

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

ОБЩАЯ ФИЗИКА  
(конспект лекций)

С.Е.МАЛЬХАНОВ

Санкт-Петербург  
2001

Предлагаемый читателям конспект лекций по общей физике многие годы и по настоящее время читается автором студентам 1 и 2 курсов технических факультетов Санкт-Петербургского государственного технического университета. В основу данного курса заложена идея о том, что физика суть наука экспериментальная, а хорошая теория предполагает обобщение экспериментальных закономерностей до физических законов. Автор, воспитанный на экспериментальном видении физических проблем старался донести до студентов неизбежную потребность в теоретических расчетах. Необходимые сведения по векторной алгебре, интегральному и дифференциальному исчислению, рядам и другие математические сведения автор вводит в курс по мере их надобности, с самого начала предлагая их как необходимые расчетные операции.

С начала и до конца курса автор старается сформировать у студентов физическую картину мира на основе представлений о квантовом характере устройства природы, используя квазинепрерывность и непрерывность как идеальную математическую модель. Законы сохранения, виды взаимодействий, релятивизм, и статистический характер устройства природы также пронизывают весь курс. Тенденция восхождения от простого к сложному, от простых закономерностей к более общим законам преследуется в изложении материала. Автор благодарен коллективу кафедры экспериментальной физики университета разных лет, (с начала 70-х годов) работа рядом с которыми позволила ему реализовать данный конспект лекций.

Конспект лекций состоит из 4 частей. 1 часть – МЕХАНИКА, 2 часть – МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, 3 часть – ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ, 4 часть – ОПТИКА И АТОМНАЯ ФИЗИКА.

Мальханов Сергей Ефремович 2001 г

## Содержание

### Часть 1 МЕХАНИКА

О предмете физики	11
ВВЕДЕНИЕ	12
§ 1 Предмет и метод физики	12
§ 2 Основные понятия физики	12
ГЛАВА 1 КИНЕМАТИКА	15
§ 1 Векторы	15
§ 2 Путь, перемещение, скорость, ускорение	18
§ 3 Интегрирование скорости для нахождения пути	19
§ 4 Вектора углового перемещения, угловой скорости и ускорения	21
§ 5 Производная единичного вектора (при его повороте). Нормальное и касательное ускорения	25
ГЛАВА 2 ДИНАМИКА	25
§ 1 Масса и импульс тела	25
§ 2 Законы Ньютона	26
§ 3 Принцип относительности Галилея	28
§ 4 Центр инерции системы тел. Теорема о движении центра инерции. Закон сохранения импульса	30
§ 5 Работа. Кинетическая энергия. Закон сохранения кинетической энергии. Мощность	32
§ 6 Единицы измерения механических величин	35
§ 7 Консервативные и неконсервативные силы	36
§ 8 Потенциальная энергия. Закон сохранения полной механической энергии	39
§ 9 Связь силы и потенциальной энергии (в поле консервативных сил)	42
§ 10 Момент силы. Векторное произведение	45
§ 11 Момент импульса. Закон сохранения момента импульса	49
§ 12 Момент импульса относительно неподвижной оси. Момент инерции твердого тела	51
§ 13 Неинерциальные системы отсчета	57
§ 13.1 Центробежная сила инерции	57
§ 13.2 Сила Кориолиса	58
§ 14 Гироскопы	60
ГЛАВА 3 СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	62
§ 1 Постулаты специальной теории относительности	62
§ 2 Преобразования Лоренца (1904 г)	65
§ 3 Следствия из преобразований Лоренца: длины тел и промежутки времени	70
§ 4 Преобразования скоростей, импульса и энергии	71
ГЛАВА 4 ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ	73
§ 1 Законы Кеплера	73
§ 2 Силы, действующие по закону обратных квадратов. Закон всемирного тяготения	74
§ 3 Движение в центральном поле (задача двух тел). Секторальная скорость	75
§ 4 Кеплерова задача: траектории тел в поле тяготения	77
§ 5 Космические скорости	81
§ 6 Об общем принципе относительности	82
ГЛАВА 5 МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ	85
§ 1 Малые колебания	86

§ 2 Свободные гармонические колебания	88
§ 3 Математический и физический маятники	90
§ 4 Затухающие колебания	92
§ 5 Вынужденные колебания гармонического осциллятора (с учетом сил сопротивления)	95
§ 6 Сложение колебаний одинакового направления. Векторная диаграмма	98
§ 7 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний	100
§ 8 Биения	102
§ 9 Ангармонический осциллятор	103
§ 10 Адиабатические инварианты	105

## Часть 2 МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Об атомистической теории	109
ГЛАВА 1 ФИЗИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА	111
§ 1 Вероятность. Частотное определение вероятности. Свойства вероятности	112
§ 2 Статистический вес	116
§ 3 Дискретные и непрерывные распределения вероятности	116
§ 4 Применение статистических методов к системе молекул	118
§ 5 Каноническое распределение	119
5.1 Микроканоническое распределение	120
5.2 Каноническое распределение Гиббса	122
ГЛАВА 2 РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН	124
§ 1 Распределение Максвелла по импульсам, скоростям и энергиям	124
1.1 Плотность распределения по векторам импульсов	125
1.2 Плотность распределения по векторам скоростей	126
1.3 Плотность распределения для компонентов скорости	126
1.4 Плотность распределения для модуля скорости	127
1.5 Плотность распределения для энергии	129
1.6 Анализ результатов для плотности вероятности модулей скорости, импульса и энергии	129
§ 2 Распределение Больцмана	132
§ 3 Биномиальное распределение	134
§ 4 Распределение Гаусса (нормальное распределение)	136
§ 5 Распределение Стюдента	139
ГЛАВА 3 ТЕРМОДИНАМИКА	141
Вместо вступления	141
§ 1 Энтропия. Понятие и свойства	142
§ 2 Температура	143
2.1 Температура как параметр равновесной системы	143
2.2 Термометрия	144
2.3 Термометр Фаренгейта	149
§ 3 Давление	150
§ 4 Первый закон термодинамики	151
§ 5 Макроскопические состояния газа. Процессы	152
§ 6 Расчет работы и внутренней энергии в термодинамике	154
§ 7 Теплоемкость	156
7.1 Расчет теплоемкости при постоянном объеме и давлении	156
7.2 Виды теплоемкости	157
§ 8 Уравнение Пуассона для адиабатического процесса	158
§ 9 Политропический процесс	159

§ 10 Применение первого начала термодинамики к тепловым процессам	159
§ 11 Цикл и теорема Карно	162
§ 12 Второе и третье начала термодинамики	164
§ 13 Уравнение состояния газа в Модели Ван-дер-Ваальса	166
§ 14 Процесс Джоуля-Томсона	167
ГЛАВА 4 ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА	171
§ 1 Средняя длина свободного пробега молекул	171
1.1 Эффективное сечение взаимодействия молекул	172
1.2 Средняя длина свободного пробега	172
§ 2 Диффузия. Коэффициент диффузии	174
§ 3 Теплопроводность Коэффициент теплопроводности	176
§ 4 Динамическая вязкость. Коэффициент вязкости	178
§ 5 Перенос заряда	179
ГЛАВА 5 ГИДРОДИНАМИКА	181
§ 1 Понятие о гидродинамике	181
1.1 Модель сплошной среды	181
1.2 Уравнение непрерывности	182
1.3 Об уравнении Эйлера	184
1.4 Теорема неразрывности струй	184
§ 2 Уравнение Бернулли	185
§ 3 Ламинарное и турбулентное течения	187
§ 4 Формула Пуазейля	188
ГЛАВА 6 СТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ	192
§ 1 Простые кристаллические структуры. Плотность кристаллов и межатомные расстояния	192
1.1 О простых кристаллических структурах	192
1.2 Плотность кристаллов и межатомные расстояния	194
§ 2 Решетка Бравэ.	197
§ 3 Кристаллические системы	199
§ 4 Теплємкость кристаллов	202

### Часть 3 Электричество и магнетизм

ГЛАВА 1 ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ (ВАКУУМ)	206
§ 1 Электрические заряды	206
§ 2 О единицах измерения заряда	210
§ 3 О получении электрических зарядов	212
3.1 Элемент Вольты	212
3.2 Элемент Даниэля-Якоби	212
§ 4 Электризация как разделение зарядов	213
§ 5 Опыты с электронами	214
5.1 Об определении заряда в опыте Милликена	214
5.2 Обнаружение движения электронов в опыте Толмена и Стюарта	216
5.3 Приведение диска в движение с использованием электронного тока	217
§ 6 Напряженность электрического поля	217
§ 7 Постановка задачи о расчете электрических полей	219
§ 8 Потенциал электрического поля	222
8.1 Об электрическом потенциале	222
8.2 Потенциальный характер электрического поля	224
§ 9 Закон Гаусса	228
§ 10 Формулы Остроградского –Гаусса, Стокса и уравнения Максвелла для <b>E</b>	231

в вакууме	
10.1 От формулы Остроградского-Гаусса к уравнению Максвелла	231
10.2 От циркуляции вектора $\mathbf{E}$ по контуру, через формулу Стокса к следующему уравнению Максвелла	233
§ 11 Метод зеркальных изображений	235
ГЛАВА 2 ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ	237
§ 1 Проводник во внешнем электрическом поле	237
§ 2 Электрическая емкость	240
§ 3 Электростатический генератор Ван-де-Граафа	241
ГЛАВА 3 ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ	243
§ 1 Поляризация диэлектриков	243
§ 2 Модель расчета электрического поля диполя	246
§ 3 Поляризованность	248
§ 4 Вектор электрической индукции	250
§ 5 Энергия электрического поля	253
ГЛАВА 4 ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	257
§ 1 Сила и плотность электрического тока	257
§ 2 Закон Ома	259
§ 3 Подвижность носителей заряда	260
§ 4 Закон Ома для замкнутой цепи	261
§ 5 Электрические цепи	263
§ 6 Уравнение непрерывности	270
ГЛАВА 5 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ (ВАКУУМ)	272
§ 1 Магнитная индукция – характеристика магнитного поля	272
§ 2 Формула Био-Савара-Лапласа	274
§ 3 Магнитная индукция прямого провода с током	276
§ 4 Соленоидальный (вихревой) характер магнитного поля	277
§ 5 Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции	278
§ 6 Закон полного тока	280
§ 7 Поле соленоида	281
§ 8 Магнитное поле движущегося заряда	283
§ 9 Сила Лоренца	284
ГЛАВА 6 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ	286
§ 1 Магнитный момент и намагниченность	286
§ 2 Напряженность магнитного поля	288
§ 3 Законы магнитного поля в среде (и с учетом $\mathbf{H}$ )	289
§ 4 Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики	290
§ 5 Электромагнитная индукция	291
§ 6 Диамагнетизм – проявление электромагнитной индукции элементарных токов	293
6.1 О магнитомеханическом отношении для электрона	294
6.2 Расчет изменения механического момента количества движения орбитального электрона при включении магнитного поля	295
6.3 Дополнительный магнитный момент электрона в атоме – причина диамагнетизма	296
§ 7 Парамагнетизм. Опыт Штерна и Герлаха	297
7.1 Постановка задачи	297
7.2 Не скомпенсированные спины электронов – природа парамагнетизма	298
§ 8 Ферромагнетизм	300
§ 9 Магнитные цепи	302

ГЛАВА 7 СВЯЗЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ	304
§ 1 О вихревых электрических полях. Первое положение теории Максвелла	304
§ 2 Токи смещения. Второе положение теории Максвелла	308
§ 3 Значение теории электромагнетизма Максвелла	310

#### Часть 4 Оптика и атомная физика

ГЛАВА 1 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	312
§ 1 Потенциалы электромагнитного поля. Волновое уравнение	312
§ 2 Уравнение плоской волны. Плоские затухающие и сферические волны	315
2.1 Уравнение плоской волны	315
2.2 Фазовая и волновая скорости	317
2.3 Затухающие и сферические волны	318
§ 3 Плоская электромагнитная волна	319
§ 4 Энергия и импульс электромагнитной волны	322
4.1 Вектор Пойнтинга	322
4.2 Импульс электромагнитной волны	323
§ 5 О шкале электромагнитных волн	324
§ 6 О характеристиках электромагнитных волн	327
§ 7 Принципы Ферма, Гюйгенса и Гюйгенса-Френеля	329
§ 8 Поляризованные электромагнитные волны	331
§ 9 Способы поляризации	333
9.1 Закон Брюстера	333
9.2 Идеальный поляризатор. Закон Малюса	334
§ 10 Интерференция электромагнитных волн	337
§ 11 Опыт Юнга	339
§ 12 Интерференция в пленках	342
§ 13 Дифракция	344
§ 14 Дифракция от круглого отверстия	347
§ 15 Дифракция от прямоугольной длинной щели по Фраунгоферу. Расчет интенсивности	350
§ 16 Голография	355
16.1 Интерференция поляризованного света	355
16.2 О лазерах	356
16.3 Получение голографического снимка	358
16.4 Получение голографического изображения как восстановление волновой картины со снимка	359
ГЛАВА 2 КВАНТОВАЯ ОПТИКА	361
§ 1 Тепловое излучение. Закон теплового излучения Кирхгофа	361
§ 2 Закон Стефана –Больцмана. Закон Вина и формула Вина	365
§ 3 Формула Планка	368
3.1 Формула Релея-Джинса, классические представления	368
3.2 Гипотеза и формула Планка	370
3.3 Анализ формулы Планка	371
§ 4 О фотонах	372
4.1 Фотоэффект	373
4.2 Эффект Комптона	378
ГЛАВА 3 АТОМНАЯ ФИЗИКА	384
§ 1 Закономерности в атомных спектрах. Постулаты бора	384
1.1 Дисперсия электромагнитного излучения. Виды спектров	384
1.2 О спектрах. Термы. Серии	386

§ 2 Опыт Франка-Герца	389
§ 3 Квантование по Бору	392
3.1 Квантование момента импульса	392
3.2 Боровский радиус и квантование внутренней энергии	395
§ 4 Волновое уравнение Шредингера	396
4.1 Электрон-волна	396
4.2 Уравнение Шредингера	398
4.3 Конструирование уравнения Шредингера способом Энрико Ферми	399
§ 5 Атом водорода	402
5.1 Лапласиан в сферической системе координат	403
5.2 Решение уравнения Шредингера в сферической системе координат	406
5.3 Квантовый характер решений уравнения Шредингера	408
§ 6 Смысл $\Psi$ -функции и соотношение неопределенностей	410
6.1 О смысле $\Psi$ -функции	410
6.2 О соотношении неопределенностей Гейзенберга	413
ГЛАВА 4 АТОМНАЯ ФИЗИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ	416
§ 1 Типы связей атомов в твердых телах	416
§ 2 Дифракция рентгеновских лучей	418
§ 3 Образование энергетических зон в твердых телах	420
ГЛАВА 5 НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ФИЗИКЕ АТОМНОГО ЯДРА	424
§ 1 Радиоактивность. Закон радиоактивного распада	424
1.1 Виды радиоактивности	424
1.2 Основной закон радиоактивного распада	427
§ 2 Энергия связи ядер	428
§ 3 Получение ядерной энергии	431
3.1 Деление ядер	431
3.2 Работа ядерного реактора	432
3.3 Термоядерные реакции	435
3.4 Природный ядерный реактор в Окло	436



“Бытие.

Глава 1.

Сотворение неба и земли....

В начале сотворил Бог небо и землю.

2. Земля же была безвидна и пуста, и тьма над бездною; и дух Божий носился над водою.

И сказал Бог: да будет свет.

И стал свет

4. И увидел Бог свет, что он хорош; и отделил Бог свет от тьмы.

И назвал Бог свет днем, а тьму ночью. И был вечер и было утро: день один.

АРИСТОТЕЛЬ ( 384-322гг до н.э.) 324г. до н.э., Греция, северная часть, Стагир

“ ... природа двояка: она есть и форма и материя.

... дело физика познавать и ту, и другую природу...

... самым обычным движением... будет движение в отношении места, которое мы называем перемещением.

... место есть нечто; где сейчас находится вода, там после ее ухода... из сосуда... снова окажется воздух... еще какое-нибудь тело...

перемещение простых физических тел показывает не только, что место есть нечто, но также, что оно имеет и какую-то силу...

... каждое из этих тел устремляется к своему собственному месту... верх (куда огонь) ...низ (куда земля)... право... лево... шесть направлений”

АРХИМЕД (287-212г. до н. э.), Сицилия, Сиракузы

“ Тяжести, уравновешивающиеся на равных длинах, будут тоже равны (вспомним также известный закон Архимеда)

Тело более легкое, чем жидкость, будучи опущено в эту жидкость, погружается настолько, чтобы объем жидкости, соответствующей погруженной, имел вес, равный весу всего тела ...”

ГАЛИЛЕЙ ГАЛИЛЕО (1564-1642гг) Пиза, Флоренция Великое герцогство Тосканы, кафедра в Пизе, затем в Падуе 18 лет

“Сальвиати... что произошло бы с тем же движущимся телом на поверхности, которая не поднимается и не опускается?

Симпличио... оно должно оставаться неподвижным

Сальвиати... если шар положить неподвижно, но если придать ему импульс движения... сколь долго полагаете вы, продолжалось бы это движение...?

Симпличио... столь долго, сколь велика длина такой поверхности без спуска и подъема.

Сальвиати... следовательно, если бы такое пространство было бы беспредельным, движение по нему равным образом не имело бы предела, то есть было бы постоянным?

Симпличио... мне кажется, что так...”

## **О ПРЕДМЕТЕ ФИЗИКИ**

Человеку неизвестны окончательные истины, а известно только то, что можно сказать об излагаемом предмете, исходя из современного уровня науки.

Физики изучают явления, происходящие в неживой природе. На основе опытов и размышлений создаются модели явлений. Эти модели изменяются со временем людьми в зависимости от точности экспериментов, различиях в их осмыслении и иногда в силу конъюнктурных соображений. Применение той или иной физической модели в практической деятельности людей не зависит от возраста модели.

В сферу интересов физиков включены явления, связанные с устройством материи (того из чего построена вся природа) и свойства материи, определяемые этим устройством. Часто, чем ближе к физике, тем ближе к вопросу о том, как устроена материя и почему такое устройство определяет те или иные явления природы. Физические науки всегда находятся в тесном контакте с вопросами высвобождения материей энергии, то есть энергетических ресурсов человечества. Наоборот, к физическим вопросам относятся вопросы о том, - какие явления природы и как указывают на то или иное устройство материи. В силу сказанного, физика часто пересекается с другими науками, порожденными часто ранее ею, поэтому физика универсальна и может до сих пор выделять из себя другие новые науки.

## Введение

### §1 ПРЕДМЕТ И МЕТОД ФИЗИКИ

В физике изучаются формы движения материи, в чем и состоит предмет физики. Условно материя делится на поле и вещество. Вещество - все окружающие нас тела, которые мы можем наблюдать с помощью наших органов чувств.

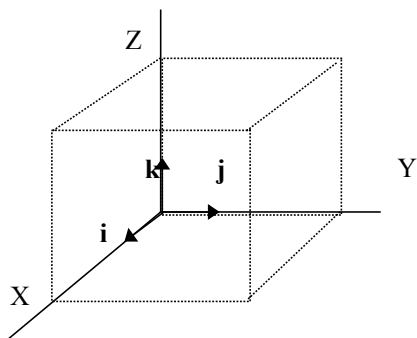
Поля - объекты, посредством которых происходят различные взаимодействия. Поля мы можем наблюдать лишь опосредствованно через движение вещества и с помощью физических приборов. Физические приборы являются как бы дополнительными органами чувств человека.

Методом исследования в физике является опыт, эксперимент. Только эксперимент может служить прямым доказательством наличия того или иного физического закона. Теория сильна тем, что может предсказывать физические законы помимо эксперимента (хотя чаще в связи с экспериментом), но единственным доказательством справедливости закона служит только опыт, эксперимент. Точность знания законов в физике ограничена точностью экспериментов.

### §2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИЗИКИ

Событие. Всякие изменения с телами (и полями) мы будем называть событиями. События происходят в пространстве и во времени. Пространство. Пространством мы будем называть систему тел (полей), относительно которых определяется положение других тел (полей). (Абсолютное пространство - одна из моделей реального физического объекта - пространства).

Мы живем в трехмерном Мире. Для его количественного описания Рене Декартом изобретена прямоугольная система координат:  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  - называются ортами осей координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .



Орты указывают направление осей координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и имеют единичную длину, то есть их модули равны единице. Тогда  $x\mathbf{i}$ ,  $y\mathbf{j}$  и  $z\mathbf{k}$  обозначают и направление и величины координат. Координаты точки  $A$  можно символически записать как  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , где  $\mathbf{r}$  называется радиус-вектором. Итак  $x$ ,  $y$  и  $z$  имеют линейные размеры. Чтобы

далее работать с этими величинами, необходимо определиться в системе единиц измерения - международной системе единиц, принятой в большинстве стран мира. “SI” - System International.

## ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ДЛИНЫ

(немного предыстории)

1.1675г. Длина секундного маятника.

-длина маятника, близкого к математическому и имеющего период равный единице времени в 1 секунду ( в те времена во Французской Академии наук существовала проблема воспроизводимости промежутка времени в 1 секунду). Единица длины, определенная таким способом была весьма неточной. Рассчитаем ее по формуле для периода математического маятника:

$$T = 2\pi (l/g)^{1/2} \quad l = g T^2 / (2\pi)^2 \approx 0,25 \text{ м}$$

1791г. Франция. Академия наук.

1 м: одна десятиmillionная часть четверти длины земного меридиана т.е.

1/40 000 000. Это было расстояние в 1100 км от Дюнкерка до Барселоны по меридиану. В дальнейшем из-за трудностей и погрешностей при повторных измерениях вместо естественного вводится архивный метр и изготавливается 31 эталон его в 1889 г. Ширина штриха в нем составляла 10 мкм, погрешность 0,1 мкм.

1960г.

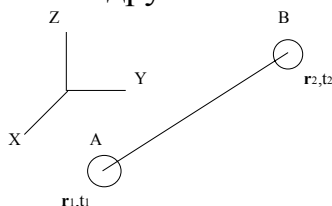
1 м: 1650763,73 длин волн в вакууме перехода  $2p_5 - 5d_{10}$  изотопа криптона-86. Измеряется методами интерферометрии (см. раздел волновая оптика). Относительная погрешность равна  $3 \cdot 10^{-8}$ .

1983г. 7 – я генеральная конференция по мерам и весам (ГКМВ).

1 м: длина пути, проходимого светом в вакууме за  $1/299792458$  секунды ( скорость света постулируется при этом равной  $299792458$  м/с). Измеряется с помощью лазерной техники. Относительная погрешность составляет  $10^{-10}$ .

## ВРЕМЯ, ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕНИ

Временем будем называть показания неких часов. Часы - тело, в котором совершается периодический процесс (опять же, за часы мы выбираем те же тела: ничего другого нас нет).



Произошло перемещение тела в пространстве и во времени

## ЭТАЛОНЫ ВРЕМЕНИ

До 1960 г.

1с -  $1/86400$  часть солнечных средних суток

1960 г.

1с -  $1/31556925,9747$  часть тропического 1900 года, 1 января, полдня. Относительная погрешность -  $10^{-7}$ .

1972г. 8 ГКМВ.

1с = 9192631770 периодам излучения между двумя сверхтонкими уровням основного состояния Cs - 133 [ $m = 4, M = 0$  и  $m = 3, M = 0$ , где  $m$  и  $M$  - параметры состояния атома Cs] невозмущенного внешними полями.

Таким образом, мы имеем способ, определяться в пространстве и во времени.

Однородность пространства (и времени) означает, что простая трансляция - перемещение системы замкнутых тел в пространстве (и со временем), не влияет на ход происходящих в этой системе событий и явлений.

Изотропность пространства означает, что поворот замкнутой системы тел относительно оси, произвольно проведенной в пространстве, не влияет на ход происходящих в системе событий и явлений.

## ЧАСТЬ 1 МЕХАНИКА

**В** механике изучаются формы движения. Движением в механике мы будем называть процессы изменения взаимного расположения тел при поступательных и вращательных формах их изменения в пространстве и со временем.

### ГЛАВА 1 КИНЕМАТИКА

**К** кинематика - раздел механики, в котором описывается движение тел как материальных точек. Материальной точкой называется воображаемое тело, не имеющее массы, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Задача кинематики - описание зависимости кинематических величин от времени:

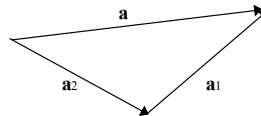
$\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\mathbf{a}(t)$ , ...

#### § 1 Векторы

Векторы - физические величины, имеющие направление, ( $\mathbf{a}$  - "вектор  $a$ "). В декартовой системе координат  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ .  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ - базисные векторы (орты декартовой системы координат),  $a_{x,y,z}$ - компоненты вектора.

