ограничивает константу ξ^* следующим образом:

$$\beta_t(\tau^*) \leq \xi^* < \beta_t(0). \quad (\text{П2.50})$$

В силу существования β_t^{-1} (см., (2.115)), такой выбор всегда возможен. Более того, условие (П2.50) будет выполнено для следующих значений τ^* :

$$\tau^* \geq \beta_t^{-1}(\xi^*). \quad (\text{П2.51})$$

Найдем ограничения на τ^* и ξ^* такие, что предположение 2.6 также удовлетворяется. Для этого рассмотрим систему функций Φ , Υ , заданных уравнениями (2.91), (2.92). Отметим, что функция $\beta(s, 0)$ в (2.91), (2.92) линейна для системы (2.114)

$$\beta(s, 0) = s \cdot \beta_t(0).$$

Поэтому функции $\rho_{\phi,j}(\cdot)$, $\rho_{v,j}$ являются единичными отображениями. Следовательно, Φ , Υ могут быть выбраны в виде

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \phi_j(s) &= \phi_{j-1} \cdot \xi^* \cdot \beta(s, 0) = \xi^* \cdot \beta_t(0) \cdot \phi_{j-1}(s), \quad j = 1, \dots, i; \\ \phi_0(s) &= \beta_t(0) \cdot s; \end{aligned} \quad (\text{П2.52})$$

$$\begin{aligned} \Upsilon : \quad v_j(s) &= \phi_{j-1}(s), \quad j = 1, \dots, i; \\ v_0(s) &= \beta_t(0) \cdot s. \end{aligned} \quad (\text{П2.53})$$

Учитывая (П2.47), (П2.52), (П2.53) переформулируем требования (2.94), (2.95) в предположении 2.6. Эти условия, очевидно, эквивалентны ограниченности следующих функций:

$$\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}} \cdot \beta_t(0) \cdot \kappa^n (\xi^* \cdot \beta_t(0))^n; \quad (\text{П2.54})$$

$$\begin{aligned} &\kappa^n \left(\beta_t(0) \frac{c|h(\mathbf{z}_0)|}{\kappa^n} + \frac{\beta_t(0)c|h(\mathbf{z}_0)|}{\kappa^{n-1}} + \beta_t(0) \sum_{i=2}^n c|h(\mathbf{z}_0)| \frac{1}{\kappa^{n-i}} (\xi^* \cdot \beta_t(0))^{i-1} \right) \\ &= \beta_t(0)c|h(\mathbf{z}_0)| + \beta_t(0)c|h(\mathbf{z}_0)|\kappa \left(1 + \sum_{i=2}^n \kappa^{i-1} (\xi^* \cdot \beta_t(0))^{i-1} \right). \end{aligned} \quad (\text{П2.55})$$

Ограниченность функций $B_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}})$ и $B_2(|h(\mathbf{z}_0)|, c)$ обеспечивается, если ξ^* удовлетворяет неравенству

$$\xi^* \leq \frac{d}{\kappa \cdot \beta_t(0)} \quad (\text{П2.56})$$

для некоторого $0 \leq d < 1$. Отметим, что условия $\kappa > 1$, $\beta_t(0) \geq 1$ гарантируют, что $\xi^* \leq 1$ и следовательно константа τ^* , удовлетворяющая (П2.51) всегда определена. Тогда в соответствии с (П2.54), (П2.55), функции $B_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}})$ и $B_2(|h(\mathbf{z}_0)|, c)$, удовлетворяющие предположению 2.6, могут быть выбраны в виде

$$B_1(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}) = \beta_t(0) \|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}}; \quad B_2(|h(\mathbf{z}_0)|, c) = \beta_t(0) \cdot c \cdot |h(\mathbf{z}_0)| \left(1 + \frac{\kappa}{1-d}\right). \quad (\text{П2.57})$$

Для применения теоремы 2.7 необходимо проверить лишь условия (2.98) и (2.99). Для этого проверим возможность факторизации функции $\gamma_0(\cdot)$ в виде (2.84). По условию (2.116) следствия функция $\gamma_0(\cdot)$ Липшицева:

$$|\gamma_0(s)| \leq D_{\gamma,0} \cdot |s|.$$

Это позволяет выбрать функции $\gamma_{0,1}(\cdot)$ и $\gamma_{0,2}(\cdot)$ в виде

$$\gamma_{0,1}(s) = s, \quad \gamma_{0,2}(s) = D_{\gamma,0} \cdot s. \quad (\text{П2.58})$$

Выполнение условия (2.98), следовательно, эквивалентно разрешимости неравенства:

$$\left(\frac{1}{\kappa^i} - \frac{1}{\kappa^{i+1}}\right) \frac{\kappa^i}{\tau^*} \geq \Delta_0. \quad (\text{П2.59})$$

Согласно (П2.51), (П2.56) существование решения уравнения

$$\Delta_0 = \left(\beta_t^{-1} \left(\frac{d}{\kappa \cdot \beta_t(0)}\right)\right)^{-1} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \quad (\text{П2.60})$$

влечет существование числа $\Delta_0 > 0$, удовлетворяющего (П2.59) и, следовательно, условию (2.98) теоремы 2.7. В силу того, что $d < 1$, $\kappa > 1$ и $\beta_t(0) \geq 1$ положительные решения уравнения (П2.60) всегда определены. Следовательно, для завершения доказательства достаточно, чтобы множество всех $\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0$, удовлетворяющих неравенству

$$D_{\gamma,0} \leq \left(\beta_t^{-1} \left(\frac{d}{\kappa \cdot \beta_t(0)}\right)\right)^{-1} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{h(\mathbf{z}_0)}{\beta_t(0) \|\mathbf{x}_0\|_{\mathcal{A}} + \beta_t(0) \cdot c \cdot |h(\mathbf{z}_0)| \left(1 + \frac{\kappa}{1-d}\right) + c|h(\mathbf{z}_0)|}$$

было не пусто. *Следствие доказано.*

9. Приложение 3

9.1. Доказательство Теоремы 3.1

Покажем вначале, что выполняется свойство 1). Рассмотрим решения системы (3.1), (3.10), (3.29), (3.31), проходящие через точку $\mathbf{x}(t_0)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_I(t_0)$ при $t \in [t_0, T^*]^1$. Запишем формально производную по времени от функции $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, t)$: $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}, t) = \Gamma(\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_P + \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_I) = \Gamma(\dot{\psi}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) + \psi\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, t) - \dot{\Psi}(\mathbf{x}, t) + \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_I)$. Отметим, что:

$$\begin{aligned} \psi\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, t) - \dot{\Psi}(\mathbf{x}, t) + \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_I &= \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_1} \dot{\mathbf{x}}_1 + \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2} \dot{\mathbf{x}}_2 + \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \\ &\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_1} \dot{\mathbf{x}}_1 - \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2} \dot{\mathbf{x}}_2 - \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_I. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.1})$$

Согласно предположению 3.5, $\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2} = \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2} + \mathcal{B}(\mathbf{x}, t)$. Принимая во внимание (ПЗ.1), можно получить

$$\begin{aligned} \psi\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, t) - \dot{\Psi}(\mathbf{x}, t) + \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_I &= \left(\psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_1} \right) \dot{\mathbf{x}}_1 + \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \\ &\frac{\Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \mathcal{B}(\mathbf{x}, t)(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u) + \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_I. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.2})$$

Отметим, что в силу предложенных обозначений мы можем переписать слагаемое

$$\left(\psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_1} \right) \dot{\mathbf{x}}_1$$

в следующей форме:

$$(\psi(\mathbf{x}, t)L_{\mathbf{f}_1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) - L_{\mathbf{f}_1}\Psi(\mathbf{x}, t)) + (\psi(\mathbf{x}, t)L_{\mathbf{g}_1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) - L_{\mathbf{g}_1}\Psi(\mathbf{x}, t))u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t).$$

Из (3.29) и (ПЗ.2) следует, что $\psi\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, t) - \dot{\Psi}(\mathbf{x}, t) + \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_I = \varphi(\psi)\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{B}(\mathbf{x}, t)(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))$. Поэтому производная $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}, t)$ может быть записана в виде:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \Gamma((\dot{\psi} + \varphi(\psi))\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{B}(\mathbf{x}, t)(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))). \quad (\text{ПЗ.3})$$

Рассмотрим следующую положительно-определенную функцию:

$$V_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}, t) = \frac{1}{2} \|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \frac{D}{4D_1^2} \int_t^\infty \varepsilon^2(\tau) d\tau. \quad (\text{ПЗ.4})$$

¹Согласно формулировке теоремы, $[t_0, T^*]$ – интервал существования решения.

Согласно (ПЗ.3) производная по времени может быть получена как:

$$\dot{V}_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}, \theta, t) = (\varphi(\psi) + \dot{\psi})(\hat{\theta} - \theta)^T \alpha(\mathbf{x}, t) + (\hat{\theta} - \theta)^T \mathcal{B}(\mathbf{x}, t)(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \hat{\theta}) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \theta)) - \frac{D}{4D_1^2} \varepsilon^2(t). \quad (\text{ПЗ.5})$$

Пусть $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t) \neq 0$. Тогда рассмотрим разность $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \hat{\theta}) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \theta)$. Применяя лемму Адамара, перепишем эту разность следующим образом:

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \hat{\theta}) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \theta) = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}(\lambda))}{\partial \mathbf{s}} d\lambda (\hat{\theta} - \theta), \quad \mathbf{s}(\lambda) = \hat{\theta}\lambda + \theta(1 - \lambda).$$

Тогда согласно предположению 3.5 функция $(\hat{\theta} - \theta)^T \mathcal{B}(\mathbf{x}, t)(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \hat{\theta}) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \theta))$ отрицательно полуопределена. Следовательно, используя предположения 3.3, 3.4 и равенство (3.10), можно получить следующую оценку производной $\dot{V}_{\hat{\theta}}$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}, \theta, t) &\leq -(f(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \theta, t) + \varepsilon(t))(\hat{\theta} - \theta)^T \alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{D}{4D_1^2} \varepsilon^2(t) \\ &\leq -\frac{1}{D}(f(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \theta, t))^2 + \frac{1}{D_1} |\varepsilon(t)| |f(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \theta, t)| - \frac{D}{4D_1^2} \varepsilon^2(t) \quad (\text{ПЗ.6}) \\ &\leq -\frac{1}{D} \left(|f(\mathbf{x}, \hat{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \theta, t)| - \frac{D}{2D_1} \varepsilon(t) \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Из (ПЗ.6) и (ПЗ.4) непосредственно вытекает, что

$$\|\hat{\theta}(t) - \theta\|_{\Gamma^{-1}}^2 \leq \|\hat{\theta}(t_0) - \theta\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \frac{D}{2D_1^2} \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, \infty]}^2. \quad (\text{ПЗ.7})$$

В частности, для $t \in [t_0, T^*]$ из (ПЗ.4) можно получить, что $\|\hat{\theta}(t) - \theta\|_{\Gamma^{-1}}^2 \leq \|\hat{\theta}(t_0) - \theta\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \frac{D}{2D_1^2} \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, T^*]}^2$. Поэтому, $\hat{\theta}(t) \in L_{\infty}^2[t_0, T^*]$. Кроме того, $|f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t), t) - f(\mathbf{x}(t), \theta, t)| - \frac{D}{2D_1} \varepsilon(t) \in L_2^1[t_0, T^*]$. В частности,

$$\left\| |f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t), t) - f(\mathbf{x}(t), \theta, t)| - \frac{D}{2D_1} \varepsilon(t) \right\|_{2, [t_0, T^*]}^2 \leq \frac{D}{2} \|\theta - \hat{\theta}(t_0)\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \frac{D^2}{4D_1^2} \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, T^*]}^2. \quad (\text{ПЗ.8})$$

Следовательно, $f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t), t) - f(\mathbf{x}(t), \theta, t) \in L_2^1[t_0, T^*]$ как сумма двух функций $L_2^1[t_0, T^*]$. Чтобы оценить верхнюю границу нормы $\|f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t), t) - f(\mathbf{x}(t), \theta, t)\|_{2, [t_0, T^*]}$ из (ПЗ.8), воспользуемся неравенством Минковского:

$$\left\| |f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t), t) - f(\mathbf{x}(t), \theta, t)| - \frac{D}{2D_1} \varepsilon(t) \right\|_{2, [t_0, T^*]} \leq \left(\frac{D}{2} \|\theta - \hat{\theta}(t_0)\|_{\Gamma^{-1}}^2 \right)^{0.5} + \frac{D}{2D_1} \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, T^*]},$$

а затем применим неравенство треугольника к функциям из $L_2^1[t_0, T^*]$:

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t), t) - f(\mathbf{x}(t), \theta, t)\|_{2, [t_0, T^*]} &\leq \left\| |f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t), t) - f(\mathbf{x}(t), \theta, t)| - \frac{D}{2D_1} \varepsilon(t) \right\|_{2, [t_0, T^*]} + \\ &\quad \frac{D}{2D_1} \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, T^*]} \leq \left(\frac{D}{2} \|\theta - \hat{\theta}(t_0)\|_{\Gamma^{-1}}^2 \right)^{0.5} + \frac{D}{D_1} \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, T^*]}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.9})$$

Таким образом, свойство 1) доказано.

Докажем теперь свойство 2). Для этого прежде всего проверим, что решения замкнутой системы определены для любых $t \in \mathbb{R}_+$, т. е. не достигают бесконечности за конечное время. Докажем это методом от противного. Предположим, что существует момент времени t_s такой, что $\|\mathbf{x}(t_s)\| = \infty$. Однако из свойства 1) следует, что $f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t) - f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) \in L_2^1[t_0, t_s]$. Кроме того, согласно (ПЗ.9) норма

$$\|f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t) - f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t)\|_{2, [t_0, t_s]}$$

может быть ограничена сверху непрерывной функцией $\boldsymbol{\theta}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0)$, Γ , и $\|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, \infty]}$. Обозначим эту границу символом D_f . Отметим, что D_f не зависит от t_s . Рассмотрим систему (3.10) при $t \in [t_0, t_s]$: $\dot{\psi} = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) - \varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t) + \varepsilon(t)$. Учитывая $f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t), \varepsilon(t) \in L_2^1[t_0, t_s]$ и принимая во внимание предположение 3.2, автоматически получаем $\psi(\mathbf{x}(t), t) \in L_\infty^1[t_0, t_s]$. В частности, используя неравенство треугольника и тот факт, что функция $\gamma_{\infty, 2}(\psi(\mathbf{x}_0, t_0), \boldsymbol{\omega}, M)$ в предположении 3.2 не возрастает на M , можно оценить норму $\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, t_s]}$ следующим образом:

$$\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, t_s]} \leq \gamma_{\infty, 2}(\psi(\mathbf{x}_0, t_0), \boldsymbol{\omega}, D_f + \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, \infty]}^2). \quad (\text{ПЗ.10})$$

Согласно предположению 3.1 имеет место неравенство:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, t_s]} \leq \tilde{\gamma}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta}, \gamma_{\infty, 2}(\psi(\mathbf{x}_0, t_0), \boldsymbol{\omega}, D_f + \|\varepsilon(t)\|_{2, [t_0, \infty]}^2)). \quad (\text{ПЗ.11})$$

Учитывая, что суперпозиция локально ограниченных функций локально ограничена, можно сделать вывод о том, что $\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty, [t_0, t_s]}$ ограничена. Это, однако, противоречит предыдущему утверждению, что $\|\mathbf{x}(t_s)\| = \infty$. Принимая во внимание неравенство (ПЗ.7), получим, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}(t), t)$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}_I(t)$ ограничены для $t \in \mathbb{R}_+$. Более того, согласно (ПЗ.10), (ПЗ.11), (ПЗ.7) эти границы – (локально ограниченные) функции от начальных условий и параметров. Поэтому, $\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, \infty]$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}(t), t) \in L_\infty^d[t_0, \infty]$. Неравенство (3.33) следует непосредственно из (ПЗ.9), (3.12) и неравенства треугольника. Свойство 2) доказано.

Покажем теперь, что выполняется свойство 3). В условиях теоремы предполагается, что для системы (3.11) определено передаточное отображение $L_2^1[t_0, \infty] \mapsto L_p^1[t_0, \infty]$, $p > 1$. Кроме того, было показано, что $f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t), \varepsilon(t) \in L_2[t_0, \infty]$. Следовательно, учитывая равенство (3.10), можно утверждать, что $\psi(\mathbf{x}(t), t) \in L_p^1[t_0, \infty]$, $p > 1$. С другой стороны, с учетом локальной ограниченности $f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$, $\varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t)$ по первым двум аргументам равномерно по t , и $\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, \infty]$, $\psi(\mathbf{x}(t), t) \in L_\infty^1[t_0, \infty]$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \in L_\infty^d[t_0, \infty]$, $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta$, сигнал $\varphi(\psi(\mathbf{x}(t), t), \boldsymbol{\omega}, t) + f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t)$ ограничен. Тогда $\varepsilon(t) \in L_\infty^1[t_0, \infty]$ означает, что $\dot{\psi}$ ограничена. В этом случае свойство 3) вытекает из леммы Барбалата.

Для доказательства свойства 4) рассмотрим производную по времени функции $f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) = L_{[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)]}f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \Gamma(\varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t) + \dot{\psi}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)}{\partial t}.$$

Принимая во внимание, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, функция $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ непрерывно дифференцируема по \mathbf{x} , $\boldsymbol{\theta}$; производная $\partial f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)/\partial t$ локально ограничена по \mathbf{x} , $\boldsymbol{\theta}$ равномерно по t ; функции $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$, $\partial \psi(\mathbf{x}, t)/\partial t$ локально ограничены по \mathbf{x} равномерно по t , тогда $d/dt(f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t))$ ограничено. Учитывая, что $f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t) \in L_2^1[t_0, \infty]$, применяя лемму Барбалата, получаем $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \tau) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \tau) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

9.2. Доказательство Следствия 3.1

Пусть $\varepsilon(t) = 0$. Тогда, выбрав функцию $V_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)}$ как в (ПЗ.4), используя (ПЗ.5) и учитывая предположение 3.3, получаем

$$\dot{V}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)} \leq -(f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)^T (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \leq -\frac{1}{D} (f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t))^2. \quad (\text{ПЗ.12})$$

Из равенства (ПЗ.12) и того, что $\varepsilon(t) = 0$ в (ПЗ.4), следует, что норма $\|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\|_{\Gamma^{-1}}^2$ не возрастает. Кроме того, из (ПЗ.12) следует

$$\|f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]} \leq \left(\frac{D}{2} \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0) - \boldsymbol{\theta}\|_{\Gamma^{-1}}^2 \right)^{0.5}. \quad (\text{ПЗ.13})$$

Это доказывает свойство 1). Принимая во внимание (ПЗ.13) и то, что выполняются предположения 3.1, 3.2, получаем, что $\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, \infty]$, $\psi(\mathbf{x}(t), t) \in L_\infty^1[t_0, \infty]$ и справедливы следующие оценки:

$$\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, \infty]} \leq \gamma_{\infty, 2} \left(\psi(\mathbf{x}_0, t_0), \boldsymbol{\omega}, \left(\frac{D}{2} \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0) - \boldsymbol{\theta}\|_{\Gamma^{-1}}^2 \right)^{0.5} \right). \quad (\text{ПЗ.14})$$

Таким образом, свойство 2) доказано. Свойства 3), 4) доказываются по аналогии с доказательством теоремы 3.1. Следовательно, свойство 5) доказано. *Следствие доказано.*

9.3. Доказательство Теоремы 3.2

По условиям теоремы система (3.41) полна. Кроме того, в силу дифференцируемости функций $\psi(\cdot)$, $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$ определена производная по времени $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}, t)$ по меньшей мере в момент времени t_0 . Причем, в силу предположения 3.7 эта производная удовлетворяет уравнению

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = (\dot{\psi} + \varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t)) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, t). \quad (\text{ПЗ.15})$$

Кроме того

$$\dot{\psi} = -\varphi(\psi, \omega, t) + f(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}'_2 \oplus \mathbf{h}_\xi, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) + \varepsilon_\xi(t), \quad (\text{П3.16})$$

где $\varepsilon_\xi(t) \in L_2[t_0, T]$ и $\|\varepsilon(t)\|_{2,[t_0, T]} \leq \Delta_\xi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_0)$. Очевидно, что свойство 1) вытекает непосредственно из доказательства теоремы 3.1. Остальные свойства будут следовать из доказательства теоремы 3.1 если будет показана полнота замкнутого соединения. Полнота в свою очередь следует из теоремы 2.6 раздела 2. *Теорема доказана.*

9.4. Доказательство Теоремы 3.3

Основная идея доказательства этой теоремы основана на использовании свойств пассивности синтезируемой системы, как предложено в работе [235]. Рассмотрим последовательное соединение систем (3.1) и (3.52), (3.53):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, t)u; \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= (\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t)^T \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t) + \beta)(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, t)u + \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (\text{П3.17})$$

Учитывая (П3.17) и равенство (по лемме Адамара)

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t)(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{h}_\epsilon(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, t) - \mathbf{h}_\epsilon(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t), \quad (\text{П3.18})$$

рассмотрим дифференциальные уравнения для разности $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_2$:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= -(\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t)^T \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t) + \beta)\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - \hat{\boldsymbol{\eta}}^T \Delta_f(\mathbf{x}, t) \cdot \text{sign}(\boldsymbol{\epsilon}); \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} &= \Gamma_\eta \Delta_f(\mathbf{x}, t) \cdot \text{sign}(\boldsymbol{\epsilon})^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \quad \Gamma_\eta > 0. \end{aligned} \quad (\text{П3.19})$$

Введем в рассмотрение следующую положительно определенную функцию

$$\dot{V}_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} + \|\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}\|_{\Gamma_\eta^{-1}}^2 \right), \quad (\text{П3.20})$$

где вектор $\boldsymbol{\eta}$ удовлетворяет неравенству (3.50). Ее производная по времени имеет вид:

$$\dot{V}_\epsilon = -\|\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t)\boldsymbol{\epsilon}\|^2 - \beta\|\boldsymbol{\epsilon}\|^2 - \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - \boldsymbol{\eta}^T \Delta_f(\mathbf{x}, t) \cdot \text{sign}(\boldsymbol{\epsilon})^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}. \quad (\text{П3.21})$$

Принимая во внимание (3.50) оценим производную \dot{V}_ϵ в (П3.21):

$$\dot{V}_\epsilon \leq -\|\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t)\boldsymbol{\epsilon}\|^2 - \beta\|\boldsymbol{\epsilon}\|^2 - \boldsymbol{\eta}^T \Delta_f(\mathbf{x}, t)(\|\boldsymbol{\epsilon}\|_{\mathcal{F}} - \|\boldsymbol{\epsilon}\|), \quad (\text{П3.22})$$

где

$$\|\boldsymbol{\epsilon}\|_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^p |\epsilon_i|$$

Принимая во внимание, что

$$\|\boldsymbol{\epsilon}\|_{\mathcal{F}} \geq \|\boldsymbol{\epsilon}\|,$$

а также оценку (ПЗ.22), получим:

$$\dot{V}_\epsilon \leq -\|\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t)\boldsymbol{\epsilon}\|^2 - \beta\|\boldsymbol{\epsilon}\|^2 \leq 0. \quad (\text{ПЗ.23})$$

Таким образом,

$$\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, T] \Rightarrow \boldsymbol{\xi}(t) \in L_\infty^p[t_0, T],$$

т. е. система (3.52), (3.53) полна. Более того, в силу (ПЗ.23) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{T^*} \|\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t)\boldsymbol{\epsilon}\|^2 &\leq V_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}(t_0), \boldsymbol{\eta}(t_0)) - V_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}(t), \boldsymbol{\eta}(t)) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|\boldsymbol{\xi}(t_0) - \mathbf{x}_2(t_0)\|^2 + \|\hat{\boldsymbol{\eta}}(t_0) - \boldsymbol{\eta}\|_{\Gamma_\eta^{-1}}^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.24})$$

Учитывая (ПЗ.18), (3.51) и (ПЗ.24), получим:

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}_1(t) \oplus \mathbf{h}_\xi(\boldsymbol{\xi}(t)), \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}_1(t) \oplus \mathbf{x}_2(t), \boldsymbol{\theta}, t)\|_{2, [t_0, T^*]} &\leq \\ \|\mathbf{h}_\epsilon(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t) - \mathbf{h}_\epsilon(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, t)\|_{2, [t_0, T^*]} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\|\boldsymbol{\xi}(t_0) - \mathbf{x}_2(t_0)\|^2 + \|\hat{\boldsymbol{\eta}}(t_0) - \boldsymbol{\eta}\|_{\Gamma_\eta^{-1}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где T^* – максимальное время существования решения $\mathbf{x}(t)$. Теорема доказана.

9.5. Доказательство Леммы 3.1

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_i(x_1, \dots, x_i, \boldsymbol{\theta}_i) &= f_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_i), \quad \psi_{\xi_i} = x_i - \xi_i, \\ \varepsilon_i(t) &= f_i(\mathbf{q}_{i-2}, \boldsymbol{\theta}_i) - f_i(\mathbf{q}_{i-1}, \boldsymbol{\theta}_i), \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.25})$$

$i = 2, \dots, n$. Для доказательства леммы нам потребуется один дополнительный технический результат, формулируемый следующим образом:

Л е м м а 9.1. Пусть даны система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, u)$ и следующая модель ошибки:

$$\dot{\psi} = -\varphi(\psi)(1 + F(t)) + z(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - z(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) + \varepsilon(t), \quad (\text{ПЗ.26})$$

где функция $\mathbf{f}(\cdot)$ локально ограничена; $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $F(t) \in \mathcal{C}^0$, функция $\psi(\mathbf{x}, t) : |\psi(\mathbf{x}, t)| \leq \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon(\delta)$, $\delta > 0$, $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$; $\varepsilon(t) \in \mathcal{C}^0$, $\varepsilon(t) \in L_2$, $\varphi(\psi) \in \mathcal{C}^0$, $\varphi(\psi)\psi > 0 \quad \forall \psi \neq 0$, $\lim_{\psi \rightarrow \infty} \int_0^\psi \varphi(\varsigma) d\varsigma = \infty$. Пусть, кроме того, предположения 3.3, 3.4 выполняются для функций $z(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$ при $F(t) \equiv 0$, $\varepsilon(t) \equiv 0$ и алгоритм адаптации удовлетворяет равенству

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \Gamma(\dot{\psi} + \varphi(\psi)(1 + F(t))\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)). \quad (\text{ПЗ.27})$$

Тогда

1) $\psi(\mathbf{x}, t) \in L_\infty$, $\varphi(\psi(\mathbf{x}, t)) \in L_2 \cap L_\infty$, $\sqrt{F(t)}\varphi(\psi(\mathbf{x}, t)) \in L_2$; $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in L_\infty$

2) $z(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - z(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) \in L_2$.

3) $F(t) \in L_\infty \Rightarrow \dot{\psi} \in L_2$.

Если при этом $\varepsilon(t) \in L_\infty$ и функция $z(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)$ локально ограничена по \mathbf{x} , $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, и равномерно ограничена по t , то:

4) $\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 9.1. Функция $\varepsilon(t) \in L_2$, тогда интеграл $\int_t^\infty \varepsilon^2(\tau) d\tau < \infty$. Рассмотрим следующую функцию:

$$V_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^*, t) = \frac{D_1}{4} \int_t^\infty \varepsilon^2(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*\|_{\Gamma^{-1}}^2.$$

Запишем ее производную по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = & -1/4 D_1 \varepsilon^2(t) + (\varphi(\psi)(1 + F(t)) + \dot{\psi})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*)^T \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) = -1/4 D_1 \varepsilon^2(t) + \\ & (z(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - z(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) + \varepsilon(t))(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*)^T \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Принимая во внимание предположения 3.3, 3.4, можем записать следующую оценку для производной $\dot{V}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \leq & -(D - D_1)(z(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - z(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t))^2 = \\ & -(D - D_1)(\varphi(\psi)(1 + F(t)) + \dot{\psi} - \varepsilon(t))^2. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.28})$$

Из (ПЗ.28) следует, что $z(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) - z(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^*, t) \in L_2$. Обозначим $\mu(t) = \varepsilon(t) + z(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), t) - z(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}^*(t), t)$. Учитывая это равенство, выражение (ПЗ.26) может быть переписано в виде

$$\dot{\psi} = -(1 + F(t))\varphi(\psi) + \mu(t),$$

где функция $\mu(t) \in L_2$ определена как сумма функций из L_2 . Рассмотрим следующую неотрицательную функцию $V_1(\psi, t)$:

$$V_1(\psi, t) = \int_0^\psi \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_t^\infty \mu^2(\tau) d\tau.$$

Ее производная по времени имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -\varphi(\psi)(1 + F(t))\varphi(\psi) + \varphi(\psi)\mu(t) - \\ & \frac{1}{4}\mu^2(t) - F(t)\varphi^2(\psi) - \left(\varphi(\psi) - \frac{1}{2}\mu(t)\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.29})$$

Выполнение неравенства (ПЗ.29) влечет, что $\psi(\mathbf{x}, t)$, $\varphi(\psi(\mathbf{x}(t), t)) \in L_\infty$. Кроме того,

$$\sqrt{F(t)}\varphi(\psi(\mathbf{x}(t), t)) \in L_2, \quad (\varphi(\psi(\mathbf{x}(t), t)) - \mu(t)/2) \in L_2.$$

Учитывая $\mu(t) \in L_2$, получаем, что $\varphi(\psi(\mathbf{x}(t), t)) \in L_2$. Следовательно, утверждения 1) и 2) леммы доказаны.