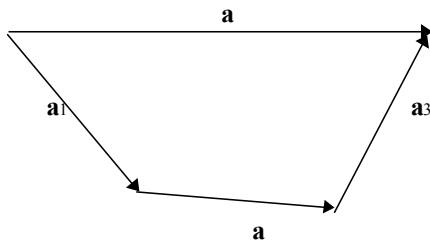
Сложение векторов геометрически (1586г, Стевин). Пусть имеем два вектора  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$

Вектора складываются по правилу параллелограмма, для этого совместим начала векторов параллельным переносом и проведем в полученном параллелограмме диагональ или совместим начало и конец двух векторов и соединим начало первого с концом второго. Мы получим тот же самый результат:



$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$$

Продолжим аналогию на число векторов большее двух:



$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$$

Вычитание векторов определяется как действие обратное сложению, например

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1$$

Сложение векторов алгебраически, если:

$$\mathbf{a}_1 = a_{1x}\mathbf{i} + a_{1y}\mathbf{j} + a_{1z}\mathbf{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_2 = a_{2x}\mathbf{i} + a_{2y}\mathbf{j} + a_{2z}\mathbf{k},$$

$$\text{то } \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2 = (a_{1x} \pm a_{2x})\mathbf{i} + (a_{1y} \pm a_{2y})\mathbf{j} + (a_{1z} \pm a_{2z})\mathbf{k}$$

- суммы или разности компонентов векторов.



Умножение на скаляр.  $\alpha$ :  $\alpha \mathbf{a}$  - вектор в  $\alpha$  раз больший по величине, чем величина вектора  $\mathbf{a}$ , причем для  $\alpha > 0$  - того же направления, а для  $\alpha < 0$  - противоположного направления.

Заметим, что  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  являются сторонами прямоугольного параллелепипеда в декартовой системе координат, а поскольку  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ , где  $\mathbf{a}$  - сумма векторов, то модуль  $\mathbf{a}$  по определению равен  $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ , то есть модуль вектора  $\mathbf{a}$  вычисляется как квадратный корень из суммы квадратов его компонентов и является диагональю прямоугольного параллелепипеда.

О скалярном произведении векторов. По определению:

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = a_1 a_2 \cos(\mathbf{a}_1 \hat{\mathbf{a}}_2), \text{ при этом } \mathbf{i} \mathbf{i} = \mathbf{j} \mathbf{j} = \mathbf{k} \mathbf{k} = 1 \cos 0 = 1,$$

$$\mathbf{i} \mathbf{j} = \mathbf{i} \mathbf{k} = \mathbf{j} \mathbf{k} = \cos(\pi/2) = 0.$$

В качестве примера возведем в квадрат сам вектор  $\mathbf{a}$ .

$$(\mathbf{a}_x \mathbf{i} + \mathbf{a}_y \mathbf{j} + \mathbf{a}_z \mathbf{k})^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y \mathbf{i} \mathbf{j} + \dots$$

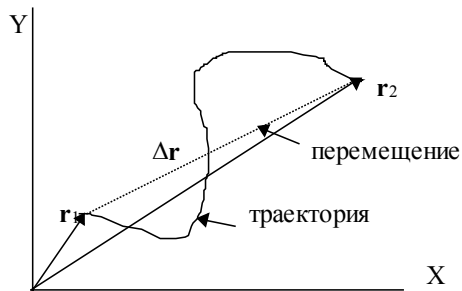
## Вектор как тензор первого порядка

Тензор по Сокольникову И.С. Тензоры - абстрактные объекты, свойства которых не зависят от координатных систем, используемых для описания этих объектов.

Тензоры как математическое отображение физических величин - физические величины, математически так представленные, что их свойства (при таком описании) не зависят от координатных систем, используемых для представления данных физических величин. Компонентов вектора  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  недостаточно для независимого от выбора координат описания физической величины. Каждая компонента становится как бы вектором и распадается на три новых компоненты:  $a_x$  ( $a_{xx}$ ,  $a_{xy}$ ,  $a_{xz}$ ),  $a_y$  ( $a_{yx}$ ,  $a_{yy}$ ,  $a_{yz}$ ),  $a_z$  ( $a_{zx}$ ,  $a_{zy}$ ,  $a_{zz}$ ). Тензорное преобразование предполагает независимость от выбора системы координат для данной физической величины, и такая независимость называется инвариантностью по отношению к преобразованию координат.

## §2 Путь, перемещение, скорость, ускорение

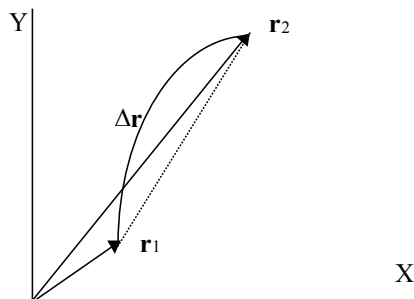
Рассмотрим двумерное пространство, плоскость (для простоты).



$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  - вектор перемещения, перемещение,  $\Delta r$ , - длина прямой, соединяющей начальную и конечную точки траектории

Чтобы узнать форму траектории надо знать вид зависимости  $y(x)$ . Вдоль траектории отсчитывается путь.

Скорость мы будем связывать с быстротой перемещения материальной точки в пространстве. В данном случае речь идет о мгновенной скорости на пути. Рассмотрим участок траектории



$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{r} / \Delta t) = d\mathbf{r} / dt,$$

По определению

$$[v] = \text{м/с}, \quad \mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt,$$

$$v_z = dz/dt, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Мгновенная скорость есть первая производная от радиус-вектора по времени.  
Мгновенное ускорение:

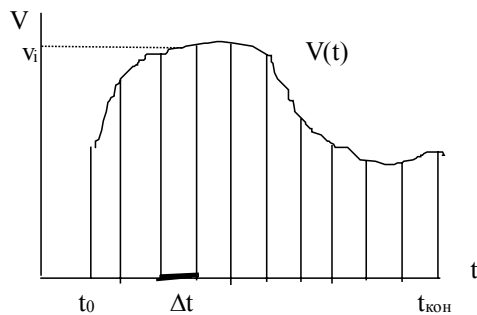
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{v} / \Delta t = d\mathbf{v} / dt = d^2 \mathbf{r} / dt^2,$$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad a_x = dv_x / dt = d^2 x / dt^2,$$

$$a_y = dv_y / dt = d^2 y / dt^2, \quad a_z = dv_z / dt = d^2 z / dt^2, \quad a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

### § 3 Интегрирование скорости для нахождения пути

Рассмотрим задачу о том, как, зная величину скорости вычислить путь пройденный материальной точкой. Пусть нам известна зависимость модуля скорости от времени.



Разобьем путь  $S$  вдоль траектории на относительно небольшие участки, тогда

$$S = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_n = \sum \Delta s_i$$

но так как  $v_i = \Delta s_i / \Delta t$ , то  $\Delta s_i = v_i \Delta t$ , где  $\Delta t$  - равные промежутки времени  $\Rightarrow$

$$S = \sum \Delta s_i = \sum v_i \Delta t.$$

Суммирование производится от  $i = 1$  до  $i = n$  - натурального числа. Это равенство приближенное и будет тем точнее, чем меньше  $\Delta t$ . Точным значением будет

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum v_i \Delta t = \int_{t_0}^{t_{\text{кон}}} v(t) dt$$

Получили определенный интеграл в пределах от  $t_0$  до  $t_{\text{кон}}$  от вектора мгновенной скорости. Можно интегрировать вектор скорости.

$$\int_{t_0}^{t_{\text{кон}}} \mathbf{v}(t) dt = \int_{t_0}^{t_{\text{кон}}} d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \Delta \mathbf{r}$$

$(\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \Rightarrow d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt)$

Средняя путевая скорость:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = s / (t_{\text{кон}} - t_0) = [1 / (t_{\text{кон}} - t_0)] \int_{t_0}^{t_{\text{кон}}} v(t) dt,$$

средняя скорость по перемещению

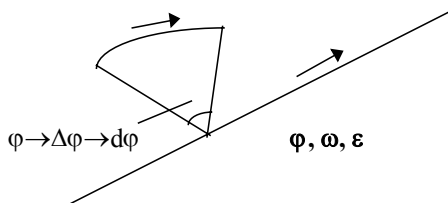
$$\langle \mathbf{v} \rangle = \Delta \mathbf{r} / \Delta t = [1 / (t_{\text{кон}} - t_0)] \int_{t_0}^{t_{\text{кон}}} \mathbf{v}(t) dt$$

Заметим, что среднее значение произвольной функции  $f(x)$  вычисляется по формуле

$$\langle f \rangle = [1 / (x_2 - x_1)] \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

## § 4 Вектора углового перемещения, угловой скорости и ускорения

Рассмотрим вращение материальной точки (частицы) вокруг оси



Если  $\varphi$  мал - ( $d\varphi$ ), то перемещение можно было бы считать прямолинейным, но такие повороты никак не сложить по правилу параллелограмма. За величину принимаем поворот  $d\varphi$ , а за направление - направление вдоль оси, около которой совершается поворот, по правилу правого винта.  $d\varphi$  - псевдовектор. Тогда:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\varphi / \Delta t = d\varphi / dt, \quad \varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\omega / \Delta t = d\omega / dt = d^2\varphi / dt^2,$$

$\omega$  и  $\varepsilon$  - также псевдовекторы.

При равномерном вращении за равные промежутки времени точка проходит равные углы, тогда

$$\omega = \varphi / t = \text{cst} \Rightarrow \varepsilon = 0.$$

Назовем время одного полного оборота, при этом, периодом  $t = T$ , а так как угол полного оборота  $\varphi = 2\pi$ , то

$$\omega = \varphi / t = 2\pi / T \Rightarrow T = 2\pi / \omega$$

$$[\varphi] = \text{град.}, \text{рад.}, [t, T] = \text{с}, [\omega] = \text{рад/с}, [\varepsilon] = \text{рад/с}^2$$

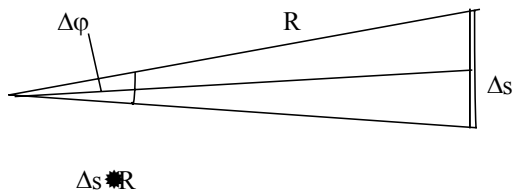
Определим число оборотов в единицу времени

$$\nu = 1/T = \omega / 2\pi \Rightarrow \omega = 2\pi\nu, [\nu] = \text{с}^{-1} = \text{Гц.}$$

Связь линейной и угловой скорости.

### Вариант 1

Пусть тело, вращаясь вокруг оси, переместилось на  $\Delta s$  и угол поворота составил  $\Delta\varphi$ .  $R$  - радиус поворота



$(\Delta s/2)/R = \sin \Delta\varphi/2$ . Это приближенное равенство тем точнее, чем  $\Delta s < R$ , а так как  $\sin \Delta\varphi/2 \approx \Delta\varphi/2$  при относительно малых значениях  $\Delta\varphi \Rightarrow \Delta s \cong R\Delta\varphi$  а в пределе точно, то есть

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t = ds/dt = R d\varphi/dt = R\omega, (ds = R d\varphi)$$

$$\text{а также } a = dv/dt = d(\omega R)/dt = R d\omega/dt = R\varepsilon$$

Вариант 2.

Пусть  $\mathbf{e}$  - вектор единичной длины, но переменный по направлению

$$\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t, \text{ так как } \omega = \alpha/t \Rightarrow \alpha = \omega t$$

Представим радиус-вектор материальной точки (частицы, тела - при аппроксимации) в виде

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e} = (r \cos \omega t) \mathbf{i} + (r \sin \omega t) \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = d(r \mathbf{e})/dt = d[(r \cos \omega t) \mathbf{i} + (r \sin \omega t) \mathbf{j}] /dt = \omega r [(-\sin \omega t) \mathbf{i} + (\cos \omega t) \mathbf{j}].$$

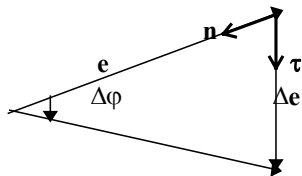
Найдем модуль скорости. Имеем  $v = \omega r$ ,  $r = R \Rightarrow v = \omega R$ . Вычислим ускорение.

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = r \omega^2 [(-\cos \omega t) \mathbf{i} + (-\sin \omega t) \mathbf{j}] = -r \omega^2 \mathbf{e}.$$

Из полученного выражения (знака минус), следует, что вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{r}$  направлены навстречу друг другу. Для модуля ускорения имеем

$$\underline{a = \omega^2 R = v^2/R.}$$

§ 5 Производная единичного вектора (при его повороте). Нормальное и касательное ускорения



Пусть единичный вектор  $\mathbf{e}$  поворачивается на угол  $\Delta\varphi$ . Найдем его производную, учитывая, что изменение вектора суть -  $\Delta\mathbf{e}$ , а ортом вектора  $\Delta\mathbf{e}$  -  $\boldsymbol{\tau}$  является единичный вектор коллинеарный с  $\Delta\mathbf{e}$

$\Delta\mathbf{e} = \Delta\varphi \boldsymbol{\tau}, \text{ тогда } - d\mathbf{e}/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\mathbf{e}/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \boldsymbol{\tau} \Delta\varphi/\Delta t = \boldsymbol{\tau} \omega,$
--

$$\underline{d\mathbf{e}/dt = \omega \boldsymbol{\tau}.}$$

Получилось выражение, в котором направление векторов левой и правой части взаимно перпендикулярны. Тогда направление скорости можно также задать с помощью орта  $\tau$ , только что определенного:  $\mathbf{v} = v\tau$ , а полное ускорение определится как производная по времени

$$\underline{\mathbf{a}} = d\mathbf{v}/dt = d(v\tau)/dt = (dv/dt)\tau + v d\tau/dt = a_\tau\tau + v\omega\mathbf{n} = a_\tau\tau + a_n\mathbf{n} = \underline{\mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n},$$

где орт  $\mathbf{n}$  перпендикулярен  $\tau$  и  $\mathbf{v}$  и является ортом нормали в данной точке траектории. В полученных выражениях:

$a_\tau = dv/dt$  - модуль касательного ускорения

$a_n = \omega v = v^2/R$  - модуль нормальной составляющей ускорения ( $\omega = v/R$ )

### Обобщенная векторная схема обозначений в декартовой системе координат (краткая запись)

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3, \quad \sum_{i=1}^n A_i \mathbf{e}_i = A_\mu \mathbf{e}_\mu = \mathbf{A},$$

индексы у  $\mathbf{A}$  можно совсем опустить, подразумевая любой многокомпонентный вектор. К примеру, запись скалярного произведения приобретает вид

$$\mathbf{AB} = \left( \sum_{i=1}^n A_i \mathbf{e}_i \right) \left( \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^n A_i B_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sum_{i,j=1}^n A_i B_j \delta_{ij}$$

$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$ .  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера.



## ГЛАВА 2 ДИНАМИКА

### § 1 Масса и импульс тела

**М**асса - мера инертности тел. При попытке привести тело в движение (то есть изменить величину и направление, или только величину или только направление скорости тела) мы встречаем его сопротивление. Чтобы количественно оценить меру сопротивляемости, и вводится понятие массы, как количественной характеристики свойств тела. Мало просто говорить: маленькая масса, большая масса. Надо ответить на вопрос - сколько? Тут и возникает проблема эталона массы.

Долгое время эталоном массы служил  $1\text{дм}^3$  воды при  $3,98^\circ\text{C}$  и при  $P = 10^5$  Па. Из-за неточности в определении плотности воды от него отказались.

В настоящее время пользуются другим эталоном массы. Эталон массы, так называемый 1 кг массы, храниться в Севре под Парижем в международном бюро мер и весов, он представляет собой *цилиндр диаметром 39 мм, высотой 39 мм из сплава - 90% Pt и 10% Ir*. Плотность этого вещества, обладающего высокой стойкостью, однородностью и полируемостью, - 21 г/см.

Отметим, что 1с и 1м - естественные эталоны, а 1 кг единственный искусственно созданный эталон. С ним сравниваются прототипы для их изготовления и дальнейшего употребления. Принято обозначение массы – "m" или иное.

Импульсом (количеством движения) называется (по определению) произведение массы тела на его скорость.

Итак, первое понятие в динамике - масса, второе - импульс,  $[p] = \text{кг м/с}$

## § 2 Законы Ньютона

1-й закон Ньютона. Закон инерции (по Ньютону).

Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние (переводы “из Ньютона” выполнены академиком А.Н. Крыловым).

"Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным..."

( "Neuton I. "Philosophia naturalis principia mathematica."Londoni, 1687.") Так писал Ньютон! Резюмируем:

- В теории Ньютона считается, что пространство Евклидово (свободное тело может бесконечно долго двигаться прямолинейно, через точку можно провести только одну прямую параллельно данной).
- В теории Эйнштейна (общая теория относительности, неинерциальные системы отсчета) пространство-время неевклидово. Частицы здесь перемещаются вдоль путей, которые при заданной кривизне пространства

совпадают с линиями кратчайших расстояний между двумя точками (возможен вариант соглашения: мы как непосредственные участники движения не ощущаем кривизны пространства).

Прежде, чем формулировать последующие законы Ньютона целесообразно привести некоторые "определения по Ньютону".

1. "Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности ее и объему (иначе говоря  $m = \rho V$ , то есть человечество в лице Ньютона шло к понятию массы через объем и плотность тел, что закономерно; вспомним понятие количества вещества; масса аддитивна - С.М.)
  2. Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе ( $p = mv$ )
  3. Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельное тело поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.
  4. Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного, прямолинейного движения".
- ... и так далее, из подобных определений состоят Ньютоновы записи о движении.

## 2-й закон Ньютона

Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует. Рассмотрим скорость изменения импульса, то есть

$$dp/dt = d(mv)/dt = m dv/dt = m d^2r/dt^2$$

$$dp/dt = F - \text{называется силой} \Rightarrow F = ma, [F] = \text{кг м/с}^2 = \text{Н}$$

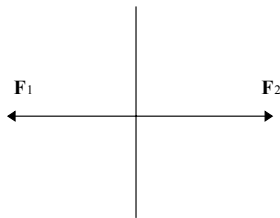
В динамике (по сравнению с кинематикой) из-за введения массы становится существенной система отсчета, в которой исследуется задача - с ускорением движется тело или без.

Инерциальной будем называть систему, в которой выполняется закон инерции. Таким образом множество систем отсчета ( а это какие-то тела)

движущихся относительно данной системы равномерно и прямолинейно все взаимно инерциальны. Системы, движущиеся с ускорением – не инерциальны.

### 3-й закон Ньютона

Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе говоря - силы взаимодействия двух тел равны, действуют вдоль одной прямой и направлены навстречу друг другу



### § 3 Принцип относительности Галилея

Законы классической механики инвариантны по отношению к любой инерциальной системе координат (инвариантны – "не зависят", справедливо с высокой точностью при скоростях много меньших скорости света  $v \ll c$ ).

$c$  - максимальная известная нам в природе скорость - скорость распространения электромагнитных взаимодействий в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 300\,000 \text{ км/с}$ . Постулирована точно:  $299\,792\,458 \text{ м/с}$  (по экспериментальным измерениям ошибка равна  $62 \pm 1,8$  по данным 1973 г). Для сравнения космические скорости  $v_1 = 8 \text{ км/с}$ ,  $v_2 = 11 \text{ км/с}$ , в ускорителях скорости элементарных частиц до  $0,9c$  и более.

Рассмотрим две инерциальные системы, движущиеся друг относительно друга вдоль осей  $xx'$  со скоростью  $v$

$K$  – не штрихованная система, считаем ее неподвижной

$K'$  - штрихованная система движется относительно  $K$  со скоростью  $v$ . Итак

Дано:

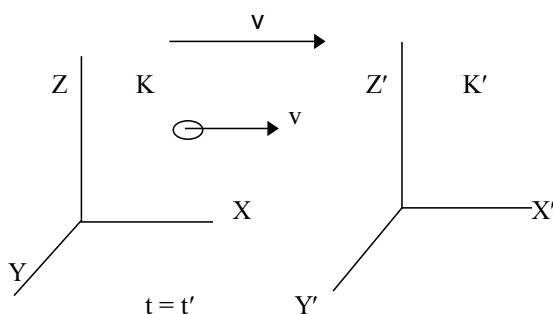
$\mathbf{r}(t)$  - зависимость радиус-вектора от времени в К.

Найти:

$\mathbf{r}'(t)$ ,  $\mathbf{v}'(t)$ ,  $\mathbf{a}'(t)$ , ... все в штрихованной системе координат для данного тела, движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$  относительно К

1.  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}$  (1)

2. Чтобы найти  $\mathbf{r}'(t)$  надо проинтегрировать (1) по времени. Перепишем в виде:



$$d\mathbf{r}'/dt = d\mathbf{r}/dt + \mathbf{v}, \quad d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + \mathbf{v}dt$$

интегрируем от 0 до произвольного момента времени

$t$	$t$	$t$
$\int d\mathbf{r}'(t)$	$= \int d\mathbf{r}(t)$	$+ \int \mathbf{v} dt.$
0	0	0

Имеем  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ . Здесь  $\mathbf{v}t$  - линейно зависящий от времени радиус-вектор штрихованной системы координат относительно начала не штрихованной.

3. Чтобы найти ускорение, надо провести дифференцирование (1) по времени

$$d\mathbf{v}'/dt = d\mathbf{v}/dt + d/dt(\mathbf{v}) = d\mathbf{v}/dt \text{ так как } \mathbf{v} = \text{cst} \Rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

То есть ускорение одинаково в этих двух системах отсчета. Заметим, что если бы скорость  $\mathbf{v}$  была функцией времени, то системы координат не были бы взаимно инерциальны.

4. Поведение импульса.

Образуем формулы для импульса в К и К' системах

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \mathbf{p}' = m\mathbf{v}' = m(\mathbf{v} + \mathbf{v}) = m\mathbf{v} + m\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{p}_v$$

## 2. Сила

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \mathbf{F}' = m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{F}'$$

То есть, во всех инерциальных системах отсчета инвариантен второй закон Ньютона.

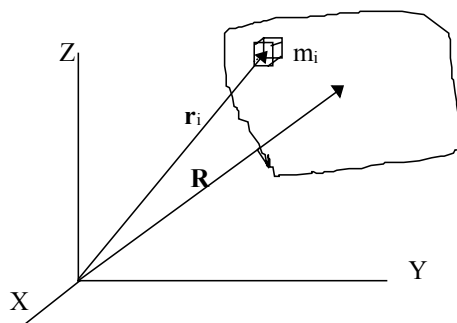
§ 4 Центр инерции системы тел. Теорема о движении центра инерции. Закон сохранения импульса

Центром инерции (или центром масс) системы тел мы будем называть точку, определяемую, например, радиус-вектором  $\mathbf{R}$ :

$\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i / \sum m_i$  - суммирование производится от  $i=1$  до  $i=n$  – произвольного натурального числа

$\mathbf{R}$  - радиус-вектор (координаты) центра инерции,  $m_i$  - масса  $i$ -й частицы,  $\mathbf{r}_i$  - радиус-вектор  $i$ -й частицы. Так как масса аддитивна, то

$$\sum_{i=1}^N m_i = m \text{ -масса всей системы} \Rightarrow m\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (*)$$



1. Найдем первую производную от (\*) по времени

$$m \, d\mathbf{R} / dt = \sum m_i \, d\mathbf{r}_i / dt \Rightarrow m \, \mathbf{V} = \sum m \, \mathbf{v}_i \Rightarrow \mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i \quad (**)$$

Результат такой, что импульс центра инерции,  $\mathbf{P}$ , равен сумме импульсов,  $\mathbf{p}_i$ , частиц, составляющих систему.

2. Теорема о движении центра масс.

Найдем вторую производную от последнего выражения (\*\*).

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n d\mathbf{p}_i / dt ; \quad d\mathbf{P} / dt = \mathbf{F}.$$

Здесь  $\mathbf{F}$  - суммарная сила, которую можно представить как сумму сил внутренних и внешних.

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \mathbf{F}_{lk} + \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_j$$

Переберем все пары сил  $\mathbf{F}_{lk}$ , чтобы найти сумму внутренних сил взаимодействия между частицами, составляющими тело. Тогда, поскольку согласно третьего закона Ньютона все  $\mathbf{F}_{lk} + \mathbf{F}_{kl} = 0$ , то каждой силе найдется равная ей по величине и противоположная по направлению противодействующая сила для любой пары частиц. Внешняя же сила приложена к центру инерции тела, следовательно

$$\sum \mathbf{F}_j = \mathbf{F}_{\text{внеш}} = m \, \mathbf{a}_{\text{ц. и.}}$$

Вывод: (теорема о движении центра масс).

О центре масс можно говорить как о материальной точке, масса которой равна массе всего тела, и рассматривать движение этой материальной точки вместо движения всего тела в целом.

### 3. Закон сохранения импульса

Пусть сумма всех внешних сил равна нулю  $\mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow$

$$d\mathbf{p}/dt = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \text{cst} (t).$$

Если сумма внешних сил действующих на систему равна 0, то импульс центра инерции системы есть величина постоянная, не меняется со временем, то есть  $m\mathbf{v} = \text{cst}$ , откуда следует, что и скорость центра инерции также является константой по времени.

Закон сохранения импульса в механике - важнейший закон физики в целом. Запишем для замкнутой системы частиц

$$\sum \mathbf{p}_i = \text{cst}$$

Для двух взаимодействующих частиц в любые моменты времени

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}''_1 + \mathbf{p}''_2 = \dots = \text{cst}.$$

Отметим в заключение и забегаая несколько вперед, что законы сохранения проистекают из:

Однородности времени - закон сохранения энергии.