Пусть $F(t) \in L_\infty$. Тогда $(1 + F(t))\varphi(\psi(\mathbf{x}(t), t)) \in L_2$ и, учитывая (П3.26), следует $\dot{\psi} \in L_2$. Таким образом, утверждение 3) доказано. Для того, чтобы показать выполнение условия 4), достаточно отметить, что в силу неравенства (П3.28) функция $\hat{\theta}(t)$ ограничена. Согласно предположениям леммы, состояние \mathbf{x} ограничено, если ограничено $\psi(\mathbf{x}, t)$. Тогда $\dot{\psi}$ ограничено, если $\varepsilon(t)$ ограничено и функция $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \theta, t)$ локально ограничена. Следовательно, по лемме Барбалата $\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. *Лемма доказана.*

Принимая во внимание эти результаты, рассмотрим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= ((\bar{F}_i^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{z}) + \sum_{j=i}^k \bar{D}_{j+1}^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i)) + 1)(x_i - \xi_i) + f_i(\mathbf{q}_{i-1}, \hat{\theta}_{\xi_i}) + \beta_i(\mathbf{x}, t); \\ \dot{\theta}_{\xi_i} &= \gamma_{\xi_i}(\psi_{\xi_i}((\bar{F}_i^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{z}) + \sum_{j=i}^k \bar{D}_{j+1}^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i)) + 1) + \dot{\psi}_{\xi_i})\alpha_i(\mathbf{q}_{i-1}),\end{aligned}\quad (\text{П3.30})$$

где $i = 1, \dots, k$, $\gamma_{\xi_i} > 0$, и $\bar{F}_i(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{z}) = \bar{F}(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{z})$. С учетом уравнений (3.57) и (П3.30) запишем следующую модель по ошибке:

$$\dot{\psi}_{\xi_i} = -((\bar{F}_i^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{z}) + \sum_{j=i}^k \bar{D}_{j+1}^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i)) + 1)\psi_{\xi_i} - f_i(\mathbf{q}_{i-1}, \hat{\theta}_{\xi_i}) + f_i(\mathbf{x}, \theta_i). \quad (\text{П3.31})$$

Из леммы 9.1 следует, что траектории системы (П3.30) при $k = 1$ удовлетворяют условию $u(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \theta_0) - u(\mathbf{q}_1, \mathbf{z}, \theta_0) \in L_2$.

Положим теперь $k = 2$. Учитывая уравнения для производных $\dot{\psi}_{\xi_1}$ и $\dot{\theta}_{\xi_1}$ и используя лемму 9.1, можно получить, что

$$(\bar{F}_1^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{z}) + \bar{D}_2^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1))^{0.5}(x_1 - \xi_1) \in L_2, \quad x_1 - \xi_1 \in L_\infty, \quad \hat{\theta}_{\xi_1} \in L_\infty.$$

Следовательно,

$$\bar{F}_1(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{z})(x_1 - \xi_1) \in L_2, \quad \bar{D}_2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)(x_1 - \xi_1) \in L_2$$

при условии, что

$$\sqrt{\bar{F}_1^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{z}) + \bar{D}_2^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)} \geq |\bar{F}_1(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{z})|$$

и

$$\sqrt{\bar{F}_1^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{z}) + \bar{D}_2^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)} \geq |\bar{D}_2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)|.$$

Поэтому получаем, что

$$u(\mathbf{q}_0, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) - u(\mathbf{q}_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) \in L_2, \quad f_2(\mathbf{q}_0, \boldsymbol{\theta}_2) - f_2(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\theta}_2) \in L_2$$

при

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{q}_0, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) - u(\mathbf{q}_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0)| &\leq |\bar{F}_1(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{z})(x_1 - \xi_1)| \in L_2, \\ |f_2(\mathbf{q}_0, \boldsymbol{\theta}_2) - f_2(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\theta}_2)| &\leq |\bar{D}_2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)(x_1 - \xi_1)| \in L_2. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\varepsilon_2(t) = f_2(\mathbf{q}_0, \boldsymbol{\theta}_2) - f_2(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\theta}_2) = f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_2) - f_2(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\theta}_2).$$

Тогда, принимая во внимание (ПЗ.30), (ПЗ.31), запишем:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{\xi_2} &= -(\bar{F}_2^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{z}) + 1)\psi_{\xi_2} - f_2(\mathbf{q}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_2}) + f_2(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\theta}_2) + \varepsilon_2(t); \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\xi_2} &= \gamma_{\xi_2}(\psi_{\xi_2}(\bar{F}_2^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{z}) + 1) + \dot{\psi}_{\xi_2})\boldsymbol{\alpha}_2(\mathbf{q}_1), \quad \gamma_{\xi_2} > 0, \quad \varepsilon(t) \in L_2. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.32})$$

Тогда применяя лемму 9.1 к системе (ПЗ.31), (ПЗ.32) и учитывая неравенство

$$|u(\mathbf{q}_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) - u(\mathbf{q}_2, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0)| \leq |\bar{F}_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{z})(x_2 - \xi_2)|,$$

получим:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{q}_0, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) - u(\mathbf{q}_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) &\in L_2, \quad x_1 - \xi_1 \in L_\infty, \\ u(\mathbf{q}_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) - u(\mathbf{q}_2, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) &\in L_2, \quad x_2 - \xi_2 \in L_\infty, \\ f_2(\mathbf{q}_0, \boldsymbol{\theta}_2) - f_2(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\theta}_2) &\in L_2, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_1} \in L_\infty, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_2} \in L_\infty. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$u(\mathbf{q}_0, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) - u(\mathbf{q}_2, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) \in L_2$$

как сумма двух сигналов из L_2 .

Положим теперь, что $2 < k \leq n$. Из леммы 9.1 вытекает, что для модели по ошибке относительно функции ψ_{ξ_1} :

$$\dot{\psi}_{\xi_1} = -((\bar{F}_1^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^k \bar{D}_{j+1}^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)) + 1)\psi_{\xi_1} - f_1(\mathbf{q}_0, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_1}) + f_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$$

и соответствующей системы

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\xi_1} = \gamma_{\xi_1}(\psi_{\xi_1}((\bar{F}_1^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^k \bar{D}_{j+1}^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)) + 1) + \dot{\psi}_{\xi_1})\boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{q}_0),$$

имеет место следующее свойство

$$(\bar{F}_1^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^k \bar{D}_{j+1}^2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1))^{0.5}(x_1 - \xi_1) \in L_2.$$

Следовательно,

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) - u(\mathbf{q}_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) \in L_2, \quad f_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_i) - f_i(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\theta}_i) \in L_2, \quad i = 2, \dots, k.$$

Таким образом, модель по ошибке относительно функции ψ_{ξ_2} в (ПЗ.31) может быть записана в виде:

$$\dot{\psi}_{\xi_2} = -((\bar{F}_2^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{z}) + \sum_{j=3}^k \bar{D}_{j+1}^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)) + 1)\psi_{\xi_2} - f_2(\mathbf{q}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_2}) + f_2(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\theta}_2) + \varepsilon_2(t),$$

где $\varepsilon_2(t) \in L_2$.

Из леммы 9.1 следует, что в системе (ПЗ.30)

$$\begin{aligned} u(\mathbf{q}_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) - u(\mathbf{q}_2, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) &\in L_2, \\ f_i(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\theta}_i) - f_i(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\theta}_i) &\in L_2, \quad i = 3, \dots, k. \end{aligned}$$

Отметим также, что

$$f_3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_3) - f_3(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\theta}_3) \in L_2$$

как сумма двух функций из L_2 . Аналогично можно показать, что для любого $2 \leq i \leq n$ модель по ошибке системы (ПЗ.31) может быть представлена в виде:

$$\dot{\psi}_{\xi_i} = -((\bar{F}_i^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{z}) + \sum_{j=i+1}^k \bar{D}_{j+1}^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i)) + 1)\psi_{\xi_i} - f_i(\mathbf{q}_{i-1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i}) + f_i(\mathbf{q}_{i-1}, \boldsymbol{\theta}_i) + \varepsilon_i(t),$$

где $\varepsilon_i(t) \in L_2$. Поэтому, используя лемму 9.1, получаем

$$\begin{aligned} u(\mathbf{q}_{j-1}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) - u(\mathbf{q}_j, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) &\in L_2; \\ f_i(\mathbf{q}_{j-1}, \boldsymbol{\theta}_i) - f_i(\mathbf{q}_j, \boldsymbol{\theta}_i) &\in L_2, \quad x_i - \xi_i \in L_\infty; \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i} &\in L_\infty, \quad i = j, \dots, n. \end{aligned}$$

Это, в свою очередь, влечет выполнение соотношения $u(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) - u(\mathbf{q}_i, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_0) \in L_2$. Чтобы завершить доказательство, необходимо показать, что система (ПЗ.30) физически реализуема. В частности, уравнения

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\xi_i} = \gamma_{\xi_i}(\psi_{\xi_i}((\bar{F}_i^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{z}) + \sum_{j=i}^k \bar{D}_{j+1}^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i)) + 1) + \dot{\psi}_{\xi_i})\boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{q}_{i-1}), \quad (\text{ПЗ.33})$$

где $\gamma_{\xi_i} > 0$, $i = 1, \dots, k$, не должны зависеть от неизвестного *a priori* вектора $\boldsymbol{\theta}_i$.

Отметим, что функции $f_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_i)$, $i < n$ не зависят от x_j , $j = i + 1, \dots, n$. Поэтому производные $\frac{\partial \alpha_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0$. Следовательно, можно получить следующие алгоритмы в конечных формах (ПЗ.33)²:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i}(\mathbf{q}_{i-1}, \xi_i, t) &= \gamma_{\xi_i}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i, P}(\mathbf{q}_{i-1}, \xi_i) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i, I}(t)), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i, P}(\mathbf{q}_{i-1}, \xi_i) &= \psi_{\xi_i}(x_i, \xi_i)\boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{q}_{i-1}) - \Psi_{\xi_i}(\mathbf{q}_{i-1}, \xi_i), \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\xi_i, I} &= ((\bar{F}_i^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{z}) + \sum_{j=i}^k \bar{D}_{j+1}^2(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i)) + 1)\psi_{\xi_i}(x_i, \xi_i)\boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{q}_{i-1}) + \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.34})$$

²Ключевым аргументом здесь является то, что функция $\boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{q}_{i-1})$ не зависит ни от каких компонент вектора состояния, кроме x_i . Остальные компоненты: x_1, \dots, x_{i-1} заменяются на ξ_j , $j = 1, \dots, i - 1$, соответственно, производная по времени которых не зависит в явном виде от $\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_i$.

$$\sum_{j=1}^i \frac{\partial \Psi_{\xi_i}(\mathbf{q}_{i-1}, \xi_i)}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j - \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{\xi_i}(x_i, \xi_i) \frac{\partial \alpha_i(\mathbf{q}_{i-1})}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j,$$

$$\Psi_{\xi_i}(\mathbf{q}_{i-1}, \xi_i) = \int_{x_i(0)}^{x_i(t)} \psi_{\xi_i}(x_i, \xi_i) \frac{\partial \alpha_i(\mathbf{q}_{i-1})}{\partial x_i} dx_i,$$

где $\gamma_{\xi_i} > 0$. Отметим также, что если $\mathbf{x} \in L_\infty$, то $\boldsymbol{\xi} \in L_\infty$ и, следовательно, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i, P}(\mathbf{q}_{i-1}, \xi_i) \in L_\infty$ при условии, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i, P}(\mathbf{q}_{i-1}, \xi_i)$ гладкая (локально ограничена). Учитывая, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i} = \gamma_{\xi_i}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i, P}(\mathbf{q}_{i-1}, \xi_i) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i, I})$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i, P}(\mathbf{q}_{i-1}, \xi_i) \in L_\infty$, получаем $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i, I} \in L_\infty$ для $\mathbf{x} \in L_\infty$. Легко убедиться в том, что, обозначив $\boldsymbol{\nu} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\xi_i, I}$, система (ПЗ.30), (ПЗ.34) может быть преобразована к системе вида (3.58), которая удовлетворяет условиям 1)–3) леммы. *Лемма доказана.*

9.6. Доказательство Теоремы 3.4

Доказательство проведем по индукции для системы (3.55). Для начала рассмотрим систему первого порядка. Согласно условиям теоремы функции $f_1(x_1, \boldsymbol{\theta}_1)$, $\boldsymbol{\alpha}_1(x_1)$ гладкие, поэтому в соответствии с леммой 9.1, существует гладкая функция $u(x_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)$:

$$\begin{aligned} u(x_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1) &= -f_1(x_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - \varphi_1(\psi(x_1)), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 &= \gamma_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1, P}(x_1) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1, I}(t)), \quad \gamma_1 > 0; \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1, P}(x_1) &= \psi(x_1)\boldsymbol{\alpha}_1(x_1) - \Psi(x_1), \\ \Psi(x_1) &= \int_{x_1(0)}^{x_1(t)} \psi(x_1) \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_1(x_1)}{\partial x_1} dx_1; \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{1, I} &= \varphi_1(\psi(x_1))\boldsymbol{\alpha}_1(x_1), \end{aligned} \tag{ПЗ.35}$$

такая, что $\psi_1(x_1, t) \in L_2 \cap L_\infty$, $\dot{\psi}_1 \in L_2$ для системы следующего вида³:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \boldsymbol{\theta}_1) + u(x_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1) + \varepsilon_1(t), \quad \varepsilon_1(t) \in L_2.$$

Следовательно, база индукции доказана.

Предположим теперь, что теорема выполняется для систем, порядок которых не превосходит числа $i > 1$, т. е. существует гладкая функция $u_i(\mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i)$, $\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i \in R^i$, $\mathbf{x}_i = (x_1, \dots, x_i)^T$, $\boldsymbol{\xi}_i = (\xi_1, \dots, \xi_i)^T$ и соответствующие целевые функции $\psi_j(x_j, t)$, $j = 1, \dots, i$ такие, что $\psi_j(x_j, t) \in L_2 \cap L_\infty$, $\dot{\psi}_j \in L_2$ для системы (3.55) порядка i :

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= f_j(x_1, \dots, x_j, \boldsymbol{\theta}_j) + x_{j+1}, \quad j \in \{1, \dots, i-1\}, \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, \boldsymbol{\theta}_i) + u_i + \varepsilon_i(t), \quad \varepsilon_i(t) \in L_2. \end{aligned} \tag{ПЗ.36}$$

³Чтобы это показать, достаточно вычислить производные $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1$ и применить лемму 9.1 к результирующей системе

Тогда для доказательства теоремы достаточно показать, что перечисленные свойства выполняются для систем (3.55) порядка $i + 1$ при условии, что теорема справедлива для систем (ПЗ.36).

Согласно индукционному предположению функция $u_i(\mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i)$ гладкая. По лемме Адамара существует $F(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i)$ такая, что $u_i(\mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) - u_i(\mathbf{x}'_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) = F(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i)$. Обозначим $\bar{F}_{i+1}^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) = \|F(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i)\|^2$. Согласно условиям теоремы функции $f_j(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\theta}_j)$, $j = 1, \dots, i + 1$ удовлетворяют следующим дополнительным предположениям $\forall \boldsymbol{\theta}_j \in \Omega_{\theta}$:

$$(f_j(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\theta}_j) - f_j(\mathbf{x}'_j, \boldsymbol{\theta}_j))^2 \leq \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}'_j\|^2 \bar{D}_j^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}'_j).$$

Поэтому из леммы 3.1 следует существование системы дифференциальных уравнений (символом \oplus обозначено формальное соединение векторов, по аналогии с прямой суммой векторов линейных пространств)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}}_{i+1} &= \mathbf{f}_{\boldsymbol{\xi}_{i+1}}(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}_{i+1}), \boldsymbol{\xi} \in R^i, \\ \dot{\boldsymbol{\nu}}_{i+1} &= \mathbf{f}_{\boldsymbol{\nu}_{i+1}}(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \oplus \boldsymbol{\xi}_i \oplus \boldsymbol{\nu}_i \end{aligned}$$

таких, что $u_i(\mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) - u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) \in L_2$; $f_{i+1}(\mathbf{x}_{i+1}, \boldsymbol{\theta}_{i+1}) - f_{i+1}(\boldsymbol{\xi}_{i+1} \oplus x_{i+1}, \boldsymbol{\theta}_{i+1}) \in L_2$. Введем новую целевую функцию $\psi_{i+1}(x_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}) = x_{i+1} - u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i)$ и рассмотрим ее производную по времени $\dot{\psi}_{i+1}$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{i+1} &= f_{i+1}(\mathbf{x}_{i+1}, \boldsymbol{\theta}_{i+1}) + u_{i+1} - \\ &\quad L_{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\xi}_i}} u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) - \\ &\quad L_{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\nu}_i}} u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) - \\ &\quad L_{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\xi}_{i+1}}} u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) \\ &\quad - L_{\mathbf{f}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_i}} u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i). \end{aligned} \tag{ПЗ.37}$$

Обозначим $\varepsilon_{i+1}(t) = f_{i+1}(\mathbf{x}_{i+1}, \boldsymbol{\theta}_{i+1}) - f_{i+1}(\boldsymbol{\xi}_{i+1} \oplus x_{i+1}, \boldsymbol{\theta}_{i+1})$ и перепишем (ПЗ.37) следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{i+1} &= \varepsilon_{i+1}(t) + f_{i+1}(\boldsymbol{\xi}_{i+1} \oplus x_{i+1}, \boldsymbol{\theta}_{i+1}) + \\ &\quad u_{i+1} - L_{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\xi}_i}} u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) \\ &\quad - L_{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\nu}_i}} u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) - \\ &\quad L_{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\xi}_{i+1}}} u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) - \\ &\quad L_{\mathbf{f}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_i}} u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i. \end{aligned} \tag{ПЗ.38}$$

Примем вход u_{i+1} в виде:

$$\begin{aligned}
u_{i+1} = & -\varphi_{i+1}(\psi_{i+1}(x_{i+1}, \xi_{i+1}, \xi_i, \nu_i, \hat{\theta}_{I,i})) \\
& + L_{\mathbf{f}_{\xi_i}} u_i(\xi_{i+1}, \hat{\theta}_i(\xi_{i+1}, \xi_i, \hat{\theta}_{I,i}), \xi_i, \nu_i) + \\
& L_{\mathbf{f}_{\nu_i}} u_i(\xi_{i+1}, \hat{\theta}_i(\xi_{i+1}, \xi_i, \hat{\theta}_{I,i}), \xi_i, \nu_i) + \\
& L_{\mathbf{f}_{\xi_{i+1}}} u_i(\xi_{i+1}, \hat{\theta}_i(\xi_{i+1}, \xi_i, \hat{\theta}_{I,i}), \xi_i, \nu_i) + \\
& L_{\mathbf{f}_{\hat{\theta}_i}} u_i(\xi_{i+1}, \hat{\theta}_i(\xi_{i+1}, \xi_i, \hat{\theta}_{I,i}), \xi_i, \nu_i) - \\
& f_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, \hat{\theta}_{i+1}).
\end{aligned} \tag{ПЗ.39}$$

Обозначив $\psi_{i+1}(x_{i+1}, \xi_{i+1}, \xi_i, \nu_i, \hat{\theta}_{I,i}) = \psi_{i+1}(x_{i+1}, t)$ (где $\xi_{i+1}, \xi_i, \nu_i, \hat{\theta}_{I,i}$ функции времени t) и подставив (ПЗ.39) и (ПЗ.38) в (ПЗ.37), можно записать следующее выражение для $\dot{\psi}_{i+1}$

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_{i+1} = & -\varphi_{i+1}(\psi_{i+1}(x_{i+1}, t)) + f_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, \theta_{i+1}) \\
& - f_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, \hat{\theta}_{i+1}) + \varepsilon_{i+1}(t)
\end{aligned} \tag{ПЗ.40}$$

Из условий теоремы следует, что существует такая функция $\alpha_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1})$, что предположения 3.3 и 3.4 выполняются для функции $f_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, \theta_{i+1})$.

Рассмотрим следующий адаптивный алгоритм:

$$\dot{\hat{\theta}}_{i+1} = \gamma_{i+1}(\dot{\psi}_{i+1} + \varphi_{i+1}(\psi_{i+1}(x_{i+1}, t)))\alpha_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}), \quad \gamma_{i+1} > 0 \tag{ПЗ.41}$$

По аналогии с равенством (ПЗ.34), алгоритм (ПЗ.41) может быть реализован посредством уравнений, не зависящих в явном виде от производных по времени $\dot{\psi}_{i+1}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, t) = & \gamma_{i+1}(\hat{\theta}_{i+1,P}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, t) + \hat{\theta}_{i+1,I}(t)), \quad \gamma_{i+1} > 0; \\
\hat{\theta}_{i+1,P}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, t) = & \psi_{i+1}(x_{i+1}, t)\alpha_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}) - \Psi_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, t); \\
\dot{\hat{\theta}}_{i+1,I} = & \varphi_{i+1}(\psi(x_{i+1}, t))\alpha_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}) - L_{\mathbf{f}_{\xi}}\alpha_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}) + \\
& L_{\mathbf{f}_{\xi}}\Psi_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, t) + \partial\Psi_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, t)/\partial t,
\end{aligned} \tag{ПЗ.42}$$

где

$$\Psi_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, t) = \int_{x_{i+1}(0)}^{x_{i+1}(t)} \psi_{i+1}(x_{i+1}, t) \frac{\partial \alpha_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} d.x_{i+1}$$

Из леммы 9.1 следует, что для модели по ошибке (ПЗ.40) с адаптивным алгоритмом (ПЗ.41) и его реализацией (ПЗ.42) выполняется следующее утверждение: $\hat{\theta}_{i+1}(\xi_{i+1} \oplus x_{i+1}, t) \in L_{\infty}$, $\dot{\psi}_{i+1} \in L_2$, $\varphi_{i+1}(\psi_{i+1}(x_{i+1}, t)) \in L_2 \cap L_{\infty}$. Учитывая, что $\varepsilon_{i+1}(t) \in L_2$, получаем:

$$u_{i+1}(\mathbf{x}_i, \hat{\theta}_{i+1}, \xi_{i+1}, \xi_i, \nu_{i+1}, \nu_i, \hat{\theta}_{I,i}) - u_{i+1}(\mathbf{x}_i, \theta_{i+1}, \xi_{i+1}, \xi_i, \nu_{i+1}, \nu_i, \hat{\theta}_{I,i}) \in L_2.$$

Обозначим $u_{i+1}(\mathbf{x}_i, \hat{\theta}_{i+1}, \xi_{i+1}, \tilde{\nu}_{i+1}) = u_{i+1}(\mathbf{x}_i, \hat{\theta}_{i+1}, \xi_{i+1}, \xi_i, \nu_{i+1}, \nu_i, \hat{\theta}_{I,i})$, $\tilde{\nu}_{i+1} = \xi_i \oplus \nu_{i+1} \oplus \nu_i \oplus \hat{\theta}_{I,i}$. Принимая во внимание введенное обозначение, легко увидеть, что утверждение 2) выполняется. Кроме того, заметим, что выбор подходящей функции $\varphi_{i+1}(\cdot)$

в (ПЗ.39) вообще говоря произволен в заданном классе функций. Поэтому, выбирая

$$\varphi_{i+1}(\cdot) : |\varphi_{i+1}(\cdot)| \geq k_{k+1}|\psi_{i+1}|, \quad k_{i+1} > 0,$$

можно гарантировать выполнение свойства $\psi_{i+1}(x_{i+1}, t) \in L_2 \cap L_\infty$. Это, в свою очередь, в соответствии с процедурой индукции подразумевает, что $\psi_k(x_k, t) \in L_2 \cap L_\infty$ и $\dot{\psi}_k \in L_2$ для любых $k = 1, \dots, i$, $\psi \in L_2 \cap L_\infty$ and $\dot{\psi} \in L_2$. Следовательно, утверждение 1) теоремы тоже выполнено.

Докажем утверждение 3). Согласно индуктивному предположению $\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ ограничены. Более того, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}(t)$ ограничено, так как $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{P,i}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i)$ гладкая функция и $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \gamma_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{P,i}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i})$. Тогда, принимая во внимание лемму 3.1, получаем, что $\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\nu}_{i+1}$ ограничены. Следовательно, $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{i+1}$ ограничено. Покажем, что x_{i+1} тоже ограничено. Прежде всего отметим, что разность

$$\varepsilon_i(t) = u_i(\mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i) - u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i)$$

ограничена, так как u_i гладкая и ее аргументы ограничены. С другой стороны, мы только что показали, что функция

$$\psi_{i+1} = x_{i+1} - u_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(\boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{I,i}), \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\nu}_i)$$

ограничена. Поэтому x_{i+1} ограничено, что доказывает утверждение 3).

Производные $\dot{\psi}_j$, $j = 1, \dots, i$ ограничены, так как $\varepsilon_i(t)$ ограничено (согласно индуктивному предположению теорема выполняется для любого $j = 1 \dots, i$). Однако если $\varepsilon(t)$ ограничено, то $\dot{\psi}_{i+1}$ тоже ограничено. Кроме того $u_{i+1}(\cdot)$, $f_{i+1}(\cdot)$ гладкие, и переменные $\mathbf{x}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\nu}_{i+1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1}$ ограничены. Тогда из леммы 9.1 следует, что $\psi_{i+1} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, утверждение 4) доказано. *Следствие доказано.*

9.7. Доказательство Следствия 3.2

Прежде всего отметим, что в силу теоремы 3.1 и того, что система (3.91) обладает свойством “ограниченный вход-ограниченный выход”, состояние замкнутой системы ограничено. Это в свою очередь, в соответствии со свойствами 3), 4) теоремы 3.1, гарантирует выполнение следующего предельного соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}(t)) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), \boldsymbol{\zeta}(t)) = 0. \quad (\text{ПЗ.43})$$

В соответствии с леммой 2.1 для замкнутой системы существует ω -предельное множество. В силу непрерывности функции $f(\cdot)$ и (ПЗ.43) для любого $p = \mathbf{x}^p \oplus \hat{\boldsymbol{\theta}}^p \oplus \boldsymbol{\zeta}^p$ из этого ω -предельного множества выполняется равенство

$$f(\mathbf{x}^p, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}^p) - f(\mathbf{x}^p, \hat{\boldsymbol{\theta}}^p, \boldsymbol{\zeta}^p) = 0.$$

Таким образом, ω -предельное множество замкнутой системы содержится в (3.92). Согласно лемме 2.1, все решения замкнутой системы асимптотически приближаются к ω -предельному множеству, которое в свою очередь является инвариантным и содержится в (3.92). Следовательно, решения замкнутой системы асимптотически приближаются и к максимальному инвариантному множеству в (3.92). *Следствие доказано.*

9.8. Доказательство Теоремы 3.5

Рассмотрим динамическую обратную связь по состоянию следующего вида:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\xi})\hat{\boldsymbol{\theta}}(t).$$

Эта обратная связь приводит исходную систему (3.94) к виду

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + G_u\phi(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) + G_u(\phi(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}. \quad (\text{ПЗ.44})$$

Введем обозначение $G_u\phi(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ и рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t), \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= S(\boldsymbol{\theta}), \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= S(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + H^{-1}(\kappa^2(\boldsymbol{\xi}) + 1)\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})^T(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)), \\ \kappa(\boldsymbol{\xi}) : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa \in C^1. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.45})$$

Л е м м а 9.2. Пусть задана система (ПЗ.45), выполняются предположения 3.11–3.13, 3.16. Кроме того, пусть $\kappa(\boldsymbol{\xi}(t))\boldsymbol{\varepsilon}(t) \in L_2$, и $\boldsymbol{\varepsilon} \in L_2$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ ограничена, если $\boldsymbol{\theta}(t_0) \in \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0) \in \mathbb{R}^d$;
- 2) $\kappa(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}(t))$, $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}(t)) \in L_2$.
- 3) Пусть в дополнение $\left\| \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\| \leq |\kappa(\mathbf{x})|$, $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \in L_{\infty}$, тогда $\mathbf{x} \in L_{\infty}$.
- 4) Если независимо от условий в утверждении 3), $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \equiv 0$ и функция $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ предельно невырождена, т. е. существуют константы δ , $T > 0$ такие, что

$$\int_t^{t+T} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}(\tau))^T \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}(\tau)) d\tau \geq \delta I_d$$

и $S(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$, тогда траектории $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ сходятся к $\boldsymbol{\theta}(t, \boldsymbol{\theta}_0, t_0)$ экспоненциально быстро.