Однородности пространства - закон сохранения импульса.

Изотропии пространства - закон сохранения момента импульса.

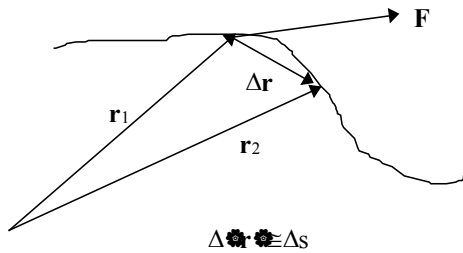
### § 5 Работа. Кинетическая энергия. Закон сохранения кинетической энергии. Мощность

Понятие работы максимально приближает нас к реальной практической жизни. В дальнейшем только через работу мы сможем понимать смысл многих физических величин и в частности энергии во всех ее проявлениях. По определению



$$A = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} d\mathbf{r}$$

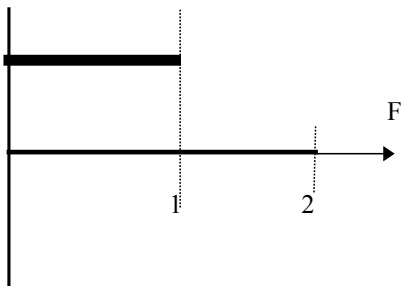
$$A = \mathbf{F} s = F s \cos(\mathbf{F} \wedge \mathbf{s}) \text{ (при } F = \text{cst})$$



$\Delta A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F \text{ проекция } (\Delta \mathbf{r}) = \Delta r \cdot \text{проекция } (\mathbf{F}) = F \Delta r \cos(\mathbf{F} \wedge \Delta \mathbf{r})$ . В пределе  $dA = \mathbf{F} d\mathbf{r}$ , при этом полагаем  $ds \equiv dr$ .

Пусть  $F = \text{cst} \Rightarrow A = \mathbf{F} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{F} \Delta \mathbf{r}$ ,  $[A] = \text{Н м} = \text{Дж}$ .

Пример: Работа упругой силы



$$A = \int_1^2 F dx; F = -kx, [k] = \text{Н/м}^2, A = -\int_1^2 kx dx = -\left. \frac{kx^2}{2} \right|_1^2 = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}$$

Выбором начала отсчета обнуляем одно слагаемое ( $x_1 = 0$ ), а тогда опускаем индекс

$$A = - kx^2/2$$

## О кинетической энергии

Заметим, что, так как  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  и  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt \Rightarrow d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$  и  $d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt$ , то

$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = \mathbf{F} \mathbf{v}dt = (d\mathbf{p})\mathbf{v} = (m d\mathbf{v})\mathbf{v} = d(mv^2/2)$ .  $T = mv^2/2$  называют кинетической энергией тела массы  $m$ , движущегося со скоростью  $v$ . Совершаемая работа здесь определяется изменением кинетической энергии тела. Если совершаемая работа равна нулю, то кинетическая энергия тела остается постоянной

$$dA = 0, d(mv^2/2) = 0 \Rightarrow mv^2/2 = T = \text{cst}$$

В этом смысле можно говорить о законе сохранения кинетической энергии.

## О мощности

$$N = dA/dt, [N] = \text{Дж/с} = \text{Вт}. \quad N = \mathbf{F}d\mathbf{s}/dt = \mathbf{F}\mathbf{v}$$

Пусть масса является функцией времени (например, в смысле релятивизма). Вычислим при этом кинетическую энергию. Дифференциал импульса в этом случае имеет вид:

$$d\mathbf{p} = d(m\mathbf{v}) = d[mv/(1-v^2/c^2)^{1/2}] = mdv/(1-v^2/c^2) + mv d[(1-v^2/c^2)^{-1/2}] = m dv/(1-v^2/c^2) - (S)m v(1-v^2/c^2)^{-3/2}(-1/c^2)dv^2 = m dv(1-v^2/c^2)^{-1/2} + mvdv^2/2c^2(1-v^2/c^2)^{-3/2}.$$

$$\mathbf{V}d\mathbf{p} = mv dv/(1-v^2/c^2)^{1/2} + mv^2dv^2/2c^2(1-v^2/c^2)^{3/2} = dv^2/2(1-v^2/c^2)^{1/2} + v^2dv^2/2c^2(1-v^2/c^2)^{1/2} (1-v^2/c^2) = [mdv^2 (1-v^2/c^2) + (1/c^2)m v^2 dv^2]/2(1-v^2/c^2)^{3/2} = mdv^2/2 (1-v^2/c^2)^{3/2}.$$

Интегрирование проведено из состояния 1 в состояние 2. Таким образом, для релятивистской кинетической энергии получено выражение

$$A = \int_1^2 \mathbf{v} \, d\mathbf{p} = \int m dv^2 / 2(1-v^2/c^2)^{3/2} = (-mc^2/2) [d(1-v^2/c^2) / 1-v^2/c^2]^{3/2} =$$

$$= mc^2 / (1-v^2/c^2)^{1/2} \Big|_1^2 = m_r c^2 = \Delta(m_r c^2) = T_2 - T_1.$$

$$T_r = m_r c^2 = mc^2 / (1-v^2/c^2)^{1/2}.$$

Заметим, что разложением в ряд Тейлора из этого выражения можно получить более привычное для нас нерелятивистское приближение. Предварительно вычтем из релятивистского значения кинетической энергии массу покоя частицы  $E = mc^2$ , имеем

$$T = mc^2 [(1-v^2/c^2)^{-1/2} - 1] = mc^2 [1 + v^2/2c^2 + \dots - 1] = mv^2/2, \quad ((1 \pm \alpha)^n = 1 \pm n\alpha \pm \dots, \alpha \ll 1).$$

## § 6 Единицы измерения механических величин

$$[r, x, y, z, s] = \text{м}, [t] = \text{с}, [m] = \text{кг}, [v] = \text{м/с}, [a] = \text{м/с}^2, [p] = \text{кг м/с}, [F] = \text{кг м/с}^2 = \text{Н},$$

$$[A] = [T] = \text{кг м}^2/\text{с}^2 = \text{Н м} = \text{Дж}.$$

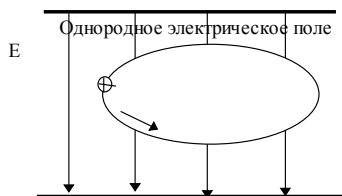
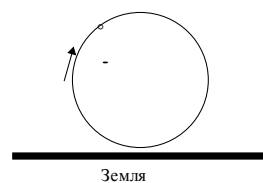
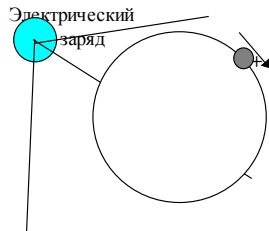
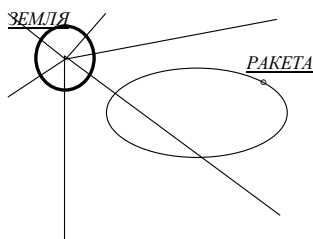
Пико	нано	микро	милли	санти	деци		дека	гекто	кило
$10^{-12}$	$10^{-9}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	<b>1</b>	10	$10^2$	$10^3$
Мега	Гига	Тера							
$10^6$	$10^9$	$10^{12}$							

Приставки, которые чаще всего встречались автору в его работе:

1 пФ	пикофарада	1 ТОм	ТераОм
1 нм	нанометр	1 ГОм	ГигаОм
1 мкм	микрометр	1 пс	пикосекунда
1 мм	миллиметр	1 мкс	микросекунда
1 дм	дециметр	1 мс	миллисекунда
1 гПа	гектопаскаль	1 мА	миллиампер
1 кг	килограмм	1 мкА	микроампер
1 кВт	киловатт	1 мВ	милливольт
1 МВт	мегаватт	1 км	километр

## § 7 Консервативные и не консервативные силы

В физике (и в частности в механике) консервативными называют силы, работа которых по любому замкнутому контуру равна нулю.

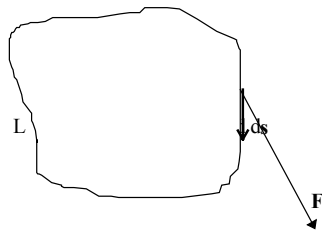


Запишем аналитически определение консервативной силы

$$\oint_L \mathbf{F} d\mathbf{s} = 0, \text{ где } \oint_L - \text{обозначение интеграла по замкнутому контуру}$$

Криволинейные интегралы вида:  $\int_L \mathbf{F} d\mathbf{s}$ , где  $\mathbf{F}$  - произвольный вектор,

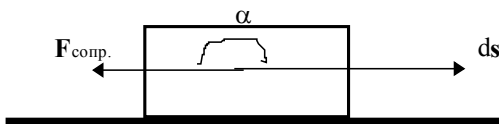
а  $d\mathbf{s}$  - элемент контура общей длины  $L$ , называют циркуляцией вектора  $\mathbf{F}$  по замкнутому контуру  $L$ .



Следствие.

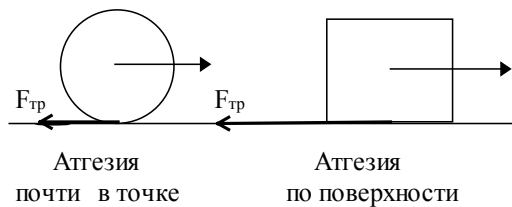
Работа консервативных сил по перемещению тела из произвольной (1) в (2) не зависит от формы траектории и определяется только начальным и конечным положением тела. К таким силам относятся, например, сила тяжести, сила Кулона, сила упругости. Силы, не имеющие обсуждаемого свойства, относятся к неконсервативным силам.

Пример 1: диссипативные силы - трения и сопротивления, как это происходит, если тянуть тело по поверхности



Здесь  $dA = \mathbf{F} d\mathbf{s} = F ds \cos \pi = -F ds$ , то есть работа совершается против сил трения. Ракета, взлетающая с поверхности Земли находится как в поле консервативных так и в поле диссипативных сил (сил по преодолению сопротивления атмосферы).

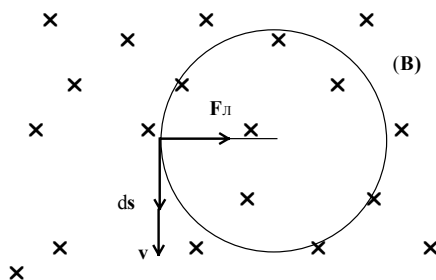
О трении качения в сравнении с трением скольжения.



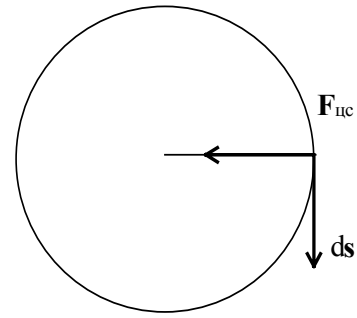
Атгезия - сцепление (склеивание, слипание) тел, обусловленное межмолекулярным и межатомным электромагнитным взаимодействием.

Пример 2. Гироскопические силы: центробежная сила, магнитная составляющая силы Лоренца. Для них всегда  $\mathbf{F} \perp d\mathbf{s} \Rightarrow A = F ds \cos \pi/2 = 0$

$$F_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \sin(\mathbf{B} \wedge \mathbf{v})$$



$$F_{\text{цс}} = m a_{\text{цс}}$$



## § 8 Потенциальная энергия. Закон сохранения полной механической энергии

Мы говорили о работе как об изменении кинетической энергии тела. В этом смысле определение работы достаточно общо. Рассмотрим систему тел, в которой действуют только консервативные силы. Для них работа зависит лишь от координат, иначе говоря только от положения начальной и конечной точки рассматриваемого тела (или системы тел). Тогда в отношении работы, совершенной при перемещении тела из (·) 1 в (·) 2 в поле консервативных сил, можно записать

$$A_{12} = A_{02} - A_{01} = (\text{пере обозначим } A_{01} \equiv U_1 \text{ и } A_{02} \equiv U_2) = U_1 - U_2 = -\Delta U.$$

Следовательно, работа и вновь введенная физическая величина находятся в отношении:

$$\underline{A = - \Delta U}$$

Здесь  $U = U(\mathbf{r})$  - функция только координат. Она называется потенциальной энергией. Потенциальную энергию отсчитывают от начала координат, которое выбирается произвольно для каждой конкретной задачи

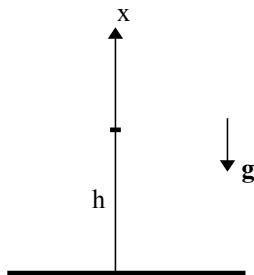
$$-\Delta U = A_{02} - A_{01} = A_{O'2} - A_{O'1} = \text{cst}$$

Примеры расчета потенциальной энергии для разных полей.

1. Поле силы тяжести  $P = mg$ .

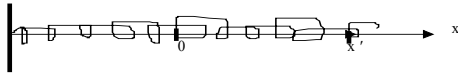
$dA = Fds = \mathbf{P} \, d\mathbf{x} = -mg \, dx$ . Знак минус появляется, так как работа совершается против сил поля, а ускорение свободного падения,  $\mathbf{g}$ , и возрастание координаты,  $x$ , направлены навстречу друг другу. В этом случае

$$dU = -dA = m g \, dx \Rightarrow U = \int_0^h m g \, dx = m g h$$



1. Энергия растянутой пружины  $F = - kx$

$$dU = - dA = -Fdx = kx \, dx$$



$$U = \int_0^{x'} kx \, dx = kx^2/2 \Big|_0^{x'} = kx'^2/2$$

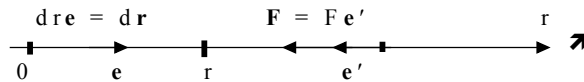
Если опустить штрих у  $x$ , имеем выражение в общем виде

$$U = kx^2/2.$$



Наглядную модель растянутой пружины можно распространить на любые деформируемые упругие твердые тела.

### 3. Поле гравитации $F = G M m / r^2$ .



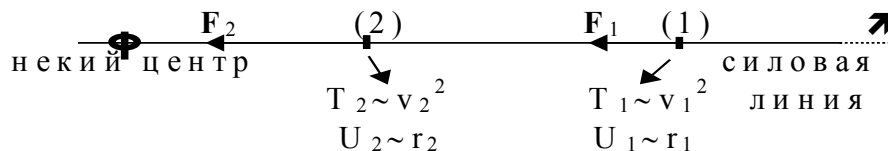
$$A = \int_{\infty}^r \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{\infty}^r \mathbf{e} \mathbf{e}' (GM m / r^2) dr = GM m / r \Rightarrow U = - GM m / r .$$

На бесконечности потенциальная энергия принимается равной нулю. При этом на бесконечности (относительно большом расстоянии) по отношению к силовому притягивающему центру она максимальна. Следовательно, при любом другом положении она меньше, чем ноль, то есть отрицательна.

Закон сохранения полной механической энергии.

Рассмотрим поле центральных сил (пусть силовой центр для определенности будет притягивающим).

Будучи предоставлено самому себе ранее, и оказавшись в разное время последовательно в двух произвольных точках (1), а затем (2), тело должно иметь



как кинетическую, так и потенциальную энергии по отношению к данному притягивающему (либо к отталкивающему) центру. Тогда:

$$A_{12} = T_2 - T_1, v_2 > v_1 \text{ и } A_{12} = U_1(r_1) - U_2(r_2), (r_2 < r_1)$$

Работа по перемещению тела в силовом поле определена двумя способами: как разность кинетических энергий и как разность потенциальных энергий тела, но так, чтобы знак работы оставался одинаковым. Приравняем правые части

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow T_2 + U_2 = T_1 + U_1 = \dots$$

Такие суммы справедливы для произвольных координат (а в данном случае и точек траектории) по отношению к центру как началу координат, следовательно

$$\underline{T + U = CST = E}$$

Таким образом, сумма кинетической и потенциальной энергий является сохраняющейся величиной частицы (системы частиц, тел) при выполнении условия замкнутости и в центральном (консервативном) силовом поле. Таков важнейший закон физики - закон сохранения энергии.

Заметим, что в более широком смысле полная энергия во вселенной есть по нашим представлениям постоянная величина.

## § 9 Связь силы и потенциальной энергии (в поле консервативных сил)

Как сила так и энергия - обе являются функциями координат в полях центральных сил  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ,  $U = U(\mathbf{r})$ . Имеем

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU,$$

при этом потенциальная энергия,  $U$ , является скаляром, зависящим в общем случае от всех трех координат  $x$ ,  $y$ , и  $z$ . Произведения компонентов векторов обозначим в виде

$$F_x dx = -dU|_{y, z = \text{cst}}, F_y dy = -dU|_{x, z = \text{cst}}, F_z dz = -dU|_{x, y = \text{cst}},$$

тогда компоненты силы представляют собой производные вида

$$F_x = -\partial U/\partial x, F_y = -\partial U/\partial y, F_z = -\partial U/\partial z.$$

Здесь вычисляются производные только по одной из трех переменных, так называемые частные производные, две другие переменные считаются константами как параметры. С помощью этих компонентов можно записать вектор силы

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = -((\partial U/\partial x) \mathbf{i} + (\partial U/\partial y) \mathbf{j} + (\partial U/\partial z) \mathbf{k}) = -(\partial/\partial x) \mathbf{i} + (\partial/\partial y) \mathbf{j} + (\partial/\partial z) \mathbf{k} U, \text{ но } ((\partial/\partial x) \mathbf{i} + (\partial/\partial y) \mathbf{j} + (\partial/\partial z) \mathbf{k}) = \nabla, \text{ тогда в краткой записи имеем}$$

$$\mathbf{F} = -\nabla U \equiv -\text{grad } U.$$

Значок  $\nabla$  - набла, или аббревиатура grad - градиент означают, таким образом, сумму частных производных, помноженных на орты декартовой системы координат (градиент можно записать и в любой другой системе координат), а физически это означает направление максимального изменения функции, в данном случае потенциальной энергии  $U$ .

Заметим, что

$$dU = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy + (\partial U/\partial z)dz$$

является полным дифференциалом потенциальной энергии.  $[\partial U/\partial x] = \text{Дж/м} = \text{Н}$

### **Закон сохранения энергии и однородность времени**

Покажем аналитически, как однородность времени приводит к закону сохранения энергии. С одной стороны имеем

$$A_{12} = T_2 - T_1, \quad (*)$$

с другой стороны

$$A_{12} = \int \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\int [(\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy + (\partial U/\partial z)dz] = -\int dU$$

Теперь пусть  $U^*$  зависит и от времени, тогда

$$dU^* = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy + (\partial U/\partial z)dz + (\partial U/\partial t)dt.$$

Итого получили

$$A^*_{12} = -(\int dU + \int (\partial U/\partial t)dt).$$

В данном случае система находится в силовом поле других тел, которое меняется во времени. Работу  $A_{12}$  можно получить, если вычесть из полного дифференциала  $U^*$  слагаемое зависящее от времени

$$A_{12} = -(\int dU^* - \int (\partial U/\partial t)dt).$$

Сопоставляем последнее выражение с выражением для работы через кинетические энергии (\*)

$$T_2 - T_1 = U_1^* - U_2^* + \int (\partial U/\partial t)dt \Rightarrow (T_2 + U_2^*) = (T_1 + U_1^*) + \int (\partial U/\partial t)dt$$

Очевидно, что для выполнения закона сохранения полной энергии необходимо равенство нулю последнего интеграла. Отличие его от нуля означало бы, что система предполагается незамкнутой. Наша система замкнутая (точнее квазизамкнутая) и протекание процессов в ней от времени не зависит, поэтому последнее слагаемое равно нулю.

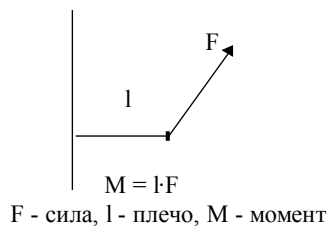
Однородность времени означает следующее. Если замкнутую систему поставить в совершенно одинаковые условия в два произвольные моменты времени, то начиная с любого из этих двух моментов все явления в системе будут протекать совершенно одинаково. (Будет совершаться одинаковая работа, и сохраняться полная энергия).

Замечание: вопрос о том надо ли всю Вселенную считать замкнутой или не замкнутой системой, по-видимому, пока остается открытым. Части вселенной: Солнечную систему, Галактику можно считать в известном смысле квазизамкнутыми.

## § 10 Момент силы. Векторное произведение

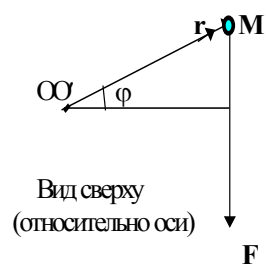
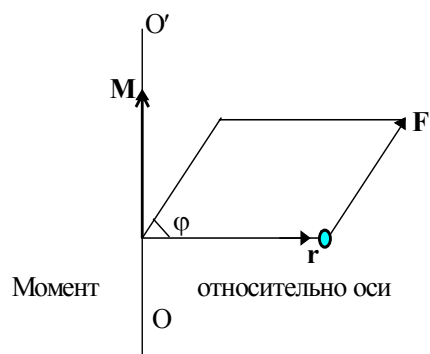
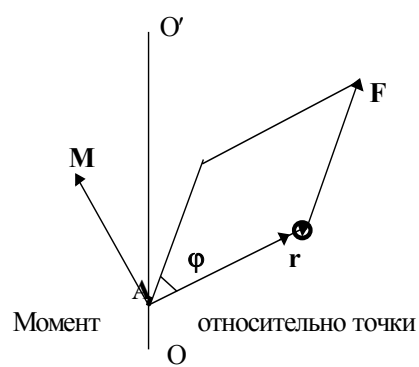
Динамика = кинематика + масса,  $m \Rightarrow F$  (появление массы приводит к появлению силы).

Наглядным примером понятия момента силы может служить следующая схема, в которой направление силы и плеча взаимно перпендикулярны.

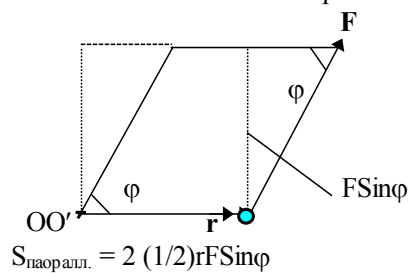


Момент силы в общем случае - вектор (точнее псевдовектор). Для более полного определения момента силы (иногда говорят: «момент вращения» или «вращательный момент») математика предоставляет нам векторное произведение векторов.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}; |\mathbf{M}| = r F \sin \varphi$$



Величина момента=площади  
параллелограмма



$\mathbf{M}$  всегда перпендикулярен плоскости, в которой лежит параллелограмм.  $\mathbf{M}$  также как  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$  вектор и как вектор записывается через компоненты и обладает всеми свойствами векторов

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}.$$

### О векторном произведении векторов

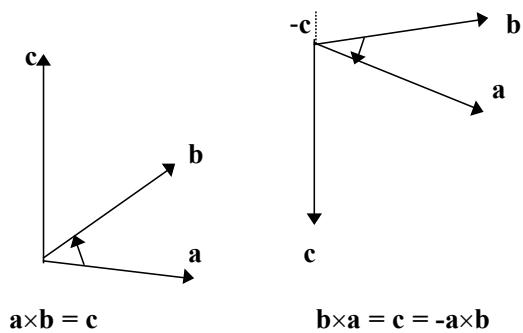
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$\mathbf{c} \perp$  плоскости, в которой находятся вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и его величина по определению равна

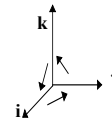
$$c = a b \sin (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

причем, направление вектора  $\mathbf{c}$  определяется по правилу правого винта, следовательно

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = - \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$



1. Свойство  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  называется антикоммутативностью
2. Применим свойство антикоммутативности и определение величины для векторного произведения ортов декартовой системы координат, имеем
3.  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0.$



На рисунке показано направление поворота положительного знака

$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}.$$

Тогда имеем для векторного произведения двух векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - b_y a_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Второй способ нахождения результирующего вектора при векторном перемножении векторов заключается в составлении определителя вида

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Действуя по мнемоническому правилу можно получить компоненты вектора  $\mathbf{c}$  как произведения двух других векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \underset{c_x}{\mathbf{i} (a_y b_z - a_z b_y)} + \underset{c_y}{\mathbf{j} (a_z b_x - a_x b_z)} + \underset{c_z}{\mathbf{k} (a_x b_y - a_y b_x)}$$



Для момента импульса имеем

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

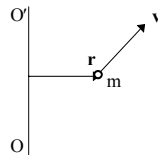
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{i} (y F_z - z F_y) + \mathbf{j} (z F_x - x F_z) + \mathbf{k} (x F_y - y F_x).$$

Численно модуль момента силы  $M$  ( $M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ ), или как иногда пишут вращательного момента, равен площади параллелограмма со сторонами  $r$  и  $F$ .

## § 11 Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

По определению момент импульса равен (для одной частицы)

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad L = r p \sin(\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) \quad .$$



Возьмем первую производную по времени от момента импульса

$$d\mathbf{L} / dt = (d\mathbf{r}/dt) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times (d\mathbf{p}/dt) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (\text{т.к. } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0) = \mathbf{M}.$$

(Здесь вычисляется производная от произведения двух функций согласно правилу и с сохранением векторного произведения)

Получили равенство

$$dL/dt = M.$$

Налицо аналогия со вторым законом Ньютона ( $dp/dt = F$ ). Таким образом, мы как бы обобщили, перенесли формулу второго закона Ньютона на произвольное вращательное движение.

Рассмотрим систему частиц. Тогда имеем по принципу суперпозиции для момента импульса и момента силы

$$L = \sum L_i \text{ и } M = \sum M_i$$

Возьмем первую производную по времени от момента импульса для системы частиц

$$dL/dt = \sum_i M_i = \sum_{l, k} M_{lk} + \sum_j M_j$$

Здесь моменты сил представлены в виде моментов внутренних и внешних. Индексами  $l, k$  обозначены моменты внутренних сил, а индексом  $j$  - моменты внешних сил. Согласно третьему закону Ньютона сумма моментов внутренних сил должна быть равна нулю так как  $M_{lk} = -M_{kl}$  и тогда

$$dL/dt = M_{\text{внешн. сил}}$$

Сформулируем полученное равенство.

Производная по времени от суммарного момента импульсов системы частиц равна сумме моментов внешних сил, действующих на эту систему.

Пусть система замкнута и сумма внешних сил действующих на систему равна нулю (здесь она может быть и не обязательно замкнута, силы могут быть и скомпенсированными, но мы для надежности полагаем ее замкнутой, чтобы различать два эти случая), тогда

$$dL/dt = 0 \Rightarrow \underline{L = \text{cst.}}$$

Для замкнутой системы тел всегда момент импульса есть константа. Здесь сформулирован закон сохранения момента импульса системы тел.

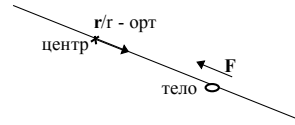
Замечание. Рассмотрим поле центральных сил

$$\mathbf{F} = f(r) \mathbf{r}/r$$

$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}_{\text{внешн. сил}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} =$$

$$\mathbf{r} \times f(r) \mathbf{r}/r = (\text{так как } \mathbf{r} \times \mathbf{r} \equiv 0) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{L} = \text{cst}$$



То есть, для центральных сил момент импульса всегда сохраняется в силу особенности самих центральных сил.

Наряду с законами сохранения импульса и энергии, закон сохранения момента импульса является важнейшим из фундаментальных законов физики.

$$\sum \mathbf{p}_i = \text{cst} - \text{однородность пространства,}$$

$$\sum T_i + \sum U_i = E = \text{cst} - \text{однородность времени,}$$

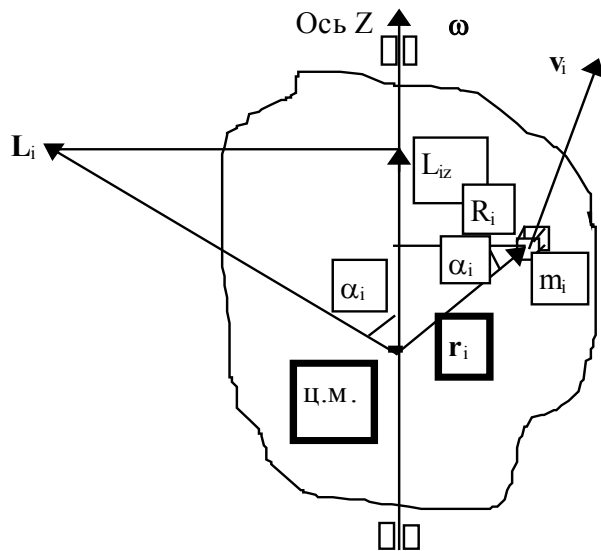
$$\sum \mathbf{L}_i = \text{cst} - \text{изотропность пространства}$$

§ 12 Момент импульса относительно неподвижной оси. Момент инерции твердого тела

Модель абсолютно твердого тела определяется как система связанных частиц с неизменными расстояниями между ними

Мы имеем формулу момента импульса для вращения твердого тела (системы частиц) относительно произвольной точки

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$



$$\begin{aligned} L_{iz} / L_i &= R_i / r_i \\ &= \cos \alpha_i \Rightarrow \\ R_i &= r_i \cos \alpha_i \end{aligned}$$

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Ось для надежности “зажата” в шарнирах.

Тогда модуль вектора  $L$  для  $i$ -й точки запишется в виде

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i.$$

$L$ ,  $v$ ,  $r$  - тройка взаимно перпендикулярных векторов, объединяемая векторным произведением.

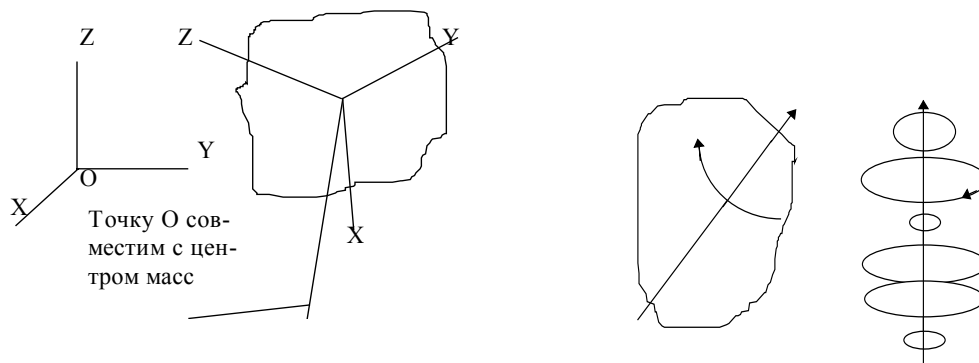
Отступление-ретроспектива:

Было произвольное вращение и поступательное движение одновременно. Мы

а) совместили равномерное движение центра масс тела с началом инерциальной системы отсчета, движущейся с той же самой скоростью - таким образом мы оказались в неподвижной системе отсчета;

б) вращение относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , вообще говоря, осталось произвольным;

в) после этого мы зафиксировали ось и оказались в модели вращения вокруг неподвижной оси - это так называемое плоское вращение, при котором любая точка тела описывает окружность.



Найдем проекцию момента импульса  $\mathbf{L}$  на ось  $z$ , имеем

$$L_{iz} = m_i r_i R_i \omega_z \cos \alpha_i = m_i R_i^2 \omega_z.$$

Просуммируем по всему телу (здесь уместно вспомнить о квантовом характере устройства материи и непрерывном континууме лишь как об удобной модели для математических расчетов с применением интегрирования )

$$L_z = \sum L_{iz} = \omega_z \sum m_i R_i^2 (\omega_z = \text{cst})$$

Здесь  $L_z$  и  $\omega_z$  направлены вдоль оси  $z$ .

$$m_i R_i^2 = I_i$$

и называется *моментом инерции материальной точки*, а

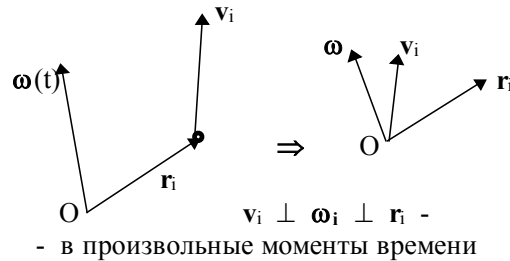
$$I = \sum m_i R_i^2 -$$

- моментом инерции тела в целом.

Размерность момента инерции  $[I] = \text{кг м}^2$ . Окончательно имеем

$$\underline{L_z = \omega I}$$

Возвратимся к вращению относительно точки. В этом случае  $\omega$  - мгновенное значение угловой скорости - ось вращения все время меняет свое положение в пространстве.



$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = m_i [\boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega})] \quad (*)$$

Здесь применено соотношение известное в векторной алгебре под названием “BAC - CAB” ("бац минус цаб")

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \mathbf{b}),$$

которое проверяется прямым вычислением. Распишем на компоненты каждый из векторов в (\*)

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z, \quad \mathbf{r}_i = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

Тогда компоненты вектора момента импульса имеют вид

$$L_{xi} = m_i [\omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)],$$

$$L_{yi} = m_i [\omega_y r_i^2 - y_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)],$$

$$L_{zi} = m_i [\omega_z r_i^2 - z_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)].$$

Просуммируем компоненты момента импульса, сгруппировав их предварительно с учетом постоянных по величине -  $\omega_x, y$  и  $z$ .

$$\begin{aligned}
L_x &= \omega_x \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i, \\
L_y &= -\omega_x \sum m_i x_i y_i + \omega_y \sum m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \sum m_i y_i z_i, \\
L_z &= -\omega_x \sum m_i x_i z_i - \omega_y \sum m_i y_i z_i + \omega_z \sum m_i (r_i^2 - z_i^2).
\end{aligned}$$

Таким образом, вектор момента импульса не представим в виде совокупности трех компонент. Эти компоненты сами выражаются через другие величины - компоненты моментов инерции. Чтобы описать инвариантным образом по отношению к декартовой системе координат произвольное вращение твердого тела, запишем

$$\begin{aligned}
L_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\
L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\
L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z.
\end{aligned}$$

Получилось симметричное выражение, для которого совокупность вида

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

называется тензором 2-го ранга. В этой классификации вектор - тензор первого ранга, а скаляр - тензор нулевого ранга. Тензор  $\mathbf{I}$  называется тензором инерции. Чтобы вычислить весь тензор, необходимо вычислить все его компоненты. Рассмотрим одну из них

$$I_{xx} = \sum m_i (r_i^2 - x_i^2)$$

От суммы можно перейти к интегралу, чтобы воспользоваться континуальным методом расчета

$$dI_{xx} = dm (r_i^2 - x_i^2) = (r_i^2 - x_i^2) \rho(x, y, z) dV$$

здесь  $dm = \rho dV$ ,  $\rho$ -плотность тела,  $V$ - его объем; кроме того помним, что  $r^2 - x^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow$

$$I_{xx} = \int_V \rho(x, y, z)(y^2 + z^2) dV.$$

Индексы при переходе к интегрированию можно опустить.

Заметим, что в нашем тензоре

$$I_{xy} = I_{yx} = I_1, \quad I_{xz} = I_{zx} = I_2, \quad I_{zy} = I_{yz}$$

Такие тензоры называются симметричными. Для него можно рассчитывать меньшее количество компонентов

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_1 & I_2 \\ I_1 & I_{yy} & I_3 \\ I_2 & I_3 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Обратимся вновь к вращению относительно оси. При этом  $L_z = \omega I$ . Пусть  $L_z \equiv L$ , а  $\omega$  (ее направление) совпадает с  $L$ . ( $I$  – постоянная величина для каждого конкретного тела вращения)

$$M = L/dt, \quad L = I \omega \Rightarrow$$

$$M = I d\omega/dt = I d^2\varphi/dt^2 = \varepsilon I.$$

Момент инерции каждого тела известной формы рассчитывается и табулируется. Рассчитаем работу, мощность и кинетическую энергию тела при вращении относительно оси

$$dA = F ds = (ds = R d\varphi) = F R d\varphi = M d\varphi \Rightarrow$$



$$A = \int_1^2 M d\varphi$$

$$N = dA/dt = M d\varphi/dt = M\omega$$

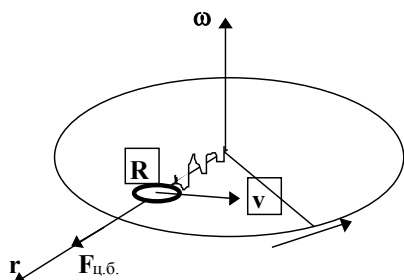
$$K_i = m_i v_i^2/2 = m_i (\omega R_i)^2/2 = (m_i R_i^2/2) \omega^2 = I_i \omega^2/2;$$

$$K_{\text{вращ}} = \sum K_i = I\omega^2/2 = L\omega^2/2 = L^2/2I.$$

$$\text{при этом } K_{\text{полн.}} = K_{\text{пост.}} + K_{\text{вращ.}}$$

## § 13 Неинерциальные системы отсчета

### 13.1 Центробежная сила инерции

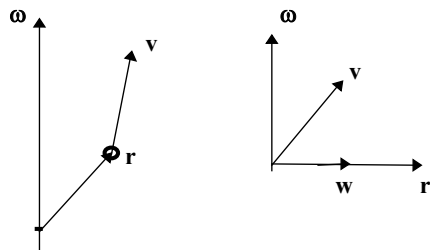


$$\mathbf{F}_{\text{пружины}} = -m\omega^2 \mathbf{R}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ц.б.}} = m\omega^2 \mathbf{R} \quad (F_{\text{цб}} = mv^2/R = m\omega v = m\omega^2 R)$$

Если положение тела в пространстве описывать с помощью радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , то необходимо прибегнуть к векторному произведению

$$\mathbf{F}_{\text{ц.с.}} = -\mathbf{F}_{\text{ц.б.}} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (\mathbf{F} = m \mathbf{a}_{\text{ц.б.}})$$



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}, \Rightarrow$$

$$\underline{\mathbf{F}_{ц.б.}} = m [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})], \text{ где } \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{v}$$

$$\underline{\mathbf{F}_{ц.с.}} = m [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})].$$

### 13.2 Сила Кориолиса

Рассмотрим вращающуюся систему отсчета, в которой и относительно которой тело движется с заданной скоростью. Такая система отсчета является неинерциальной, тогда

$\mathbf{v}'$  - скорость тела относительно вращающейся системы отсчета

$\mathbf{v}$  - скорость тела относительно неподвижной системы отсчета

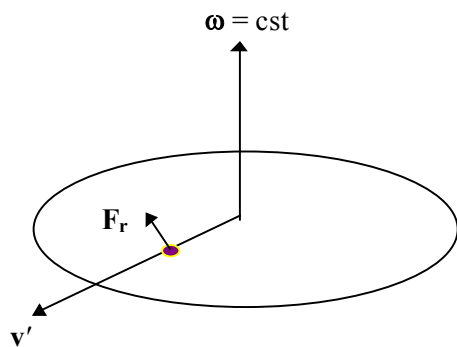
$\boldsymbol{\omega}$  - угловая скорость вращения системы отсчета

Сила, действующая на тело относительно неподвижной системы отсчета должна рассчитываться следующим образом:

$$F_{\text{инерции}} = m a_n = mv'^2/R = m (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}R)^2/R = mv'^2/R + 2m\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega} + m\omega^2R$$

$F = mv'^2/R$  - сила, действующая на тело относительно вращающейся системы отсчета

$F_k = 2m\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}$  - сила Кориолиса



$F_{\text{ц. б.}} = m\omega^2 R$  - центробежная сила (относительно неподвижной системы отсчета)

Сократим на массу и получим выражение для ускорения относительно неподвижной - инерциальной системы отсчета.

$$\mathbf{a}_{\text{инерциальной}} = \mathbf{a}_в + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$$

$\mathbf{a}_{\text{инерциальной}}$  - ускорение относительно инерциальной (неподвижной) системы отсчета

$\mathbf{a}_в$  - ускорение во вращающейся (относительно вращающейся) системе отсчета

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$  - центростремительное ускорение

$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$  - ускорение Кориолиса

Для сил соответственно будет

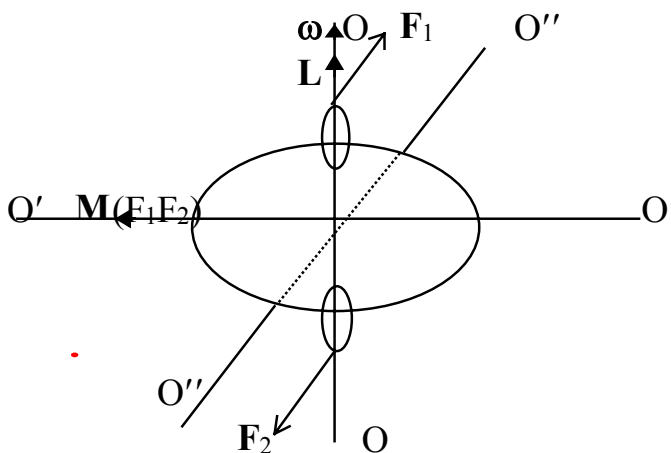
$$\mathbf{F}_{\text{инерциальной}} = \mathbf{F}_в + \mathbf{F}_к + \mathbf{F}_{\text{ц.б.}}$$

Таким образом, сила Кориолиса реальна с точки зрения неподвижной (инерциальной) системы отсчета и возникает, то есть действует на тело в тех случаях, когда это тело находится в неинерциальной системе и ему сообщают некую скорость в этой неинерциальной системе отсчета.

## § 14 Гироскопы

Гироскопом называется массивное симметричное тело вращающееся вокруг оси симметрии. Здесь мы имеем дело с неинерциальной системой отсчета. Для такого тела момент импульса вычисляется по формуле:

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$



$OO$  - ось в плоскости чертежа,  $O'O'$  - также ось в плоскости чертежа,  $O''O''$  - ось перпендикулярная плоскости чертежа,  $F_1, F_2$  - пара сил перпендикулярных плоскости чертежа.

1. В начале ось  $OO$  неподвижна и тело вращается со скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  около  $OO$ ,

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

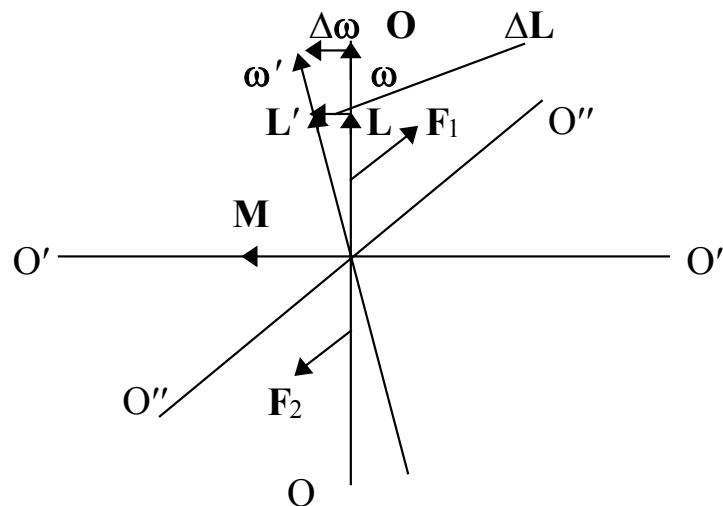
2. Пусть  $\boldsymbol{\omega}'$  - вынужденный поворот (с этой скоростью) оси  $OO$  вокруг оси  $O'O'$  под действием пары сил  $F_1$  и  $F_2$ , причем так, что  $\boldsymbol{\omega}' \ll \boldsymbol{\omega}$ , и при этом поворот столь мал, что направление момента  $\mathbf{L}$  и частоты  $\boldsymbol{\omega}$  будем считать совпадающими.
3. Анализируем, что произойдет с появлением пары сил  $F_1, F_2$ .

$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ,  $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M} \Rightarrow d\mathbf{L} = \mathbf{M} dt$  ( $\Delta\mathbf{L} = \mathbf{M}\Delta t$ ), то есть направления  $\mathbf{M}$  и  $\Delta\mathbf{L}$  совпадают. В результате вышло так, что  $\mathbf{L}$  и  $\Delta\mathbf{L}$  имеют различные направления. Тогда

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$$

$\mathbf{L}'$  - результирующее направление момента импульса совпадает при этом с новым направлением оси гироскопа, а, таким образом, и с  $\boldsymbol{\omega}'$ , так как угол отклонения задан актуально маленьким.

Вывод: при попытке повернуть ось гироскопа вокруг оси  $O'O'$  мы получаем приращение  $\Delta\mathbf{L}$  момента импульса перпендикулярное направлению приложенных сил



## ГЛАВА 3 СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### § 1 Постулаты специальной теории относительности

**И**деи специальной теории относительности (СТО) были изложены впервые в статье А. Эйнштейна в 1905 г “К электродинамике движущихся тел”. СТО разработана для инерциальных систем отсчета. Сформулируем два постулата, на которых основана специальная теория относительности:

#### 1. Принцип относительности

Законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета (это приводит к тому, что эталоны длины одинаковы и отсутствует понятие одновременности событий - и то и другое относительно по отношению к данной инерциальной системе отсчета).

#### 2. Факт предельной скорости распространения взаимодействий

Существует предельная скорость распространения взаимодействий - скорость света в пустоте (вакууме), и она не зависит от инерциальной системы отсчета, то есть одинакова во всех инерциальных системах отсчета

О втором постулате

- i. Существует максимально возможная в природе скорость.
- ii. Это скорость света в вакууме  $c = 299792458,0 \pm 1,2 \text{ м/с} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  (по измерениям независимо длины волны  $\lambda$  и частоты  $\nu$  в 1972г), ошибка  $10^{-5}$  нм, видимый свет  $\lambda \approx 1 \text{ мкм} = 1000 \text{ нм}$ .
- iii. Она, эта скорость, одинакова в любой инерциальной системе отсчета.

Впервые проблема возникла, когда Максвелл и Лоренц (датский) написали уравнения электродинамики, в которые вошла скорость электромагнитного взаимодействия (скорость света). Она не должна была быть равной бесконечности. В современной экспериментальной физике неизвестна скорость большая, чем скорость света в пустоте - предельная скорость взаимодействий.

Классическая механика основана на преобразованиях Галилея, в которых

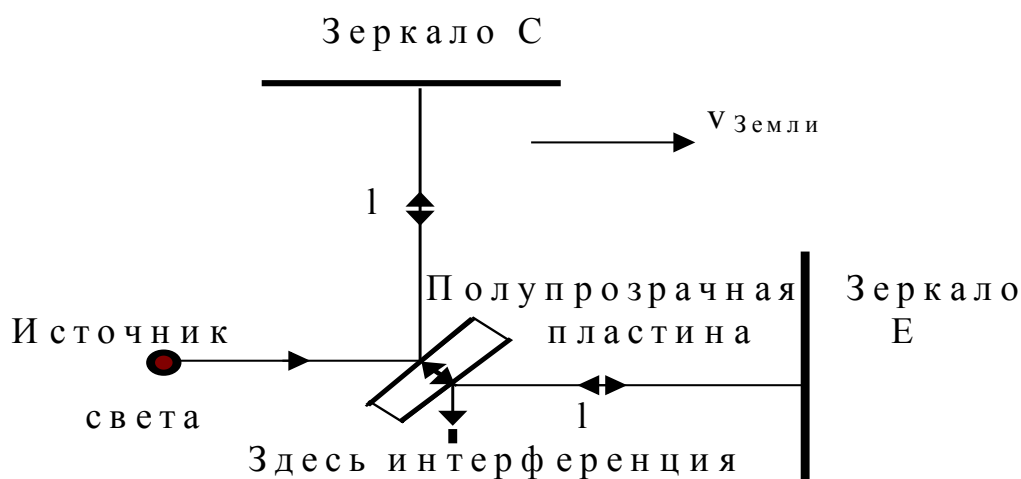
$$v' = v \pm v.$$

Согласно же новым постулатам получается, что

$$c' = c + v = c \Rightarrow c' = c (?).$$

Это утверждение нетривиально и требует основательного обоснования.

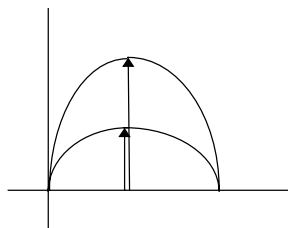
Рассмотрим эксперимент Майкельсона - Морли. Схема опыта:



Вокруг установки находится “неподвижный эфир”, а установка движется вместе с Землей со скоростью  $v_{\text{Земли}}$ . По тем временам поиски неподвижного эфира эквивалентны ныне поискам неподвижной системы отсчета.

Формулировка какого-либо закона, зависящего от скорости, не остается инвариантной по отношению к инерциальным системам координат. Тогда когда  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{F}$ , к примеру, - инвариантны, будучи выраженными в другой системе координат (по Галилею). В связи с этим основные законы электродинамики и, в частности, оптики перестают быть инвариантными по отношению к группе Галилеевых преобразований, так как эти законы зависят от скорости распространения света. Люди будучи идеалистами придумали эфир, как носитель света.

Итак, прибор вместе с Землей движется относительно неподвижного эфира. Ход лучей либо  $\perp$ , либо  $\parallel$  по отношению соответственно к зеркалам С и Е. Если разность фаз  $\perp$ -го и  $\parallel$ -го лучей в точке интерференции не измениться, то на интерферометре должно получиться усиление света.



К чему приведет расчет, если учитывать неподвижный эфир?

Подсчитаем время прохождения через эфир лучей света перпендикулярных (к зеркалу С) и параллельных (к зеркалу Е) направлению перемещения экспериментальной установки (Земли по отношению к эфиру) со скоростью  $v$  туда и обратно.