Доказательство леммы 9.2. Покажем, что утверждения 1) и 2) выполняются. Рассмотрим следующую положительно определенную функцию:

$$V_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) = \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|_H^2 + \epsilon = (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T H(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \epsilon,$$

где $\epsilon(t) = \frac{1}{2} \int_t^\infty (\kappa^2(\xi(\tau)) + 1) \epsilon^T(\tau) \epsilon(\tau) d\tau \geq 0$. Согласно допущениям леммы, функция $\kappa(\xi(t)) \epsilon(t) \in L_2$. Это означает, что $\epsilon(t)$ ограничена для любого $t > t_0$ и поэтому функция V_θ определена. Рассмотрим производную \dot{V}_θ :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\theta &= (\theta - \hat{\theta})^T H(S(\theta) - S(\hat{\theta})) + (S(\theta) - S(\hat{\theta}))^T H(\theta - \hat{\theta}) \\ &\quad - 2(\kappa^2(\xi) + 1) \left((\theta - \hat{\theta})^T \alpha^T(\xi) \alpha(\xi) (\theta - \hat{\theta}) + (\theta - \hat{\theta})^T \alpha^T(\xi) \epsilon(t) + \frac{\|\epsilon(t)\|^2}{4} \right) \\ &= (\theta - \hat{\theta})^T H(S(\theta) - S(\hat{\theta})) + (S(\theta) - S(\hat{\theta}))^T H(\theta - \hat{\theta}) \\ &\quad - 2(\kappa^2(\xi) + 1) \|(\theta - \hat{\theta})^T \alpha^T(\xi) + 0.5\epsilon(t)\|^2. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.46})$$

Функция $S(\cdot)$ непрерывна, поэтому, применяя лемму Адамара, можно записать разность $S(\theta) - S(\hat{\theta})$ в виде: $S(\theta) - S(\hat{\theta}) = \int_0^1 \frac{\partial S(\mathbf{z}(\lambda))}{\partial \mathbf{z}(\lambda)} d\lambda (\theta - \hat{\theta})$, $\mathbf{z}(\lambda) = \theta\lambda + \hat{\theta}(1 - \lambda)$. Применяя теорему о среднем, получаем, что $S(\theta) - S(\hat{\theta}) = \frac{\partial S(\mathbf{z}(\lambda'))}{\partial \mathbf{z}(\lambda')} (\theta - \hat{\theta})$ для $\lambda' \in [0, 1]$. Из последнего равенства следует:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\theta &= (\theta - \hat{\theta})^T \left(\frac{\partial S(\mathbf{z}(\lambda'))}{\partial \mathbf{z}(\lambda')}^T H + H \frac{\partial S(\mathbf{z}(\lambda'))}{\partial \mathbf{z}(\lambda')} \right) (\theta - \hat{\theta}) - \\ &\quad 2(\kappa^2(\xi) + 1) \|(\theta - \hat{\theta})^T \alpha^T(\xi) + 0.5\epsilon(t)\|^2 \\ &\leq -2(\kappa^2(\xi) + 1) \|(\theta - \hat{\theta})^T \alpha^T(\xi) + 0.5\epsilon(t)\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.47})$$

Неравенство (ПЗ.47) гарантирует, что $(\theta - \hat{\theta}) \in L_\infty$. Учитывая, что для каждого $\theta_0 \in \Omega_\theta$ решения $\theta(t, \theta_0, t_0) \subset \Omega(\Omega_\theta) \subseteq \Omega_\theta$, где Ω_θ ограниченное множество, получаем ограниченность траекторий $\hat{\theta}(t)$, то есть $\hat{\theta}(t) \in L_\infty$. Таким образом, доказана справедливость утверждения 1).

Докажем утверждение 2). Отметим, что функция $V(\theta, \hat{\theta}, t)$ не возрастающая и ограниченная снизу. Поэтому $\kappa(\xi)((\theta - \hat{\theta})^T \alpha^T(\xi) + 0.5\epsilon(t)) \in L_2$. Следовательно, функция $\kappa(\xi)(\theta - \hat{\theta})^T \alpha^T(\xi)$ принадлежит L_2 как сумма двух функций из L_2 . Тот факт, что $\kappa^2(\xi) + 1$ не обращается в нуль ни при каких ξ , означает $(\theta - \hat{\theta})^T \alpha^T(\xi) \in L_2$. Это доказывает утверждение 2).

Покажем, что $\mathbf{x}(t) \in L_\infty$ при условиях сформулированных в утверждении 3) леммы. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \alpha(\xi)(\theta - \hat{\theta}) + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \epsilon(t) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} \right) (\alpha(\xi)(\theta - \hat{\theta}) + \\ &\quad \epsilon(t)) + \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} (\alpha(\xi)(\theta - \hat{\theta}) + \epsilon(t)) \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.48})$$

$\psi \in C^1$, $\mathbf{x} - \xi \in L_\infty$ означает, что норма: $\left\| \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} \right\|$ ограничена. Кроме того, $\left\| \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} \right\| \leq \kappa(\xi)$. Следовательно, мы можем переписать (ПЗ.48) в виде:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mu(t), \quad \mu(t) \in L_2. \quad (\text{ПЗ.49})$$

Функция $\beta(\mathbf{x})$ отделена от нуля, т. е. $\exists \delta > 0 : \beta(\mathbf{x}) > 2\delta \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим следующую положительно определенную функцию:

$$V_\psi = \int_0^\psi \varphi(\sigma) d\sigma + \frac{1}{4\delta} \int_t^\infty \mu^2(\tau) d\tau. \quad (\text{П3.50})$$

Принимая во внимание предположение 3.15 и равенство (П3.49), можно получить следующую оценку для производных $\dot{V}_\psi : \dot{V}_\psi \leq -\beta(\mathbf{x})\varphi^2(\psi) + \varphi(\psi)\mu(t) - \frac{1}{4\delta}\mu^2(t) \leq -2\delta\varphi^2(\psi) + \varphi(\psi)\mu(t) - \frac{1}{4\delta}\mu^2(t) = -\delta\varphi^2(\psi) - \delta(\varphi(\psi) - \frac{1}{2}\mu(t))^2 \leq 0$. Тогда ограниченность \mathbf{x} явным образом следует из предположения 3.16, что доказывает утверждение 3).

Покажем, что оценка $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ сходится к $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ экспоненциально быстро, если выполняется условие предельной невырожденности и условие $S(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Предположим, что $\varepsilon \equiv 0$. Рассмотрим следующую подсистему:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} &= S(\boldsymbol{\theta}) - S(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - H^{-1}(\kappa^2(\boldsymbol{\xi}) + 1)\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})^T \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial S(\mathbf{z}(\lambda))}{\partial \mathbf{z}(\lambda)} d\lambda - H^{-1}(\kappa^2(\boldsymbol{\xi}) + 1)\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})^T \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \right) \tilde{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \quad (\text{П3.51})$$

где $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Согласно равенствам (П3.45) система (П3.51) описывает динамику $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$. Решение (П3.51) может быть получено как:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = e^{\int_0^t \frac{\partial S(\boldsymbol{\theta}'(\tau))}{\partial \boldsymbol{\theta}'} d\tau} e^{-H^{-1} \int_0^t (\kappa^2(\boldsymbol{\xi}(\tau)) + 1) \boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{\xi}(\tau)) \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}(\tau)) d\tau} \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t_0),$$

где $\boldsymbol{\theta}'(\tau) = \boldsymbol{\theta}(\tau)\lambda' - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau)(1 - \lambda')$ для $\lambda \in [0, 1]$. Из условия $S(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ следует, что индуцированная матричная норма $e^{\int_0^t \frac{\partial S(\boldsymbol{\theta}'(\tau))}{\partial \boldsymbol{\theta}'} d\tau}$ ограничена, т. е. существует $D_0 > 0$ такое, что $\|e^{\int_0^t \frac{\partial S(\boldsymbol{\theta}'(\tau))}{\partial \boldsymbol{\theta}'} d\tau}\| \leq D_0$ для всех $t \geq 0$. С другой стороны, справедлива следующая оценка: $\|e^{-H^{-1} \int_0^t (\kappa^2(\boldsymbol{\xi}(\tau)) + 1) \boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{\xi}(\tau)) \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}(\tau)) d\tau}\| \leq e^{-\lambda t}$ для некоторого $\lambda > 0$ (см. [236], лемма 5, стр. 18). Следовательно, можно ограничить норму $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\|$: $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\| \leq D_0 e^{-\lambda t} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t_0)\|$.

Покажем теперь, что для класса систем, заданных (3.94) с локально Липшицевыми $\phi_i(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}, \\ \phi(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \phi_{1,1}(\mathbf{x}), & \dots, & \phi_{1,d}(\mathbf{x}) \\ \dots, & \dots, & \dots \\ \phi_{m,1}(\mathbf{x}), & \dots, & \phi_{m,d}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ \phi_i(\mathbf{x}) &= (\phi_{i,1}(\mathbf{x}), \dots, \phi_{i,d}(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

можно построить C^1 -гладкую функцию $\boldsymbol{\xi}(t)$ такую, что $(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}(t)$, $\kappa(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}(t) \in L_2$.

Л е м м а 9.3. Пусть задана система (3.94), и функции $\phi_i(\mathbf{x})$, определенные как в (П3.52), локально липшицевы:

$$\|\phi_i(\mathbf{x}) - \phi_i(\boldsymbol{\xi})\| \leq \lambda_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|,$$

где $\lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ локально ограничены по \mathbf{x} , $\boldsymbol{\xi}$. И пусть, кроме того, справедливо Предположение 3.12. Тогда существует система

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G_u \mathbf{u} + \lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) + G_u \phi(\mathbf{x}) \boldsymbol{\nu} \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} &= S(\boldsymbol{\nu}) + H^{-1}(G_u \phi(\mathbf{x}))^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^T, \\ \lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= 1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (1 + \kappa^2(\boldsymbol{\xi})) \end{aligned} \quad (\text{П3.52})$$

такая, что выполняется следующее:

1) $\|(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}\| \in L_2$, $\|\kappa(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}\| \in L_2$ для любого ограниченного $\boldsymbol{\theta}$;

2) $\mathbf{x} \in L_\infty \Rightarrow \boldsymbol{\xi} \in L_\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\xi}(t) = 0$.

Доказательство леммы 9.3. Для доказательства достаточно рассмотреть следующую положительно определенную функцию V_ξ : $V_\xi = 0.5\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^2 + 0.5\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\nu}\|_H^2$. Её производная по времени может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi &\leq -\lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^2 + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^T G_u \phi(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\nu}) \\ &\quad + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\nu})^T (G_u \phi(\mathbf{x}))^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \leq -\lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^2. \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает, что $\lambda_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$, $\kappa(\boldsymbol{\xi}) \lambda_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| \in L_2$. Следовательно, $\|\phi_i(\mathbf{x}) - \phi_i(\boldsymbol{\xi})\| \leq \lambda_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| \Rightarrow \|\phi_i(\mathbf{x}) - \phi_i(\boldsymbol{\xi})\|, \kappa(\boldsymbol{\xi}) \|\phi_i(\mathbf{x}) - \phi_i(\boldsymbol{\xi})\| \in L_2$. Поэтому, ограниченность $\boldsymbol{\theta}(t)$ и конечность индуцированной матричной нормы G_u гарантирует, что $\|G_u(\phi_i(\mathbf{x}) - \phi_i(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}(t)\|$, $\|\kappa(\boldsymbol{\xi})G_u(\phi_i(\mathbf{x}) - \phi_i(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}(t)\| \in L_2$. Заметим, что функция V_ξ невозрастающая и радиально неограниченная, то есть неограниченно возрастает с ростом аргумента. Это гарантирует, что $\boldsymbol{\xi}$ ограничена до тех пор, пока \mathbf{x} остается ограниченным. $\lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) > 1$ означает, что $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \in L_2$. Таким образом, при допущениях, сформулированных в лемме, правая часть системы локально ограничена. Это приводит к равномерной непрерывности $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^2$, гарантирующей, что: $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = 0$. *Лемма доказана.*

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Согласно лемме 9.3 существует система (П3.52):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G_u \mathbf{u} + \lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) + G_u \phi(\mathbf{x}) \boldsymbol{\nu}, \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} &= S(\boldsymbol{\nu}) + H^{-1}(G_u \phi(\mathbf{x}))^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^T, \\ \lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= 1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (1 + \kappa^2(\boldsymbol{\xi})) \end{aligned} \quad (\text{П3.53})$$

такая, что $\|G_u(\phi(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}\|$, $\|\kappa(\boldsymbol{\xi})G_u(\phi(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}\| \in L_2$ для любого ограниченного $\boldsymbol{\theta}(t)$ и траектории $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющих уравнениям:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G_u(\phi(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta} + \mathbf{u}); \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = S(\boldsymbol{\theta}) \quad (\text{ПЗ.54})$$

Введя обозначения: $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = G_u\phi(\boldsymbol{\xi})$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}(t)$ и учитывая, что $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\xi})\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, (ПЗ.54) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) + \boldsymbol{\varepsilon}(t), \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= S(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t) \in L_2, \quad \kappa(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) \in L_2. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.55})$$

Принимая во внимание (ПЗ.55) и выражение (3.100), задающее функцию $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, можно записать производную по времени $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = S(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + H^{-1}(\kappa^2(\boldsymbol{\xi}) + 1)\boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)). \quad (\text{ПЗ.56})$$

Тогда применяя лемму 9.2, получим, что $\mathbf{x}(t)$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ограничены, т. е. $\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \in L_\infty$. С другой стороны, согласно лемме 9.3 ограниченность \mathbf{x} подразумевает ограниченность $\boldsymbol{\xi}(t)$. Следовательно, утверждение 1) теоремы справедливо.

Заметим также, что согласно лемме 9.3 выполняется следующее ограничение: $\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\xi}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это факт вместе с равномерной асимптотической устойчивостью по Ляпунову невозмущенной системы (ПЗ.56) (то есть при $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \equiv 0$) означает, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}_0, t_0) \rightarrow \boldsymbol{\theta}(t, \boldsymbol{\theta}_0, t_0)$ при $t \rightarrow \infty$. Это доказывает утверждение 3) теоремы.

Докажем теперь, что $\mathbf{x}(t) \rightarrow \Omega^*$ при $t \rightarrow \infty$. Для этого перепишем замкнутую систему в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) + \boldsymbol{\varepsilon}(t); \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= S(\boldsymbol{\theta}); \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= S(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + H^{-1}(\kappa^2(\boldsymbol{\xi}) + 1)\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})^T(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)); \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G_u\mathbf{u} + \lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) + G_u\phi(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}; \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} &= S(\boldsymbol{\nu}) + H^{-1}(G_u\phi(\mathbf{x}))^T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^T; \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \in L_2; \\ \dot{\epsilon}_0 &= -\left\| \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\varepsilon}) \right\|^2; \\ \dot{\epsilon}_1 &= -\|(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}\|^2; \\ \dot{\epsilon}_2 &= -\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})\|^2. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.57})$$

Ранее было показано, что траектории системы (ПЗ.57) ограничены за исключением функции ϵ_0 . Ограниченность $\epsilon_0(t)$, однако, немедленно следует из ограниченности $\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ и того, что $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \in L_2$.

Рассмотрим следующую функцию: $V = \int_0^\psi \varphi(\sigma) d\sigma + \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|_H^2 + \frac{1}{4\delta} \epsilon_0(t) + \frac{1}{4} \epsilon_1(t) + \epsilon_2(t)$. Ее производная по времени удовлетворяет следующему неравенству: $\dot{V} \leq -\delta \varphi^2(\psi) - \|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + 0.5\boldsymbol{\varepsilon}(t)\|^2 - \|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)\|^2 \leq -\delta \varphi^2(\psi) - \|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)\|^2$. Поэтому применяя принцип инвариантности Ла Салля [224], можно сделать вывод, что $(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))$ сходится (при $t \rightarrow \infty$) к наибольшему инвариантному множеству в $\Omega_\psi \times \Omega_\theta$, где $\Omega_\psi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(\psi(\mathbf{x})) = 0\}$, и $\Omega_\theta = \{\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t) = 0\}$. Для траектории $\mathbf{x}(t)$ это множество определяется как наибольшее инвариантное множество системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{П3.58})$$

при условии, что $\mathbf{x}(t) \in \Omega_\psi$. Согласно предположению 3.14, наибольшим инвариантным множеством для (П3.58) в Ω_ψ является Ω^* . *Теорема доказана.*

9.9. Доказательство Теоремы 3.6

Рассмотрим систему (П3.53). Из леммы 9.3 и предположения 3.12 следует, что $G_u(\phi(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta} \in L_2$. Ограниченность $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ явным образом следует из доказательства теоремы 3.5 (пусть $\kappa(\boldsymbol{\xi}) \equiv 0$ в (П3.47)). Кроме того, лемма 9.2 гарантирует, что $G_u\phi(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \in L_2$. Следовательно, обозначив $\boldsymbol{\varepsilon}_0(t) = G_u\phi(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + G_u(\phi(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\theta}$ получаем, что траектории $\mathbf{x}(t)$ системы (3.94) удовлетворяют следующему равенству:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad (\text{П3.59})$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \in L_2$. Система (П3.59), однако, имеет ограниченное предаточное отображение $L_2 \rightarrow L_\infty$ и, следовательно, $\mathbf{x}(t)$ ограничено. В этом случае, утверждение 1) теоремы доказано. Утверждение 3) явным образом следует из леммы 9.2. Покажем, что $\mathbf{x}(t) \rightarrow \Omega^*$ при $t \rightarrow \infty$. Для этого рассмотрим систему (П3.57) за исключением равенства для ϵ_0 . Ранее уже было показано, что решения системы (П3.57) ограничены. Зададим $V = \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|_H^2 + \frac{1}{4} \epsilon_1(t) + \epsilon_2(t)$. Ее производная по времени удовлетворяет следующему неравенству: $\dot{V} \leq -\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)\|^2$, и поэтому по принципу инвариантности Ла Салля $\mathbf{x}(t) \rightarrow \Omega^*$ при $t \rightarrow \infty$. *Теорема доказана.*

9.10. Доказательство Теоремы 3.7

В силу непрерывности и дифференцируемости правых частей уравнений (3.101), (3.102), (3.29), (3.31) решения замкнутой системы существуют по меньшей мере на некотором ограниченном интервале $[t_0, T^*]$. В силу выражений (3.29), (3.31), условия 3.5 и уравнений системы (3.101), производная по времени функции $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ определяется равенством

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \Gamma(\dot{\psi} + \varphi(\psi, \boldsymbol{\omega}, t))\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t).$$

Введем в рассмотрение функцию вида

$$V_{\theta}(\theta, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} \|\theta - \hat{\theta}\|_{\Gamma^{-1}}^2 \quad (\text{ПЗ.60})$$

и оценим ее производную по времени (условия 3.3, 3.4)

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{D}(f(\mathbf{x}, \theta) - f(\mathbf{x}, \hat{\theta}))^2 + \frac{1}{D_1} |f(\mathbf{x}, \theta) - f(\mathbf{x}, \hat{\theta})| |z(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t)|. \quad (\text{ПЗ.61})$$

Преобразуем неравенство (ПЗ.61) к виду:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{D} \left(f(\mathbf{x}, \theta) - f(\mathbf{x}, \hat{\theta}) - \frac{|z(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t)|}{2D_1} \right)^2 + \frac{D}{4D_1^2} z^2(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t). \quad (\text{ПЗ.62})$$

Выражения (ПЗ.61), (ПЗ.62) в свою очередь приводят к оценке

$$\|f(\mathbf{x}(t), \theta) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t)) - \frac{|z(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t), t)|}{2D_1}\|_{2, [t_0, T^*]}^2 \leq \frac{D}{2} \|\theta - \hat{\theta}(t_0)\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \frac{D^2}{4D_1^2} \|z(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}^2.$$

Используя неравенство Минковского и неравенство треугольника, а также свойства индуцированной матричной нормы, получим

$$\|f(\mathbf{x}(t), \theta) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t))\|_{2, [t_0, T^*]}^2 \leq \left(\frac{D}{2\lambda_{\min}(\Gamma)} \right)^{0.5} \|\theta - \hat{\theta}(t_0)\| + \frac{D}{D_1} \|z(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}.$$

Вводя обозначения $\beta_{\theta} = \left(\frac{D}{2\lambda_{\min}(\Gamma)} \right)^{0.5} \|\theta - \hat{\theta}(t_0)\|$, $C_D = \left(1 + \frac{D}{D_1} \right)$, принимая во внимание неравенство (3.103) и используя интегральное неравенство Минковского

$$\left(\int_{t_0}^{T^*} (|h_x(\mathbf{x}(t), t)| + |h_q(\mathbf{q}(t), t)|)^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_{t_0}^{T^*} h_x^2(\mathbf{x}(t), t) dt \right)^{1/2} + \left(\int_{t_0}^{T^*} h_q^2(\mathbf{q}(t), t) dt \right)^{1/2} \quad (\text{ПЗ.63})$$

получим

$$\|f(\mathbf{x}(t), \theta) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t))\|_{2, [t_0, T^*]} \leq \beta_{\theta} + (C_D - 1) (\|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]} + \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}). \quad (\text{ПЗ.64})$$

Таким образом, верхняя граница нормы $\|f(\mathbf{x}(t), \theta) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t))\|_{2, [t_0, T^*]}$ полностью определяется нормами $\|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}$, $\|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}$ и числами β_{θ} , C_D . Тогда, учитывая (3.107), (ПЗ.64), можно оценить $\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{p, [t_0, T^*]}$ в виде

$$\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, T^*]} \leq \gamma_{\psi, 2} (\beta_{\theta} + C_D \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]} + C_D \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}) + \beta_{\psi, 2}. \quad (\text{ПЗ.65})$$

Дальнейшее доказательство положения 1) теоремы основано на следующем свойстве \mathcal{K} -функций [196]

Предложение 9.1. Для любых функций $\gamma \in \mathcal{K}$, $\rho \in \mathcal{K}_{\infty}$ и неотрицательных $a, b \in \mathbb{R}_+$ выполняется следующее неравенство

$$\gamma(a + b) \leq \gamma((\rho + Id)(a)) + \gamma((\rho + Id) \circ \rho^{-1}(b)). \quad (\text{ПЗ.66})$$

Учитывая (ПЗ.66), перепишем неравенство (ПЗ.65) следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, T^*]} &\leq \gamma_{\psi, 2}((\rho_1 + Id)(C_D \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]} + C_D \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]})) \\ &\quad + \gamma_{\psi, 2}((\rho_1 + Id) \circ \rho_1^{-1}(\beta_\theta)) + \beta_{\psi, 2}, \quad \rho_1 \in \mathcal{K}_\infty. \end{aligned}$$

Согласно (ПЗ.66) для некоторой функции $\gamma \circ (\rho_1 + Id) \in \mathcal{K}$ существует $\rho_2 \in \mathcal{K}_\infty$:

$$\begin{aligned} \gamma \circ (\rho_1 + Id)(C_D \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]} + C_D \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}) &\leq \\ \gamma \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id)(C_D \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}) &+ \\ \gamma \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id) \circ \rho_2^{-1}(C_D \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}) &, \quad \rho_2 \in \mathcal{K}_\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, заменяя $\gamma \circ (\rho_1 + Id)$ на $\gamma_{\psi, 2} \circ (\rho_1 + Id)$ получим

$$\begin{aligned} \|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, T^*]} &\leq \gamma_{\psi, 2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id)(C_D \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}) + \\ &\quad \gamma_{\psi, 2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id) \circ \rho_2^{-1}(C_D \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}) \quad (\text{ПЗ.67}) \\ &\quad + \gamma_{\psi, 2}((\rho_1 + Id) \circ \rho_1^{-1}(\beta_\theta)) + \beta_{\psi, 2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]} &\leq \gamma_{h_q} \circ (\rho_3 + Id) \circ \gamma_{x, \infty}(\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, T^*]}) + \\ \gamma_{h_q} \circ (\rho_3 + Id) \circ \rho_3^{-1}(\beta_{x, p}) &+ \beta_{h_q}, \quad \rho_3 \in \mathcal{K}_\infty \quad (\text{ПЗ.68}) \\ \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]} &\leq \gamma_{h_x}(\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty, [t_0, T^*]}) + \beta_{h_x}. \end{aligned}$$

Тогда принимая во внимание выражения (ПЗ.67) и (ПЗ.68), получим

$$\begin{aligned} \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]} &\leq \gamma_{h_x} \circ (\rho_4 + Id) \circ \gamma_{\psi, 2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id)(C_D \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}) \\ &\quad + \gamma_{h_x} \circ (\rho_4 + Id) \circ \rho_4^{-1} \circ (\rho_5 + Id) \circ \gamma_{\psi, 2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id) \circ \\ &\quad \rho_2^{-1}(C_D \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}) + \beta_1; \quad (\text{ПЗ.69}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]} &\leq \gamma_{h_q} \circ (\rho_3 + Id) \circ \gamma_{x, \infty} \circ (\rho_6 + Id) \circ \dots \\ &\quad \dots \gamma_{\psi, 2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id)(C_D \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}) \\ &\quad + \gamma_{h_q} \circ (\rho_3 + Id) \circ \gamma_{x, \infty} \circ (\rho_6 + Id) \circ \rho_6^{-1} \circ (\rho_7 + Id) \circ \dots \\ &\quad \dots \gamma_{\psi, 2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id) \circ \rho_2^{-1}(C_D \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2, [t_0, T^*]}) + \beta_2, \quad (\text{ПЗ.70}) \end{aligned}$$

где $\beta_1, \beta_2 > 0$ и $\rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7 \in \mathcal{K}_\infty$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \gamma_{h_{x, x}}(s) &= \gamma_{h_x} \circ (\rho_4 + Id) \circ \gamma_{\psi, 2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id)(C_D s), \\ \gamma_{h_{x, q}}(s) &= \gamma_{h_x} \circ (\rho_4 + Id) \circ \rho_4^{-1} \circ (\rho_5 + Id) \circ \gamma_{\psi, 2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id) \circ \rho_2^{-1}(C_D s), \\ \gamma_{h_{q, x}}(s) &= \gamma_{h_q} \circ (\rho_3 + Id) \circ \gamma_{x, \infty} \circ (\rho_6 + Id) \circ \gamma_{\psi, 2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id)(C_D s), \\ \gamma_{h_{q, q}}(s) &= \gamma_{h_q} \circ (\rho_3 + Id) \circ \gamma_{x, \infty} \circ (\rho_6 + Id) \circ \rho_6^{-1} \circ (\rho_7 + Id) \circ \\ &\quad \gamma_{\psi, 2} \circ (\rho_1 + Id) \circ (\rho_2 + Id) \circ \rho_2^{-1}(C_D s). \quad (\text{ПЗ.71}) \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом обозначений (ПЗ.71), выражения (ПЗ.69), (ПЗ.70) эквивалентны

$$\begin{aligned} \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]} &\leq \gamma_{h_{x,x}}(\|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]}) + \gamma_{h_{x,q}}(\|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]}) + \beta_1, \\ \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]} &\leq \gamma_{h_{q,x}}(\|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]}) + \gamma_{h_{q,q}}(\|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]}) + \beta_2. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.72})$$

Согласно формулировке теоремы

$$(Id - \gamma_{h_{x,x}}) \in \mathcal{K}_\infty, \quad (Id - \gamma_{h_{q,q}}) \in \mathcal{K}_\infty.$$

Используя неравенства (ПЗ.72), можно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]} &\leq (Id - \gamma_{h_{x,x}})^{-1} \circ (\rho_8 + Id) \circ \gamma_{h_{x,q}}(\|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]}) + \beta_3, \\ \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]} &\leq (Id - \gamma_{h_{q,q}})^{-1} \circ (\rho_9 + Id) \circ \gamma_{h_{q,x}}(\|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]}) + \beta_4, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.73})$$

где $\rho_8, \rho_9 \in \mathcal{K}_\infty$, $\beta_3, \beta_4 \in \mathbb{R}_+$. Тогда, в соответствии с [196], доказательство теоремы 2.1, с. 110, условием равномерной ограниченности по T^* правых частей неравенств (ПЗ.72) являются следующие неравенства:

$$\begin{cases} (Id + \lambda_2) \circ (Id - \gamma_{h_{q,q}})^{-1} \circ (\rho_9 + Id) \circ \gamma_{h_{q,x}} \circ (Id + \lambda_1) \circ \\ (Id - \gamma_{h_{x,x}})^{-1} \circ (\rho_8 + Id) \circ \gamma_{h_{x,q}}(s) \leq s, \\ (Id + \lambda_1) \circ (Id - \gamma_{h_{x,x}})^{-1} \circ (\rho_8 + Id) \circ \gamma_{h_{x,q}} \circ (Id + \lambda_2) \circ \\ (Id - \gamma_{h_{q,q}})^{-1} \circ (\rho_9 + Id) \circ \gamma_{h_{q,x}}(s) \leq s, \end{cases}$$

для всех $s \geq s_0$ и некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{K}_\infty$. Таким образом, в силу (ПЗ.63)

$$\|z(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]} \leq \|h_x(\mathbf{x}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]} + \|h_q(\mathbf{q}(t), t)\|_{2,[t_0, T^*]} \leq \beta_5, \quad (\text{ПЗ.74})$$

где величина $\beta_5 \in \mathbb{R}_+$ является ограниченной функцией начальных условий и параметров уравнений замкнутой системы. Тогда, в силу предположений 3.1, 3.2 и применяя доказательство “от противного”, можно показать, что решения $\mathbf{x}(t)$ системы (3.101) определены на интервале $[t_0, \infty)$ и более того ограничены. Ограниченность $\hat{\theta}(t)$ вытекает непосредственно из неравенства (ПЗ.61). Ограниченность траекторий $\mathbf{q}(t)$ в этом случае следует автоматически из условий теоремы.