1.  $\parallel$  (к зеркалу Е)

$t_1$ - время туда,  $t_2$  - время обратно  $v_{\text{Земли}} \equiv v$



$$ct_1 = l + vt_1 \Rightarrow t_1 = l/(c-v), \quad ct_2 = l - vt_2 \Rightarrow t_2 = l/(c+v)$$

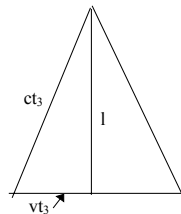
$$\underline{t_1 + t_2} = [l(c+v) + l(c-v)]/(c^2 - v^2) = 2lc/(c^2 - v^2) = \underline{(2l/c)/(1 - v^2/c^2)}$$

2.  $\perp$  (к зеркалу С)

Можно было бы рассудить проще.  $t_3$  - время туда и обратно считать одинаковым, тогда

$$2t_3 = 2l/c.$$

Если же учесть движение в эфире, то получим треугольник для хода лучей света до зеркала С и обратно



$$(ct_3)^2 = l^2 + (vt_3)^2 \Rightarrow t_3^2(c^2 - v^2) = l^2$$

$$t_3 = l / (c^2 - v^2)^{1/2}, \quad \underline{2t_3 = (2l/c) / (1 - v^2/c^2)}.$$

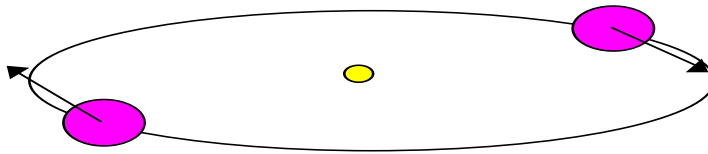
То есть, времена  $t_1 + t_2$  и  $2t_3$  различаются, следовательно лучи не обязательно должны приходить в фазе в точку интерференции и давать усиление. Эксперименты при всех вариациях давали только усиление света. Следовательно, не было обнаружено преимущественной системы отсчета - неподвижного эфира, например, и следовательно соблюдается принцип относительности для скорости света - в разных инерциальных системах отсчета она одинакова и

$$c' = c + v = c.$$

Назовем другие эксперименты, выполненные с той же целью.

1. Кеннеди, Торндайк 1932г.

На интерферометре Майкельсона проводились непрерывные измерения в течение полугода тогда, когда Земля переходила в диаметрально противоположную точку своей орбиты.



2. Бонч-бруевич, Молчанов 1956г.

Скорость света от левого и правого краев Солнца ( $V_{\text{отн.}} = 2,3 \cdot 2 = 4,6$  км/с). Обе скорости совпали с точностью до 20%

3. Саде. Опыт на  $\gamma$  – квантах. Описан в статье Phys. Rev. Letters, 10, 271, 1963г

Движущийся изотоп  $\text{C}^{12}$  со скоростью 0,5с и неподвижный  $\text{O}^{16}$  излучают на наблюдателя. В обоих случаях скорость света с точностью до 10% оказалась одинаковой.

§ 2 Преобразования Лоренца (1904г)

Излагается по сборнику статей А. Эйнштейна "Физика и реальность".  
““О специальной и общей теории относительности”, общедоступное изложение, приложение 1, простой вывод преобразований Лоренца”.

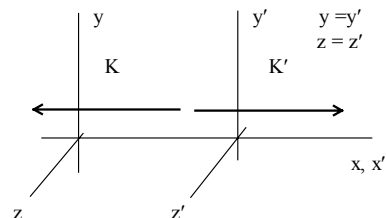
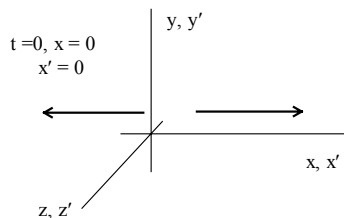
Дано:

$c = \text{const}$  + принцип относительности  
(в каждой системе отсчета все происходит одинаково).

Система  $K'$  движется равномерно и прямолинейно относительно  $K$  вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$ . В начальный момент системы  $K$  и  $K'$  совпадают.

Найти:

зависимости  $x'(x, t)$  и  $t'(x, t)$



Лучи света движутся слева направо и в обратном направлении относительно  $K$  и  $K'$ . Они пройдут в этих системах расстояния соответственно  $ct$  и  $ct'$ .

1. В положительном направлении оси  $x$

$$x = ct, x - ct = 0 \text{ и } x' = ct', x' - ct' = 0$$

осуществим связь систем через параметр

$$x' - ct' = \lambda (x - ct)$$

2. В отрицательном направлении оси  $x$

$$-x = ct, x + ct = 0 \text{ и } -x' = ct', x' + ct' = 0$$

также осуществим связь через параметр

$$x' + ct' = \mu (x + ct)$$

Получили систему двух уравнений, выражающих штрихованные (искомые) координаты через не штрихованные координаты, которые даны по условию

$$x' - ct' = \lambda(x - ct)$$

$$x' + ct = \mu(x + ct).$$

Здесь предполагаем, что преобразования линейны, то есть коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  не являются какими-либо сложными функциями координат и времени (время можно считать одной из координат - четвертой для 3-х мерного пространства), так как пространство и время однородны, Решим систему относительно штрихованных координат. Для этого сложим и вычтем уравнения друг из друга. Вспомним, что наша цель - определить неизвестные коэффициенты как параметры, которые в дальнейшем позволят нам записать формулы преобразований координат.

Сложим ( + )

$$2x' = \lambda(x - ct) + \mu(x + ct) \Rightarrow 2x' = \lambda x - \lambda ct + \mu x + \mu ct \Rightarrow 2x' = x(\lambda + \mu) - ct(\lambda - \mu)$$

$$(\lambda + \mu)/2 = a, (\lambda - \mu)/2 = b \Rightarrow$$

$$\underline{x' = ax - bct.}$$

Вычтем ( - )

$$- 2ct' = \lambda(x - ct) - \mu(x + ct) \Rightarrow -2ct' = \lambda x - \lambda ct - \mu x - \mu ct \Rightarrow 2ct' = ct(\lambda + \mu) - x(\lambda - \mu)$$

$$\underline{ct' = a ct - bx}$$

$$x' = ax - b ct \quad (1)$$

$$ct' = a ct - bx \quad (2)$$

С этого момента для определения параметров  $a$  и  $b$  используем следующие начальные и граничные условия:

1. Из ( 2 )  $\underline{t' = 0}$ ,  $act - bx = 0 \Rightarrow t = bx/ac$
2. Из ( 1 )  $\underline{x' = 0}$ ,  $ax - b ct = 0 \Rightarrow \underline{x} = bct/a = \underline{vt}$ , здесь  $\underline{v} = bc/a$  - скорость движения системы координат  $K'$  относительно  $K$
3. Из ( 1 )  $t = 0$ ,  $x' = ax$ ,  $x = x'/a$

Рассмотрим уравнение (1), имеем:

$$\underline{x'} = ax - b ct = (\text{используем начальное условие 1.}) = ax - bc bx/ac =$$

(используем дважды начальное условие 2.)

$$= ax - v bx/c = ax - v (bx/c)(ca/ac) = ax - v (bc/a)(a/c^2)x =$$

$$= ax - v^2 ax/c^2 = \underline{ax(1 - v^2/c^2)}.$$

Получена связь штрихованной и не штрихованной координаты. В качестве второго уравнения берем начальное условие 3.

$$x' = ax (1 - v^2/c^2)$$

$$x' = ax$$

Получили систему, решение которой зависит от параметра  $a$ . Согласно принципа относительности, единица длины в обеих системах независима и равна, к примеру, 1 м, то есть с равным основанием

$$x' = 1\text{м} \text{ и } x = 1\text{м} \Rightarrow x = x' \Rightarrow x = ax' \Rightarrow$$

(подставим полученное выражение в первое уравнение системы), имеем

$$x' = a^2 x' (1 - v^2/c^2).$$

Отсюда и найдем коэффициент  $a$ , удовлетворяющий условию равноправия систем отсчета

$$\underline{a = 1 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}}.$$

Чтобы найти  $b$ , вновь обратимся к граничному условию  $2. v = bc/a \Rightarrow b = v a/c \Rightarrow$

$$\underline{b = (v/c)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}}.$$

Подставим выражения, полученные для  $a$  и  $b$  в систему уравнений (1) , (2).  
Имеем

$$x' = (x - vt)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

$$t' = (t - xv/c^2)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}.$$

Получили преобразования Лоренца для координаты и времени.

Обратимся вновь к преобразованиям Галилея. образуем интервал вида

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$

Теперь образуем такой же интервал в штрихованной системе координат. Учтем при этом преобразования по Галилею

$$x' = x - vt, t' = t, y' = y, z' = z \Rightarrow s'^2 = (x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = s^2$$

То есть преобразования Галилея инвариантны при условии равенства времен.

Проверим преобразования Лоренца. Опустим  $y$  и  $z$  координаты, так как они не преобразуются при замене координат

$$\begin{aligned} (x_2' - x_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 &= [(x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1)^2 - c^2(t_2 - x_2v/c^2 - t_1 + x_1v/c^2)^2]/(1 - v^2/c^2) = \\ &= [(x_2 - x_1)^2 - 2(x_2 - x_1)(v t_2 - vt_1) + (vt_2 - vt_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 + 2(t_2 - t_1)(x_2v - x_1v) 1/c^2)(x_2v \\ &- x_1v)^2]/(1 - v^2/c^2) = [(x_2 - x_1)^2(1 - v^2/c^2) - (t_2 - t_1)^2(c^2 - v^2)]/(1 - v^2/c^2) = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - \\ &- t_1)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразования Лоренца инвариантны и по отношению ко времени. Пусть  $x = x_1, y = x_2, z = x_3, -c^2 t^2 = x_4^2$ . При таком выборе интервал можно записать в виде

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2.$$

### § 3 Следствия из преобразований Лоренца: длины тел и промежутки времени

#### о длинах тел

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = [(x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1)] / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

Для сравнения длин тел совместим моменты времени, чтобы провести наблюдение одновременно, тогда  $t_1 = t_2$

$$\Delta x' = \Delta x / (1 - \beta^2)^{1/2}, \quad \beta = v/c$$

Часто пере обозначают  $\Delta x' = l_0, \Delta x = l \Rightarrow$

$$l = l_0 (1 - \beta^2)^{1/2} \quad l < l_0$$

$l_0$  называют собственной длиной, а  $l$  - длина по отношению к той системе отсчета, которая принята за неподвижную, и из которой ведется наблюдение за движущейся системой (иначе говоря: как длина видится из неподвижной системы в движущейся). Назовем ее кажущейся длиной. При этом говорят о сокращении длины. Кажущаяся длина меньше собственной, как это следует из формулы.

#### О промежутках времени

Чтобы проанализировать продолжительность промежутков времени, выразим в явном виде  $t$  через  $t'$  и  $x'$

$$\begin{aligned}
x' &= (x - vt)/(1 - \beta^2)^{1/2}, \quad t' = (t - xv/c^2)/(1 - \beta^2)^{1/2} \Rightarrow \\
x &= x'(1 - \beta^2)^{1/2} + vt, \quad t = t'(1 - \beta^2)^{1/2} + xv/c^2 \Rightarrow \\
t &= t'(1 - \beta^2)^{1/2} + v/c^2(x'(1 - \beta^2)^{1/2} + vt) \Rightarrow \\
t(1 - v^2/c^2) &= (1 - \beta^2)^{1/2}(t' + vx'/c^2) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$t = (t' + vx'/c^2)/(1 - \beta^2)^{1/2}$$

Запишем длину не штрихованного временного интервала и учтем необходимость совместить концы координат, чтобы по ним замечать длительность промежутка времени: следовательно необходимо положить  $x_1' = x_2'$

$$t_2 - t_1 = [(t_2' + vx_2'/c^2) - (t_1' + vx_1'/c^2)]/(1 - \beta^2)^{1/2} = (t_2' - t_1')/(1 - \beta^2)^{1/2}.$$

Длительности записываются в виде

$$\Delta t = \Delta t'/(1 - \beta^2)^{1/2}.$$

$\Delta t'$  называют собственным временем, а  $\Delta t$  - время по отношению к неподвижной системе отсчета (то есть как оно “видится” из неподвижной системы отсчета по отношению к движущейся) назовем кажущимся временем. В этом смысле говорят о замедлении времени. Кажущееся время больше собственного согласно формуле.

Поскольку системы координат равноправны, то любая из них может “считать себя” неподвижной (лабораторной системой), а другую - движущейся. Расчет длин и промежутков времени ведется по формулам. Такова суть относительности. Физики, работающие на ускорителях, все свои расчеты производят по указанным здесь формулам. Для них это обычное дело. Так практика подтверждает объективность законов специальной теории относительности.

#### § 4 Преобразования скоростей, импульса и энергии

$$v_x' = dx'/dt', \quad v_y' = dy'/dt', \quad v_z' = dz'/dt'$$

найдем дифференциалы от соответствующих преобразований Лоренца



$$dx' = (dx - vdt)/(1 - \beta^2)^{1/2}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \\ dt' = (dt - vdx/c^2)/(1 - \beta^2)^{1/2}$$

$$v_x' = (dx - vdt)/(dt - vdx/c^2) \\ v_y' = [v_y(1 - \beta^2)^{1/2}]/(1 - vv_x/c^2) \\ v_z' = [v_z(1 - \beta^2)^{1/2}]/(1 - vv_x/c^2).$$

у и z - компоненты скорости преобразуются нетривиальным путем из-за преобразований времени. В отношении преобразований времени, физик-теоретик из Германии Вольфганг Паули заметил, что “В высшей степени поразительной чертой преобразований Лоренца является то, что и временная переменная также преобразуется к новому значению”. Релятивистские (от англ.- relative) значения для импульса и энергии выпишем без вычисления

$$\underline{p = m_0 v / (1 - \beta^2)^{1/2} = m_r v, \quad E = m_0 c^2 / (1 - \beta^2)^{1/2}}.$$

Исключим скорость и найдем связь между энергией и импульсом

$$p^2(1 - \beta^2) = (m_0 v)^2, \quad E^2(1 - \beta^2) = (m_0 c^2)^2 \Rightarrow 1 - \beta^2 = (m_0 c^2)^2 / E^2$$

$$p^2(m_0 c^2)^2 / E^2 = m_0 c^2(1 - (1 - v^2/c^2)) \Rightarrow p^2 c^2 / E^2 = 1 - (m_0 c^2)^2 / E^2 \Rightarrow$$

$$p^2 c^2 = E^2 - m_0^2 c^4 \Rightarrow \underline{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

Кинетическую энергию выразим как разность между полной релятивистской энергией и энергией покоя частицы

$$\underline{T = m_r c^2 - m_0 c^2}.$$

## ГЛАВА 4 ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ

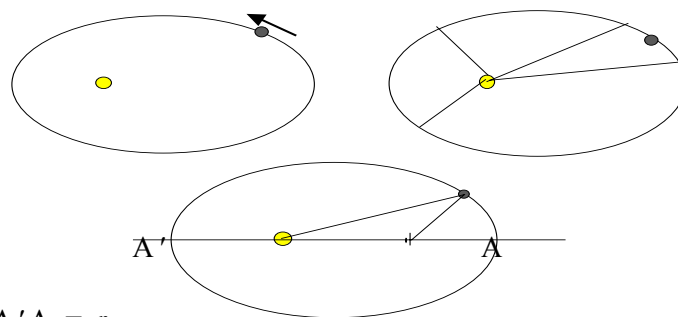
### § 1 Законы Кеплера

**Н**а основе многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге (1546-1601) немецкий ученый Кеплер сформулировал 3 закона.

1. (1609) Каждая планета Солнечной системы движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. (1609) Радиус-вектор планеты за равные времена описывает равные площади.
3. (1618) Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших осей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.

$$T_i^2/T_k^2 = r_i^3/r_k^3 \Rightarrow$$

$r^3/T^2 = \text{cst} = K$  - постоянная Кеплера



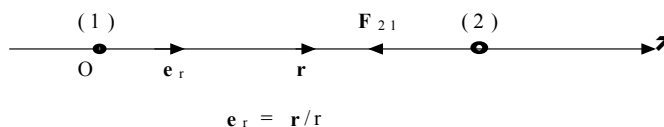
$$A'A = r$$

§ 2 Силы,  
по закону обратных квадратов

действующие

$$F \sim 1 / r^2$$

Эти силы центральные, то есть направлены вдоль линий, соединяющих материальные точки (или, точнее, центры масс тел) и (или) силовые центры



$$\mathbf{F}_{21} = (-\alpha/r^2) (\mathbf{r}/r)$$

Перечислим законы, в которых силы подчиняются закону обратных квадратов.

1. Закон Кулона:  $|\alpha| = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$
2. Закон всемирного тяготения:  $\alpha = \gamma m_1 m_2$

Вычислим потенциальную энергию

$$-U = \int \mathbf{F} d\mathbf{r} = - \int (\alpha d\mathbf{r}/r^2)(\mathbf{r}/r) = -\alpha \int dr/r^2 = \alpha/r + C, (r \rightarrow \infty, U_{\max} = 0 \Rightarrow C = 0)$$

$\Rightarrow$

$$U = - \alpha/r$$

Замечание.

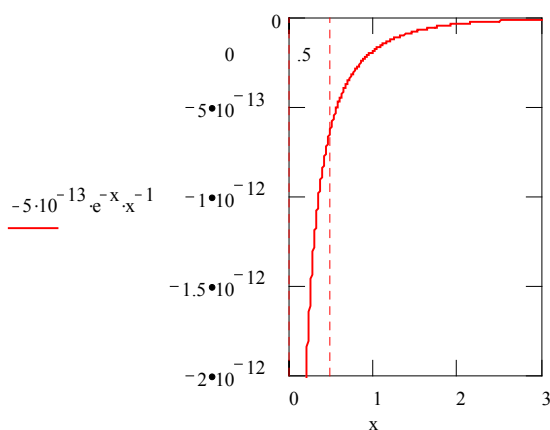
Существует так называемое сильное ядерное взаимодействие. Для него потенциальная энергия подчиняется закону

$$U_{\text{яд.}}(r) = -D e^{-r/r_0} / r,$$

$$r \ll r_{\text{атома}}, r_0 = 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}, D = 10^{-18} \text{ Эрг см} = 10^{-27} \text{ Дж м}$$

Переменную для построения графика можно пере обозначить как  $r = 2 \cdot 10^{-15} x$ , тогда потенциальная энергия имеет вид

$$U_{\text{яд.}}(x) = -5 \cdot 10^{-13} e^{-x} x^{-1}$$

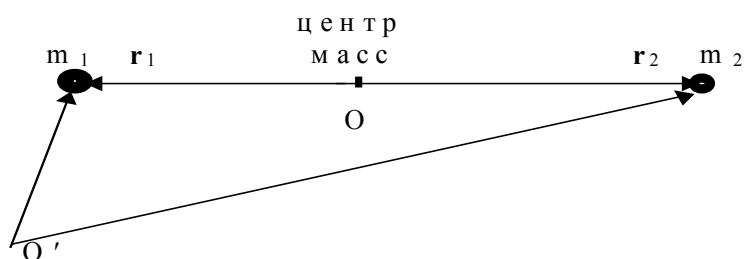


Очевидно, что эта зависимость сильнее, чем закон обратного квадрата, хотя по виду они похожи.

§ 3 Движение в центральном поле (задача двух тел). Секторальная скорость

$$\mathbf{R}_{\text{центра масс}} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / (m_1 + m_2).$$

Поместим начало отсчета в центр масс, тогда имеем



$$\mathbf{R}_{\text{центра масс}} = 0 \Rightarrow$$

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0. \text{ Пусть}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \text{ Будем рассматривать поступательное и}$$

вращательное движение системы

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{r}_1 \Rightarrow m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) = 0 \Rightarrow \mathbf{r}_1 = -m_2 \mathbf{r} / (m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_2 = m_1 \mathbf{r} / (m_1 + m_2).$$

Запишем кинетическую и потенциальную энергию для двух частиц в преобразованной системе координат в центральном поле.

$$U = U(\mathbf{r})$$

$$\underline{T} = (m_1/2)(d\mathbf{r}_1/dt)^2 + (m_2/2)(d\mathbf{r}_2/dt)^2 =$$

$$= (m_1/2)[m_2/(m_1 + m_2)]^2 (dr/dt)^2 + (m_2/2)[m_1/(m_1 + m_2)]^2 (dr/dt)^2 =$$

$$= [m_1 m_2 / 2(m_1 + m_2)] (dr/dt)^2 = \underline{(m/2)(dr/dt)^2}, \text{ где } m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2).$$

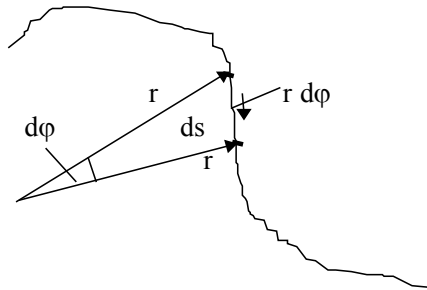
Таким образом, задача сводится к задаче о движении одной частицы в потенциальном поле.

Обратимся к описанию движения одной такой частицы во внешнем поле, где потенциальная энергия есть функция расстояния до центра. То есть частица находится в центральном поле. Для нее справедлив закон сохранения момента импульса

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const}$$

Это означает, в частности, что  $\mathbf{L}$  все время лежит в одной плоскости (частица падает, например, на притягивающий центр по прямой). Рассмотрим сектор как криволинейный треугольник. Запишем импульс и момент импульса в полярных координатах.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\mathbf{r}\omega = m\mathbf{r} (d\varphi/dt), \quad (\varphi(\mathbf{v}) \perp \mathbf{r} \text{ и } \mathbf{p})$$



$$ds = (1/2)r d\varphi \mid :dt \Rightarrow \underline{ds/dt = (r^2/2) d\varphi/dt}$$

$$L = r p = m r^2 d\varphi/dt = 2m ds/dt$$

$ds/dt$  называют секторальной скоростью. Так как

$$L = cst \Rightarrow ds/dt = cst \Rightarrow ds = cst dt \Rightarrow ds \sim dt.$$

Таким образом, сохранение момента импульса означает постоянство секторальной скорости и радиус-вектор, проводимый из центра в точки траектории, за равные времена описывает равные площади, что приводит нас ко второму закону Кеплера.

#### § 4 Кеплерова задача: каковы траектории тел в поле тяготения ?

Под траекторией подразумеваем зависимость координат друг от друга  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z, t) \Rightarrow x \sim y \sim z$ , в случае полярных координат на плоскости  $r \sim \varphi$ .

Поставим задачу: найти возможные траектории в поле тяготения (поле притягивающего центра) тяготеющей массы (планеты, частицы). Имеем законы сохранения энергии и момента импульса. Запишем полную энергию системы

$$E = T_{\text{поступат.}} + T_{\text{вращат.}} + U_{\text{потенциальн.}} = (m)(dr/dt)^2 / 2 + (mr^2)(d\varphi/dt)^2 / 2 + U =$$

$$= (L = mr^2 d\varphi/dt \Rightarrow d\varphi/dt = L/mr^2) = (m)(dr/dt)^2 / 2 + (L^2/2mr^2) + U.$$

Здесь  $E$  и  $L$  – числа в том смысле, что они константы (в поле центральных сил) как сохраняющиеся величины. Тогда

$$(m)(dr/dt)^2 / 2 = E - U - L^2/2mr^2 \Rightarrow \underline{dr/dt = [2(E - U)/m - (L/mr)^2]^{1/2}} \Rightarrow$$

Получим уравнение траектории в полярных координатах. Для этого используем выражение  $L = mr^2 d\phi/dt$  и исключим  $dt$  из двух последних выражений

$$dr = [2(E - U)/m - (L/mr)^2]^{1/2} (mr^2 d\phi/L)$$

$$d\phi = (L dr /mr^2)/[2(E - U) - (L/mr)^2]^{1/2}$$

$$\phi = \int (L dr /r^2) / [2m(E - U) - (L^2/r^2)]^{1/2} + cst$$

$cst$  выбором начала координат обращается в ноль ( $cst = 0$ ),  $U = -\alpha/r$  и  $d(1/r) = -dr/r^2$ , тогда

$$\phi = -L \int d(1/r) / [2mE + (2m\alpha/r) - (L^2/r^2)]^{1/2} . (*)$$

Получился интеграл, который можно свести к табличному интегралу вида

$$\phi = -\int dx/(1-x^2)^{1/2} = \arccos x, \text{ где } x = 1/r.$$

Решение представимо в виде

$$\cos \phi = [(L/r) - (m\alpha/L)]/[2mE + (m\alpha/L)^2]^{1/2} (**)$$

Здесь вычислен интеграл (\*) и "взят" косинус от левой и правой частей.