Доказательство положения 2) вытекает из (ПЗ.61), (ПЗ.74) и леммы Барбалата (подробное доказательство производится аналогично доказательству теоремы 3.1). *Теорема доказана.*

9.11. Доказательство Теоремы 3.8

В силу выражений (3.111), (3.31), предположения 3.5 и уравнений системы (3.101), производная по времени функции $\hat{\theta}$ определяется равенством

$$\dot{\hat{\theta}} = \chi(t)(\dot{\psi} + \varphi(\psi, \omega, t))\alpha(\mathbf{x}, t).$$

В силу непрерывности и дифференцируемости правой части уравнений (3.101) решения замкнутой системы определены на некотором конечном интервале времени $[t_0, T^*]$ [43]. Покажем, что на этом интервале времени определена норма

$$\|f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}})\|_{L_{\chi,2},[t_0,T^*]}$$

и, кроме того, эта норма ограничена сверху функцией начальных значений оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0)$ параметров $\boldsymbol{\theta}$ и t_0 . Для этого рассмотрим функцию

$$V_{\theta}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{D}{4D_1^2}\|\chi^{0.5}(t)z(t)\|_{2,[t,\infty]}^2. \quad (\text{ПЗ.75})$$

Принимая во внимание предположения 3.3, 3.4, оценим ее производную по времени

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\theta} &\leq -\frac{\chi(t)}{D}(f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}))^2 + \frac{\chi(t)}{D_1}|f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})||z(t)| - \frac{\chi(t)D}{4D_1^2}z^2(t), \\ &= -\frac{\chi(t)}{D}\left(|f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})| - \frac{D}{2D_1}|z(t)|\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.76})$$

Учитывая неравенство (ПЗ.76) и выражение (ПЗ.75), получим оценку

$$\left\| |f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))| - \frac{D}{2D_1}|z(t)| \right\|_{L_{\chi,2},[t_0,T^*]}^2 \leq \frac{D}{2}\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0)\|^2 + \frac{D^2}{4D_1^2}\|\chi^{0.5}(t)z(t)\|_{2,[t_0,\infty]}^2.$$

Применяя неравенство Минковского, получим оценку

$$\left\| |f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))| - \frac{D}{2D_1}|z(t)| \right\|_{L_{\chi,2},[t_0,T^*]} \leq \left(\frac{D}{2}\right)^{0.5} \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0)\| + \frac{D}{2D_1}\|z(t)\|_{L_{\chi,2},[t_0,\infty]}.$$

Таким образом, используя неравенство треугольника и свойство коммутации знака нормы и умножения на положительное число, получим неравенство

$$\|f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))\|_{L_{\chi,2},[t_0,T^*]} \leq \left(\frac{D}{2}\right)^{0.5} \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0)\| + \frac{D}{D_1}\|z(t)\|_{L_{\chi,2},[t_0,\infty]}. \quad (\text{ПЗ.77})$$

Следовательно, величина $\|f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))\|_{L_{\chi,2},[t_0,T^*]}^2$ ограничена сверху для всех допустимых значений T^* .

Обозначим

$$\zeta(t) = f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) + z(t).$$

В силу (ПЗ.77) норма $\|\zeta(t)\|_{L_{\chi,2},[t_0,T^*]}$ ограничена сверху и эта граница не зависит от T^* . Для определенности положим $\|\zeta(t)\|_{L_{\chi,2},[t_0,T^*]} \leq M(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0), t_0)$. Докажем, что решения системы определены на $[t_0, \infty)$. Для этого достаточно показать, что величина $\|\mathbf{x}(t)\|$ не может быть сколь угодно большой на любом конечном интервале времени. Предположим противное. Пусть существует момент времени T^* такой что

$\|\mathbf{x}(T^*)\| > M^*$, где M^* - произвольное (сколь угодно большое по абсолютной величине) число. Функция $\zeta(t)$ непрерывна по t и, следовательно, интегрируема с квадратом:

$$\|\zeta(t)\|_{2,[t_0,T^*]} = \left(\int_{t_0}^{T^*} |\zeta(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{Z}(t_0, T^*) < \infty.$$

Тогда, согласно условию 3.2

$$\|\psi(\mathbf{x}(t), t)\|_{\infty,[t_0,T^*]} \leq \gamma_{\infty,2}(\psi(t_0), \boldsymbol{\omega}, \mathcal{Z}(t_0, T^*)).$$

Более того, применяя условие 3.1, имеем

$$\|\mathbf{x}(T^*)\| \leq \|\mathbf{x}(t)\|_{\infty,[t_0,T^*]} \leq \tilde{\gamma}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta}, \gamma_{\infty,2}(\psi(t_0), \boldsymbol{\omega}, \mathcal{Z}(t_0, T^*))),$$

где функции $\tilde{\gamma}$ и $\gamma_{\infty,2}$ локально ограничены. Следовательно $\|\mathbf{x}(T^*)\| \leq M_0$, где M_0 некоторое положительное число. Тогда имеет место неравенство $M^* < \|\mathbf{x}(t^*)\| \leq M_0$, или, что тоже самое, $M^* \leq M_0$. Причем, согласно предположению M^* может быть сколь угодно большим, а число M_0 однозначно определяется начальными условиями и параметрами системы. Таким образом, мы приходим к противоречию. Следовательно величина $\|\mathbf{x}(T^*)\|$ не может быть сколь угодно большой ни для каких конечных T^* . Это, в свою очередь, доказывает существование решений системы на интервале $[t_0, \infty)$.

Докажем положение 2) теоремы. Прежде всего отметим, что $\zeta(t) \in L_{\chi,2}[t_0, \infty]$. Действительно, $z(t) \in L_{\chi,2}[t_0, \infty]$. Кроме того, существование решений системы на интервале $[t_0, \infty)$ гарантирует существование (и ограниченность) нормы

$$\|f(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))\|_{L_{\chi,2},[t_0,\infty]}^2$$

и, следовательно, $\zeta(t) \in L_{\chi,2}[t_0, \infty]$ как сумма двух функций из $L_{\chi,2}[t_0, \infty]$. Рассмотрим последовательность моментов времени

$$t_0, t_1 = t_0 + \Delta, \dots, t_n = t_0 + (n-1)\Delta, \dots$$

Согласно условиям (3.113), (3.114) имеем

$$|\psi(t_{i+1})| \leq \rho(\Delta)|\psi(t_i)| + \gamma(\|\zeta(t)\|_{2,[t_i,t_{i+1}]}).$$

Оценим $L_2^1[t_i, t_{i+1}]$ -норму сигнала $\zeta(t)$. Согласно неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} \|\zeta(t)\|_{2,[t_i,t_{i+1}]}^2 &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \zeta^2(\tau) d\tau = \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\chi^{-0.5}(\tau) (\chi^{0.5}(\tau) \zeta^2(\tau))| d\tau \\ &\leq \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \chi^{-1}(\tau) d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \chi(\tau) \zeta^4(\tau) d\tau \right)^{1/2} = C_{\chi^{-1}}(t_i, t_i + \Delta) C_{\chi, \zeta^2}(t_i, t_i + \Delta). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\zeta(t)\|_{2,[t_i,t_{i+1}]} \leq \sqrt{C_{\chi^{-1}}(t_i, t_i + \Delta) C_{\chi, \zeta^2}(t_i, t_i + \Delta)}.$$

Тогда в силу условия (3.112) существуют момент времени $t^* > t_0$ и сколь угодно малое по абсолютной величине число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$|\psi(t_{i+1})| \leq \rho(\Delta)|\psi(t_i)| + \gamma(\sqrt{C^*} + \varepsilon)$$

для всех $t_i > t^*$. Принимая во внимание, что $\rho(\Delta) < 1$ получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\psi(t_n)| \leq \frac{\gamma(\sqrt{C^*} + \varepsilon)}{1 - \rho(\Delta)},$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Аналогично, для любого $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ последовательность

$$\psi(t + \Delta), \psi(t + 2\Delta), \dots, \psi(t + n\Delta), \dots$$

ограничена и, более того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\psi(t + n\Delta)| \leq \frac{\gamma(\sqrt{C^*} + \varepsilon)}{1 - \rho(\Delta)}.$$

Таким образом, в силу произвола выбора $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ и согласно предположению 3.1, решения замкнутой системы ограничены и сходятся к множеству $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\psi(\mathbf{x}(t), t)| \leq \gamma(\sqrt{C^*})(1 - \rho(\Delta))^{-1}\}$. *Теорема доказана.*

9.12. Доказательство Теоремы 3.9

Введем следующие обозначения

$$\Delta f_x[t_0, T] = \|f_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x, t) - f_x(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_x, t)\|_{2,[t_0, T]},$$

$$\Delta f_y[t_0, T] = \|f_y(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_y, t) - f_y(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_y, t)\|_{2,[t_0, T]}.$$

В соответствие с теоремой 3.1, имеют место оценки

$$\Delta f_x[t_0, T] \leq C_x + \frac{D_x}{D_{1,x}} \|h_y(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2,[t_0, T]}, \quad (\text{ПЗ.78})$$

$$\Delta f_y[t_0, T] \leq C_y + \frac{D_y}{D_{1,y}} \|h_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2,[t_0, T]}, \quad (\text{ПЗ.79})$$

где C_x, C_y – некоторые константы, не зависящие в явном виде от T . Принимая во внимание (ПЗ.78), (ПЗ.79), получим:

$$\begin{aligned} \Delta f_x[t_0, T] + \|h_y(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2,[t_0, T]} \leq \\ C_x + \left(\frac{D_x}{D_{1,x}} + 1 \right) \|h_y(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2,[t_0, T]} \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.80})$$

$$\begin{aligned} \Delta f_y[t_0, T] + \|h_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2, [t_0, T]} \leq \\ C_y + \left(\frac{D_y}{D_{1,y}} + 1 \right) \|h_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2, [t_0, T]}, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.81})$$

Тогда доказательство теоремы будет завершено если мы покажем, что $L_2^1[t_0, T]$ нормы сигналов $h_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)$, $h_y(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)$ глобально ограничены по T . Для этого используем неравенство (ПЗ.66):

$$\gamma(a + b) \leq \gamma((\rho + Id)(a)) + \gamma((\rho + Id) \circ \rho^{-1}(b)), \quad a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma, \rho \in \mathcal{K}_\infty.$$

Применяя это неравенство к выражениям (ПЗ.80), (ПЗ.81) и учитывая свойство (3.125), получим следующие оценки

$$\begin{aligned} \|h_y(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2, [t_0, T]} \leq \\ \beta_y \cdot \gamma_{y_{2,2}} \circ \rho_1 \left(\left(\frac{D_y}{D_{1,y}} + 1 \right) \|h_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2, [t_0, T]} \right) + C_{y,1} \\ \|h_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2, [t_0, T]} \leq \\ \beta_x \cdot \gamma_{x_{2,2}} \circ \rho_2 \left(\left(\frac{D_x}{D_{1,x}} + 1 \right) \|h_y(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2, [t_0, T]} \right) + C_{x,1}, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.82})$$

где $\rho_1(\cdot), \rho_2(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$, $\rho_1(\cdot), \rho_2(\cdot) > Id(\cdot)$. Следовательно, в силу (ПЗ.82), существование функции $\rho_3(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty \geq Id(\cdot)$, удовлетворяющей неравенству

$$\beta_y \circ \gamma_{y_{2,2}} \circ \rho_1 \circ \left(\frac{D_y}{D_{y,1}} + 1 \right) \circ \rho_3 \circ \beta_x \circ \gamma_{x_{2,2}} \circ \rho_2 \circ \left(\frac{D_x}{D_{x,1}} + 1 \right) (\Delta) < \Delta \quad \forall \Delta \geq \bar{\Delta}$$

для некоторого $\bar{\Delta} \in \mathbb{R}_+$ обеспечивает глобальную ограниченность по T норм:

$$\|h_y(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2, [t_0, T]}, \quad \|h_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t)\|_{2, [t_0, T]}.$$

Остальные утверждения вытекают непосредственно из теоремы 3.1. *Теорема доказана.*

9.13. Доказательство Теоремы 3.10

В соответствии с формулировкой теоремы справедливы предположения 3.1, 3.2, 3.3, 3.5. Следовательно, применяя следствие 3.1, получаем, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \in L_\infty^d[t_0, \infty]$ и $\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, \infty]$. Покажем, что если выполняется альтернатива 1), то справедливо предельное соотношение (3.22). С этой целью рассмотрим производную $\dot{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \Gamma(\dot{\psi} + \varphi(\psi))\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \Gamma(f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t))\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{ПЗ.83})$$

С учетом того, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \in L_\infty^d[t_0, \infty]$ и $\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, \infty]$, и, что выполняется свойство ДЗ, функция $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ удовлетворяет следующему неравенству для некоторых $D, D_1, \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} D_1 |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)^T (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})| &\leq |f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t)| \leq D |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)^T (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})|; \\ \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)^T (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) (f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) - f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)) &\geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому существует функция $\kappa : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $D_1 \leq \kappa^2(t) \leq D$ такая, что

$$\dot{\hat{\theta}} = -\kappa^2(t)\Gamma\alpha(\mathbf{x}, t)^T(\hat{\theta} - \theta)\alpha(\mathbf{x}, t) = -\kappa^2(t)\Gamma\alpha(\mathbf{x}, t)\alpha(\mathbf{x}, t)^T(\hat{\theta} - \theta). \quad (\text{ПЗ.84})$$

Отметим, что матрица Γ симметричная и положительно-определенная. Тогда имеет место следующая факторизация $\Gamma = \Gamma_0\Gamma_0^T$, где Γ_0 невырожденная $n \times n$ матрица вещественных коэффициентов. Пусть $\tilde{\theta} = \Gamma_0^{-1}(\hat{\theta} - \theta)$. В новых координатах равенство (ПЗ.84) примет следующую форму:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\kappa(t)^2\Gamma_0^{-1}\Gamma_0\Gamma_0^T\alpha(\mathbf{x}, t)\alpha(\mathbf{x}, t)^T(\tilde{\theta} - \theta) = -\kappa^2(t)\Gamma_0^T\alpha(\mathbf{x}, t)\alpha(\mathbf{x}, t)^T\Gamma_0\tilde{\theta}. \quad (\text{ПЗ.85})$$

Обозначив $\kappa(t)\Gamma_0^T\alpha(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t)$, перепишем равенство (ПЗ.85) в виде:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\phi(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{x}, t)^T\tilde{\theta}, \quad (\text{ПЗ.86})$$

где функция $\phi(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ удовлетворяет равенству:

$$\eta^T \int_t^{t+L} \phi(\mathbf{x}(\tau), \tau)\phi(\mathbf{x}(\tau), \tau)d\tau\eta = \eta^T\Gamma_0^T \left(\int_t^{t+L} \kappa^2(\tau)\alpha(\mathbf{x}(\tau), \tau)\alpha(\mathbf{x}(\tau), \tau)^T d\tau \right) \Gamma_0\eta \quad (\text{ПЗ.87})$$

для всех $\eta \in \mathbb{R}^d$. Принимая во внимание, что функция $\alpha(\mathbf{x}(t), t)$ предельно невырождена, $\Gamma = \Gamma_0^T\Gamma_0$ и что $\kappa^2(t) \geq D_1$ можно получить следующую границу для квадратичной формы (ПЗ.87):

$$\eta^T \int_t^{t+L} \phi(\mathbf{x}(\tau), \tau)\phi(\mathbf{x}(\tau), \tau)d\tau\eta \geq \delta D_1 \|\Gamma_0\eta\|^2 = \delta D_1 \eta^T \Gamma \eta \geq \delta D_1 \lambda_{\min}(\Gamma) \|\eta\|^2 = \delta_\phi \|\eta\|^2. \quad (\text{ПЗ.88})$$

Следовательно, функция $\phi(\mathbf{x}(t), t)$ тоже предельно не вырождена. Отметим также, что $\|\phi(\mathbf{x}, t)\|$ ограничена сверху:

$$\begin{aligned} \|\phi(\mathbf{x}, t)\| &= \|\kappa(t)\alpha(\mathbf{x}, t)\Gamma_0\| = (\|\kappa(t)\alpha(\mathbf{x}, t)\Gamma_0\|^2)^{1/2} \\ &= (\kappa^2(t)\alpha(\mathbf{x}, t)^T\Gamma\alpha(\mathbf{x}, t))^{1/2} \leq (\kappa^2(t)\lambda_{\max}(\Gamma)\|\alpha(\mathbf{x}, t)\|^2)^{1/2} \\ &\leq \lambda_{\max}(\Gamma)^{1/2}\|\kappa(t)\alpha(\mathbf{x}, t)\| \leq \lambda_{\max}(\Gamma)^{1/2}D\alpha_\infty \\ \alpha_\infty &= \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}(t)\|_\infty, [t_0, \infty], t \geq t_0} \|\alpha(\mathbf{x}, t)\|. \end{aligned}$$

Для того, чтобы показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0$ экспоненциально быстро, воспользуемся следующей леммой из работы [236] (лемма 5, стр. 18):

Л е м м а 9.4. Пусть задана система (ПЗ.86), условие (ПЗ.88) (равномерно) выполняется, и $\phi(\mathbf{x}, t)$ в (ПЗ.86) ограничена $\|(\phi(\mathbf{x}, t))\| \leq \phi_M$. Тогда система (ПЗ.86) (равномерно) экспоненциально устойчива и, кроме того:

$$\|\tilde{\theta}(t)\| \leq e^{-Kt} \|\tilde{\theta}(t_0)\|, \quad K = \frac{\delta_\phi}{L(1 + L\phi_M^2)^2}. \quad (\text{ПЗ.89})$$

Согласно лемме 9.4 решения системы (ПЗ.86) сходится к нулю экспоненциально быстро, и скорость сходимости определяется (ПЗ.89), где

$$\delta_\phi = \lambda_{\min}(\Gamma)D_1\delta, \quad \phi_M^2 = \lambda_{\max}(\Gamma)D^2\alpha_\infty^2. \quad (\text{ПЗ.90})$$

Принимая во внимание равенства (ПЗ.89), (ПЗ.90) и то, что $(1+L\phi_M^2)^2 \leq 2(1+\phi_M^4L^2)$, $\lambda_{\max}(\Gamma_0)^2 = \lambda_{\max}(\Gamma)$ можно оценить $\|\tilde{\theta}(t)\|$ следующим образом:

$$\|\tilde{\theta}(t)\| \leq e^{-K_1 t} \|\tilde{\theta}(t_0)\|, \quad K_1 = \frac{\delta D_1 \lambda_{\min}(\Gamma)}{2L(1 + \lambda_{\max}^2(\Gamma)L^2 D^2 \alpha_\infty^4)} \quad (\text{ПЗ.91})$$

Учитывая, что $\|\Gamma_0 \tilde{\theta}(t)\| = \|\hat{\theta}(t) - \theta\|$ и используя равенство (ПЗ.91) получаем следующую оценку для $\|\hat{\theta}(t) - \theta\|$:

$$\|\hat{\theta}(t) - \theta\| \leq \|\Gamma_0 \tilde{\theta}(t)\| \leq \lambda_{\max}(\Gamma)^{1/2} e^{-K_1 t} \|\Gamma_0^{-1}(\hat{\theta}(t_0) - \theta)\| \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(\Gamma)}{\lambda_{\min}(\Gamma)} \right)^{1/2} e^{-K_1 t} \|\hat{\theta}(t_0) - \theta\|.$$

Это доказывает справедливость альтернативы 1) теоремы.

Докажем выполнение альтернативы 2). Из следствия 3.1 теоремы 3.1 немедленно вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}(t), \theta, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t), t) = 0. \quad (\text{ПЗ.92})$$

Кроме того, учитывая, что $\dot{\hat{\theta}} = \Gamma(f(\mathbf{x}(t), \theta, t) - f(\mathbf{x}(t), \hat{\theta}(t), t))\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, \infty]$ и $\alpha(\mathbf{x}, t)$ локально ограничена по \mathbf{x} равномерно по t , получаем, что $\dot{\hat{\theta}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Разделим \mathbb{R}_+ на следующее объединение интервалов: $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{i=1}^\infty \Delta_i$, $\Delta_i = [t_i, t_i + T]$, $t_0 = 0$, $t_{i+1} = t_i + T$, $i \in \mathbb{N}$. Тот факт, что $\dot{\hat{\theta}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ гарантирует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(s_i) - \hat{\theta}(\tau_i)\| = 0, \quad \forall s_i, \tau_i \in \Delta_i. \quad (\text{ПЗ.93})$$

Чтобы показать это, проинтегрируем выражение (ПЗ.83):

$$\|\hat{\theta}(s_i) - \hat{\theta}(\tau_i)\| = \left\| \Gamma \int_{s_i}^{\tau_i} (f(\mathbf{x}(\tau), \theta, \tau) - f(\mathbf{x}(\tau), \hat{\theta}(\tau), \tau)) \alpha(\mathbf{x}(\tau), \tau) d\tau \right\|. \quad (\text{ПЗ.94})$$

Применяя неравенство Коши-Шварца к (ПЗ.94) и последовательно используя теорему о среднем, получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\hat{\theta}(s_i) - \hat{\theta}(\tau_i)\| &\leq \int_{t_i}^{t_i+T} \|\Gamma\| \cdot |f(\mathbf{x}(\tau), \theta, \tau) - f(\mathbf{x}(\tau), \hat{\theta}(\tau), \tau)| \cdot \|\alpha(\mathbf{x}(\tau), \tau)\| d\tau \\ &= \|\Gamma\| \cdot T \cdot |f(\mathbf{x}(\tau'_i), \theta, \tau'_i) - f(\mathbf{x}(\tau'_i), \hat{\theta}(\tau'_i), \tau'_i)| \cdot \|\alpha(\mathbf{x}(\tau'_i), \tau'_i)\|, \quad \tau'_i \in \Delta_i. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.95})$$

С учетом справедливости предельного соотношения (ПЗ.92), $\mathbf{x}(t) \in L_\infty^n[t_0, \infty]$ и того факта, что $\alpha(\mathbf{x}, t)$ локально ограничена равномерно по t , из (ПЗ.95) вытекает выполнение предельного соотношения (ПЗ.93).

Выберем последовательность точек из $\mathbb{R}_+ \setminus \{\tau_i\}_{i=1}^\infty$ такую, что $\tau_i \in \Delta_i$, $i \in \mathbb{N}$. Как следует из условия нелинейной предельной невырожденности (неравенство (3.143)), для любого $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i)$, $\tau_i \in \Delta_i$ существует точка $t'_i \in \Delta_i$ такая, что выполняется следующее неравенство

$$\|f(\mathbf{x}(t'_i), \boldsymbol{\theta}, t'_i) - f(\mathbf{x}(t'_i), \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i), t'_i)\| \geq \varrho(\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i)\|) \geq 0. \quad (\text{ПЗ.96})$$

Рассмотрим следующую разность: $f(\mathbf{x}(t'_i), \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i), t'_i) - f(\mathbf{x}(t'_i), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t'_i), t'_i)$, $\tau_i, t'_i \in \Delta_i$. Из свойств Д1, Д2, и (ПЗ.93) немедленно следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}(t'_i), \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i), t'_i) - f(\mathbf{x}(t'_i), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t'_i), t'_i) = 0, \quad \tau_i, t'_i \in \Delta_i. \quad (\text{ПЗ.97})$$

Учитывая (ПЗ.97) и (ПЗ.92), получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}(t'_i), \boldsymbol{\theta}, t'_i) - f(\mathbf{x}(t'_i), \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i), t'_i) &= \lim_{i \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}(t'_i), \boldsymbol{\theta}, t'_i) - f(\mathbf{x}(t'_i), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t'_i), t'_i)) + \\ &\lim_{i \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}(t'_i), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t'_i), t'_i) - f(\mathbf{x}(t'_i), \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i), t'_i) = 0. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.98})$$

Согласно (ПЗ.98) и (ПЗ.96), последовательность $\{\varrho(\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i)\|)\}_{i=1}^\infty$ ограничена сверху и снизу двумя последовательностями, стремящимися к 0. Следовательно

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varrho(\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i)\|) = 0.$$

Отметим, что $\varrho(\cdot) \in \mathcal{K} \cap C^0$, что автоматически означает, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i)\| = 0. \quad (\text{ПЗ.99})$$

Чтобы показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) = 0$, заметим, что $\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)\| \leq \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(s_i)\|$, $s_i = \arg \max_{s \in \Delta_i} \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(s)\| \quad \forall t \in \Delta_i$. Следовательно, применяя неравенство треугольника $\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(s_i)\| \leq \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i)\| + \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau_i) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(s_i)\|$ и используя равенства (ПЗ.93), (ПЗ.99), получаем, что $\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)\|$ ограничена сверху и снизу двумя функциями, стремящимися к 0. Следовательно, $\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и выполняется предельное отношение (3.22). *Теорема доказана.*

9.14. Доказательство Теоремы 3.11

Рассмотрим систему (3.155), и вычислим производные $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_0$ по независимой переменной t :

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_0 = \gamma S_\delta(\psi, \alpha(t))(\varphi(\psi) + \dot{\psi})(\varphi(\psi) + \alpha(t)), \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_0(t_0) \in \mathbb{R}. \quad (\text{ПЗ.100})$$

Для продолжения доказательства сформулируем две вспомогательные леммы 9.5 и 9.6.

Л е м м а 9.5. Рассмотрим систему (3.1), (3.10). Тогда функция $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ в (3.10) ограничена по $\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}$ и $\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t) \in L_\infty$. Тогда $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t), \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) \in L_\infty \Rightarrow \ddot{\psi} \in L_\infty$.

Доказательство леммы 9.5. Во-первых, $\psi(\mathbf{x}) \in L_\infty$, что непосредственно вытекает из ограниченности $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ и того факта, что функция φ принадлежит классу \mathcal{C}_φ , определенному равенством (3.150). Поэтому, в силу предположения (3.3) на функцию $\psi(\mathbf{x})$, состояние $\mathbf{x} \in L_\infty$. Кроме того, учитывая, что $\psi \in L_\infty$ и $\varphi \in C^1$, из (3.10) получаем, что $\dot{\psi} \in L_\infty$. Рассмотрим $\ddot{\psi}$:

$$\ddot{\psi} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u) + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} + \frac{\partial \varphi(\psi)}{\partial \psi} \dot{\psi} + \dot{\varepsilon}(t).$$

Производные $\frac{\partial f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \mathbf{x}}$ – непрерывные функции по \mathbf{x} и $\psi \in C^2, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \in C^1$. Поэтому они ограничены, так как $\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in L_\infty$. В дополнение, в силу непрерывности $\frac{\partial f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}$ они ограничены. Для завершения доказательства достаточно отметить, что функции ограничены в силу u ограниченности $\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Лемма доказана.