Существует так называемое уравнение конических сечений. Оно представляется в полярных координатах как

$$r = p/(1 + e \cos \phi)$$

Выразим наше решение (\*\*) явно через  $r$

$$[2mE + (m\alpha/L)^2]^{1/2} \cos \phi = (L/r) - (m\alpha/L) \Rightarrow 1 / [(m\alpha/L) + ((2mE + (m\alpha/L)^2)^{1/2} \cos \phi)] =$$

$$= r/L.$$

$$r = (L^2/m\alpha)/[1 + L/m\alpha(2mE + (m\alpha/L)^2)^{1/2} \cos \alpha]$$

Здесь  $p = L^2/m\alpha$ ,  $e = [(2EL^2/m\alpha^2) + 1]$

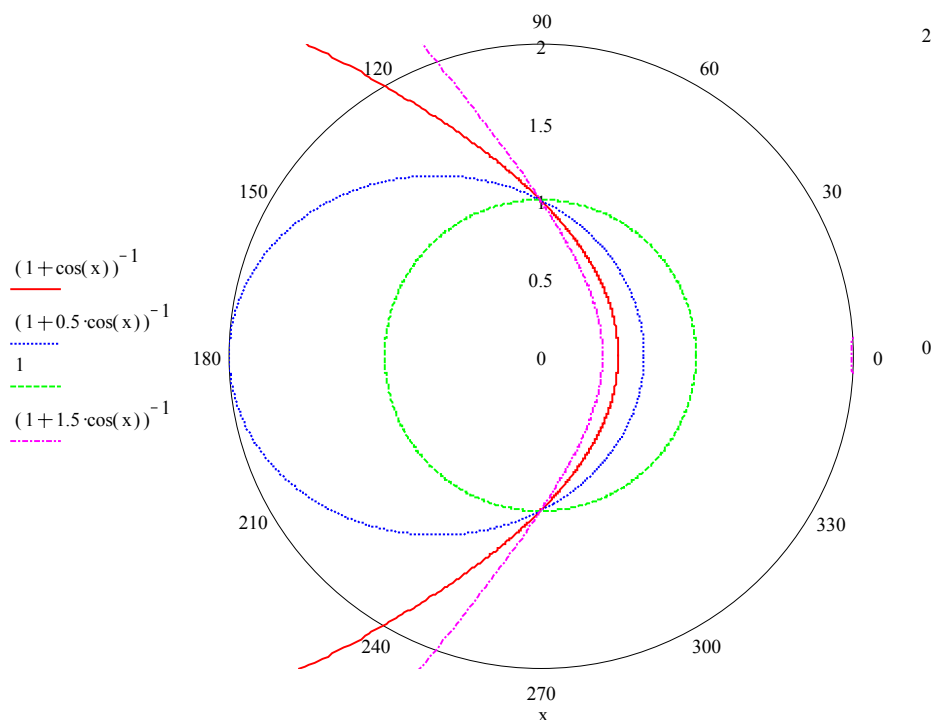
Проанализируем уравнение конических сечений, для этого представим его в виде

$$r(1 + e \cos\varphi) = p$$

1.  $e = 0$  - окружность ( $r = p = \text{cst} = 1$ )
2.  $0 < e < 1$  ( $e = 0,5$  ;  $p = 1$ ) - эллипс  $r = 1/(1 + 0,5 \cos\varphi)$
3.  $e = 1$ ,  $p = 1$  - парабола  $r = 1/(1 + \cos\varphi)$
4.  $e > 1$  ( $e = 1,5$  ,  $p = 1$ ) - гипербола  $r = 1/(1 + 2\cos\varphi)$

Замечание. Здесь целесообразно расчетное задание для обучающихся.

Построить на одном листе миллиметровой бумаги разумного формата все четыре



зависимости дающие круг, эллипс, параболу и гиперболу с шагом  $15^\circ$ , начиная с  $0^\circ$  в полярной системе координат, чтобы у всех кривых был единый центр.



В декартовой системе координат для окружности начало самих координат совпадает с её центром, а у эллипса (параболы, гиперболы) - с одним из их фокусов. Уравнения при этом имеют вид

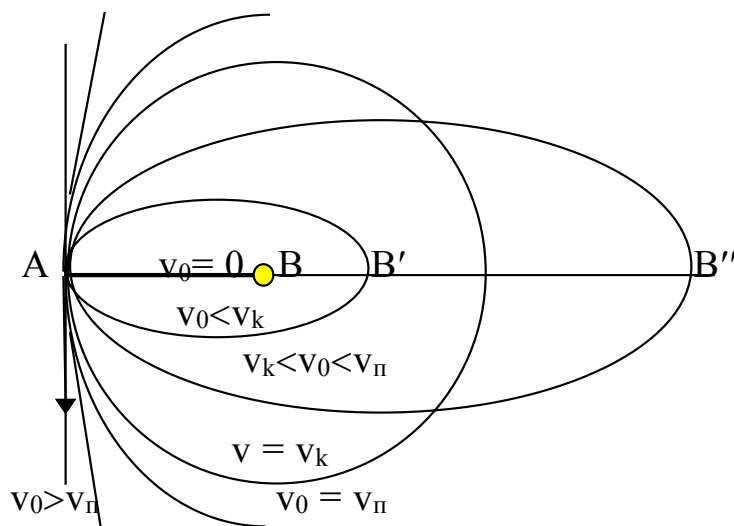
окружность  $x^2 + y^2 = R^2$

эллипс  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$

гипербола  $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$

парабола  $y^2 = 2px$

Представим схему возможных траекторий частицы в зависимости от начальной скорости. Движение начинается из точки А



$v_0 = 0$  - прямая, проходящая через В (падение на В)

1.  $v_0 < v_k$  - эллипс. А - афелий, В' - перигелий ( $v_k$  - круговая скорость, афелий - наиболее удаленная точка, перигелий - наименее удаленная точка при движении по эллипсу в отношении одного из фокусов).

2.  $v_0 = v_k$  - окружность с центром в В.

3.  $v_k < v_0 < v_\pi$  - эллипс. А - перигелий, В'' - афелий ( $v_\pi$  - параболическая скорость).

4.  $v_0 = v_\pi$  - парабола.

5.  $v_0 > v_\pi$  - гипербола.

## § 5 Космические скорости

Будем говорить о космическом корабле (вместо частицы в центральном поле). Полная энергия равна

$$E = T + U = (mv^2/2) - \gamma mM/r = (g = \gamma M/r^2) = \underline{(mv^2/2) - mgr}$$

1.  $E < 0$

$T + U < 0, T < -U \Rightarrow mv^2/2 < mgr \Rightarrow v^2 < 2gr, v = v_1 = (2gR)^{1/2}$  ( $r = R$  - средний радиус Земли)

Ракету нельзя удалить на бесконечность. Движение финитное: окружность, эллипс, падение на центр. Рассмотрим отдельно случай окружности

$$F_{\text{веса}} = F_{\text{центробежн.}} \Rightarrow mg = mv_1^2/R \quad (g \cong 10 \text{ м/с}^2, R \cong 6,4 \cdot 10^3 \text{ км}) \quad v_1 = (gR)^{1/2} \cong 8 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 8 \text{ км/с}$$

2.  $E = 0$ ,

$$T = -U \Rightarrow v = v_2 = (2gr)^{1/2} \cong 11,2 \text{ км/с} - \text{парабола}$$

3.  $E > 0$ ,

$$T > -U \Rightarrow v > (2gr)^{1/2} - \text{гипербола (гиперболы)}$$

В двух последних случаях движение ин финитное. При  $E = 0$  - минимальная энергия, необходимая для отрыва от Земли. Движение по параболе относительно Земли как притягивающего центра. Ракета становится спутником Солнца. Для  $E > 0$  ракета уходит от Земли по гиперболе.

4. Отрыв от Солнца

$E \geq 0$  по отношению к Солнцу как притягивающему центру. Здесь необходимо учитывать три тела: Солнце, Землю и космический корабль. Можно рассчитать, что отрыв от Солнца (переход на параболическую или гиперболическую орбиты) с неподвижной точки на орбите Земли произойдет при скорости 42,1 км/с. С учетом движения Земли по орбите эта скорость составит:

$$\text{по движению } 42,1 - 29,8 = 12,3 \text{ км/с}$$

$$\text{против движения } 42,1 + 29,8 = 71,9 \text{ км/с.}$$

## § 6 Об общем принципе относительности

(ОТО, неинерциальные системы. Принцип эквивалентности (по выражению Вольфганга Паули “Краеугольный камень...”))

Все физические явления в гравитационном поле происходят также как и в поле сил инерции. При этом должны совпадать напряженности полей, начальные условия, а системы быть замкнутыми.

$E_{\text{Кул.}} = F/q$  по аналогии  $E_{\text{тяг.}} = F/m_{\text{тяг.}}$ . При этом  $F = m_{\text{тяг.}} E_{\text{тяг.}}$ ,  $F = m_{\text{инерции}}$  а, то есть две последние силы в известном смысле неразличимы, эквивалентны. Запишем иначе.

Сила = тяжелая масса  $\times$  напряженность поля тяжести

Сила = инертная масса  $\times$  ускорение.

Инерция - способность тела сохранять покой или равномерное, прямолинейное движение.

Общий принцип относительности.

Все тела отсчета как системы координат ( $K, K'$  и любые другие) эквивалентны в отношении описания в них явлений природы (формулировании общих законов природы) каким бы ни было их состояние движения инерциальным или неинерциальным.

Замечание (в связи с принципом эквивалентности)

Выбором системы отсчета с заданным ускорением можно любое гравитационное поле заменить полем инерции. Виды относительности, имеющиеся у нас к настоящему моменту

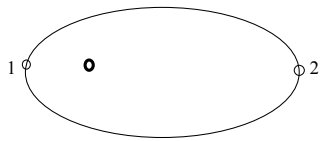
	Вид системы	Круг явлений
Относительность Галилею	по инерциальные	механические
Относительность рамках СТО	в инерциальные	все явления
Относительность рамках ОТО	в любые - инерциальные и неинерциальные	все явления

## О тяготении

Тела, движущиеся под действием поля силы тяжести, испытывают ускорение, не зависящее ни от материала, ни от физического состояния самих этих тел.

## Эксперименты, выполненные в связи с проверкой ОТО

### 1. Искривление эллиптических орбит планет около Солнца



Если пространство искривлено по-разному, то эллиптическая орбита не подчиняется точно закону Кеплера. Подтверждено в случае Меркурия.

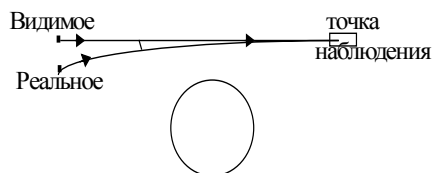
Название	Среднее расстояние от Солнца	Период обращения	Период вращения	Радиус (к земному)	Масса (к земной)
Меркурий	57,9 млн. км	88 суток	58,6 суток	0,38	0,055

Угол, описываемый прямой, соединяющей планету и Солнце на несколько секунд отличается от  $360^\circ$  - орбита искривлена.

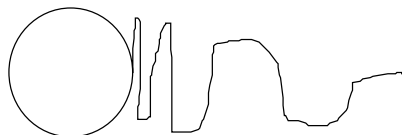
### 2. Искривление траектории световых лучей под действием гравитационных полей

При фотографировании затмения Солнца зарегистрировано смещение положения звезд на фотоснимках 29 мая 1919 года Эддингтоном и Кроммелином на 17''

по сравнению с не возмущенным затмением состоянием.



3. Смещение к красному концу спектральных линий, приходящих от звезд большой массы (отличать от эффекта Доплера). При этом длина волны излучения меньше ожидаемой.



## ГЛАВА 5 МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ (ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР)

### Вступление

**Б**удем называть колебаниями, вообще говоря, любые повторяющиеся процессы.

Когда мы говорим о колебаниях, то подразумеваем колебательную систему (более или менее простую или сложную).

Примеры колебательных систем:

- струны музыкальных инструментов (сами музыкальные инструменты (горло Шаляпина)),
- части механизмов и машин,
- газы (воздух),
- волны и суда (предметы) на воде
- все виды электромагнитного излучения,
- мембраны акустических систем,
- земная кора при землетрясениях,
- планеты солнечной системы,
- белые карлики в процессе их рождения и смерти,
- ядра атомов по отношению к захватам.

Движение относительно положения равновесия в колебательной системе поддерживается упругими внутренними или другими силами. Все виды колебаний мы будем сводить к гармоническим колебаниям.

Виды колебаний по отношению к характеру внешнего воздействия:

### 1. Свободные колебания

Однократное внешнее воздействие, после чего система освобождается и остается предоставленной самой себе. Внутренние силы (упругие или другие) заставляют колебаться систему, пока энергия первого толчка не растрачивается на работу по преодолению сил сопротивления.

### 2. Вынужденные колебания

Периодическое внешнее воздействие таково, что колебания системы не прекращаются в течение всего времени этого воздействия. Энергия, передаваемая системе за один период должна равняться работе против сил сопротивления в системе.

### 3. Автоколебания

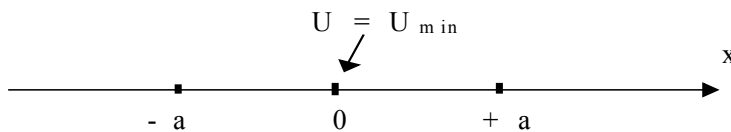
Такие вынужденные колебания, при которых система сама регулирует подачу в себя энергии (все механические часы с пружинами и гирями, мультивибраторы ...).

### 4. Параметрические колебания

Такие вынужденные колебания, при которых за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы (размеров, массы, коэффициента упругости ...).

## §1 Малые колебания

Пусть потенциальная энергия колебательной системы,  $U$ , зависит от одной переменной  $x$  (линейная задача), и пусть у системы есть положение устойчивого равновесия при  $x = 0$ . Система - колеблющаяся материальная точка.



Разложим  $U(x)$  в ряд Маклорена - частный случай ряда Тейлора (разложение происходит не в произвольной точке  $x_0$ , а в точке  $x = 0$ )

$$f(x) = f(0)x^0/0! + f'(0)x^1/1! + f''(0)x^2/2! + \dots \quad (0! \equiv 1, k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k).$$

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + U''(0)x^2 + \dots$$

i)  $U(0) = 0$  - это условие мы накладываем сами для удобства, как это делается обычно.

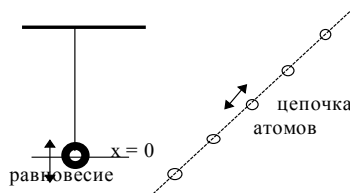
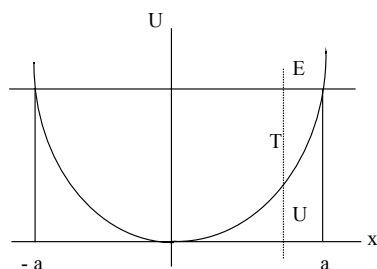
ii)  $U'(0) = -F(0) = 0$  - так как сила в точке равновесия равна нулю

iii) Обозначим  $U''(0) = k \Rightarrow U(x) \approx kx^2/2$  - в более привычных обозначениях, если не рассматривать члены ряда более высокого порядка малости

$$F(x) = -dU/dx = -d(kx^2/2)/dx = -kx$$

$F(x)$  служит внутренней силой, возвращающей систему в положение равновесие. Для колебаний необходимо внешнее однократное воздействие. Тогда по второму закону Ньютона

$$F = ma = m d^2x/dt^2$$



Уравнение малых колебаний запишется в виде

$$m d^2x/dt^2 = -kx \text{ или}$$

$$\frac{d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0,}{\text{где } \omega_0^2 = k/m}$$

$[\omega_0^2] = [k/m] = \text{кг/с}^2\text{кг}$ , так как  $[k] = [F/x] = \text{Н/м} = \text{кг м/с}^2\text{м} \Rightarrow [\omega] = \text{с}^{-1} = \text{рад/с}$ .  $\omega$  - не обязательно имеет смысл длины, это может быть угол или какая-либо другая физическая величина.



## § 2 Свободные гармонические колебания (свободный гармонический осциллятор)

Имеем

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0 . (*)$$

Надо решить это уравнение - найти зависимость  $x(t)$ . Оно классифицируется как однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Решения таких уравнений ищутся в виде  $x = e^{\lambda t}$ , подставим в (\*) для отыскания параметра  $\lambda$ .

$$d^2x/dt^2 = \lambda^2 e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow \lambda = \pm i \omega_0 \Rightarrow x_{1,2} = \exp(\pm i \omega_0 t)$$

В решении уравнения (\*) должно быть две константы интегрирования, так как оно второго порядка и общее решение записывается в таком случае как суперпозиция этих констант и двух частных решений  $x_1$  и  $x_2$  по аналогии с  $d^2x/dt^2 = 0 \Rightarrow dx/dt = c_1 \Rightarrow x = c_1 x + c_2$ , тогда

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 \exp(i \omega_0 t) + c_2 \exp(-i \omega_0 t).$$

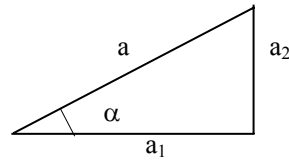
Воспользуемся формулой Эйлера

$$\exp(\pm i \omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) \pm i \sin(\omega_0 t)$$

получим

$$\begin{aligned} x &= c_1 [\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)] + c_2 [\cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)] = c_1 \cos(\omega_0 t) + i c_1 \sin(\omega_0 t) + \\ &+ c_2 \cos(\omega_0 t) - c_2 i \sin(\omega_0 t) = (c_1 + c_2) \cos(\omega_0 t) - i(c_2 - c_1) \sin(\omega_0 t) = a_1 \cos(\omega_0 t) - \\ &a_2 \sin(\omega_0 t). \end{aligned}$$

$a_1$  и  $a_2$  представим как катеты прямоугольного треугольника, тогда найдем для него и гипотенузу



$$a^2 = a_1^2 + a_2^2, \quad \sin \alpha = a_2/a, \quad \cos \alpha = a_1/a$$

$$x = a[\cos \alpha \cos(\omega_0 t) - \sin \alpha \sin(\omega_0 t)] = a \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Выражение

$$x = \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

есть решение уравнения свободных малых колебаний, здесь

$\omega_0$  - собственная частота свободных колебаний системы,  $a$  - амплитуда,  $t$  - время,  $\alpha$  - начальная фаза колебаний,  $(\omega_0 t + \alpha)$  - фаза,  $x$  - смещение.

Итак, смещение здесь изменяется по закону косинуса, следовательно движение представляет собой свободные гармонические колебания. Замечание к определению периода. Период косинуса -  $T = 2\pi$ , тогда

$$\alpha + \omega_0(t + T) = (\omega_0 t + \alpha) + 2\pi \Rightarrow \omega_0 T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi/\omega_0 = 1/\nu_0$$

Об энергии свободных гармонических колебаний (иначе говоря, свободного гармонического осциллятора).

Вычислим скорость, и ускорение колеблющейся точки в зависимости от времени

$$v = dx/dt = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad w = d^2x/dt^2 = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

заметим, что  $x$  и  $w$  находятся в противофазе.

$$T = mv^2/2 = ma^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha)/2$$

$$U = kx^2/2 = ka^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = (\omega_0^2 = k/m \Rightarrow k = m\omega_0^2) = ma^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha)/2$$

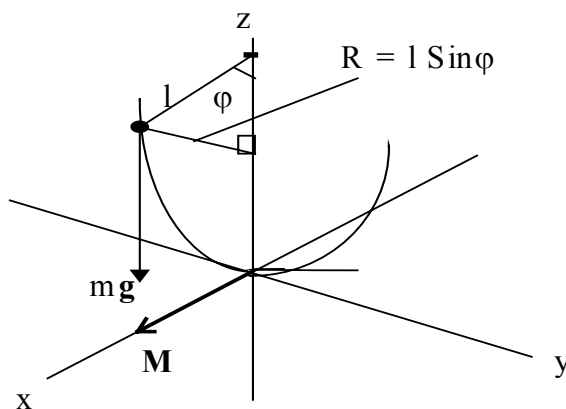
$$E = T + U = ma^2\omega_0^2/2 = \text{const.}$$

### § 3 Математический и физический маятники (в модели свободного гармонического осциллятора)

В колебательной системе всегда надо определиться с внутренними силами. В механике под маятником понимают тело (как правило твердое) совершающее под действием силы тяжести (или за счет упругих сил) колебания около положения равновесия. Рассмотрим модель математического маятника. **Определение.**

Система, состоящая из невесомой, нерастяжимой нити с точечной массой на конце.

При отклонении маятника от положения равновесия (внешнем воздействии) по отношению к нему возникает вращательный момент (момент силы).



$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Маятник колеблется в плоскости  $xy$ . На массу  $m$  в направлении  $-z$  действует сила тяжести  $mg$ . Момент этой силы относительно оси  $x$  равен  $mg R = mgl \sin \varphi$ . Момент этой силы имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия, поэтому моменту и угловому смещению надо приписывать противоположные знаки (также как квазиупругой силе и смещению). Распишем момент импульса относительно оси  $x$

$$L_x = p l, p = mv = m l d\varphi/dt \Rightarrow L_x = - ml^2 d\varphi/dt$$

Распишем момент силы относительно оси  $x$

$M_x = mgl \sin\varphi$  - по определению, с другой стороны

$$M_x = dL_x/dt = -ml^2 d^2\varphi/dt^2$$

Приравняем эти моменты

$$mgl \sin\varphi = -ml^2 d^2\varphi/dt^2 \Rightarrow g \sin\varphi = -l d^2\varphi/dt^2. \quad (*)$$

Вообще говоря, уравнение получилось трансцендентное, но для малых колебаний можно полагать  $\varphi \cong \sin\varphi \Rightarrow$

$$g\varphi = -l d^2\varphi/dt^2 \Rightarrow d^2\varphi/dt^2 + \varphi g/l = 0, g/l = \omega_0^2 \Rightarrow$$

Таким образом, уравнение свелось уже к решенному нами ранее уравнению. Здесь период

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(l/g)^{1/2}.$$

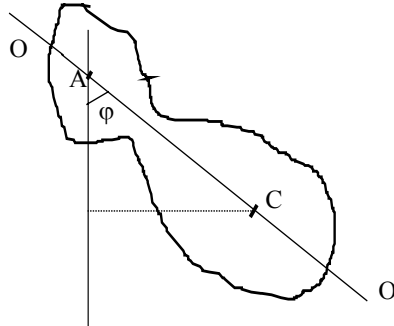
Рассмотрим модель физического маятника

Вернемся еще раз к уравнению (\*). В нем колеблющееся тело представлялось материальной точкой. Если же колеблющееся тело нельзя представить как материальную точку, то необходимо учитывать момент инерции тела. Это будет момент инерции относительно оси, проходящей через точку подвеса этого тела  $ml^2 = I \Rightarrow$

$$mgl \sin\varphi = -I d^2\varphi/dt^2 \Rightarrow (\text{также для малых колебаний}) d^2\varphi/dt^2 + \varphi mgl/I = 0$$

$$\omega_0^2 = mgl/I, T = 2\pi(I/mgl)^{1/2}$$

На оси  $OO'$  есть точка (  $C$  ) по другую сторону центра масс, при подвешении за которую колебания данного тела будут точно такими же как и в точке  $A$ .  $AC$  называют приведенной длиной.



Замечания:

1. Во всех формулах , полученных в данной главе  $\omega_0$  не зависит от амплитуды - это важнейшее свойство гармонического осциллятора
2. Для нескольких возбуждающих сил по отношению к данной колебательной системе справедлив принцип суперпозиции.

#### § 4 Затухающие колебания (затухающий гармонический осциллятор)

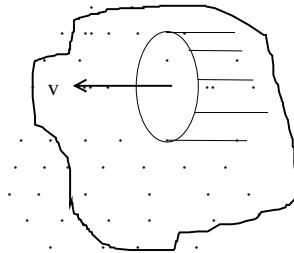
Введем для колебательной системы силу сопротивления. Теперь речь пойдет о свободных затухающих колебаниях, где затухание обусловлено силами сопротивления. Пусть

$$F_x = -r \, dx/dt = -r \, v,$$

то есть сила сопротивления прямо пропорциональна скорости в первой степени. Сила и скорость противоположны по направлению и

$$[r] = [F/v] = \text{Н} / \text{м/с} = \text{кг м с/с}^2 \text{ м} = \text{кг/с}$$

Заметим, что линейная зависимость сил сопротивления от скорости часто реализуется на практике. Пример



На пластину (некое миделево сечение), которая движется в газе перпендикулярно своей плоскости при относительно низком давлении (когда можно не учитывать столкновение молекул между собой) действует сила  $F \sim v$ . Рассчитаем скорость движения молекул при комнатной температуре

$v = (RT/M)^{1/2}$ . Считаем для азота:  $M = 28$  г/моль,  $R = 8,3$  Дж/К моль,  $T = 300^\circ\text{K}$

$v \approx 300\text{ м/с} \approx 1000$  км/час

Такой скорости достигают самолеты, летающие в верхних слоях атмосферы.