Л е м м а 9.6. Пусть функция $\psi(t)$ задана и ее вторая производная по времени ограничена: $|\ddot{\psi}| < \beta_1, \beta_1 > 0$. Тогда существует дифференцирующий фильтр второго порядка:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \psi; \\ y &= (c_1, 0) (\xi_1, \xi_2)^T, \quad b_1 \neq 0, \quad a_1, a_2 < 0, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.101})$$

и момент времени $t_1 > 0$ такие, что для любой константы $\epsilon > 0$ справедлива следующая оценка:

$$|y(t) - \dot{\psi}(t)| \leq \epsilon \quad \forall t > t_1.$$

В частности, если $c_1 b_1 = -a_1, b_2 = a_2 b_1$, тогда выход фильтра удовлетворяет следующему неравенству:

$$|y(t) - \dot{\psi}(t)| \leq \left| \frac{a_2 \beta_1}{a_1} \right| + \delta(t), \quad \delta(t) \rightarrow 0 \text{ at } t \rightarrow \infty. \quad (\text{ПЗ.102})$$

Доказательство леммы 9.6. Пусть $b_2 = a_2 b_1$. Тогда система (ПЗ.101) имеет следующее эквивалентное представление:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix} \dot{\psi}; \\ y &= (c_1 \ 0) (\xi_1, \xi_2)^T. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.103})$$

Обозначив

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

можно переписать модель фильтра в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= A\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}_1\dot{\psi}, \\ y &= \mathbf{c}^T \boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.104})$$

Рассмотрим выход y системы (ПЗ.104):

$$y = \mathbf{c}^T \left(e^{At} \boldsymbol{\xi}_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b}_1 \dot{\psi}(\tau) d\tau \right). \quad (\text{ПЗ.105})$$

Матрица A гурвицева и, поэтому, обратима. Следовательно, с учетом существования $\ddot{\psi}(t)$ и коммутативности матриц A^{-1} , e^{At} равенство (ПЗ.105) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{c}^T \left(e^{At} \boldsymbol{\xi}_0 - e^{At} A^{-1} e^{-At} \mathbf{b}_1 \dot{\psi}(t) \Big|_0^t + e^{At} A^{-1} \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b}_1 \ddot{\psi}(\tau) d\tau \right) = \\ &= \mathbf{c}^T \left(e^{At} \boldsymbol{\xi}_0 - A^{-1} \mathbf{b}_1 \dot{\psi}(t) + A^{-1} e^{At} \mathbf{b}_1 \dot{\psi}(0) + A^{-1} \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}_1 \ddot{\psi}(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.106})$$

Рассмотрим следующую разность $|y(t) - \dot{\psi}(t)|$:

$$\begin{aligned} |y(t) - \dot{\psi}(t)| &= \left| \mathbf{c}^T \left(e^{At} \boldsymbol{\xi}_0 - A^{-1} \mathbf{b}_1 \dot{\psi}(t) + A^{-1} e^{At} \mathbf{b}_1 \dot{\psi}(0) + A^{-1} \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}_1 \ddot{\psi}(\tau) d\tau \right) \right. \\ &\quad \left. - \dot{\psi}(t) \right| \leq \left| \mathbf{c}^T \left(e^{At} \boldsymbol{\xi}_0 - A^{-1} \mathbf{b}_1 \dot{\psi}(t) + A^{-1} e^{At} \mathbf{b}_1 \dot{\psi}(0) \right) - \dot{\psi}(t) \right| + \left| \mathbf{c}^T A^{-1} \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}_1 \ddot{\psi}(\tau) d\tau \right| \\ &= \left| \mathbf{c}^T \left(e^{At} \boldsymbol{\xi}_0 - A^{-1} \mathbf{b}_1 \dot{\psi}(t) + A^{-1} e^{At} \mathbf{b}_1 \dot{\psi}(0) \right) - \dot{\psi}(t) \right| + \left| \mathbf{c}^T A^{-2} e^{At} \mathbf{b}_1 \beta_1 - \mathbf{c}^T A^{-2} \mathbf{b}_1 \beta_1 \right|, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.107})$$

где $A^{-2} = A^{-1} A^{-1}$. Обозначим

$$\delta(t) = |\mathbf{c}^T e^{At} \boldsymbol{\xi}_0| + |\mathbf{c}^T A^{-1} e^{At} \mathbf{b}_1 \dot{\psi}(0)| + |\mathbf{c}^T A^{-2} e^{At} \beta_1|.$$

Величина $\delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ так как матрица A гурвицева. Поэтому для любого $\delta_1 > 0$ существует момент времени $t_1 > 0$ такой, что для любого $t > t_1$ справедливо следующее неравенство:

$$|y(t) - \dot{\psi}(t)| \leq |(\mathbf{c}^T A^{-1} \mathbf{b}_1 + 1) \dot{\psi}(t)| + |\mathbf{c}^T A^{-2} \mathbf{b}_1 \beta_1| + \delta_1. \quad (\text{ПЗ.108})$$

Рассмотрим величину $\mathbf{c}^T A^{-1} \mathbf{b}_1$ в (ПЗ.108). Матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_1} \begin{pmatrix} -a_2 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{c}^T A^{-1} \mathbf{b}_1 = (c_1 \ 0) \frac{1}{a_1} \begin{pmatrix} -a_2 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{b_1 c_1}{a_1}.$$

Отметим, что $\frac{b_1 c_1}{a_1} = -1$ в силу предположений леммы. Поэтому, используя неравенство (ПЗ.108), можно получить следующую оценку:

$$|y(t) - \dot{\psi}(t)| \leq |(\mathbf{c}^T A^{-2} \mathbf{b}_1 \beta_1)| + \delta_1,$$

где

$$A^{-2} = \frac{1}{a_1^2} \begin{pmatrix} a_2^2 + a_1 & -a_2 \\ -a_2 a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |y(t) - \dot{\psi}(t)| &\leq \left| (c_1 \ 0) \frac{1}{a_1^2} \begin{pmatrix} a_2^2 + a_1 & -a_2 \\ -a_2 a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix} \beta_1 \right| \\ &+ \delta_1 = \left| \frac{a_2 \beta_1}{a_1} \right| + \delta_1. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.109})$$

Неравенство (ПЗ.109) доказывает лемму 9.6. *Лемма доказана.*

Леммы 9.5, 9.6 позволяют показать, что $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t, \delta)$, $\delta = \delta_0 + \Delta$, $\delta_0 \in \mathbb{R}_+$ имеет предел при $t \rightarrow \infty$. Вначале покажем, что $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t, \delta)$ ограничены. Кроме того, $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t, \delta)$ непрерывна и имеет ограниченную производную по времени. В соответствии с леммой 9.5 производная $\dot{\psi}$ ограничена. Поэтому как следует из леммы 9.6, существуют параметры a_1, a_2, b_1, b_2 фильтра (ПЗ.103) такие, что $|\alpha(t) - \dot{\psi}(t)| < \delta_0/4 + |\delta_1(t)|$, где $\delta_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В частности, существует момент времени $t_1 > 0$ такой, что $|\delta_1(t)| < \delta_0/4$ для любого $t > t_1$. Отметим, что функция $\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t, \delta)$ ограничена при $t \leq t_1$ (как сумма и интеграл ограниченных по времени функций). Покажем, что для любых $t > t_1$ функция $\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t, \delta)$ монотонно возрастает по t .

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t > t_1$. Принимая во внимание, что $|\alpha(t) - \dot{\psi}(t)| < \delta_0/2$ для любых $t > t_1$, оценка функции $\alpha(t)$ может быть получена в виде:

$$\alpha(t) = \dot{\psi}(t) + \mu(t), \quad |\mu(t)| \leq \delta_0/2. \quad (\text{ПЗ.110})$$

Поэтому для любых $\alpha(t), \psi$: $|(\alpha(t) + \varphi(\psi))| > \delta$ имеем

$$\begin{aligned} (\dot{\psi} + \varphi(\psi))(\alpha(t) + \varphi(\psi)) &= (\alpha + \varphi(\psi) - \mu(t))(\alpha(t) + \varphi(\psi)) \\ &= (\alpha(t) + \varphi(\psi))^2 - \mu(t)(\alpha(t) + \varphi(\psi)) \geq |(\alpha(t) + \varphi(\psi))| \delta \\ &- \frac{\delta_0}{2} |(\alpha(t) + \varphi(\psi))| \geq \frac{\delta_0^2}{2} > 0. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.111})$$

Следовательно, согласно равенствам (ПЗ.100), (ПЗ.111) получаем, что функция $\hat{\theta}_0(t, \mathbf{x}, \delta)$ монотонна, непрерывна и не убывает с ростом t .

Покажем, что функция $\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t, \delta)$ также ограничена сверху. Предположим, что для любых $D_\theta > 0$ существует $t_2 > 0$ такое, что:

$$|\hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t_1), t_1, \delta) - \hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t_2), t_2, \delta)| > D_\theta. \quad (\text{ПЗ.112})$$

Выберем $D_\theta > T$, где значения T определяются в соответствии (3.154). Функция

$$\hat{\theta}_0(\mathbf{x}(\tau), \tau, \delta)$$

непрерывна по τ и ограничена для любого $\tau \in [t_1, t_2]$ (ограниченность $\hat{\theta}_0(\mathbf{x}(\tau), \tau, \delta)$ вытекает из ограниченности производной на конечном интервале). Поэтому согласно теореме о промежуточном значении для любого $0 < T_0 < D_\theta$ существует $t_3 \in [t_1, t_2]$ такое, что $\hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t_3), t_3, \delta) = \hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t_1), t_1, \delta) + T_0$. Учитывая (3.154), получаем, что для любого $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ существует $t_3 > 0$ такое, что:

$$\theta = \lambda(\hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t_3), t_3, \delta)), \quad t_3 \in [t_1, t_2].$$

Однако согласно свойствам функции $\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t, \delta)$ производная $\dot{\hat{\theta}}_0(t) \equiv 0$ для любого $t \geq t_3$, так как

$$\begin{aligned} |\alpha(t_3) + \varphi(\psi(\mathbf{x}(t_3)))| &= |\dot{\psi} + \varphi(\psi(\mathbf{x}(t_3))) + \mu(t_3)| = \\ |f(\mathbf{x}, \lambda(\hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t_3), t_3, \delta)) - f(\mathbf{x}, \theta)) + \varepsilon(t_3) + \mu(t_3)| &\leq \\ |\varepsilon(t)| + |\mu(t)| &\leq \delta_0/2 + \Delta < \delta \quad \forall t \geq t_3. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t_2), t_2, \delta) = \hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t_3), t_3, \delta) \leq \hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t_1), t_1, \delta) + T,$$

что противоречит (ПЗ.112).

Ранее было показано, что $\hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t), t, \delta)$ непрерывна, монотонна и органичена для любого $t > t_1$. Поэтому, применяя теорему Больцано-Вейерштрасса, получаем, что существует следующий предел:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{\theta}_0(\mathbf{x}(\tau), \tau, \delta) = \hat{\theta}_{0,\infty}. \quad (\text{ПЗ.113})$$

Принимая во внимание равенство (ПЗ.100), перепишем функцию $\hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t), t, \delta)$ для $t > t_1$ в виде:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t), t, \delta) &= \hat{\theta}_0(\mathbf{x}(t_1), t_1, \delta) + \int_{t_1}^t S_\delta(\varphi(\psi(\tau)), \alpha(\tau))(\dot{\psi}(\tau) \\ &\quad + \varphi(\psi(\tau)))(\varphi(\psi(\tau)) + \alpha(\tau))d\tau. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.114})$$

Из уравнений (ПЗ.114), (ПЗ.113) и неравенства (ПЗ.111) получаем следующую оценку:

$$0 < \int_{t_1}^{\infty} S_\delta(\varphi(\psi(\tau)), \alpha(\tau)) \frac{\delta^2}{2} d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} (\bar{t}_i - \underline{t}_i) \frac{\delta^2}{2} < \infty.$$

В последнем неравенстве подразумевается, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{t}_i - \underline{t}_i = 0.$$

Рассмотрим $|\varphi(\psi(t)) + \alpha(t)|$ для $t \in [\underline{t}_i, \bar{t}_i]$:

$$|\varphi(\psi(t)) + \alpha(t)| \leq |\varphi(\psi(\underline{t}_i)) + \alpha(\underline{t}_i)| + (\bar{t}_i - \underline{t}_i)D_{|\cdot|},$$

где $D_{|\cdot|} = \max_{t \in [\underline{t}_i, \bar{t}_i]} \frac{d}{dt} |\varphi(\psi(t)) + \alpha(t)|$. Функция $D_{|\cdot|}$ ограничена по времени и поэтому

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\varphi(\psi(t)) + \alpha(t)| = \delta. \quad (\text{ПЗ.115})$$

Учитывая (ПЗ.115) получаем, что динамику функции $\psi(t)$ для $t > t_1$ можно описать следующим образом:

$$\dot{\psi} = \mu(t) - \varphi(\psi), \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |\mu(t)| \leq \frac{1}{2}\delta_0 + \delta = \frac{3}{2}\delta_0 + \Delta. \quad (\text{ПЗ.116})$$

Согласно определению \limsup существует момент времени t_4 такой, что $|\mu(t)| < 2\delta_0 + \Delta$ для любого $t > t_4$. Рассмотрим следующую функцию:

$$V(\psi, \nu) = \int_0^{\psi(t)} \phi(\xi, \nu) d\xi, \quad \phi(\xi, \nu) = \begin{cases} \xi - \nu, & \xi > \nu; \\ 0, & -\nu \leq \xi \leq \nu; \\ \xi + \nu, & \xi < -\nu; \end{cases} \quad , \quad \nu \geq 0,$$

где $\psi(t)$ решение системы (ПЗ.116) для $t > t_4$ с начальным условием $\psi(t_4)$. Функция $\varphi(\psi) \in \mathcal{C}_\varphi(k)$, поэтому $\varphi(\psi)\psi \geq k\psi^2$. Выберем $\nu = (2\delta_0 + \Delta)/k$ и рассмотрим производную \dot{V} :

$$\dot{V} = \phi(\psi, \nu)\dot{\psi} = \phi(\psi, \nu)(\mu(t) - \varphi(\psi)) \leq \phi(\psi, \nu)(\mu(t) - k\psi) \leq 0.$$

Более того, из леммы Барбалата следует, что $\phi(\psi, \nu) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это автоматически означает, что существует момент времени t_5 такой, что $\|\psi(\mathbf{x}(t))\|_\infty \leq (3\delta_0 + \Delta)/k$ для любого $t > t_5$.

Ранее было показано, что для любых $\delta > \Delta + \delta_0$, $\delta_0 > 0$, $\varphi \in \mathcal{C}_\varphi(k)$ и $\mathbf{x}_0 \in \Omega_{\mathbf{x}}$ существует алгоритм (3.155) с произвольным $\gamma > 0$ и такими начальными условиями, что $\Omega_\psi(2\delta_0/k + \Delta/k)$ содержит ω -предельное множество системы (3.1), (3.8) с $\varepsilon(t) : \|\varepsilon(t)\|_\infty \leq \Delta$. Кроме того, было показано, что траектории $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ сходятся в область $\Omega_\psi(3\delta_0/k + \Delta/k)$ за конечное время. Поэтому для завершения доказательства теоремы выберем произвольное $\epsilon > 0$, достаточно выбрать $\delta_0 < 1/3k\epsilon$. Следовательно, утверждения 1 и 2 теоремы доказаны.

Покажем, что выполняется утверждение 3 теоремы. Отметим, что доказательства достаточно показать, что $\lambda(\hat{\theta}_{0,\infty}) \in \mathcal{U}_\epsilon([\theta]_\Delta)$, где $\hat{\theta}_{0,\infty}$ определено как в (ПЗ.113). Допустим, что $\lambda(\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t_1, \delta))$ не принадлежит $\mathcal{U}_\epsilon([\theta]_\Delta)$, и рассмотрим уравнение (ПЗ.110) для $t > t_1$. Согласно (ПЗ.110) справедливо следующее равенство:

$$\dot{\psi} + \varphi(\psi) + \mu(t) = \alpha(t) + \varphi(\psi) = f(\mathbf{x}, \theta) - f(\mathbf{x}, \hat{\theta}) + \varepsilon(t) + \mu(t), \quad |\mu(t) + \varepsilon| \leq \frac{\delta_0}{2} + \Delta.$$

Функция $\lambda(\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t_1, \delta))$ не принадлежит $\mathcal{U}_\epsilon([\theta]_\Delta)$, поэтому существует $\tau(t)$ такое, что $|f(\mathbf{x}(t + \tau(t), \theta) - f(\mathbf{x}(t + \tau(t)), \hat{\theta}))| > 2\delta_0 + \Delta$, и, следовательно, $|\alpha(t + \tau(t)) + \varphi(\psi(\mathbf{x}(t + \tau(t))))| > \delta_0 + \delta_0/2 + \Delta$, $t + \tau(t) > t_1$. Обозначим $t_6 = t + \tau(t)$. Отметим, что

$$\dot{\alpha}(t), \partial\varphi(\psi(\mathbf{x}(t)))/\partial\psi\dot{\psi} \in L_\infty.$$

Следовательно, существует константа $\tau_1 > 0$ такая, что $|\varphi(\psi(t)) + \alpha(t)| > \delta = \delta_0 + \Delta$ для любого $t \in [t_6, t_6 + \tau_1]$. Кроме того, функция $\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t, \delta)$ монотонна и, в силу (П3.111), (3.156) увеличивается на, по меньшей мере, $N\tau_1\delta^2/2$ за интервал времени $[t_1, t]$, $t > t_1 + N\tau_1$ до $\lambda(\hat{\theta}_0(t)) \in \mathcal{U}_\epsilon([\theta]_\Delta)$. С другой стороны, было показано, что функция $\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t, \delta)$ ограничена сверху и, кроме того, стремится к пределу $\hat{\theta}_{0,\infty} < \infty$. Поэтому существует момент времени t_7 , $t_1 < t_7 < \infty$ такой, что $\lambda(\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t, \delta)) \in \mathcal{U}_\epsilon([\theta]_\Delta)$ для любого $t > t_7$.

Предположим, что $\lambda(\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t_1, \delta)) \in \mathcal{U}_\epsilon([\theta]_\Delta)$. Тогда существуют две возможности: первая – значения функции $\lambda(\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t, \delta)) \in \mathcal{U}_\epsilon([\theta]_\Delta)$ для любого $t > t_1$, и вторая – значения функции $\lambda(\hat{\theta}_0(\mathbf{x}, t, \delta))$ когда-нибудь покинут область $\mathcal{U}_\epsilon([\theta]_\Delta)$. В этом случае, однако, можно применить ранее доказанные результаты. *Теорема доказана.*

9.15. Доказательство Следствия 3.3

Пусть $\lambda(\tau, \lambda_0)$ является решением системы (3.159). Рассмотрим его как функцию независимой переменной τ . Выберем некоторую монотонную и строго возрастающую функцию σ такую что выполняется следующее равенство

$$\tau = \sigma(t), \quad \sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

В силу того, что множество $\eta(\Omega_\lambda)$ плотно в Ω_θ , для любого $\theta \in \Omega_\theta$ всегда найдется такой вектор $\lambda_\theta \in \Omega_\lambda$ что $\eta(\lambda_\theta) = \theta + \epsilon_\theta$, где $\|\epsilon_\theta\|$ сколь угодно мало. Более того, траектория $\lambda(\tau)$ плотна в Ω_λ . Следовательно существует точка $\lambda^* = \lambda(\tau^*, \lambda_0)$ сколь угодно близкая по норме $\|\cdot\|$ к λ_θ . Рассмотрим следующую разность

$$\mathbf{f}(\xi(t), \theta) - \mathbf{f}(\xi(t), \hat{\theta}) = \mathbf{f}(\xi(t), \theta) - \mathbf{f}(\xi(t), \eta(\lambda^*)) + \mathbf{f}(\xi, \eta(\lambda^*)) - \mathbf{f}(\xi, \eta(\lambda(\sigma(t)))).$$

Функция $\mathbf{f}(\cdot)$ локально ограничена, а функция $\eta(\cdot)$ локально липшицева. Тогда справедлива оценка

$$\|\mathbf{f}(\xi, \theta) - \mathbf{f}(\xi, \eta(\lambda^*))\| \leq D_f \|\epsilon_\theta\| + \Delta_f = \Delta_\theta + \Delta_f$$

где Δ_θ число может быть выбрано сколь угодно малым (за счет подходящего выбора векторов $\lambda_\theta \in \Omega_\lambda$, $\lambda^* = \lambda(\tau^*, \lambda_0)$). Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\xi, \eta(\lambda^*)) - \mathbf{f}(\xi, \eta(\lambda(\sigma(t))))\| &\leq D_f \|\eta(\lambda^*) - \eta(\lambda(\sigma(t)))\| + \Delta_f + \Delta_\theta \\ &\leq D_f \cdot D_\eta \|\lambda^* - \lambda(\sigma(t))\| + \Delta_f + \Delta_\theta. \end{aligned} \quad (\text{П3.117})$$

Принимая во внимание равенство $\lambda^* = \lambda(\tau^*, \lambda_0) = \lambda(\sigma(t^*), \lambda_0)$ и учитывая устойчивость по Пуассону системы (3.159), всегда можно выбрать точку $\lambda^*(\sigma^*, \lambda_0)$ так, что $\sigma^* > \sigma(t_0) = \tau_0$ для любого $\tau_0 \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, в силу (П3.117) имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\xi, \eta(\lambda^*)) - \mathbf{f}(\xi, \eta(\lambda(\sigma(t))))\| &\leq D_f \cdot D_\eta \left\| \int_{\sigma(t)}^{\sigma^*} S(\lambda(\sigma(\tau))) d\tau \right\| + \Delta_f + \Delta_\theta \\ &\leq D_f \cdot D_\eta \cdot \max_{\lambda \in \Omega_\lambda} \|S(\lambda)\| |\sigma^* - \sigma(t)| = \mathcal{D} \cdot |\sigma^* - \sigma(t)| + \Delta_f + \Delta_\theta, \quad \mathcal{D} = D_f \cdot D_\eta \cdot \max_{\lambda \in \Omega_\lambda} \|S(\lambda)\|. \end{aligned} \quad (\text{П3.118})$$

Вводя обозначение $\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(\xi(t), \theta) - \mathbf{f}(\xi(t), \hat{\theta}) + \varepsilon(t)$, можно заключить, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\| &\leq \Delta_\varepsilon + \Delta_f + \|\mathbf{f}(\xi(t), \theta) - \mathbf{f}(\xi(t), \eta(\lambda^*))\| + \mathcal{D} \cdot |\sigma^* - \sigma(t)| \\ &\leq \Delta_\varepsilon + 2\Delta_f + \Delta_\theta + D_f \|\theta - \eta(\lambda^*)\| + \mathcal{D} \cdot |\sigma^* - \sigma(t)|. \end{aligned} \quad (\text{П3.119})$$

Отметим, что плотность $\lambda(t, \lambda_0)$ в Ω_λ влечет возможность выбора точки λ^* таким образом, что

$$D_f \|\theta - \eta(\lambda^*)\| = D_f \|\eta(\lambda_\theta) - \eta(\lambda^*)\| \leq D_f D_\eta \|\lambda_\theta - \eta(\lambda^*)\| \leq \Delta_\lambda,$$

где $\Delta_\lambda > 0$ сколь угодно малая константа. Тогда, в соответствии с (П3.119), имеем

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{\infty, [t_0, t]} \leq 2\Delta_f + \Delta_\varepsilon + \delta + \mathcal{D} \cdot \|\sigma^* - \sigma(t)\|_{\infty, [t_0, t]},$$

где член $\delta > \Delta_\theta + \Delta_\lambda$ сколь угодно мал по величине.

Следовательно, предположение 3.20 влечет выполнение следующего неравенства:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}} \leq \beta(t - t_0) \|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}} + c \cdot \mathcal{D} \cdot \|\sigma^* - \sigma(t)\|_{\infty, [t_0, t]} \quad (\text{П3.120})$$

Определим теперь функцию $\sigma(t)$ в виде

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t \gamma \|\psi(\mathbf{x}(\tau))\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}} d\tau, \quad (\text{П3.121})$$

и введем обозначение

$$h(t) = \sigma^* - \sigma(t) = \sigma^* - \int_{t_0}^t \gamma \|\psi(\mathbf{x}(\tau))\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}} d\tau.$$

Тогда для всех $t', t \geq t_0$, $t \geq t'$ справедливо равенство

$$h(t') - h(t) = \int_{t'}^t \gamma \|\psi(\mathbf{x}(\tau))\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}} d\tau$$

Принимая во внимание выражения (П3.117), (П3.118), равенство

$$\frac{d\lambda(\sigma(t), \lambda_0)}{dt} = \frac{\partial \lambda(\sigma(t), \lambda_0)}{\partial \sigma(t)} \frac{d\sigma(t)}{dt} = S(\lambda(\sigma(t), \lambda_0)) \gamma \|\psi(\mathbf{x}(\tau))\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}},$$

выражение (ПЗ.120), и обозначение $D_\lambda = c \cdot \mathcal{D}$, можно заключить, что вдоль решений системы (3.160) имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}} &\leq \beta(t - t_0) \|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}} + D_\lambda \|h(\tau)\|_{\infty, [t_0, t]}; \\ h(t_0) - h(t) &= \int_{t_0}^t \gamma \|\psi(\mathbf{x}(\tau))\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}} d\tau. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.122})$$

Тогда в силу следствия 2.2 выполняются предельные соотношения (3.162) для всех $|h(t_0)|$, $\|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}_{\Delta+\delta}}$, удовлетворяющих

$$\begin{aligned} \Omega_\gamma : \gamma &\leq \left(\beta_t^{-1} \left(\frac{d}{\kappa \cdot \beta_t(0)} \right) \right)^{-1} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \times \\ &\times \frac{h(t_0)}{\beta_t(0) \|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathcal{A}_{\Delta+\delta}} + \beta_t(0) \cdot D_\lambda \cdot |h(t_0)| \left(1 + \frac{\kappa}{1-d} \right) + D_\lambda |h(t_0)|} \end{aligned}$$

для некоторых $d < 1$, $\kappa > 1$. Отметим, однако, что $\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{A}_{\Delta+\delta}}$ всегда ограничена в силу того, что функция $\mathbf{f}(\cdot)$ липшицева по $\boldsymbol{\theta}$, и вектора $\boldsymbol{\theta}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ограничены ($\boldsymbol{\eta}(\cdot)$ липшицева и, кроме того, решение $\boldsymbol{\lambda}(t, \boldsymbol{\lambda}_0)$ ограничено по условиям следствия). В силу того, что система (3.159) устойчива по Пуассону, всегда возможно выбрать точку $\boldsymbol{\lambda}^*$ на ее решении такую, что значение $h(t_0) = \sigma^*$ сколь угодно велико. Тогда выбор параметра γ в (ПЗ.122) из условия (3.161) гарантирует ограниченность $h(t)$. Более того, функция $h(t)$ имеет предел при $t \rightarrow \infty$. Это, в свою очередь, означает, что $\gamma \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}(\tau)\|_{\mathcal{A}_{\Delta(M)}} d\tau$ сходится к пределу при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\boldsymbol{\lambda}(t, \boldsymbol{\lambda}_0)$ сходится к некоторому $\boldsymbol{\lambda}' \in \Omega_\lambda$. Другими словами,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \boldsymbol{\theta}'$$

для некоторого $\boldsymbol{\theta}' \in \Omega_\theta$. Отметим, что по условиям следствия система (3.158) имеет статическую характеристику по входу $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Тогда, аналогично доказательству леммы 2.2, можно показать выполнение предельного соотношения (3.162). *Следствие доказано.*

10. Приложение 4

10.1. Доказательство Теоремы 4.1

Обозначим

$$g(s, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_\xi} c_i \sigma_i(\mathbf{w}_i^T(s \oplus \mathbf{x}) + b_i).$$

Примем во внимание, что в силу непрерывности ϱ^{-1} и согласно оценке (4.8), функция $g(s, \mathbf{x}) \in L_2^{n+1}(\Omega)$. Более того, имеет место равенство:

$$g(s, \mathbf{x}) = \varrho^{-1}(y(s, \mathbf{x})) + \delta(s, \mathbf{x}), \quad \|\delta(s, \mathbf{x})\|_{2,\Omega} \leq \|\varepsilon(s, \mathbf{x})\|_{2,\Omega}. \quad (\text{П4.1})$$

Учитывая, что $\rho(s) = s^2$, получим

$$g^2(s, \mathbf{x}) = y(s, \mathbf{x}) + 2(y(s, \mathbf{x}))^{1/2} \delta(s, \mathbf{x}) + \delta^2(s, \mathbf{x}). \quad (\text{П4.2})$$

Применяя интегральное неравенство Гельдера и учитывая (П4.1), получим

$$\|g^2(s, \mathbf{x}) - y(s, \mathbf{x})\|_{1,\Omega} \leq 2\|y^{1/2}(s, \mathbf{x})\|_{2,\Omega} \cdot \|\varepsilon(s, \mathbf{x})\|_{2,\Omega} + \|\varepsilon(s, \mathbf{x})\|_{2,\Omega}^2,$$

что доказывает (4.10).