Итак, уравнение имеет вид

$$m d^2x/dt^2 = -kx - r dx/dt \Rightarrow m d^2x/dt^2 + r dx/dt + kx = 0.$$

Это - однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, преобразуем

$$d^2x/dt^2 + 2\beta dx/dt + \omega_0^2 x = 0 \quad (2\beta = r/m, [\beta] = 1/\text{с})$$

двойка использована для того, чтобы короче в дальнейшем записать решение этого уравнения. Для решения используем уже известный прием.

$$x = e^{\lambda t}, dx/dt = \lambda e^{\lambda t}, d^2x/dt^2 = \lambda^2 e^{\lambda t},$$

подставим в уравнение

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\beta \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0, \quad \lambda^2 + 2\beta \lambda + \omega_0^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm (\beta^2 - \omega_0^2)^{1/2},$$

$$x_1 = \exp\{[-\beta + (\beta^2 - \omega_0^2)^{1/2}]t\}, x_2 = \exp\{[-\beta - (\beta^2 - \omega_0^2)^{1/2}]t\},$$

$$\text{Пусть } (\beta^2 - \omega_0^2)^{1/2} = \omega,$$

$$\underline{x} = c_1 \exp\{[(-\beta + \omega)]t\} + c_2 \exp\{[(-\beta - \omega)]t\} = c_1 e^{-\beta t} e^{\omega t} + c_2 e^{-\beta t} e^{-\omega t} =$$

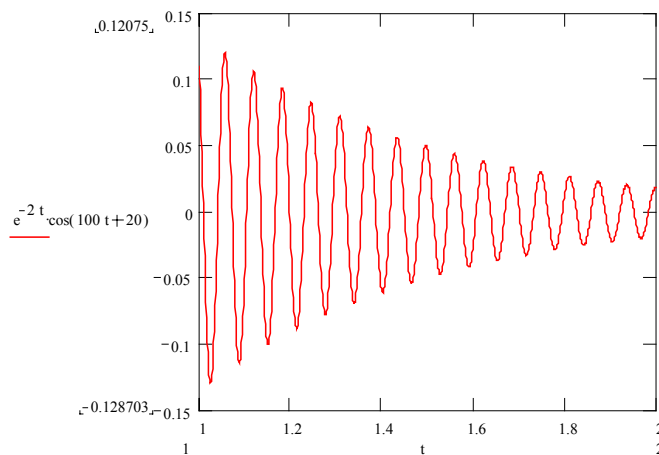
$$= e^{-\beta t} \{c_1 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] + c_2 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)]\} =$$

$$= e^{-\beta t} a \cos(\omega t + \alpha) = a_i \cos(\omega t + \alpha), \text{ где } a_i = a e^{-\beta t}.$$

Получили гармоническое колебание с экспоненциально спадающей амплитудой.

Для построения графика выберем

$t = 2 \text{ с}^{-1}$ ,  $a = 1$ ,  $\omega = 100 \text{ рад/с}$ ,  $\alpha = 20 \text{ рад}$ .



Вычислим период и определим логарифмический декремент колебания,  $\lambda_{\text{кол}}$ .

$$\omega^2 = \beta^2 - \omega_0^2, T = 2\pi/\omega = 2\pi/(\beta^2 - \omega_0^2);$$

$$a_{i+1}/a_i = a(t)/a(t+T) = a e^{-\beta t}/a e^{-\beta(t+T)}$$

$$e^{\beta T} \Rightarrow \ln(a_{i+1}/a_i) = \beta T = \lambda_{\text{кол}}.$$

$\beta$  называется затуханием, от нее зависит скорость убывания амплитуды колебаний, а  $\omega$  в данном случае - частота затухающих колебаний. Период колебаний как видно остается при этом постоянным.

## § 5 Вынужденные колебания гармонического осциллятора

(с учетом сил сопротивления)

Пусть вынуждающая сила также изменяется по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos(\omega t)$$

это не одноразовый импульс, а постоянно действующая во времени сила. Уравнение имеет вид

$$m d^2x/dt^2 = -kx - r dx/dt + F_0 \cos(\omega t), \quad \omega_0^2 = k/m, \quad r/m = 2\beta, \quad F_0/m = f_0 \Rightarrow$$

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x + 2\beta dx/dt = f_0 \cos(\omega t) \quad (*)$$

Получили (\*) - линейное, *неоднородное* дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение ищется следующим образом: мы имеем общее решение однородного уравнения, построенного для данного без правой части.

$$x_{\text{однородное}} = a e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \quad (1).$$

Чтобы найти общее решение неоднородного уравнения, необходимо к (1) прибавить любое частное решение неоднородного уравнения (\*). Пусть

$$x_{\text{ч.н.}} = B e^{i\omega t}.$$

Определим параметр  $B$  используя подстановку  $x_{\text{ч.н.}}$  в (\*)

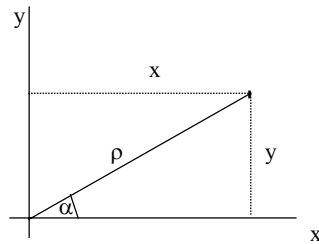
$$dx/dt = B i \omega e^{i\omega t}, \quad d^2x/dt^2 = -B \omega^2 e^{i\omega t}$$

$$-B \omega^2 e^{i\omega t} + \omega_0^2 B e^{i\omega t} + 2\beta B i \omega e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t} \Rightarrow B = f_0 / (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega) \Rightarrow$$

$$x_{\text{ч.н.}} = f_0 e^{i\omega t} / (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega) \quad (2).$$



### Отступление (о комплексных числах)



$$z = x + i y, \quad i^2 = -1, \quad \operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y, \quad |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

В полярных координатах

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \sin \alpha, \quad z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad \operatorname{tg} \alpha = y/x.$$

Справедливость формулы Эйлера -

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

может быть доказана разложением в ряд, составляющих формулу функций

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + \frac{(i\alpha)^2}{2!} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \dots$$

например

$$(i\alpha)^3 = -i \alpha^3, \quad (i\alpha)^6 = -\alpha^6, \quad \dots, \quad \operatorname{Im} z = \sin \alpha, \quad \operatorname{Re} z = \cos \alpha$$

Представим комплексный знаменатель частного решения (2) неоднородного уравнения через тригонометрические функции

$$x = \omega_0^2 - \omega^2, \quad y = 2\beta\omega \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = y/x = 2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2), \quad \varphi = \arctg [2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)],$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2} \Rightarrow$$

$$x_{\text{ч.н.}} = f_0 e^{i\omega t} / \rho e^{i\varphi} = f_0 e^{i(\omega t - \varphi)} / \rho.$$

Составим общее решение неоднородного уравнения

$$\underline{x_{\text{о.н.}} = x_{\text{однород.}} + x_{\text{ч.н.}} = a e^{-\beta t} \operatorname{Cos}(\omega t + \alpha) + [f_0 e^{i(\omega t - \varphi)} / \rho]}.$$

Будем рассматривать решения в моменты времени, достаточно удаленные от момента  $t = 0$ , тогда с достаточной степенью точности

$$x_{\text{о.н.}} \cong f_0 e^{i(\omega t - \varphi)} / \rho$$

$$x = \operatorname{Re}(x_{\text{о.н.}}) = \operatorname{Re}\{f_0 [\operatorname{Cos}(\omega t - \varphi) + i \operatorname{Sin}(\omega t - \varphi)] / \rho\} = f_0 \operatorname{Cos}(\omega t - \varphi) / \rho.$$

Выпишем окончательное решение

$$\underline{x = f_0 \operatorname{Cos}\{\omega t - \arctg[2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)]\} / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}}.$$

Роль амплитуды в решении выполняет часть выражения не являющаяся периодической функцией, то есть

$$a = f_0 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}. \quad (3)$$

Найдем резонанс амплитуды. Для этой цели вычислим максимумы знаменателя в выражении (3), а точнее выражения под корнем как функции частоты  $\omega$

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]'_{\omega} = 0, \quad 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\beta^2\omega = 0$$

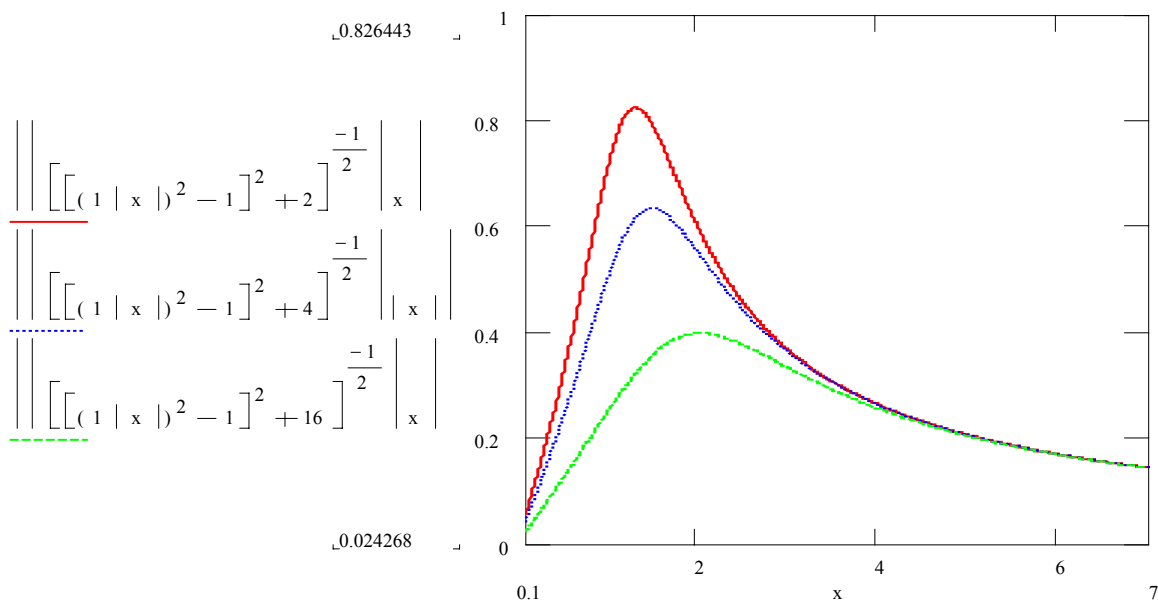
1.  $\omega = 0$  - физически не интересное решение

$$2. -(\omega_0^2 - \omega_p^2) + 2\beta^2 = 0 \Rightarrow \omega_p^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

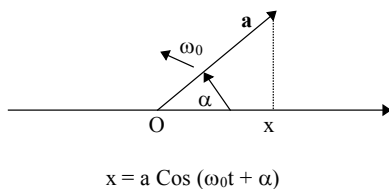
Подставим найденное значение частоты резонанса в выражение для амплитуды (3)

$$a_{\max} = f_0 / [(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - \beta^2)]^{1/2} = f_0 / 2\beta(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}$$

$\beta$  (всегда должно быть)  $< \omega_0$ . Пусть  $\beta_3 > \beta_2 > \beta_1 \Rightarrow \omega_{p3} < \omega_{p2} < \omega_{p1} \Rightarrow a_{\max 3} > a_{\max 2} > a_{\max 1}$ . Для построения графика формула (3) специально преобразована. Обозначены  $\omega \equiv x$ ,  $\beta_3 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 0,7$ .



## § 6 Сложение колебаний одинакового направления. Векторная диаграмма



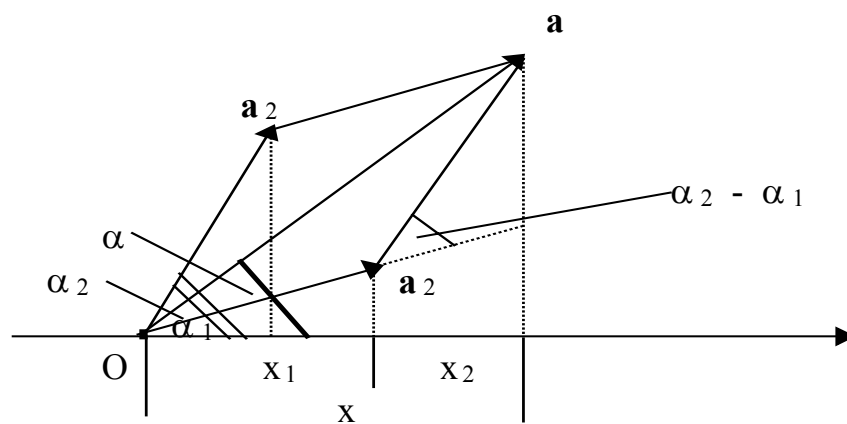
Колебания гармонического осциллятора можно представить как вращение вектора длины -  $a$  в плоскости чертежа около некоторой точки  $O$ .

Пусть дано:  $x_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1)$  и

$$x_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2)$$

Найти:

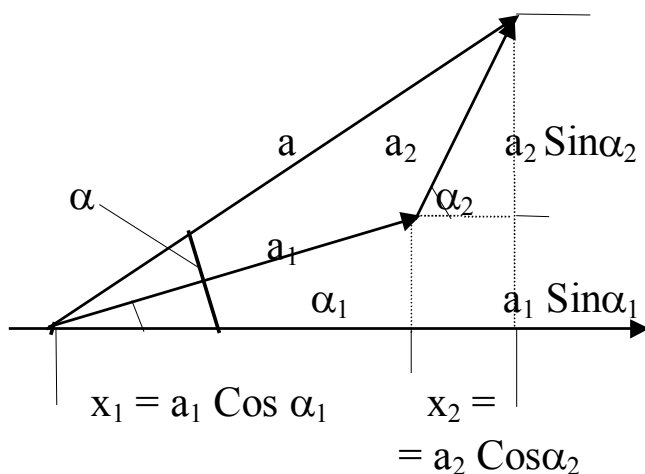
$x = x_1 + x_2$  с помощью векторной диаграммы, то есть выразить  $a$  и  $\alpha$  через  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .



a можно найти, используя теорему косинусов

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

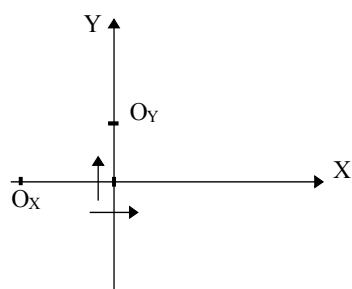
Найдем начальную фазу результирующего колебания



$$\operatorname{tg} \alpha = (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2) / (a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2)$$

## § 7 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Одна и та же точка совершает периодические колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Это происходит одновременно. Имеем параметрический вид (через  $t$ ) записи уравнений



$$x = a \cos (\omega_0 t + \alpha), \quad y = b \cos (\omega_0 t + \beta)$$

$$\text{Пусть } \alpha + \beta = \varphi, \quad \alpha = 0 \Rightarrow \beta = \varphi$$

Здесь дан параметрический вид (через переменный параметр  $t$ ) уравнения траектории точки. Точка в плоскости  $x$

-  $y$  совершает какое-то движение. Найдём форму траектории  $y(x)$  исключив  $t$ . Имеем

$$x = a \cos(\omega_0 t), y = b \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\cos(\omega_0 t) = x/a \Rightarrow 1 - \sin^2(\omega_0 t) = (x/a)^2$$

$$y/b = \cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t)\cos\varphi - \sin(\omega_0 t)\sin\varphi = [(x/a)\cos\varphi] - [1 - (x/a)^2]^{1/2}\sin\varphi$$

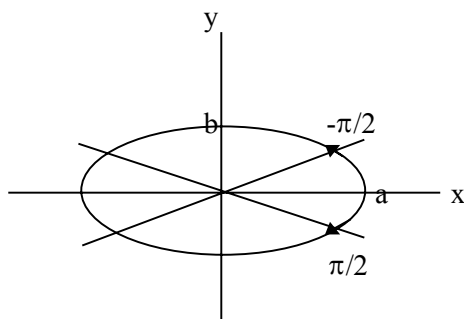
$$[1 - (x/a)^2]^{1/2}\sin\varphi = (x/a)\cos\varphi - y/b \quad | \text{ возведем в квадрат обе части равенства}$$

$$[1 - (x/a)^2]\sin^2\varphi = (x/a)^2\cos^2\varphi - 2xy\cos\varphi/ab - (y/b)^2 \Rightarrow$$

$$\sin^2\varphi = (x/a)^2 + (y/b)^2 - (2xy/ab)\cos\varphi (**)$$

Проанализируем полученное выражение (\*\*)

1.  $\varphi = 0 \Rightarrow (x/a - y/b)^2 = 0 \Rightarrow x/a = y/b \Rightarrow y = bx/a$  - прямая
2.  $\varphi = \pm\pi \Rightarrow (x/a + y/b)^2 = 0 \Rightarrow y = -bx/a$  - прямая
3.  $\varphi = \pm\pi/2 \Rightarrow (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$  - эллипс



Если частоты колебаний не совпадают (например, отличаются в целое число раз), то графически получаются фигуры в виде горизонтальных и вертикальных восьмерок (при  $n = 2; 1.2$ ) и цепочек, называемых фигурами Лиссажу. По числу звеньев цепочек

экспериментально осциллографически можно находить отношение частот колебаний. Направление колебаний определяется по возрастанию или убыванию косинуса.

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha), y = b \cos(\omega_0 t + \beta)$$

$t \uparrow$

$x \downarrow$

$y \downarrow$   
 $\pi/2$

$y \uparrow$   
 $-\pi/2$

## § 8 Биения

Пусть имеем два колебания одного направления с одинаковыми амплитудами, но незначительно отличающимися частотами (например, на 10%), тогда

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega + \Delta\omega, \quad x_1 = a \cos(\omega t), \quad x_2 = a \cos(\omega + \Delta\omega)t$$

$$\underline{x} = x_1 + x_2 = a[\cos(\omega t) + \cos(\omega + \Delta\omega)t] =$$

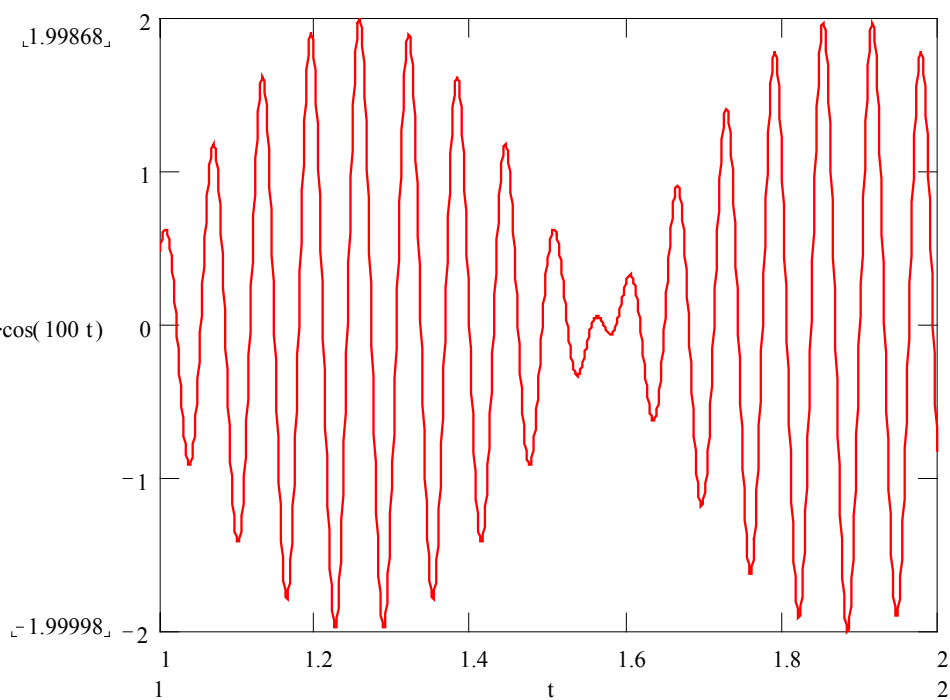
$$= a 2 \cos\{[\omega t + (\omega + \Delta\omega)t]/2\} \cos\{[\omega t - (\omega + \Delta\omega)t]/2\} =$$

$$= 2a \cos(\omega t + \Delta\omega t/2) \cos(\Delta\omega t/2) = (\Delta\omega \ll \omega, \omega/\Delta\omega \approx 10 \text{ раз}) =$$

$$= \underline{2a \cos(\omega t) \cos(\Delta\omega t/2)}.$$

Если построить график такой функции, то роль меняющейся амплитуды может быть приписана  $A = |2a \cos(\Delta\omega t/2)|$ . Заметим, что плавно меняющаяся функция будет искажена в меру отличия частот. Периодами двух периодических функций являются соответственно: высокочастотной -  $T = 2\pi/\omega$ , низкочастотной -  $T_A = 2\pi/\Delta\omega$

График представлен для  $\omega = 100$  Гц,  $\Delta\omega = 10$  Гц,  $A = 1$ , при этом  $T \cong 62,8$  мс,  $T_A \cong 0,63$  с.



Биениями называются

Колебания амплитуды, образующиеся при сложении двух колебаний с мало отличающимися частотами.

## §9 Анггармонический осциллятор

Пусть

$$U(x) = (kx^2/2) - skx^3/3$$

Здесь оставлены члены ряда по четвертый включительно

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + U''(0)x^2/2! + U'''(0)x^3/3! + \dots$$

$$U(0) = 0 \text{ (выбором начала отсчета), } U'(0) = F(0) = 0,$$

$$U''(0) = k, U'''(0) = -2sk \Rightarrow U(x) \approx (kx^2/2) - skx^3/3 \Rightarrow$$



$$F(x) = -dU(x)/dx = -kx + skx^2 \Rightarrow md^2x/dt^2 = -kx + skx^2 \Rightarrow$$

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x - s\omega_0^2 x^2 = 0. \quad (*) \quad (d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = s\omega_0^2 x^2)$$

Наличие члена  $x^2$  делает это уравнение нелинейным. Его решение будем искать в виде

$$x = a(\cos\omega t + q\cos 2\omega t) + x_1 = a\cos\omega t + aq\cos 2\omega t + x_1. \quad (1)$$

Здесь  $q$  и  $x_1$  - два неизвестных параметра (для уравнения второго порядка). Для их определения подставим решение (1) в исходное уравнение (\*)  $d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x - s\omega_0^2 x^2 = 0$ . Вычислим вторую производную и квадрат неизвестного.

$$d^2x/dt^2 = a[(-\omega^2)\cos\omega t + (-4\omega^2)\cos 2\omega t] = -a\omega^2(\cos\omega t + 4q\cos 2\omega t) \quad (2)$$

$$x^2 = (a\cos(\omega t) + aq\cos(2\omega t) + x_1)^2 = \underline{a^2\cos^2(\omega t)} + a^2q^2\cos^2(2\omega t) + x_1^2 +$$

+ (по парные удвоенные произведения).

Считаем  $q_1$  и  $x_1$  малыми и пренебрежем всеми членами, сомножителями которых они являются.

$$x^2 \approx \underline{a^2\cos^2\omega t} = (a^2/2)(1 + \cos 2\omega t) = (a^2/2) + (a^2\cos 2\omega t)/2 \quad (3)$$

Подставим (1, 2 и 3) в исходное уравнение (\*)  $d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x - s\omega_0^2 x^2 = 0$ , имеем

$$- a\omega^2\underline{\cos(\omega t)} - 4aq\omega^2\cos(2\omega t) + a\omega_0^2\underline{\cos\omega t} + \omega_0^2aq\cos(2\omega t) + \omega_0^2x_1 - s\omega_0^2a^2/2 -$$

$$- (s\omega_0^2a^2/2)\cos(2\omega t) =$$

$$= (\omega_0^2a - a\omega^2)\cos(\omega t) + (\omega_0^2aq - s\omega_0^2a^2/2 - 4aq\omega^2)\cos(2\omega t) + \omega_0^2x_1 - s\omega_0^2a^2/2 = 0$$

Для равенства нулю последнего выражения необходимо равенство нулю всех его слагаемых

$$1. \omega = \omega_0 \Rightarrow a(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) = 0$$

$$2. \omega_0^2 a q - s \omega_0^2 a^2 / 2 - 4 a q \omega_0^2 = 0 \Rightarrow (\omega_0 \neq 0) \Rightarrow 3q = as/2 \Rightarrow a = 6q/s$$

$$3. \omega_0^2 x_1 - a \omega_0^2 a^2 / 2 = 0 \Rightarrow x_1 = sa^2 / 2.$$

Найдем среднее значение от смещения  $x$

$$\langle x \rangle = \langle a(\cos \omega t + q \cos 2\omega t) + x_1 \rangle =$$

(так как средние значения от периодических функций равны нулю)

$$\Rightarrow \langle x \rangle = x_1, \text{ но } x_1 = sa^2/2 \Rightarrow \langle x \rangle = sa^2/2.$$

Применим полученный результат к цепочке атомов в твердом теле. С одной стороны полная энергия гармонического осциллятора  $E$  пропорциональна квадрату амплитуды ( $E \sim a^2$ ). Смещение также пропорционально квадрату амплитуды согласно нашему результату ( $x \sim a^2$ ). Следовательно, среднее смещение пропорционально средней энергии гармонического осциллятора

$$\langle x \rangle \sim \langle E \rangle,$$

а из статистической физики следует, что средняя энергия при тепловом равновесии пропорциональна температуре,  $\langle x \rangle \sim \langle E \rangle \sim T$ , следовательно, и  $\langle x \rangle \sim T$ , что объясняет нам линейное термическое расширение твердых тел.