Докажем (4.11). Интегрируя по s обе части уравнения (П4.2), получаем

$$\int_{s_0}^s g^2(\xi, \mathbf{x}) d\xi + f^*(s_0, \mathbf{x}) = f^*(s, \mathbf{x}) + 2 \int_{s_0}^s (y(\xi, \mathbf{x}))^{1/2} \delta(\xi, \mathbf{x}) d\xi + \int_{s_0}^s \delta^2(\xi, \mathbf{x}) d\xi.$$

Следовательно,

$$\left\| \int_{s_0}^s g^2(\xi, \mathbf{x}) d\xi + f^*(s_0, \mathbf{x}) - f^*(s, \mathbf{x}) \right\|_{\infty, \Omega} \leq 2 \int_{s_0}^s (y(\xi, \mathbf{x}))^{1/2} d\xi \|\varepsilon(s, \mathbf{x})\|_{\infty, \Omega} + |s - s_0| \|\varepsilon(s, \mathbf{x})\|_{\infty, \Omega}^2.$$

Теорема доказана.

10.2. Доказательство Теоремы 4.2

Доказательство проведем в 3 этапа. Во-первых, преобразуем исходную систему (4.19) в систему, правые части уравнений которой зависят только от одного набора параметров $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ вместо двух α и β . Во-вторых, для каждого x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ покажем, что решение $x_i(t)$ принадлежит интервалу $[0, 1]$ для любого $x_i(0) \in (0, 1)$; $x(t)$ – монотонная сигмоидная функция с параметрами, зависящими от α и начальных

условий. Тогда для завершения доказательства будет достаточно применить широко известный результат¹ из теории аппроксимации [142, 165].

Начнем со следующей леммы.

Л е м м а 10.1. Пусть задана система (4.19) и $\beta_i \neq 0$. Тогда существует линейное преобразование $\hat{x}_i = \beta_i x_i$ координат системы (4.19) такое, что выполняется следующее:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \alpha_1 \hat{x}_1 (1 - \hat{x}_1); \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \alpha_2 \hat{x}_2 (1 - \hat{x}_2); \\ \dots &= \dots \\ \dot{\hat{x}}_n &= \alpha_n \hat{x}_n (1 - \hat{x}_n); \\ y(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbf{C}}^T \mathbf{x} = \sum_i \frac{C_i}{\beta_i} \hat{x}_i, \quad \hat{x}_i(0) = \beta_i \Delta_i,\end{aligned}\tag{П4.3}$$

Доказательство леммы 10.1. Прежде всего вычислим $\dot{\hat{x}}_i = \beta_i \dot{x}_i$:

$$\dot{\hat{x}}_i = \beta_i \dot{x}_i = \alpha_i \beta_i x_i (1 - \beta_i x_i) = \alpha_i \hat{x}_i (1 - \hat{x}_i).$$

Легко заметить, что это i -ое уравнение системы (П4.3). Кроме того, так как $\hat{x}_i(t) = \beta_i x_i(t)$, то $\hat{x}_i(0) = \beta_i x_i(0)$. Формула для $y(\mathbf{x})$ следует непосредственно из равенств $\beta_i \neq 0$ и $x_i = \hat{x}_i / \beta_i$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 10.1. Отметим, что линейное преобразование $\hat{x}_i = \beta_i x_i$ взаимно-однозначное, и поэтому любую систему (4.20) можно привести к виду (П4.3), используя обратное преобразование $x_i = 1/\beta_i \hat{x}_i$. Поэтому дальнейшее доказательство будем проводить для системы (П4.3). Кроме того, всегда возможно провести преобразование таким образом, чтобы результирующие параметры α_i были положительны. Более того, учитывая (4.19), всегда можно выбрать линейное преобразование $\hat{x}_i = 1/C_i x_i$ такое, что результирующая система примет вид:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \alpha_1 \hat{x}_1 (1 - \beta_1 C_1 \hat{x}_1); \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \alpha_2 \hat{x}_2 (1 - \beta_2 C_2 \hat{x}_2); \\ \dots &= \dots \\ \dot{\hat{x}}_n &= \alpha_n \hat{x}_n (1 - \beta_n C_n \hat{x}_n); \\ y(\mathbf{x}) &= \mathbf{C}^T \mathbf{x} = \sum_i \frac{C_i}{C_i} \hat{x}_i = \sum_i \hat{x}_i, \quad \hat{x}_i(0) = \Delta_i / C_i.\end{aligned}\tag{П4.4}$$

¹Пусть f – непрерывная сигмоидная функция. Тогда конечные суммы вида: $\sum_{i=1}^n c_i f(a_i \mathbf{x} + b_i)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$ плотны в $C(I_n)$.

Таким образом, можно избавиться от неопределенности в функции выхода $y(\hat{\mathbf{x}})$ и заменить их параметрическими неопределенностями линейно-параметризованной системы (П4.4) с известной функцией выхода $y(\hat{\mathbf{x}})$.

Рассмотрим отдельно i -ое уравнение системы (П4.3). Сформулируем следующую лемму.

Л е м м а 10.2. Пусть дано следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = kx(1 - x), \quad k \neq 0, \quad (\text{П4.5})$$

и $x(t)$ – решение системы (П4.5) для начальных условий $x(0) = x_0$, $x_0 \in (0, 1)$. Тогда справедливы следующие свойства (П4.5):

- 1) $x(t)$ – монотонная функция при $t > 0$;
- 2) $x(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ для $k > 0$ и $x_0 \in (0, 1)$; $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для $k < 0$ и $x_0 \in (0, 1)$
- 3) $x(t)$ при $t > 0$ однозначно определяется начальным условием $x_0 \in (0, 1)$.

Доказательство леммы 10.2 очевидно и может быть найдено в большинстве классических книг по дифференциальным уравнениям и динамике. Например, первые два утверждения рассмотрены в [307], единственность следует из теоремы существования и единственности – [43].

В соответствии с леммой 10.2, получаем, что решения системы (П4.3) при $\alpha_i > 0$ полностью определяются выбором начальных условий $\hat{x}_i(0)$. Это означает, что если $\hat{x}_i(t + \tau)$ и $\check{x}_i(t)$ – решения системы (П4.3) и $\hat{x}_i(t + \tau) = \check{x}_i(t)$ для любого $t \geq 0$, тогда

$$\hat{x}_i(t + \tau) = \check{x}_i(t) \Leftrightarrow \hat{x}_i(\tau) = \check{x}_i(0).$$

Другими словами, для каждого решения $\hat{x}_i(t)$ сдвиг по времени эквивалентен выбору начальных условий. Кроме того, легко заметить, что для любого $\tau \in (-\infty, \infty)$ и $\hat{x}_i(0) \in (0, 1)$ существует начальное условие $\check{x}_i(0)$ такое, что $\hat{x}_i(t + \tau) = \check{x}_i(t)$.

Наконец, нетрудно убедиться в том, что $\hat{x}_i(t)$ – сигмоидная функция. Рассмотрим $\dot{\hat{x}}_i$. Как следует из уравнений системы (П4.3), производная по времени $\hat{x}_i(t)$:

$$\frac{\partial \hat{x}_i(t)}{\partial t} = \alpha_i \hat{x}_i(t)(1 - \hat{x}_i(t)),$$

тогда

$$\hat{x}_i(t) = \int \alpha_i \hat{x}_i(t)(1 - \hat{x}_i(t)) dt = f(\alpha_i t + b_i) + D, \quad (\text{П4.6})$$

где

$$f(\alpha_i t + b_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\alpha_i t + b_i)}}, \quad D = 0.$$

Так как начальные условия системы (П4.3) полностью определяют временной сдвиг решений $\hat{x}_i(t)$, коэффициенты b_i в (П4.6) зависят только от начальных условий $\hat{x}_i(0)$.

Таким образом, i -ое решение системы (П4.3) может быть записано в следующем виде:

$$\hat{x}_i(t) = f(\alpha_i t + b_i),$$

где $b_i \in (-\infty, \infty)$, $b_i = f^{-1}(\hat{x}_i(0))$ явным образом зависит от $\hat{x}_i(0) \in (0, 1)$ и $f(\cdot)$ сигмоидная функция. Рассмотрим выход $y(\mathbf{x})$ системы (П4.3):

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_i}{\beta_i} f(\alpha_i t + b_i) \right).$$

Обозначим $\hat{c}_i = C_i/\beta_i$, тогда функцию $y(\mathbf{x})$ можно записать в виде:

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (\hat{c}_i f(\alpha_i t + b_i)).$$

Поэтому, согласно [142], для любых $\varepsilon > 0$ и $g(t) \in C^1[0, T]$ существуют такие n , \hat{c}_i и b_i , что выполняется следующее неравенство:

$$\left| \sum_{i=1}^n (\hat{c}_i f(\alpha_i t + b_i)) - g(t) \right| \leq \varepsilon$$

для $t \in [0, T]$. В заключение доказательства теоремы достаточно отметить, что параметры α_i , β_i и начальные условия Δ_i могут быть однозначно восстановлены из b_i и \hat{c}_i . *Теорема 4.2 доказана.*

10.3. Доказательство Леммы 4.1

Доказательство леммы весьма тривиально. Траектории $\mathbf{x}(t)$ и $\hat{\mathbf{x}}(t)$ системы (4.22) ограничены, следовательно

$$|\hat{\mathbf{C}}^T \sum_{i=1}^n (\alpha_i (\xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{1,i}(\mathbf{x})) + \beta_i (\xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{2,i}(\mathbf{x}))) (1 - \lambda(t, D))| < D_2,$$

где $D_2 > 0$. Поэтому коэффициенты k_i^* (если такие существуют) должны удовлетворять неравенству:

$$\frac{D_2}{\varepsilon} < \frac{D_2}{\delta} < - \sum_{i=1}^n k_i^* \hat{c}_i$$

при $\varepsilon > \delta > 0$. Вектор $\hat{\mathbf{C}} \neq 0$. Тогда существует по крайней мере одно значение $\hat{c}_i \neq 0$. В силу этого найдется по крайней мере один вектор $k^* = (k_1^*, \dots, k_n^*)^T$ такой, что:

$$\hat{\mathbf{C}}^T k^* < -\frac{D_2}{\delta}.$$

Поэтому неравенство (4.23) выполняется для любого $\varepsilon > \delta > 0$. *Лемма доказана.*

10.4. Доказательство Теоремы 4.3

Согласно условиям теоремы вектор $\hat{\mathbf{C}} \neq 0$. Следовательно, согласно лемме 4.1, существуют коэффициенты k_i^* такие, что

$$\begin{aligned} & |\hat{\mathbf{C}}^T \sum_{i=1}^n (\alpha_i(\xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{1,i}(\mathbf{x})) + \beta_i(\xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{2,i}(\mathbf{x}))) (1 - \lambda(t, D))| \\ & + \epsilon \sum_{i=1}^n k_i^* \hat{c}_i < 0 \end{aligned} \quad (\text{П4.7})$$

для любого $\epsilon > \delta - \delta_1$, где $\delta > \delta_1 > 0$. Рассмотрим множество временных интервалов:

$$\begin{aligned} \Delta_{t,0} &= \{ \Delta(2i, 2i+1) = [t_{2i}, t_{2i+1}] | \lambda(t, D) = 0 \\ & \quad \forall t \in [t_{2i}, t_{2i+1}], i \in \mathcal{N}, t_0 < t_1 \cdots < t_j < t_{j+1} < t_{j+2} < \dots \}. \\ \Delta_{t,1} &= \{ \Omega(2i+1, 2i+2) = (t_{2i+1}, t_{2i+2}) | \lambda(t, D) = 1 \\ & \quad \forall t \in (t_{2i+1}, t_{2i+2}), t_1 < t_2 \cdots < t_j < t_{j+1} < t_{j+2} < \dots \}. \end{aligned}$$

Введем следующую положительно-определенную функцию

$$\begin{aligned} V(e, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, K) &= \int_0^e S_\delta(\nu) \nu d\nu + 0.5 \|\hat{\alpha} - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 \\ & \quad + 0.5 \|\hat{\beta} - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 + 0.5 \|K(t) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2, \end{aligned}$$

где компоненты k_i^* вектора k^* удовлетворяют неравенству (П4.7) для всех $\epsilon > \delta - \delta_1$. Ее производная по времени на множестве $\Delta_{t,0}$ может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(e, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, K) &= S_\delta(e) \left(e\dot{e} - \sum_{i=1}^n \left((\hat{\alpha}_i - \alpha_i) e \hat{\mathbf{C}}^T \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (\hat{\beta}_i - \beta_i) e \hat{\mathbf{C}}^T \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - (k_i(t) - k_i^*) e^2 \hat{c}_i \right) \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\dot{V} = 0$ для любого $|e| < \delta$, так как $S_\delta(e) \equiv 0$ для всех $|e| < \delta$. Пусть $|e| \geq \delta$, тогда

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S_\delta(e) e \left(\hat{\mathbf{C}}^T \sum_{i=1}^n \left(\hat{\alpha}_i \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \alpha_i \xi_{1,i}(\mathbf{x}) + \hat{\beta}_i \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \beta_i \xi_{2,i}(\mathbf{x}) \right) + \hat{\mathbf{C}}^T K(t) e \right) \\ & \quad - S_\delta(e) e \left(\sum_{i=1}^n (\hat{\alpha}_i - \alpha_i) \hat{\mathbf{C}}^T \xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - (\hat{\beta}_i - \beta_i) \hat{\mathbf{C}}^T \xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - (k_i(t) - k_i^*) e \hat{c}_i \right) \\ &= S_\delta(e) e \left(\sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{C}}^T \alpha_i (\xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{1,i}(\mathbf{x})) + \hat{\mathbf{C}}^T \beta_i (\xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{2,i}(\mathbf{x})) + k_i^* \hat{c}_i e \right) \\ &\leq S_\delta(e) |e| \left(\left| \left(\sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{C}}^T \alpha_i (\xi_{1,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{1,i}(\mathbf{x})) + \hat{\mathbf{C}}^T \beta_i (\xi_{2,i}(\hat{\mathbf{x}}) - \xi_{2,i}(\mathbf{x})) \right) \right| \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^n k_i^* \hat{c}_i |e| \right) \leq S_\delta(e) |e| \sum_{i=1}^n k_i^* \hat{c}_i (|e| - \delta + \delta_1) \leq S_\delta(e) |e| \sum_{i=1}^n k_i^* \hat{c}_i \delta_1 \leq 0. \end{aligned}$$

(Заметим, что для выполнения последнего неравенства сумма $\sum_{i=1}^n k_i^* \hat{c}_i$ должна быть отрицательна.) Учитывая, что \dot{V} неположительна на $[t_{2i}, t_{2i+1}]$, а также равенство $e(t_i) = 0$ (поскольку состояния наблюдателя и эталонной системы переводятся в $\mathbf{x}(0)$ за интервал времени $\Delta_{t,1}$), можно записать

$$\begin{aligned} & V(e(t_{2i}), \hat{\alpha}(t_{2i}), \hat{\beta}(t_{2i}), \hat{K}(t_{2i})) - V(e(t_{2i+1}), \hat{\alpha}(t_{2i+1}), \hat{\beta}(t_{2i+1}), \hat{K}(t_{2i+1})) \\ &= 0.5 \|\hat{\alpha}(t_{2i}) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 + 0.5 \|\hat{\beta}(t_{2i}) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 + 0.5 \|K(t_{2i}) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 - \\ & \quad 0.5 \|\hat{\alpha}(t_{2i+1}) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 - 0.5 \|\hat{\beta}(t_{2i+1}) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 - 0.5 \|K(t_{2i+1}) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 \\ &> \int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} S_{\delta}(e) |e(\tau)| \sum_{j=1}^n k_j^* \hat{c}_j |\delta_1| d\tau + \int_0^{e(t_{2i+1})} S_{\delta}(\nu) \nu d\nu. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующий ряд:

$$\begin{aligned} W(n) &= 0.5 \sum_{i=0}^n \left(\|\hat{\alpha}(t_{2i}) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|\hat{\beta}(t_{2i}) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|K(t_{2i}) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 - \right. \\ & \quad \left. \|\hat{\alpha}(t_{2i+1}) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|\hat{\beta}(t_{2i+1}) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|K(t_{2i+1}) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 \right). \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} & \|\hat{\alpha}(t_{2i+1}) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|\hat{\beta}(t_{2i+1}) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|K(t_{2i+1}) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 \\ &= \|\hat{\alpha}(t_{2i+2}) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|\hat{\beta}(t_{2i+2}) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|K(t_{2i+2}) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 \end{aligned}$$

в силу того, что вектора $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ и K остаются постоянными на интервалах $\Delta_{t,1}$. Тогда

$$\begin{aligned} W(n) &= 0.5 \left(\|\hat{\alpha}(t_0) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|\hat{\beta}(t_0) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|K(t_0) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 - \right. & (П4.8) \\ & \quad \left. \|\hat{\alpha}(t_{2n+1}) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|\hat{\beta}(t_{2n+1}) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 - \|K(t_{2n+1}) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 \right) \\ &> \sum_{i=0}^n \int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} S_{\delta}(e) |e(\tau)| \sum_{j=1}^n k_j^* \hat{c}_j |\delta_1| d\tau + \sum_{i=0}^n \int_0^{e(t_{2i+1})} S_{\delta}(\nu) \nu d\nu > 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathbf{x}(t)$, $\hat{\mathbf{x}}(t)$ ограничены, можно сделать вывод, что $\dot{\hat{\alpha}}$, $\dot{\hat{\beta}}$ и $\dot{K}(t)$ ограничены и, следовательно, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $K(t)$ тоже ограничены. Кроме того, выполняется следующее неравенство

$$\begin{aligned} & 0.5 \left(\|\hat{\alpha}(t_0) - \alpha\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|\hat{\beta}(t_0) - \beta\|_{\gamma^{-1}}^2 + \|K(t_0) - k^*\|_{\gamma^{-1}}^2 \right) \\ &> \sum_{i=0}^n \int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} S_{\delta}(e) |e(\tau)| \sum_{j=1}^n k_j^* \hat{c}_j |\delta_1| d\tau \\ &= \int_0^{t_{2n+1}} S_{\delta}(e) \lambda(\tau, D) |e(\tau)| \sum_{j=1}^n k_j^* \hat{c}_j |\delta_1| d\tau > 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$0 < \int_0^{\infty} S_{\delta}(e) \lambda(\tau, D) |e(\tau)| \sum_{j=1}^n k_j^* \hat{c}_j |\delta_1| d\tau < \infty.$$

Рассмотрим, наконец, временные интервалы $\Delta_i = [\tau_{2i}, \tau_{2i+1}] : |e|\lambda(t, D) \geq \delta \ \forall t \in \Delta_i$, $i \in \{0, 1, \dots, \infty\}$. Так как $|e(t)| > \delta$, то

$$\begin{aligned} \infty &> \int_0^\infty S_\delta(e)\lambda(\tau, D)|e(\tau) \sum_{j=1}^n k_j^* \hat{c}_j| \delta_1 d\tau > \int_0^\infty S_\delta(e)\lambda(\tau, D)|\delta \sum_{j=1}^n k_j^* \hat{c}_j| \delta_1 d\tau \\ &= \sum_{i=0}^\infty \Delta_i |\delta \sum_{j=1}^n k_j^* \hat{c}_j| \delta_1 > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд

$$\sum_{i=0}^\infty \Delta_i |\delta \sum_{j=1}^n k_j^* \hat{c}_j| \delta_1$$

сходится, и поэтому $\Delta_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Для завершения доказательства достаточно рассмотреть значения функции $e(t)$ на интервалах Δ_i . Производная \dot{e} ограничена в силу ограниченности \mathbf{x} , $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $K(t)$. Положим тогда, для определенности, что имеет место оценка $|\dot{e}| < D_3$. Тогда для любого $t \in \Delta_i$:

$$\begin{aligned} |e(t)\lambda(t, D)| &= |e(\tau_{2i}) + \int_{\tau_{2i}}^{\tau_{2i+1}} \dot{e}(\tau) d\tau| \leq |e(\tau_{2i})| + \left| \int_{\tau_{2i}}^{\tau_{2i+1}} \dot{e}(\tau) d\tau \right| \\ &\leq |e(\tau_{2i})| + |\Delta_i| D_3 = \delta + \Delta_i D_3. \end{aligned}$$

В силу этого факта

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |e(t)\lambda(t, D)| = \delta.$$

Следовательно, для любого сколь угодно малого $\delta_1 > 0$ существует такое t_1 , что

$$|e(t)\lambda(t, D)| < \delta + \delta_1$$

для любого $t > t_1$. Теорема 4.3 доказана.

Список источников

1. Алгоритмы управления и обучения в интеллектуальных системах с многослойными нейронными сетями / В. А. Терехов, В. Б. Яковлев, Д. В. Ефимов, И. Ю. Тюкин // Труды 2-го международного симпозиума INTELS'96. — Т. 1. — Санкт-Петербург: 1996. — С. 10–14.
2. Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления / Под ред. А. А. Солодовникова. — М.: Машиностроение, 1965. — 356 с.
3. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. — М.: Наука, 1990. — 128 с.
4. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 224 с.
5. *Бехтерева Н. П., Бундзен П. В., Гоголицин Ю. Л.* Мозговые коды психической деятельности. — Л.: Наука, 1985.
6. *Вавилов А. А., Имаев Д. Х.* Эволюционный синтез систем управления. — Л.: Ленинградский ордена Ленина Электротехнический Институт, 1983. — 80 с.
7. *Вапник В. Н., Червоненкис А. Я.* Теория распознавания образов. — М.: Наука, 1974. — 416 с.
8. *Воронов А. А., Рутковский В. Ю.* Современное состояние и перспективы развития адаптивных систем // Сб. ВК-59 «Вопросы кибернетики: проблемы теории и практики адаптивного управления». — М.: Изд-во АН СССР, 1985. — С. 5–48.
9. *Воротников В. И.* Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследования, результаты, особенности // *Автоматика и телемеханика*. — 1993. — № 3. — С. 3–62.
10. *Гибсон Д. И.* Системы самооптимизации или самонастраивающиеся системы автоматического регулирования // Тр. I-го межд. конгресса ИФАК «Теория

дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем». — Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 745–763.

11. *Демидович Б. П.* Лекции по теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
12. *Дрейпер Ч. С., Ли И. Т.* Автоматическая оптимизация управляемых систем / Под ред. Б. Н. Петрова. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 240 с.
13. *Дружинина М. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Методы адаптивного управления нелинейными объектами по выходу // *Автоматика и Телемеханика*. — 1996. — № 2. — С. 3–33.
14. *Дуда Р., Харт П.* Распознавание образов и анализ сцен. — М.: Мир, 1976. — 512 с.
15. *Ефимов Д. В., Терехов В. А., Тюкин И. Ю.* Синергетический подход к синтезу систем управления с использованием многослойных нейронных сетей // *Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ»*. — 1998. — № 520. — С. 3–25.
16. *Ефимов Д. В., Тюкин И. Ю.* Алгоритмы настройки многослойных нейросетей в системах управления // Труды 2-й конференции «Навигация и управление движением». — Санкт-Петербург, СПб. ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор»: 2000. — С. 121–130.
17. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем / Под ред. Г. С. Поспелова. — М.: Наука, 1970. — 704 с.
18. *Захаренкова Т. А., Терехов В. А., Тюкин И. Ю.* Алгоритмы обучения многослойных нейронных сетей в задачах управления // *Нейрокомпьютеры и их применение (НКП)-2000*. — Т. 2. — Москва: 2000. — 16–18 февраля.
19. *Ивахненко А. Г.* Задачи экстремального регулирования // *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*. — 1956. — № 10. — С. 41–56.
20. *Ивахненко А.* Кибернетические системы с комбинированным управлением. — Киев: Техника, 1966. — 512 с.
21. *Казакевич В. В.* Способ автоматического регулирования различных процессов по максимуму или по минимуму. Авт. св. № 66335 от 25.11.1943 // *Бюлл. изобретений*. — 1946. — № 10.

22. *Казакевич В. В.* Системы экстремального регулирования и некоторые способы улучшения их качества и устойчивости // Автоматическое управление и вычислительная техника. — М.: Машгиз, 1958. — С. 66–96.
23. *Казаков Ю. М., Евланов Л. Г.* О теории самонастраивающихся систем с поиском градиента методом вспомогательного оператора // Тр. II-го межд. конгресса ИФАК. — Т. 3. — М.: Наука, 1965. — С. 252–262.
24. *Квакернаак Х.* О допустимом адаптивном управлении // Тр. II-го межд. симпозиума ИФАК по самонастраивающимся системам. — М.: Наука, 1969. — С. 17–22.
25. *Козлов Ю. М., Юсупов Р. М.* Беспойсковые самонастраивающиеся системы. — М.: Наука, 1969. — 455 с.
26. *Колесников А. А.* Синергетическая Теория Управления. — М.: Энергоатомиздат, 1994. — 260 с.
27. *Колесников А. А.* Основы Синергетической Теории Управления. — М.: ИСПО-Сервис, 2000. — 260 с.
28. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.
29. *Красовский А. А.* Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. — М.: Физматгиз, 1963. — 468 с.
30. *Красовский А. А.* Оптимизационный подход в теории управления. Часть I // Современная прикладная теория управления / Под ред. А. А. Колесникова. — Таганрог: ТРТУ, 2000. — 400 с.
31. *Красовский А. А.* Теория самоорганизующегося оптимального регулятора с экстраполяцией // Современная прикладная теория управления (в 3-х частях). Ч. I. «Оптимизационный подход в теории управления» / Под ред. А. А. Колесникова. — Таганрог: ТРТУ, 2000. — С. 268–311.
32. *Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрик В.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. — М.: Наука, 1977. — 272 с.

33. *Кухтенко В. И.* Динамика самонастраивающихся систем со стабилизацией частотных характеристик. — М.: Машиностроение, 1970. — 232 с.
34. *Леонов Г. А.* Проблема Броккета в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений // *Алгебра и анализ*. — 2001. — Т. 13, № 4. — С. 134–155.
35. *Леонов Г. А.* Стабилизационная проблема Броккета // *Автоматика и Телемеханика*. — 2001. — № 5. — С. 190–193.
36. *Ли Я.-Ц., Ван дер Вальде У. И.* Теория нелинейных самонастраивающихся систем // Тр. I-го межд. конгресса ИФАК «Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем». — Т. 2. — М.: Изд.-во АН СССР, 1961. — С. 726–744.
37. *Марголис М., Леондес К. Т.* О теории самонастраивающейся системы регулирования; метод обучающейся модели // Тр. I-го межд. конгресса ИФАК «Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем». — Т. 2. — М.: Изд.-во АН СССР, 1961. — С. 683–698.
38. *Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами // Анализ и синтез нелинейных систем. — СПб.: Наука, 2000. — 549 с.
39. Нейросетевые системы управления / В. А. Терехов, Д. В. Ефимов, И. Ю. Тюкин, В. А. Антонов. — С-Пб.: Санкт-Петербургский Государственный Университет, 1999. — 266 с.
40. Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие // Информатика: неограниченные возможности и возможные ограничения / Под ред. И. М. Макарова. — М.: Наука, 2002. — 478 с.
41. Новое в синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение. сборник статей. Часть 1 // Фракталы, хаос, вероятность / Под ред. Г. Г. Малинецкого. — М.: Радиотехника, 2006. — 120 с.
42. Новые классы регуляторов технических систем. Часть III // Современная прикладная теория управления / Под ред. А. А. Красовского. — Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. — 559 с.

43. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Наука, 1965.
44. Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер; Под ред. Б. Т. Поляка. — М. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 468 с.
45. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления / Б. Н. Петров, В. Ю. Рутковский, И. Н. Крутова, С. Д. Земляков. — М.: Машиностроение, 1972. — 260 с.
46. *Прохоров Д. В., Терехов В. А., Тюкин И. Ю.* Об условиях применимости алгоритмов адаптивного управления в невыпуклых задачах // *Автоматика и Телемеханика*. — 2002. — № 2. — С. 101–108.
47. *Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. — М.: Наука, 1976. — 478 с.
48. *Путов В. В.* Методы построения адаптивных систем управления нелинейными нестационарными динамическими объектами с функционально-параметрической неопределенностью // Дисс. на соискание уч. степени д-ра техн. наук. — СПб.: СПбГЭТУ, 1993. — 603 с.
49. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987.
50. *Саридис Д.* Самоорганизующиеся стохастические системы управления. — М.: Наука, 1980. — 400 с.
51. Синергетика: процессы самоорганизации и управления / А. А. Колесников, Г. Е. Веселов, А. Н. Попов и др.; Под ред. А. А. Колесникова. — Таганрог: ТРТУ, 2004. — 360 с.
52. Синергетический подход в теории управления. Часть II // Современная прикладная теория управления / Под ред. А. А. Красовского. — Таганрог: ТРТУ, 2000. — 559 с.
53. *Срагович В. Г.* Теория адаптивных систем. — М.: Наука, 1981. — 384 с.

54. Терехов В. А., Антонов В. Н., Тюкин И. Ю. Адаптивное управление в технических системах. — Санкт-Петербургский Государственный Университет, 2001. — 262 с.
55. Терехов В. А., Ефимов Д. В., Тюкин И. Ю. Адаптивная система управления с нейронной сетью // *Известия Санкт-Петербургского Государственного Электротехнического Университета “ЛЭТИ”*. — 1996. — № 490. — С. 32–35.
56. Терехов В. А., Ефимов Д. В., Тюкин И. Ю. Адаптивные системы управления с использованием многослойных нейронных сетей (МНС) // *Известия Санкт-Петербургского Государственного Электротехнического Университета “ЛЭТИ”*. — 1996. — № 498. — С. 36–56.
57. Терехов В. А., Ефимов Д. В., Тюкин И. Ю. Искусственные нейронные сети и их применение в системах автоматического управления. — ИПЦ Санкт-Петербургского Государственного Электротехнического Университета, 1997. — 64 с.
58. Терехов В. А., Ефимов Д. В., Тюкин И. Ю. Структурный синтез адаптивных систем управления с многослойными нейронными сетями // *Известия Санкт-Петербургского Государственного Электротехнического Университета “ЛЭТИ”*. — 1997. — № 510. — С. 3–13.
59. Терехов В. А., Ефимов Д. В., Тюкин И. Ю. Нейросетевые системы управления // *Нейрокомпьютеры и их применение* / Под ред. В. И. Галушкина. — М.: ИПРЖР, 2002. — Т. 8. — 480 с.
60. Терехов В. А., Ефимов Д. В., Тюкин И. Ю. Нейросетевые системы управления. Учебное пособие для ВУЗов. — М.: Высшая Школа, 2002. — 182 с.
61. Терехов В. А., Тюкин И. Ю. Адаптивный алгоритм обучения многослойных нейронных сетей // *Труды международной научно-технической конференции «Нейронные, реляторные и непрерывно-логические сети»*. — Санкт-Петербург: 1998. — С. 62–64.
62. Терехов В. А., Тюкин И. Ю. Адаптивное управление на многообразиях // *Труды 6-го международного симпозиума (SPAS'99)*. — Т. 2. — С-Пб.: 1999. — С. 157–160.

63. Терехов В. А., Тюкин И. Ю. Исследование устойчивости процессов обучения нейронных сетей. Часть I // *Автоматика и Телемеханика*. — 1999. — Т. 60, № 10. — С. 145–161.
64. Терехов В. А., Тюкин И. Ю. Исследование устойчивости процессов обучения нейронных сетей. Часть II // *Автоматика и Телемеханика*. — 1999. — Т. 60, № 11. — С. 136–144.
65. Терехов В. А., Тюкин И. Ю. Нейросетевые системы управления: проблемы теории и практики // Труды 2-й конференции «Навигация и управление движением». — Санкт-Петербург, СПб. ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор»: 2000. — С. 97–121.
66. Терехов В. А., Тюкин И. Ю. Синергетический синтез нейросетевых систем управления // Современная прикладная теория управления. Часть III / Под ред. К. А. А. — Москва: Интеграция, 2000.
67. Терехов В. А., Тюкин И. Ю. Адаптивные системы управления: проблемы и тенденции // Труды всероссийской конференции «Управление и информационные технологии». — Т. 1. — Санкт-Петербург: ИСПО - Сервис, 2003. — С. 145–154.
68. Терехов В. А., Тюкин И. Ю. Эволюция и проблемы теории адаптивных систем управления. Часть I // *Мехатроника, автоматизация, управление*. — 2003. — № 6. — С. 9–18.
69. Терехов В. А., Тюкин И. Ю. Эволюция и проблемы теории адаптивных систем управления. Часть II // *Мехатроника, автоматизация, управление*. — 2003. — № 7. — С. 3–9.
70. Терехов В. А., Тюкин И. Ю. Синтез адаптивных нейросетевых регуляторов нелинейных динамических объектов // Стохастическая оптимизация в Информатике / Под ред. О. Н. Граничина. — С-Пб.: Санкт-Петербургский Государственный Университет, 2005. — № 1. — С. 222–256.
71. Терехов В. А., Яковлев В. Б., Тюкин И. Ю. Исследование устойчивости процессов обучения многослойных нейронных сетей методом функций Ляпунова // Труды 3-го международного симпозиума INTELS'98. — Псков: 1998. — С. 145–147.

72. Тимофеев А. В. Адаптивные робототехнические комплексы. — Машиностроение, 1988. — 332 с.
73. Траксел Д. Самонастраивающиеся системы (обзорный доклад) // Тр. II-го межд. конгресса ИФАК «Дискретные и самонастраивающиеся системы». — М.: Наука, 1965. — С. 240–251.
74. Тюкин И. Ю. Устойчивость алгоритма обучения многослойных нейронных сетей прямого действия // Сер. «Управление, информатика и вычислительная техника» / Научно-технический сборник ГЭТУ. — 1998. — № 1.
75. Тюкин И. Ю. Устойчивость по Ляпунову процессов обучения многослойной нейронной сети в динамических системах управления // Сер. «Приборостроение» / Известия ВУЗов. — 1999. — № 9.
76. Тюкин И. Ю. Алгоритмический синтез нейросетевых систем управления нелинейными динамическими объектами в условиях неопределенности // Дисс. на соискание уч. степени к-та техн. наук. — СПб.: СПбГЭТУ, 2001. — 272 с.
77. Тюкин И. Ю. Алгоритмы адаптации в конечной форме для нелинейных динамических объектов // Автоматика и Телемаханика. — 2003. — Т. 64, № 6. — С. 951–974.
78. Тюкин И. Ю. Оценка параметров суперпозиции сигмоидных функций с помощью эквивалентных систем дифференциальных уравнений // Труды всероссийской конференции «Управление и информационные технологии». — Т. 1. — Санкт-Петербург: ИСПО - Сервис, 2003. — С. 274–278.
79. Тюкин И. Ю., Терехов В. А. Нейросетевое решение задачи адаптивного управления для класса нелинейных динамических объектов с невыпуклой параметризацией // Нейрокомпьютеры и их применение. — 2004. — № 7–8.
80. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. — М.: Физматгиз, 1959. — 800 с.
81. Фельдбаум А. А. Проблемы самоприспосабливающихся (адаптивных) систем // Тр. I-й межд. сесюз. конф. по самонастраивающимся системам. — М.: Наука, 1965.

82. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
83. *Фрадков А. Л.* Схема скоростного градиента и ее применение в адаптивном управлении // *Автоматика и Телемеханика*. — 1979. — Т. 40, № 9. — С. 90–101.
84. *Фрадков А. Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспойсковые методы. — М.: Наука, 1990. — 286 с.
85. *Фрадков А. Л.* О применении кибернетических методов в физике // *Успехи Физических Наук*. — 2005. — Т. 175, № 2. — С. 113–138.
86. *Фу К. С.* Класс самообучающихся систем автоматического регулирования, основанный на использовании теории статистических решений // Тр. II-го междунар. симпозиума ИФАК по самонастраивающимся системам. — М.: Наука, 1969. — С. 7–15.
87. *Хлебцевич Ю. С.* Электрический регулятор экономичности. авт. заявка № 231496 от 4.04.1940. авт. св. СССР № 170566 // *Бюлл. изобретений*. — 1965. — № 9.
88. *Цыпкин Я. З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. — М.: Наука, 1968. — 400 с.
89. *Цыпкин Я. З.* Основы теории обучающихся систем. — М.: Наука, 1970. — 252 с.
90. *Цыпкин Я. З.* Информационная теория идентификации. — М.: Наука, Физматлит, 1995. — 336 с.
91. *Якубович В. А.* К теории адаптивных систем // *ДАН СССР*. — 1968. — Т. 182, № 3. — С. 518–521.
92. ABS control using optimum search via sliding modes / S. Drakunov, U. Ozguner, P. Dix, B. Ashrafi // *IEEE Trans. on Control Systems Technology*. — 1995. — no. 3. — Pp. 79–85.
93. Adaptive Control Systems / Ed. by E. Mishkin, L. B. J. Braun. — N.-Y - Toronto - London: McGraw-Hill Book Co. Inc., 1961.

94. *Amari S., Nakahara H.* Difficulty of singularity in population coding // *Neural Computation*. — 2005. — Vol. 17. — Pp. 839–858.
95. *Ampazis N., Perntonis S. J., Taylor J. G.* A dynamical model for the analysis and acceleration of learning in feedforward networks // *Neural Networks*. — 2001. — Vol. 14. — Pp. 1075–1088.
96. *Annaswamy A. M., Skantze F. P., Loh A.-P.* Adaptive control of continuous time systems with convex/concave parametrization // *Automatica*. — 1998. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 33–49.
97. *Arcak M., Angeli D., Sontag E.* A unifying intergal ISS framework for stability of nonlinear cascades // *SIAM J. Contr. and Optim.* — 2002. — Vol. 40. — Pp. 1888–1904.
98. *Arecchi F. T.* Chaotic neuron dynamics, synchronization and feature binding // *Physica A*. — 2004. — Vol. 338. — Pp. 218–237.
99. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering operation of robots by learning // *J. Robotic Syst.* — 1984. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 123–124.
100. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Realization of robot motion based on a learning method // *IEEE Trans. Man. Cybern.* — 1988. — Vol. 18, no. 1. — Pp. 126–134.
101. *Armstrong-Helouvy B.* Control of Machines with Friction. — Kluwer, 1991.
102. *Armstrong-Helouvy B.* Stick slip and control in low-speed motion // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1993. — Vol. 38, no. 10. — Pp. 1483–1496.
103. *Artstein Z.* Uniform asymptotic stability via the limiting equations // *J. Diff. Equat.* — 1978. — Vol. 27. — Pp. 172–189.
104. *Aseltine J. A., Mancini A. R., Sarture C. W.* A survey of adaptive control systems // *IRE Trans. on Automatic Control*. — 1958. — Vol. AC-6, no. 12. — Pp. 102–108.
105. *Ashwin P., Timme M.* When instability makes sense // *Nature*. — 2005. — Vol. 436, no. 7. — Pp. 36–37.

106. *Astolfi A., Ortega R.* Immersion and invariance: A new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 2003. — Vol. 48, no. 4. — Pp. 590–605.
107. *Astrom K. J., Wittenmark B.* Adaptive Control (2nd ed.). — Reading, MA: Addison-Wesley, 1991.
108. Auditory sensitivity provided by self-tuned critical oscillations of hair cells / S. Camalet, T. Duke, F. Julicher, J. Prost // *Proceedings of National Academy of Science*. — 2000. — Vol. 97, no. 7. — Pp. 3183–3188.
109. *Bachmayer R., Whitcomb L. L., Grosenbaugh M. A.* An accurate four-quadrant nonlinear dynamical model for marine thrusters: Theory and experimental validation // *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. — 2000. — Vol. 25, no. 1. — Pp. 146–159.
110. *Bak P., Pakzusci M.* Complexity, contingency and criticality // *Proc. National Academy of Science*. — 1995. — Vol. 92. — Pp. 6689–6696.
111. *Bak P., Sneppen K.* Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution // *Physical Review Letters*. — 1993. — Vol. 71, no. 24. — Pp. 4083–4086.
112. *Barabanov N. E., Prokhorov D. V.* A new method for stability analysis of nonlinear discrete-time systems // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 2003. — Vol. 48, no. 12. — Pp. 2250–2255.
113. *Barron A. R.* Universal approximation bounds for superposition of a sigmoidal function // *IEEE Trans. on Information Theory*. — 1993. — Vol. 39, no. 3. — Pp. 930–945.
114. *Bastin G., Gevers M.* Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1988. — Vol. 33, no. 7. — Pp. 650–658.
115. *Beatson R. K., Leviatan D.* On comonotone approximation // *Canad. Math. Bull.* — 1983. — Vol. 26, no. 2. — Pp. 220–225.
116. *Beggs J. M., Plenz D.* Neuronal avalanches in neocortical circuits // *J. Neurosci.* — 2003. — Vol. 22, no. 35. — Pp. 11167–11177.

117. *Bellman R.* Adaptive Control Processes - A Guided Tour. — Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1961.
118. *Bellman R., Kalaba R.* Dynamic programming and adaptive control processes: Mathematical foundations // *IRE Trans. on Automatic Control*. — 1960. — Vol. AC-5. — Pp. 5–10.
119. *Bellman R., Kalaba R.* Dynamic Programming and Modern Control Theory. — N.-Y.: Academic Press, 1965.
120. *Birkhoff G. D.* Dynamical Systems. — Providence, American Mathematical Society Colloquium Publications, volume IX, 1927.
121. *Bischi G.-I., Stefanini L., Gardini L.* Synchronization, intermittency and critical curves in a duopoly game // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 1998. — Vol. 44. — Pp. 559–585.
122. *Blondel V., Gevers M.* Simultaneous stabilizability of three linear systems is rationally undecidable // *Mathematics of Control, Signals and Systems*. — 1993. — Vol. 6. — Pp. 135–145.
123. *Boskovic J.* Stable adaptive control of a class of first-order nonlinearly parameterized plants // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1995. — Vol. 40, no. 2. — Pp. 347–350.
124. *Brenner N., Bialek W., de Ruyter van Steveninck R.* Adaptive rescaling maximizes information transmission // *Neuron*. — 2000. — Vol. 26, no. 3. — Pp. 695–702.
125. *Brockett R. W.* A stabilization problem // *V.D. Blondel, E.D. Sontag, M. Vidyasagar, J.C. Willems editors, Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory, Communications and Control Engineering, chapter 16*. — 1998. — Pp. 75–78.
126. *Buonomano D. V., Merzenich M.* Neural network model of temporal code generation and position-invariant pattern recognition // *Neural Computation*. — 1999. — Vol. 11. — Pp. 103–116.

127. *Byrnes C. I., Isidori A.* Limit sets, zero dynamics, and internal models in the problem of nonlinear output regulation // *IEEE Trans. on Automat. Contr.* — 2003. — Vol. 48, no. 10. — Pp. 1712–1723.
128. *Canudas de Wit C., Tsiotras P.* Dynamic tire models for vehicle traction control // *Proceedings of the 38th IEEE Control and Decision Conference.* — 1999.
129. *Canudas de Wit C., Tsiotras P.* Dynamic tire models for vehicle traction control // *Proceedings of the 38th IEEE Control and Decision Conference.* — 1999.
130. *Cao C., Annaswamy A., Kojic A.* Parameter convergence in nonlinearly parametrized systems // *IEEE Trans. on Automatic Control.* — 2003. — Vol. 48, no. 3. — Pp. 397–411.
131. *Carr C. E., Friedman M. A.* Evolution of time coding systems // *Neural Computation.* — 1999. — Vol. 11. — Pp. 1–20.
132. *Carr J.* Applications of the Center Manifold Theory. — Springer-Verlag, 1981.
133. *Chadderton P., Margrie T. W., Haussler M.* Integration of quanta in cerebellar granule cells during sensory processing // *Nature.* — 2004. — Vol. 428. — Pp. 856–859.
134. *Cheney E. W.* Introduction to Approximation Theory. — McGraw-Hill Book Company, 1966.
135. *Chizhevsky V. N.* Coexisting attractors in a CO_2 laser with modulated losses // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* — 2000. — Vol. 2. — Pp. 711–717.
136. *Chizhevsky V. N.* Multistability in dynamical systems induced by weak periodic perturbations // *Physical Review E.* — 2001. — Vol. 64, no. 3. — Pp. 036223–036226.
137. *Chizhevsky V. N., Corbalan R.* Phase scaling properties of perturbation-induced multistability in a driven nonlinear system // *Physical Review E.* — 2002. — Vol. 66, no. 1. — Pp. 016201–016205.
138. *Conant R. C., Ashby W. R.* Every good regulator of a system must be a model of that system // *Int. J. Syst. Sci.* — 1970. — Vol. 1. — Pp. 89–98.

139. Concurrent processing and complexity of temporally encoded neuronal messages in visual perception / J. W. McClurkin, L. M. Optican, B. J. Richmond, T. J. Gawne // *Science*. — 1991. — Vol. 253. — Pp. 675–677.
140. Costic B. T., de Queiroz M. S., Dawson D. M. A new learning control approach to the active magnetic bearing benchmark system. — 2000.
141. Criticality and scaling in evolutionary ecology / R. V. Sole, S. C. Manrubia, M. Benton et al. // *TREE*. — 1999. — Vol. 14, no. 4. — Pp. 156–160.
142. Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function // *Math. of Control, Signals and Systems*. — 1989. — Vol. 2. — Pp. 303–314.
143. Dayan P., Abbott L. Theoretical Neuroscience: Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems. — MIT Press, 2001.
144. Design issues in adaptive control / R. H. Middleton, G. C. Goodwin, D. J. Hill, D. Q. Mayne // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1988. — Vol. 33, no. 1. — Pp. 50–58.
145. Deur J., Asgari J., Hrovat D. Modeling and analysis of longitudinal tire dynamics // Tech. Report SRR-2000-0145, Ford Research Laboratory. — 2000.
146. Didinsky G., Pan Z., Basar T. Parameter identification for uncertain plants using h^∞ methods // *Automatica*. — 1995. — Vol. 31. — Pp. 1227–1250.
147. Dierckx P. Curve and surface fitting with splines. — 1995. — 285 pp.
148. Ding Z. Adaptive control of triangular systems with nonlinear parameterization // *IEEE Trans. Automatic Control*. — 2001. — Vol. 46, no. 12. — Pp. 1963–1968.
149. Ditchburn R. W., L. G. B. Vision with a stabilized retinal image // *Nature*. — 1952. — Vol. 170, no. 4314. — Pp. 36–37.
150. Dynamics of low-pressure and high-pressure fuel cell air supply systems / S. Gelfi, A. G. Stefanopoulou, J. T. Pukrushpan, H. Peng // *Proceedings of the American Control and Conference*. — 2003.
151. Dynamic algorithms of multilayered neural networks training in generalized training plant / D. V. Efimov, T. A. Zakharenkova, V. Terekhov, I. Y. Tyukin // *Proc.*

- of International Conference on Artificial Neural Networks (ICANN'99). — Brest, Belarus: 1999. — Pp. 93–101.
152. *Eccles J. C.* The Neurophysiological Basis of Mind. The Principles of Neurophysiology. — Clarendon, 1953.
 153. *Egmont-Petersen M., de Ridder D., Handels H.* Image processing with neural networks—a review // *Pattern Recognition*. — 2002. — Vol. 35, no. 10. — Pp. 2279–2301.
 154. Essential nonlinearities in hearing / V. M. Eguiluz, M. Ospeck, Y. Choe et al. // *Physical Review Letters*. — 2000. — Vol. 84, no. 22. — Pp. 5232–5235.
 155. Evolution as a self-organized critical phenomenon / K. Sneppen, P. Bak, H. Flyvbjerg, M. H. Jensen // *Proc. National Academy of Science*. — 1995. — Vol. 92. — Pp. 5209–5213.
 156. Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a q-switched gas laser / F. T. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni, J. Tredicce // *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — Vol. 49, no. 17. — Pp. 1217–1220.
 157. *Eykhoff P.* System Identification. Parameter and State Estimation. — Univ. of Techn. Eindhoven, 1975.
 158. *Florentin J. J.* Optimal probing, adaptive control of a simple bayesian system // *J. Electronics Contr.* — 1962. — no. 13. — P. 165.
 159. *Fradkov A. L.* Integro-differentiating velocity gradient algorithms // *Sov. Phys. Dokl.* — 1986. — Vol. 31, no. 2. — Pp. 97–98.
 160. *Francis B. A., Wonham W. M.* The internal model principle of control theory // *Automatica*. — 1976. — Vol. 12. — Pp. 457–465.
 161. *Fredenhagen S., Oberle H. J., Opfer G.* On the construction of optimal monotone cubic spline interpolations // *Journal of Approximation Theory*. — 1999. — Vol. 96. — Pp. 182–200.
 162. *French M.* An analytical comparison between the nonsingular quadratic performance of robust and adaptive backstepping designs // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 2002. — Vol. 47, no. 4. — Pp. 670–675.

163. French M., Szepesvari C., Rogers E. Uncertainty, performance, and model dependency in approximate adaptive nonlinear control // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 2000. — Vol. 45, no. 2. — Pp. 353–358.
164. Fritsch F. N., Carlson R. E. Monotone piecewise cubic interpolation // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1983. — Vol. 17, no. 2. — Pp. 238–246.
165. Funahashi K.-I. On the approximate realizations of continuous mapping by neural networks // *Neural Networks*. — 1989. — no. 2. — Pp. 183–192.
166. Fu K. S. Syntactic Pattern Recognition and Applications. — Prentice-Hall, 1982.
167. Gain-scheduled wheel slip control in automotive brake systems / T. Johansen, I. Petersen, J. Kalkkuhl, J. Ludemann // *IEEE Trans. on Control Systems Technology*. — 2003. — no. 6. — Pp. 799–811.
168. Gauthier D. J., C. B. J. Intermittent loss of synchronization in coupled chaotic oscillators: Toward a new criterion for high-quality synchronization // *Physical Review Letters*. — 1996. — Vol. 77, no. 9. — Pp. 1751–1754.
169. Ghosh B. K., Byrnes C. I. Simultaneous stabilization and simultaneous pole-placement by nonswitching dynamic compensation // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1983. — Vol. 28, no. 6. — Pp. 735–741.
170. A global optimum approach for one-layer neural networks / E. Castillo, O. Fontenla-Romero, B. Guijarro-Berdinas, A. Alonso-Betanzos // *Neural Computation*. — 2002. — Vol. 14. — Pp. 1429–1449.
171. Grune L., Sontag E., Wirth F. R. Asymptotic stability equals exponential stability, and ISS equals finite energy gain - if you twist your eyes // *Systems & Control Letters*. — 1999. — Vol. 38. — Pp. 127–134.
172. Guay M., Dochain D., Perrier M. Adaptive extremum seeking control of continuous stirred tank bioreactors with unknown growth kinetics // *Automatica*. — 2004. — Vol. 40, no. 5. — Pp. 881–888.
173. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. — Springer, 2002.

174. *Gustaffson F.* Slip-based tire-road friction estimation // *Automatica*. — 1997. — Vol. 33, no. 6. — Pp. 1087–1099.
175. *Handbook of Global Optimization* / Ed. by R. Horst, P. Pardalos. — Kluwer, Dordrecht, 1995.
176. *Hansel D., Sompolinsky H.* Synchronization and computation in a chaotic neural network // *Physical Review Letters*. — 1992. — Vol. 68. — Pp. 718–721.
177. *Hansen E.* Global Optimization Using Interval Analysis. — Marcel Dekker, 1992.
178. *Haykin S.* Neural Networks: A Comprehensive Foundation. — Prentice Hall, 1999.
179. *Hindmarsh J. L., Rose R. M.* A model of the nerve impulse using two first-order differential equations // *Nature*. — 1982. — Vol. 269. — Pp. 162–164.
180. *Hindmarsh J., Rose R.* A model of neuronal bursting using 3 coupled 1st order differential-equations // *Proc. R. Soc. Lond.* — 1984. — Vol. B 221, no. 1222. — Pp. 87–102.
181. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* Quantitative description of ion currents and its applications to conduction and excitation in nerve membranes // *J. Physiol. (Lond.)*. — 1952. — Vol. 117. — Pp. 500–544.
182. *Hopfield J. J.* Pattern recognition computation using action potential timing for stimulus representation // *Nature*. — 1995. — no. 376. — Pp. 33–36.
183. *Hornik K.* Universal approximation of an unknown function and its derivatives using multilayer neural networks // *Neural Networks*. — 1991. — no. 4. — Pp. 251–257.
184. *Hornik K.* Degree of approximation results for feedforward networks approximating unknown mappings and their derivatives // *Neural Computation*. — 1994. — no. 6. — Pp. 1262–1275.
185. *Hornik K., Stinchcombe K., White H.* Universal approximation of an unknown function and its derivatives using multilayer neural networks // *Neural Networks*. — 1990. — no. 3. — Pp. 551–560.

186. Human perceptual thresholds of friction in haptic interfaces / D. Lawrence, L. Pao, A. Dougherty et al. // Proc. ASME Dynamic Systems and Control Division, ASME Int. Mech. Engr. Cong. & Expo, Anaheim, CA. — 1998. — Pp. 287–294.
187. Identification of linearly overparametrized nonlinear systems / G. Bastin, R. Bitmead, G. Campion, M. Gevers // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1992. — Vol. 37, no. 7. — Pp. 1073–1078.
188. *Ilchman A.* Universal adaptive stabilization of nonlinear systems // *Dynamics and Control*. — 1997. — no. 7. — Pp. 199–213.
189. *Iliev G. L.* Exact estimates for partially monotone approximation // *Analysis Mathematica*. — 1978. — Vol. 4. — Pp. 181–197.
190. Interspike intervals, receptive fields and information coding in primary visual cortex / D. Reich, F. Mechler, K. Purpura, J. Victor // *J. Neurosci.* — 2000. — Vol. 20. — Pp. 1964–1975.
191. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. — Prentice–Hall, 1996.
192. *Isidori A.* Nonlinear control systems: An Introduction. — Second edition. — Springer–Verlag, 1989.
193. Iterative feedback tuning: Theory and applications / H. Hjalmarsson, M. Gevers, M. Gunnarsson, O. Lequin // *IEEE Control Systems*. — 1998. — no. August. — Pp. 26–41.
194. *Izhikevich E. M.* Which model to use for cortical spiking neurons? // *IEEE Transactions on Neural Networks*. — 2004. — Vol. 15. — Pp. 1063–1070.
195. *Jain A. K., Duin R. P. W., Mao J.* Statistical pattern recognition: A review // *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. — 2000. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 4–37.
196. *Jiang Z.-P., Teel A. R., Praly L.* Small-gain theorems for ISS systems and applications // *Math. Control Signals Systems*. — 1994. — no. 7. — Pp. 95–120.
197. *Jingang Y., Alvares L., Horowitz R.* Adaptive emergency braking control with underestimation of friction coefficient // *IEEE Trans. on Control Systems Technology*. — 2002. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 381–392.

198. Jones L. K. A simple lemma on greedy approximation in Hilbert sapce and convergence rates for projection pursuit regression and neural network training // *The Annals of Statistics*. — 1992. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 608–613.
199. Julicher F., Andor D., Duke T. Physical basis of two-tone interference in hearing // *Proceedings of National Academy of Science*. — 2001. — Vol. 98, no. 16. — Pp. 9080–9085.
200. Kammler D. W. Approximation with sums of exponentials in $L_p[0, \infty)$ // *Journal of Approximation Theory*. — 1976. — Vol. 16. — Pp. 384–408.
201. Kaneko K. Clustering, coding, switching hierarchical ordering and control in a network of chaotic elements // *Physica D*. — 1990. — Vol. 41. — Pp. 137–172.
202. Kaneko K. Relevance of dynamic clustering to biological networks // *Physica D*. — 1994. — Vol. 75. — Pp. 137–172.
203. Kaneko K., Tsuda I. Complex Systems: Chaos and Beyond. — Springer, 2000.
204. Kaneko K., Tsuda I. Chaotic itinerancy // *Chaos*. — 2003. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 926–936.
205. Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V., Morse A. S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1991. — Vol. 36. — Pp. 1241–1253.
206. Karsenti L., Lamnabhi-Lagarrige F., Bastin G. Adaptive control of nonlinear systems with nonlinear parameterization // *System and Control Letters*. — 1996. — Vol. 27. — Pp. 87–97.
207. Khalil H. Nonlinear Systems (3d edition). — Prentice Hall, 2002.
208. Kiencke U. Realtime estimation of adhersion characteristics between tire and road // *Proceedings of IFAC World Congress*. — 1993. — Vol. 1.
209. Kirkpatrick S., Gelatt C., Vecchi M. P. Optimization by simulated annealing // *Science*. — 1983. — Vol. 220. — Pp. 671–680.

210. *Kitching K., Cole D., Cebon D.* Performance of a semi-active damper for heavy vehicles // *ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*. — 2000. — Vol. 122, no. 3. — Pp. 498–506.
211. *Koch C.* Biophysics of Computation. Information Processing in Single Neurons. — Oxford University Press, 2002.
212. *Kojic A., Annaswamy A.* Adaptive Control of Nonlinearly Parameterized Systems with a Triangular Structure // *Automatica*. — 2002. — Vol. 38, no. 1. — Pp. 115–123.
213. *Kopotun K., Shardin A.* On k -monotone approximation by free knot splines // *SIAM J. Math. Anal.* — 2003. — Vol. 34, no. 4. — Pp. 901–924.
214. *Kreisselmeier G.* Adaptive observers with exponential rate of convergence // *IEEE Trans. Automatic Control*. — 1977. — Vol. AC-22. — Pp. 2–8.
215. *Krener A. J., Kang W., Chang D. E.* Control bifurcations // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 2004. — Vol. 49, no. 8. — Pp. 1231–1246.
216. *Krichman M., Sontag E., Wang Y.* Input-output-to-state-stability // *SIAM J. Control and Optimization*. — 2001. — Vol. 39. — Pp. 1874–1928.
217. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.* Adaptive nonlinear control without overparametrization // *Systems and Control Letters*. — 1992. — Vol. 19. — Pp. 177–185.
218. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.* Nonlinear design of adaptive controllers for linear systems // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1994. — Vol. 39, no. 4. — Pp. 738–752.
219. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.* Nonlinear and Adaptive Control Design. — Wiley and Sons Inc., 1995.
220. *Krstic M., Kokotovic P.* Transient-performance improvement with new class of adaptive controllers // *Systems and Control Letters*. — 1993. — Vol. 21. — Pp. 451–461.

221. *Krstic M., Kokotovic P.* Adaptive nonlinear output-feedback schemes with marino-tomei controller // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1996. — Vol. 41, no. 2. — Pp. 274–280.
222. *Krstic M., Wang H.-H.* Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems // *Automatica*. — 2000. — Vol. 36. — Pp. 595–601.
223. *LaSalle J., Lefschetz S.* Stability by Liapunov's direct method with applications. — Academic Press, 1961.
224. *La Salle J. P.* Stability theory and invariance principles // *Dynamical Systems, An International Symposium* / Ed. by J. H. L. Cesari, J. L. Salle. — Vol. 1. — 1976. — Pp. 211–222.
225. *Lee H.-C.* Review of image-blur models in a photographic system using the principles of optics // *Optical Engineering*. — 1990. — Vol. 29, no. 5. — Pp. 405–421.
226. *Lee R. C.* Optimal estimation, identification and control. — Cambridge, Mass.: MIT Press, 1964.
227. *Lee T.-H., Narendra K. S.* Robust adaptive control of discrete-time systems using persistent excitation // *Automatica*. — 1988. — Vol. 24, no. 6. — Pp. 781–788.
228. *Leonov G.* The Brockett stabilization problem // *Int. Conf. of Oscill. and Chaos*. — 2000. — Pp. 38–39.
229. *Liew A. W.-C., Yan H., Yang M.* Pattern recognition techniques for the emerging field of bioinformatics: A review // *Pattern Recognition*. — 2005. — Vol. 38, no. 11. — Pp. 2055–2073.
230. *Lin W., Qian C.* Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: A nonsmooth feedback framework // *IEEE Trans. Automatic Control*. — 2002. — Vol. 47, no. 5. — Pp. 757–773.
231. *Lin W., Qian C.* Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: The smooth feedback case // *IEEE Trans. Automatic Control*. — 2002. — Vol. 47, no. 8. — Pp. 1249–1266.
232. *Ljung L.* System Identification: Theory for the User. — Prentice-Hall, 1999.

233. Loh A.-P., Annaswamy A., Skantze F. Adaptation in the presence of general nonlinear parameterization: An error model approach // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1999. — Vol. 44, no. 9. — Pp. 1634–1652.
234. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // *Journal of the Atmospheric Sciences*. — 1963. — Vol. 20. — Pp. 130–141.
235. Loria A., Panateley E., Nijmeijer H. A remark on passivity-based and discontinuous control of uncertain nonlinear systems // *Automatica*. — 2001. — Vol. 37. — Pp. 1481–1487.
236. Loria A., Panteley E. Uniform exponential stability of linear time-varying systems: revisited // *Systems and Control Letters*. — 2003. — Vol. 47, no. 1. — Pp. 13–24.
237. Lo J. T. Minimization through convexitization in training neural networks // *Proceedings of IEEE International Joint Conference on Neural Networks IJCNN'2002*. — 2002.
238. Luenberger D. Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models and Applications. — Wiley, 1979.
239. Maldonado O., Markus M., Hess B. Coexistence of three attractors and hysteresis jumps in a chaotic spinning top // *Phys. Lett. A*. — 1990. — Vol. 144. — Pp. 153–158.
240. Marino R. Adaptive observers for single output nonlinear systems // *IEEE Trans. Automatic Control*. — 1990. — Vol. 35, no. 9. — Pp. 1054–1058.
241. Marino R., Tomei P. Global adaptive output-feedback control of nonlinear systems, part I: Linear parameterization // *IEEE Trans. Automatic Control*. — 1993. — Vol. 38, no. 1. — Pp. 17–32.
242. Martensson B. The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization // *Systems and Control Letters*. — 1985. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 87–91.
243. Martensson B., Polderman J. Correction and simplification to “the order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization” // *Systems and Control Letters*. — 1993. — Vol. 20, no. 6. — Pp. 465–470.

244. *Martinez-Conde S., Macknik S. L., Hubel D. H.* The role of fixational eye movements in visual perception // *Nature Reviews. Neuroscience.* — 2004. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 229–240.
245. *Milnor J.* On the concept of attractor // *Commun. Math. Phys.* — 1985. — Vol. 99. — Pp. 177–195.
246. *Mitchell S. J., Silver R. A.* Shunting inhibition modulates neuronal gain during synaptic excitation // *Neuron.* — 2003. — Vol. 38. — Pp. 433–445.
247. *Moreau L., Aeyels D.* Stabilization by means of periodic output feedback // 38-th IEEE Conference on Decision and Control. — 1999. — Pp. 108–109.
248. *Moreau L., Sontag E.* Balancing at the boarder of instability // *Physical Review E.* — 2003. — Vol. 68. — Pp. 020901 (1–4).
249. *Moreau L., Sontag E., Arcak M.* Feedback tuning of bifurcations // *Systems and Control Letters.* — 2003. — Vol. 50. — Pp. 229–239.
250. *Morgan A. P., Narendra K. S.* On the stability of nonautonomous differential equations $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}(t)]\mathbf{x}$ with skew symmetric matrix $\mathbf{B}(t)$ // *SIAM J. Control and Optimization.* — 1992. — Vol. 37, no. 9. — Pp. 1343–1354.
251. *Morosanov I. S.* Method of extremum seeking control // *Automation and Remote Control.* — 1957. — Vol. 18. — Pp. 1077–1092.
252. *Morse A. S., Mayne D. Q., Goodwin G. C.* Applications of hysteresis switching in parameter adaptive control // *IEEE Trans. on Automatic Control.* — 1988. — Vol. 37, no. 9. — Pp. 1343–1354.
253. Multiple model approaches to modelling and control, taylor and francis, london / Ed. by R. Murray-Smith, T. A. Johansen. — London: Taylor and Francis, 1997.
254. *Narendra K. S., Annaswamy A. M.* Stable Adaptive systems. — Prentice–Hall, 1989.
255. *Narendra K. S., Balakrishnan J.* Improving transient response of adaptive control systems using multiple models and switching // *IEEE Trans. on Automatic Control.* — 1994. — Vol. 39, no. 9. — Pp. 1861–1866.

256. *Narendra K. S., Balakrishnan J.* Adaptive control using multiple models // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1997. — Vol. 42, no. 2. — Pp. 171–187.
257. A nested Matrosov theorem and persistency of excitation for uniform convergence in stable nonautonomous systems / A. Loria, E. Panteley, D. Popovic, A. Teel // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 2005. — Vol. 50, no. 2. — Pp. 183–198.
258. A new adaptive learning rule / W. Messner, R. Horowitz, W.-W. Kao, M. Bolas // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1991. — Vol. 36, no. 2. — Pp. 188–197.
259. *Nijmeijer H., van der Schaft A.* Nonlinear Dynamical Control Systems. — Springer–Verlag, 1990.
260. *Nikiforov V. O.* Adaptive nonlinear tracking with complete compensation of unknown disturbances // *European J. Control*. — 1998. — Vol. 4. — Pp. 132–139.
261. Nonlinear control of a benchmark beam balance experiment using variable hyperbolic boas / J. Ghosh, D. Mukherjee, M. Baloh, B. Paden // *Proceedings of the American Control and Conference*. — 2000. — Pp. 2149–2153.
262. *Optical L. M., Richmond B. J.* Temporal encoding of two-dimensional patterns by single units in primate temporal cortex. III information theoretic analysis // *Journal of Neurophysiology*. — 1987. — Vol. 57, no. 1. — Pp. 162–178.
263. *Ortega R., Astolfi A., Barabanov N. E.* Nonlinear PI Control of Uncertain Systems: an Alternative to Parameter Adaptation // *Systems and Control Letters*. — 2002. — Vol. 47. — Pp. 259–278.
264. *Ostrovskii I. I.* Extremum regulation // *Automation and Remote Control*. — 1957. — Vol. 18. — Pp. 900–907.
265. *Ott E., Sommerer J.* Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins // *Phys. Lett. A*. — 1994. — Vol. 188, no. 1. — Pp. 39–47.
266. *Oud W., Tyukin I.* Sufficient conditions for synchronization in an ensemble of Hindmarsh and Rose neurons: passivity-based approach // *Proc. of the 6-th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*. — Shtuttgart, Germany: 2004. — 1 – 3 September.

267. *Pacejka H., Bakker E.* The magic formula tyre model. — 1993. — Supplement to Vehicle System Dynamics, vol. 21.
268. *Panteley E., Loria A., Teel A.* Relaxed persistency of excitation for uniform asymptotic stability // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 2001. — Vol. 46, no. 12. — Pp. 1874–1886.
269. *Panteley E., Ortega R., Moya P.* Overcoming the detectability obstacle in certainty equivalence adaptive control // *Automatica*. — 2002. — Vol. 32. — Pp. 1125–1132.
270. A parametric learning control method with application for robot manipulators / A. Olerro, J. Gonzales-Jimenes, J. M. Vincente, A. Corral // *Proceedings of IEEE International Conference on System Engineering*. — 1990. — Pp. 164–167.
271. *Pavlov A.* Convergent dynamics, a tribute to Boris Pavlovich Demidovich // *Systems and Control Letters*. — 2004. — Vol. 52. — Pp. 257–261.
272. *Pavlov A.* The Output Regulation Problem: a Convergent Dynamics Approach. — PhD. Dissertation, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 2004. — 192 pp.
273. Perceptual switching, eye-movements, and the bus-paradox / J. Ito, A. Nikolaev, M. Luman et al. // *Perception*. — 2003. — Vol. 32. — Pp. 681–698.
274. *Pervozvanskii A. A.* Continuous extremum control systems in the presence of random noise // *Automation and Remote Control*. — 1960. — Vol. 21. — Pp. 673–677.
275. *Peterson K. S., Stefanopoulou A. G.* Extremum seeking control for soft landing of an electromechanical valve actuator // *Automatica*. — 2004. — Vol. 40, no. 6. — Pp. 1063–1069.
276. *Peterson K. S., Stefanopoulou A. G.* Extremum seeking control for soft landing of an electromechanical valve actuator // *Automatica*. — 2004. — Vol. 40. — Pp. 1063–1069.
277. *Phan M. Q., Frueh J. A.* Iterative learning control: Analysis, design, integration, and applications // *In System Identification and Learning Control, Chapter 15*. — 1998. — Pp. 285–306.

278. *Pogromsky A. Y.* Passivity based design of synchronizing systems // *Int. J. of Bifurc. and Chaos*. — 1998. — Vol. 8, no. 2. — Pp. 295–319.
279. *Pogromsky A. Y., Nijmeijer H.* Cooperative oscillatory behaviour of mutually coupled dynamical systems // *Int. J. of Bifurc. and Chaos*. — 2001. — Vol. 48, no. 2. — Pp. 152–162.
280. *Pogromsky A. Y., Santoboni G., Nijmeijer H.* An ultimate bound on the trajectories of the Lorenz system and its applications // *Nonlinearity*. — 2003. — Vol. 16, no. 5. — Pp. 1597–1605.
281. *Polderman J. W., Pait F. M.* Editorial to the special issue on adaptive control // *Systems and Control Letters*. — 2003. — Pp. 1–3.
282. *Poliakov A. M., Ushakov V. V.* Role of temporal parameters of the interspike interval in temperature coding // *Fiziol. Zh. SSSR Im. I. M. Sechenova*. — 1983. — Vol. 69, no. 8. — Pp. 1108–1120.
283. *Pomet J.-B.* Remarks on sufficient information for adaptive nonlinear regulation // *Proceedings of the 31-st IEEE Control and Decision Conference*. — 1992. — Pp. 1737–1739.
284. *Prokhorov D., Feldkamp L., Tyukin I.* Adaptive behavior with fixed weights in recurrent neural networks // *Proceedings of IEEE International Joint Conference on Neural Networks*. — Hawaii, USA, 2002. — May. — Vol. 3. — Pp. 2018–2022.
285. *Puetter R. C., Gosnell T. R., Yahil A.* Digital image reconstruction: deblurring and denoising // *Annual Rev. Astron. Astrophys.* — 2005. — Vol. 43. — Pp. 139–194.
286. *Qu R., Sarfraz M.* Efficient method for curve interpolation with monotonicity preservation and shape control // *Neural, Parallel & Scientific Computations*. — 1997. — Vol. 5. — Pp. 275–288.
287. *Raffone A., van Leeuwen C.* Dynamic synchronization and chaos in an associative neural network with multiple active memories // *Chaos*. — 2003. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 1090–1104.

288. Rates of convex approximation in non-Hilbert spaces / M. J. Donahue, L. Gurvits, C. Darken, E. Sontag // *Constructive Approximation*. — 1997. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 187–220.
289. Ray L. R. Nonlinear tire force estimation and road friction identification: Simulation and experiments // *Automatica*. — 1997. — Vol. 33, no. 10. — Pp. 1819–1833.
290. Robotic needle insertion: Effects of friction and needle geometry / M. D. ÓLeary, C. Simone, T. Washio et al. // *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. — 2003.
291. Sastry S. Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control. — Springer, 1999.
292. Sastry S., Bodson M. Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness. — Prentice Hall, 1989.
293. Schumaker L. On shape preserving quadratic spline interpolation // *SIAM J. Numer. Anal.*. — 1983. — Vol. 20, no. 4. — Pp. 854–864.
294. Self-organized criticality and synchronization in a lattice model of integrate-and-fire oscillators / A. Corral, C. J. Perez, A. Dıaz-Guilera, A. Arenas // *Physical Review Letters*. — 1995. — Vol. 74. — Pp. 118–121.
295. Seo W., Lee J. S. Model reference parametric learning control of uncertain lti systems // *Proceedings of Iterative Learning Control Workshop and Roundtable*. — 1998. — Pp. 164–167.
296. Separation principles for input-output and integral-input-to-state-stability / D. Angeli, B. Ingalls, E. Sontag, Y. Wang // *SIAM J. Control and Optimization*. — 2004. — Vol. 43. — Pp. 256–276.
297. Shang Y., Wah B. W. Global optimization for neural network training // *Computer*. — 1996. — Vol. 29, no. 3. — Pp. 45–54.
298. Sherrington C. S. Integrative Action of the Nervous System. — Charles Scribner's Sons, 1906.
299. Shevchuk I. A. Approximation of monotone functions by monotone polynomials // *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* — 1993. — Vol. 76, no. 1. — Pp. 51–64.

300. Simultaneous stabilization of three or more plants: Conditions on the positive real axis do not suffice / V. Blondel, M. Gevers, M. Mortini et al. // *SIAM J. Control and Optimization*. — 1994. — Vol. 32, no. 2. — Pp. 572–590.
301. Sontag E. Some new directions in control theory inspired by systems biology // *Systems Biology*. — 2004. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 9–18.
302. Sontag E., Wang Y. New characterizations of input-to-state stability // *IEEE Trans. on Automatic Control*. — 1996. — Vol. 41, no. 9. — Pp. 1283–1294.
303. Stationary and nonstationary learning characteristics of the lms adaptive filter / B. Widrow, J. M. McCool, M. G. Larimore, C. R. Jonson // *Proc. IEEE*. — 1976. — Vol. 64, no. 8. — Pp. 1151–1162.
304. Sternby J. Extremum control systems: An area for adaptive control? // Preprints of Jont American Control Conference. — San-Francisco, CA: 1980.
305. Stigter J. D., Keesman K. J. Optimal parametric sensitivity control of a fed-batch reactor // *Automatica*. — 2004. — Vol. 40. — Pp. 1459–1464.
306. Stotsky A. Lyapunov design for convergence rate improvement in adaptive control // *International Journal of Control*. — 1993. — Vol. 57, no. 2. — Pp. 501–504.
307. Strogatz S. Nonlinear Dynamics and Chaos: With applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. — Perseus Publishing, 2000.
308. Structurally stable output regulation of nonlinear systems / C. I. Byrnes, F. D. Priscoli, A. Isidori, W. Kang // *Automatica*. — 1997. — Vol. 33. — Pp. 369–385.
309. Suemitsu Y., Nara S. A solution for two-dimensional mazes with use of chaotic dynamics in a recurrent neural network model // *Neural Computation*. — 2004. — Vol. 16. — Pp. 1943–1957.
310. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical systems and turbulence. Lecture Notes in Mathematics / Ed. by D. A. Rang, L. S. Young. — Vol. 898. — Berlin: Springer-Verlag, 1981. — Pp. 366–381.

311. *Terekhov V. A., Tyukin I. Y., Prokhorov D. V.* Adaptive control on manifolds using RBF neural networks // Proc. of 39-th IEEE Conference on Decision and Control. — Vol. 4. — Sydney, Australia: 2000. — December. — Pp. 3831–3836.
312. Tonicly active $GABA_a$ receptors: Modulating gain and maintaining the tone / A. Semyanov, M. C. Walker, D. M. Kullmann, A. Silver // *Trends in Neuroscience*. — 2004. — Vol. 27, no. 5. — Pp. 262–269.
313. *Tou J. T.* Modern Control Theory. — N.-Y.: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1964. — 343 pp.
314. Transverse laser patterns. II. variational principle for pattern selection, spatial multistability, and laser hydrodynamics / M. Brambilla, L. A. Lugiato, V. Penna et al. // *Physical Review A*. — 1991. — Vol. 43, no. 9. — Pp. 5114–5120.
315. *Tsien H. S.* Engineering Cybernetics. — McGraw Hill, 1954. — 289 pp.
316. *Tsiotras P., Canudas de Wit C.* On the optimal braking of wheeled vehicles // Proceedings of the American Control Conference. — 2000. — Pp. 569–573.
317. *Tyukin I. Y., Prokhorov D. V., van Leeuwen C.* Adaptive algorithms in finite form for nonconvex parameterized systems with low-triangular structure // Proc. of IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (ALCOSP 2004). — Yokohama, Japan: 2004. — 29 – 31 August.
318. *Tyukin I. Y., Prokhorov D. V., Terekhov V. A.* Adaptive control with nonconvex parameterization // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2003. — Vol. 48, no. 4. — Pp. 554–567.
319. *Tyukin I. Y., Prokhorov D. V., van Leeuwen C.* Finite-form realization of the adaptive algorithms // Proc. of 7-th European Control Conference (ECC 2003). — University of Cambridge, UK: 2003. — 1 – 4 September.
320. *Tyukin I. Y., Terekhov V. A., Tyukina T. A.* A modification of back propagation algorithm for a class of nonlinear dynamical plants // Proc. of 2-nd International Conference on Neural Networks and Artificial Intelligence (ICNNAI-2001). — Minsk, Belorussia: 2001. — September. — Pp. 40–44.

321. Tyukin I. Y., Tyukina T. A. Penalty function approach to a training of neural networks in control systems // Proc. of 2-nd International Conference on Neural Networks and Artificial Intelligence (ICNNAI-2001). — Minsk, Belorussia: 2001. — September. — Pp. 56–59.
322. Tyukin I., Efimov D., van Leeuwen C. Adaptive regulation to invariant sets // Proc. of the 16-th IFAC World Congress. — Prague, Czech Republic, 2005. — 4 – 8 July.
323. Tyukin I., van Leeuwen C. Adaptation and nonlinear parameterization: Nonlinear dynamics prospective // Proceedings of the 16-th IFAC World Congress. — Prague, Czech Republic: 2005. — 4 – 8 July.
324. Tyukin I., van Leeuwen C., Prokhorov D. Parameter estimation of sigmoid superpositions: Dynamical system approach // *Neural Computation*. — 2003. — Vol. 15, no. 10. — Pp. 2419–2455.
325. Unified scaling law for earthquakes / P. Bak, K. Christensen, L. Danon, T. Scanlon // *Physical Review Letters*. — 2002. — Vol. 88. — P. 178501.
326. van Leeuwen C. What needs to emerge to make you conscious // *Journal of Consciousness Studies*, submitted. — 2006.
327. van Leeuwen C., Raffone A. Coupled nonlinear maps as models of perceptual pattern and memory trace dynamics // *Cognitive Processing*. — 2001. — Vol. 2. — Pp. 67–111.
328. van Leeuwen C., Simionesku I. Robustness and consistency of dynamic clustering in complex systems // *Connection Science*. — 2002. — Vol. 14, no. 3. — Pp. 203–217.
329. van Leeuwen C., Steyvers M., Nooter M. Stability and intermittency in large-scale coupled oscillator models for perceptual segmentation // *Journal of Mathematical Psychology*. — 1997. — Vol. 41. — Pp. 319–343.
330. van Leeuwen C., Verver S., Brinkers M. Visual illusions, solid/outline-invariance, and non-stationary activity patterns // *Connection Science*. — 2000. — Vol. 12. — Pp. 279–297.

331. *Victor J. D.* Temporal aspects of neural coding in the retina and lateral geniculate // *Network: Comput. Neural Syst.* — 1999. — Vol. 10. — Pp. R1–R66.
332. *Vijaya Kumar B. V. K., Mahalanobis A., Juday R. D.* Correlation Pattern Recognition. — Cambridge University Press, 2005.
333. *Vorotnikov V.* Partial Stability and Control. — Birkhauser, 1998.
334. *Walter E., Prozanto L.* Identification of Parametric Models. — Springer-Verlag, 1997.
335. *Webster M., Georgeson M., S.M. W.* Neural adjustment to image blur // *Nature Neuroscience.* — 2002. — Vol. 5, no. 9. — Pp. 839–840.
336. *Weigel R., Jackson E.* Experimental implementation of migrations in multiple-attractor systems // *Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng.* — 1998. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 173–178.
337. *Wei K.* The solution of a transcendental problem and its application in simultaneous stabilization problem // *IEEE Trans. on Automatic Control.* — 1992. — Vol. 37, no. 9. — Pp. 1305–1315.
338. Wheel slip control using gain-scheduled LQ - LPV/LMI analysis and experimental results / I. Petersen, T. Johansen, J. Kalkkuhl, J. Ludemann // Proceedings of IEE European Control Conference, Cambridge, UK, September 1–4. — 2003.
339. *Wittenmark B., Urquhart A.* Adaptive extremal control // Proc. of 34-th IEEE Conference on Decision and Control. — New Orleans, LA: 1995. — Pp. 1639–1644.
340. *Wyss R., Konig P., Verschure P. F. M. J.* Invariant representations of visual patterns in a temporal population code // *Proceedings of National Academy of Science.* — 2003. — Vol. 100. — Pp. 324–329.
341. *Xu Z.-B., Cao F.-L.* Simultaneous L_p -approximation order for neural networks // *Neural Networks.* — 2005. — P. in press.
342. *Yang T.* A survey on chaotic secure communication systems // *Int. J. of Comp. Cogn.* — 2004. — Vol. 2. — Pp. 81–130.

343. *Zadeh L. A.* On the definition of adaptivity // *Proc. IEEE.* — 1963. — Vol. 51. — Pp. 469–470.
344. *Zames G.* On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems. part i: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and passivity // *IEEE Trans. on Automatic Control.* — 1966. — Vol. AC-11, no. 2. — Pp. 228–238.
345. *Zhou S. P.* On comonotone approximation by polynomials in L_p space // *Analysis.* — 1993. — Vol. 13. — Pp. 363–376.

Предметный указатель

Адаптивная система

- по Р. Беллману, 18
- по Тракселу, 19
- по Заде, 23

Алгоритмы

- демпфирующие, 34
- робастные, 31
- в конечной форме, 130
- виртуальные, 130

Аппроксиматоры функций

- логистические уравнения, 202
- многих переменных, 193
- многослойные нейронные сети, 190
- модели влияния
 - неопределенности, 195
- универсальные, с настраиваемым базисом, 190
- в соболевских пространствах, 210

Аттрактивное множество, 35

Броккета проблема, 208

Динамика

- неравновесная целевая, 9, 48
- потенциально неустойчивая
 - по Ляпунову, 51

Динамика немоделируемая, 117, 162, 165

Эволюция параметра монотонная, 184

Коэффициент передаточного

- отображения, 57

Макроорганизация, 49

Мажорирующие

- функции, 78
- отображения, 79

Метод

- адаптивного обхода интегратора, 146
- аналитического конструирования агрегированных регуляторов, 34
- инвариантного погружения (immersion and invariance), 35
- обхода интегратора (бэкстеппинг), 29
- скоростного градиента, 28
- виртуального алгоритма адаптации, 113, 130

Многообразия

- целевые, 35

Множества

- асимптотически
 - устойчивые по Ляпунову, 63
- аттрактивные, по Милнору, 53, 94
- инвариантные, 35
- предельные, 90
- устойчивые по Лагранжу, 63
- устойчивые по Ляпунову, 63

Множественность положений равновесия, 184

Модели

- Хиндмарша и Роуза, 119, 233, 246
- Лоренца, 118

- ЛуГре, 222
- нелинейных физических процессов, 122
- по ошибке, 117
- в нижнетреугольной форме, 140
- взаимосвязанных осцилляторов с нелинейным демпфированием, 170
- Мультистабильность, 41
- Нейросетевое управление
 - режим off-line, 194
 - режим on-line, 194
- Неопределенность математической модели объекта, 31
- Невырожденность
 - нелинейная предельная, 174
 - предельная, 172
 - равномерная, 172
 - равномерная
 - δ -предельная, 71
- Норма
 - индуцированная, 6
 - вектор-функции, 6
- Оценка скорости сходимости
 - по Бэррону, 193
 - по лемме Джонса, 193
- Операторы, 52, 57
 - локально ограниченные, 73
 - реализуемость, полнота, 75
 - сингулярность, 61
 - соединения, 74
 - “вход-состояние”, 57
 - “вход-выход”, 57
- Оптимизация
 - автоматическая, 13
 - стохастическая по Байесу, 18
- Отношения операторные, 116
- Отображения
 - непрерывные, 69
 - передаточные, 69
 - в функциональных пространствах, 52
- Поток фазовый, 62
- Предельная точка, 90
- Принцип разделения, 89
- Принципы макроорганизации адаптивных систем, 9
- Процедура вложения, 136, 137
- Производная Ли по векторному полю, 7
- Регуляторы
 - агрегированные, 34
 - экстремальные, 14
 - с бесконечной границей
 - роста коэффициента (infinite gain margin controllers), 16
 - типовые нелинейные, 51
- Сходимость неравномерная, 94, 103
- Синхронизация
 - глобальная, 247
 - мультистабильная, 247
 - перемежающаяся (странствующая) (itinerancy), 42
 - промежуточная (intermittent), 42
- Система, 55
 - абстрактная, 54
 - динамическая, 55

- как совокупность отображений, 55
- конвергентная, 64
- полная, 59
- реализуемая, 59
- Системы
 - аффинные по управлению, 16
 - идентификационного типа
 - (indirect adaptive control), 26
 - прямого адаптивного
 - управления (model reference adaptive systems), 26
 - с нелинейно параметризованными
 - моделями, 45
 - с неустойчивыми по Ляпунову
 - целевыми режимами, 42
 - самонастраивающиеся, 15
- Статические характеристики
 - “вход-состояние”, 98, 104
- Теорема
 - о малом контурном
 - усилении, 53, 82
 - разделения, 53, 88
- Управление
 - адаптивное недоминирующее, 120
 - адаптивное объектами с нелинейной параметризацией, 179
 - минимаксное адаптивное, 33
 - осцилляторами с нелинейным демпфированием, 170
 - по состоянию, 19
 - стохастическое, 18
- Условия постоянного возбуждения
 - (предельной невырожденности), 43
- Устойчивость
 - интегральная, 67
 - инвариантных
 - множеств по Ляпунову, 52
 - от выхода к состоянию, 52
 - от входа к состоянию, 52, 67
 - от входа к выходу, 52
 - по Лагранжу, 63
 - по Ляпунову, 62
 - практическая, вход-выход, 67
 - решений по Ляпунову, 52, 63
 - систем, заданных оператором, 52
 - вход-выход, 66
 - вход-выход-состояние, 67
 - по Пуассону, 187