## § 10 Адиабатические инварианты

Адиабатическими инвариантами называют физические величины, являющиеся функциями координат, скоростей и других параметров колебательных систем при условии актуально медленного изменения этих параметров:

$$f(k, \omega, E, m, T, \dots).$$

Поставим задачу получить некоторые адиабатические инварианты. Запишем полную энергию системы, считая ее не (!) замкнутой  $E \neq \text{cst}$ ,  $k - \text{var}$

$$E = mv^2/2 + kx^2/2.$$

Возьмем первую производную по времени -  $t$ , учитывая, что  $k = k(t)$

$$dE/dt = mv \, dv/dt + kx \, dx/dt + (x^2/2)dk/dt = v(ma + kx) + (x^2/2)dk/dt =$$

$$(x^2/2)dk/dt.$$

В круглых скобках стоят две силы одинаковые по величине и противоположные по направлению, имеем

$$dE/dt = (x^2/2)dk/dt = (kx^2/2) \, k \, dk/dt = U(x) \, k \, dk/dt.$$

Используем разложение в ряд вида

$$k \, dk/dt = (k \, dk/dt)_0 (1 + \alpha) \Rightarrow dE/dt = U(x) (k \, dk/dt)_0 (1 + \alpha). \quad (1)$$

Здесь записано разложение в ряд типа Тейлора и учтен первый порядок малости (при  $dk/dt \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$ ).  $(dk/k \, dt)_0$  - значение выражения (1) в точке, выбранной за начало отсчета. Проинтегрируем (1) по времени от  $t$  до  $t + T(k)$ . В нашем случае период  $T$  является функцией  $k$ .

$\Delta E = (dk/k \, dt)_0 \left[ \int_t^{t+T(k)} U(x(t')) dt' + \beta \right], \quad \beta = \alpha \int_t^{t+T(k)} U dt' \quad (dk/k \, dt)_0 \rightarrow 0$ <p style="text-align: center;">(так как <math>\alpha \rightarrow 0 \Leftrightarrow dk/dt \rightarrow 0</math>)</p>
---

Пусть для внутренней (потенциальной) энергии  $k = \text{cst}$ , а в выражении  $k \, dk/dt$  -  $k$  и само это выражение перестало быть константой, в течение промежутка времени равного периоду  $T$ . Это позволяет не утратить первоначальную зависимость  $k(t)$ .

$$i) U = kx^2/2$$

$$ii) x = a \cos(\omega t + \alpha)$$

$$iii) U = (ka^2/2) \cos^2(\omega t + \alpha) = E \cos^2(\omega t + \alpha) = E[1 + \cos(2\omega t + \alpha)]/2.$$

Вычислим отдельно интеграл при  $t = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^T U dt' &= (E/2) \int_0^T [1 + \cos(2\omega t' + 2\alpha)] dt' = \\ &= (E/2) \left[ \int_0^T dt' + \int_0^T \cos(2\omega t' + 2\alpha) dt' \right] = \\ &= ET/2 + (1/2\omega) \sin(2\omega t + 2\alpha) \Big|_0^T = ET/2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\Delta E = (dk/k dt) (ET/2).$$

Заметим, что  $T dk/dt \cong \Delta k$  с точностью до величины более высокого порядка малости. Данное выражение равно приращению  $k$  за период  $T$ .

$$(k(t) = k_0 + \Delta t dk/dt + \Delta t^2 d^2k/2! dt^2 + \dots, \text{ здесь } \Delta t = T \Rightarrow k \cong k_0 + T dk/dt \Rightarrow T dk/dt \cong k - k_0 = \Delta k)$$

Тогда

$$\Delta E = \Delta k E/2k.$$

Осуществим предельный переход  $\Delta \rightarrow d \Rightarrow dE = E dk/2k \Rightarrow dE/E = dk/2k$ .

Имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, интегрируем

$$\ln E = (1/2)\ln k + \text{cst} \Rightarrow \ln E/\sqrt{k} = \text{cst} \Rightarrow \underline{E/\sqrt{k} = \text{cst}}.$$

Получили соотношение для адиабатических инвариант  $E$  и  $k$ . Это соотношение приводит также к

$$\omega = \sqrt{k/m} \Rightarrow \sqrt{k} = \omega\sqrt{m} \Rightarrow \underline{E/\omega = \text{cst}} \text{ и } T = 2\pi\sqrt{m/k} \Rightarrow \sqrt{k} = 2\pi\sqrt{m}/T \Rightarrow \underline{ET = \text{cst}}.$$

Пример: при медленном укорочении нити математического маятника его период колебаний медленно уменьшается и одновременно возрастает энергия, а произведение  $ET$  - остается постоянным. Отличие от параметрических колебаний состоит в том, что там нить периодически удлиняется и укорачивается, то есть меняется не монотонно.

## Часть 2 Молекулярная физика

### Введение

Молекулярная физика объединяет разделы:

- i) Собственно молекулярная физика - представление о веществе с позиций молекулярно-кинетической теории
- ii) Физическая статистика – расчетный инструмент для изучения молекулярной физики (математическая база)
- iii) Термодинамика - учение о тепловом движении
- iv) Физическая кинетика - изучение процессов движения молекул в веществе (газах и твердых телах). (Две небольшие главы посвящены гидродинамике – изучению движения жидкости как континуальной субстанции, а также строению и свойствам кристаллов).

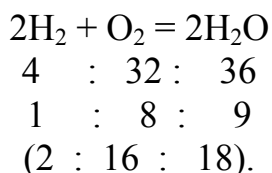
Основные понятия молекулярной физики - микрочастица и динамическая система. Динамическая система представляет собой собрание микрочастиц (в газе, твердом или, как говорят, конденсированном теле, жидкости) молекул, атомов, ионов, ядер атомов, нейтронов, протонов, электронов,... . Однако, как правило частицы, о которых идет речь в молекулярной физике не заряжены или электромагнитным взаимодействием между ними можно пренебречь.

Атомистические представления впервые зародились в экспериментальной химии. Сформулируем два положения:

1. Общий вес, участвующих в химических реакциях веществ остается неизменным
2. Вещества вступают в реакции в одних и тех же простых весовых отношениях (Закон кратных отношений)

Пример:

2 части водорода + 16 частей кислорода = 18 частей воды (остальное, если оно и есть не востребуется)



Авогадро в 1811 г. предложил объяснение (для объемов реагирующих веществ при нормальных условиях). Любой газ состоит из огромного числа частичек. На определенное число частичек одного сорта при их взаимодействии требуется вполне определенное число частичек другого сорта. Так, если, при соединении одной весовой части водорода с восемью весовыми частями кислорода, получается девять весовых частей воды, это может означать следующее: молекула кислорода в восемь раз тяжелее молекулы водорода, а молекула воды в девять раз тяжелее молекулы водорода. Так мы приходим к понятию молекулярного и атомного весов. Весовую часть, приходящуюся на одну весовую часть водорода в отношении каждого атома называют грамм-атомом, а молекулы - грам-молем. Любой грамм-атом содержит такое же количество частиц как и один грамм-атом водорода в отношении каждого элемента периодической системы элементов из таблицы Менделеева.

Au	197 г/моль
H	1 г/моль
C	12 г/моль
U <sup>235</sup>	235 г/моль
N <sub>2</sub> (2×14)	28 г/моль и так далее

Таким образом, в одном моле вещества содержится одинаковое число молекул и в одном грамм-атоме вещества содержится одинаковое число атомов. Называют это число - числом Авогадро и оно равно  $N_A = 6,02204 \cdot 10^{23}$  частиц/моль. Пользуются также иногда числом Лошмидта

$$L_0 = N_A/V_M = 6,02 \cdot 10^{23}/22,4 \cdot 10^3 = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ частиц/см}^{-3} \text{ (1/моль)}$$

где  $V_M = 22,4$  л - объем занимаемый одним молем газа при нормальных условиях. Нормальные условия (н.у.):  $T = 273^\circ\text{K}$ ,  $p = 1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $V_M = 22,4 \text{ л/моль} = 22,4 \text{ дм}^3/\text{моль} = 22,4 \cdot 10^3 \text{ см}^3/\text{моль} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ . С определенными оговорками указанные сведения годятся не только для газов, но и для других веществ.

## Глава 1 Физическая статистика

**П**редмет физической статистики составляет изучение закономерностей, которым подчиняются поведение и свойства тел, состоящих из колоссального количества отдельных частиц - атомов и молекул. Тело - суть совокупность частиц, составляющих газ, жидкость или твердое тело. Тело в данном случае представляется системой динамической, чем подчеркивается внутреннее непрерывное движение, составляющих тело частиц.

Динамическая система

1 частица - ее состояние описывается законами Ньютона и задается начальными условиями	2 частицы - задача двух тел. Через приведенную массу и выбором начала отсчета сводится к задаче об одной частице	Колоссальное количество частиц. Даже начальные условия для каждой частицы не задать. Как быть?
--	---	---

В макроскопическом теле (динамической системе) устанавливается некое стационарное распределение частиц по энергиям, скоростям, координатам и т. д.. Можно предположить, что с течением времени количество частиц имеющих заданные параметры не изменяется, хотя частицы при этом могут меняться ролями, но так как все частицы предполагаются одинаковыми, то в целом картина остается неизменной. Физическая статистика назначена изучать эти стационарные состояния и описывать их аналитически с помощью формул.

Один из основоположников статистической механики Джозайя Виллард Гиббс в работе 1902 года “Основные принципы статистической механики, изложенные со специальным применением к рациональному



обоснованию термодинамики” характеризует ситуацию в данной отрасли физики следующим образом. “Мы можем представить себе большое число систем (частиц С.М.) одинаковой природы, но различных по конфигурациям (координатам С.М.) и скоростям, которыми они обладают в данный момент и различных не только бесконечно мало, но и так, что охватывается каждая мыслимая комбинация конфигураций и скоростей. При этом мы можем поставить себе задачей, не рассматривать прохождение определенной системы через всю последовательность ее конфигураций, а установить: как будет распределено все число систем между возможными различными конфигурациями и скоростями в любой требуемый момент, если такое распределение было задано для какого-либо момента времени. Основным уравнением при таком исследовании является уравнение, дающее скорость изменения числа систем, заключенных внутри определенных малых границ конфигурации и скорости”.

Выделим из отрывка две основные мысли. Во-первых в приведенном отрывке ставится задача статистической механики - установить как распределено число систем между различными возможными конфигурациями и скоростями (число частиц по координатам и скоростям). И более конкретно. Получить уравнения, дающие скорость изменения числа систем, заключенных внутри малых границ конфигураций и скоростей.

Следует иметь в виду, что состояния микроскопических параметров определяют значения макроскопических величин, с которыми мы привыкли иметь дело в обычной практике: давлением, плотностью, температурой, концентрацией, объемом, напряженностью электрического и магнитного полей и т.д. С молекулярных позиций физические величины, встречающиеся в термодинамике, как и в любом другом разделе макроскопической физики, имеют смысл средних значений, которые принимают при определенных условиях какие-либо функции макросостояния данной системы (давление и т.д.).

Прежде, чем обратиться к конкретным видам распределений физических величин остановимся на определении понятий вероятности и плотности вероятности.

## § 1 Вероятность. Частотное определение вероятности. Свойства вероятности

Между специалистами и статистиками нет согласия об определении вероятности. Строгая логика позволяет несколько способов формулировок. “Выбор - дело вкуса” - Д. Худсон. Такой тезис обуславливает по-

строение изложения в виде сводки определений вероятности. Для удобства определения пронумерованы.

### 1. В источнике оно названо априорным или изначальным

Вероятность *случайного события* (состояния) есть количественная мера ожидаемой возможности *его* появления

### 2. Субъективное определение

Вероятность того, что событие произошло или произойдет, служит иногда мерой нашей уверенности в происходящем

### 3. Так называемое КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Вероятностью появления события  $A$  называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех единственно возможных и равновозможных элементарных исходов испытания. Равновозможные - ни одно из событий не является более или менее возможным, чем другие.

Единственно возможные - реализуется из нескольких одно событие, они же несовместные.

Элементарное - каждое событие, которое может наступить в испытании.

Предложена критика классического определения вероятности:

- i) Ограниченность - число элементарных испытаний предполагается конечным
- ii) Часто на практике невозможно представить результат испытания в виде элементарного события
- iii) Элементарные события нельзя считать равновозможными (так, неидеальны грани игральной кости).

Запишем определение аналитически

$$P(A_i) = m_i / (m_1 + m_2 + \dots) = m_i / \sum m_j$$

$A_i$  - событие (данное,  $i$ -тое)

$m_i$  - число, благоприятствующих этому событию исходов

$m_j$  - все исходы, включая  $i$ -тые

$P(A_i)$  - вероятность события  $A$ ,  $P$  - Probability

### 4. Комбинаторное определение

Событие может приводить к  $N$  равновозможным исходам. Если в  $n$  случаях обнаруживается признак  $A$ , то вероятность  $A$  есть  $n/N$  (расчет числа комбинаций).

## 5. Статистическое определение вероятности

Относительная частота (появления события) или число близкое к ней.

## 6. Современное определение, основанное на понятии меры

Пусть  $\Omega$ - пространство (множество)  $\Phi$  - пустое пространство, а  $e_1, e_2, \dots$  - элементы пространства  $\Omega$ .

Если  $P(\Omega) = 1$  и  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , где множества  $A$  и  $B$  не имеют общих элементов, то тогда  $P$  есть неотрицательная мера называемая вероятностью со свойством  $P(\Phi) = 0$ .

## 7. Частотное определение

$$P(A) = \lim_{(N \rightarrow \infty)} n/N$$

За вероятность совершения события (реализации состояния)  $A$  принимается предел отношения числа случаев  $n$ , в которых совершается данное событие (состояние) к числу всевозможных событий (состояний)  $N$ , которые могут совершиться в данном эксперименте при  $N \rightarrow \infty$ .

Пример: выпадение цифры 6 на игральной кости

$$N \geq 10^3, P(6) = 1/6$$

## 8. Интерпретация вероятности, применяющаяся в физике (разновидность частотного определения).

$$P = \lim_{(t \rightarrow \infty)} (t_i / t)$$

Вероятностью для некоторой системы находиться в течение времени  $t_i$  в некотором определенном состоянии называется предел отношения этого промежутка времени  $t_i$  ко всему времени наблюдения за системой.

Пример: вероятность для некоторого газа иметь параметры  $V_i, P_i, T_i$ .

Если измерять одновременно долгое время  $V, P, T$  и при этом определить промежуток времени  $t_i$ , в течение которого  $V, P, T$  будут иметь

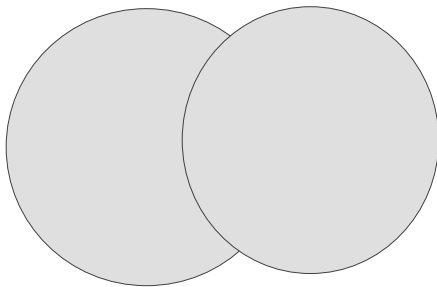
значения  $V_i$ ,  $P_i$ ,  $T_i$ , то таким образом можно определить искомую вероятность (практически это достигается путем непосредственных измерений).

#### Свойства вероятности

1. Вероятность реализации всех возможных состояний системы равна 1 .
2. Вероятность не реализуемого состояния равна 0 .
3. Вероятность случайного состояния заключена между 0 и 1.
4. Вероятность реализации двух или нескольких состояний (событий) обязательно не совместных в одном эксперименте равна сумме вероятностей этих состояний (событий).

Так, вероятность появления либо 1, либо 6 в одном броске игральной кости равна

$$1/6 + 1/6 = 1/3$$

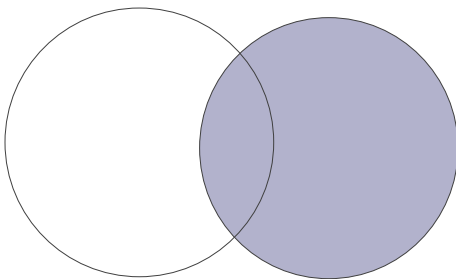


5. Вероятность произведения (пересечения) или совместной реализации двух или нескольких состояний (событий) равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности остальных, вычисленных в

предположении, что все предыдущие уже имели место.

Я кинул игральную кость - выпало 6 . При повторном броске опять хочу получить 6 . Эта вероятность равна:

$$1/6 \cdot 1/6 = 1/36$$



## § 2 Статистический вес

Рассмотрим более подробно вариант, когда данное состояние реализуется двумя или более способами. При бросании двух игральных костей одновременно возможно выпадение следующих сумм - 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. При этом они могут реализовываться разными способами. Составим таблицу

Событие или состояние (сумма, составленная из цифр двух граней игральной кости)	Способы, которыми составляется данная сумма	Число способов	Вероятность
2	1+1	1	1/36
3	1+2, 2+1	2	2/36
4	1+3, 2+2, 3+1	3	3/36
5	1+4, 2+3, 3+2, 4+1	4	4/36
6	1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1,	5	5/36
7	1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1,	6	6/36
8	2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2	5	5/36
9	3+6, 4+5, 5+4, 6+3,	4	4/36
10	4+6, 5+5, 6+4	3	3/36
11	5+6, 6+5	2	2/36
12	6+6	1	1/36
Итого		36	1

### Определение

Статистическим весом называется число способов, которым может быть реализовано данное состояние.

## § 3 Дискретные и непрерывные распределения вероятностей

Пусть имеем  $N$  штук однотипных измерений некоторой величины  
а. При измерении:

в $n_1$ случаях она оказалась равной - $a_1$	
в $n_2$ случаях	- $a_2$
.....	
в $n_i$ случаях	- $a_i$

При этом  $n_1 + n_2 + \dots = N$  - полному числу измерений, тогда среднее значение с весом величины  $a$  по определению есть

$$\langle a \rangle = (n_1 a_1 + n_2 a_2 + \dots) / N = v_1 a_1 + v_2 a_2 + \dots$$

Здесь  $v_i = n_i / N$  - частота появления (или весовые части) значения  $a_i$  измеряемой величины  $a$ . По некоторым определениям такие отношения есть вероятности

$$P = n_i / N \text{ (или иначе } \lim n_i / N \text{ при } N \rightarrow \infty \text{)}.$$

Определим математическое ожидание случайной величины как предел, к которому стремиться среднее значение с весом случайной величины  $a$  при неограниченном возрастании числа измерений ( $N \rightarrow \infty$ ). Поскольку

$$\lim v_i = p_i \text{ (при } N \rightarrow \infty \text{), то}$$

$$\lim \langle a \rangle = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots = M(a) \text{ (при } N \rightarrow \infty \text{)}.$$

Если события (значения случайной величины) распределены непрерывным образом, то и вероятность надо рассматривать как непрерывно распределенную величину. Тогда имеем промежуток  $a, a+da$ , внутри которого заключено бесконечно малое значение случайной величины -  $da$ . Вероятность того, что случайная величина примет значения внутри этого промежутка пропорциональна самой величине этого промежутка

$$dP \sim da \text{ и } dP = \rho(a) da,$$

где  $\rho(a)$  - некая функция  $a$  такая, что

$\rho(a) = dP/da$ ,  $\int \rho(a) da = 1$  (интегрирование проводится по всем возможным значениям  $a$ ) и  $[\rho(a)] = [da]^{-1}$ , то есть их размерности взаимно обратны, так как сама вероятность по определению - величина безразмерная.

Известно, что простое среднее арифметическое равно

$$\langle a \rangle = \sum a_i / N.$$

Так называемое среднее с весом

$$\langle a \rangle = (a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_i n_i + \dots + a_N n_N) / N = \sum a_i n_i / \sum n_i = (\sum a_i n_i) / N = \sum v_i a_i / \sum v_i$$

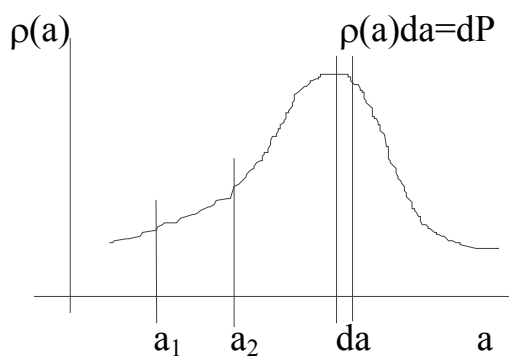
где  $\sum n_i = N$ , а  $\sum v_i = 1$ ,  $v_i$  - так называемые статистические веса. Среднее для непрерывно распределенной величины по аналогии запишется в виде

$$\langle a \rangle = \int \rho(a) a da / \int \rho(a) da =$$

(при интегрировании по всем возможным значениям  $a$ )

$$= \int \rho(a) a da, \text{ так как при этом } \int \rho(a) da = 1$$

Графически зависимость плотности вероятности от значений случайной величины может быть представлена в виде, например



Возможные пределы интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}, \int_0^{\infty}, \int_{a_1}^{a_2}, \text{ и т.д.}$$

#### § 4 Применение статистических методов к системе молекул

Любое макроскопическое состояние подсистемы (части рассматриваемой системы) можно представить как случайное событие, зависящее от  $6N$  переменных

$x_1 \dots x_N$	$p_{x1} \dots p_{xN}$
$y_1 \dots y_N$ $3N$ координат	$p_{y1} \dots p_{yN}$ $3N$ импульсов
$z_1 \dots z_N$	$p_{z1} \dots p_{zN}$

Переобозначим координаты и импульсы однообразно и подряд

$q_1, \dots, q_{3N}, p_1 \dots p_{3N}$ , тогда  $d\Gamma = dq_1 \dots dp_{3N}$ .

$d\Gamma$  – суть элемент объема в  $6N$ -мерном пространстве (координат и импульсов). Тогда, по аналогии можно записать, учитывая, что обобщенные координаты суть случайные величины, распределенные практически непрерывно

$dP = \rho d\Gamma$ , а  $P = \int \rho d\Gamma$ .

Интегрирование можно проводить по конечному объему  $\Delta\Gamma$  данного пространства. Если проинтегрировать по всему объему (по всем возможным состояниям координат и импульсов), то

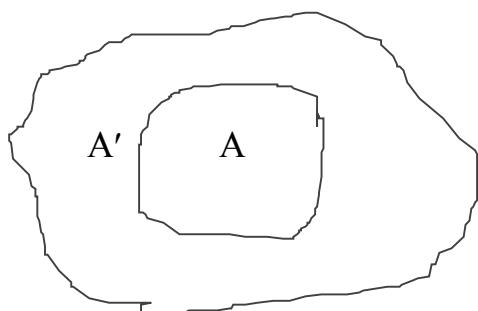
$\int \rho d\Gamma = 1.$ (По всем состояниям)
---

Любая макроскопическая величина, характеризующая газ является функцией этих  $6N$  переменных и времени.

## § 5 Каноническое распределение

Здесь мы имеем дело с двумя макроскопическими системами  $A$  и  $A'$ .  $A'$  называют термостатом,  $A$  - подсистемой.





Вместе они образуют целую систему. Между  $A$  и  $A'$  возможны разные варианты взаимодействия, например:

1.  $A$  - замкнута (системы практически не взаимодействуют между собой),
2.  $A$  - квазизамкнута (системы слабо

взаимодействуют между собой),

...и т.д. - возможны многие другие разнообразные способы их взаимодействия.

Пусть  $E'$  - энергия системы  $A'$ , то есть термостата,  $E$  - энергия системы  $A$  то есть исследуемой подсистемы и  $E^* = E' + E$  ( $E' = E^* - E$ ).

## 5.1 Микроканоническое распределение

Предположим, что  $A$  замкнута, ее энергия за все время наблюдения не меняется (вообще говоря, такой система может быть, например, при абсолютном нуле температур). Заметим, что все состояния системы с заданной энергией равновероятны (в смысле вероятности данного ее состояния).

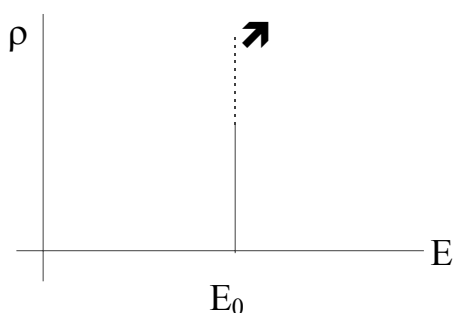
Микроканоническое распределение характеризуется тем, что вероятность нахождения замкнутой подсистемы в одном из состояний с данной энергией пропорциональна кратности его вырождения, а говоря другими словами - статистическому весу, то есть числу способов, которыми может быть реализовано это состояние.

Если при абсолютном нуле температур микросостояние реализуется всего одним способом, его статистический вес равен 1, то при любых других температурах одно и то же макросостояние, например, энергия подсистемы равная  $E_0$ , может быть реализовано многими способами (точнее равными двум или большими двух), которые все являются равновероятными. При этом справедлива следующая формула:

$$\rho(E) = \text{cst } \delta(E - E_0),$$

где  $\rho$  - плотность вероятности для энергии, а  $\delta$  - так называемая символическая дельта-функция Дирака

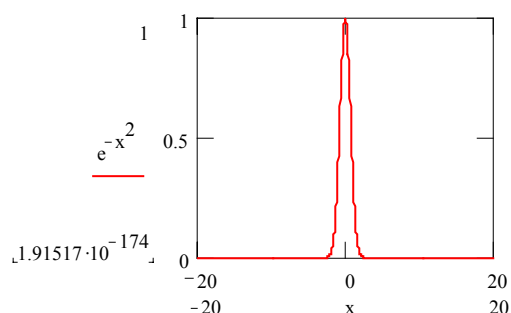
$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{при } E \neq E_0 \\ \infty & \text{при } E = E_0 \end{cases}$$



Эта функция математически может быть смоделирована разными способами, например

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} [e^{-x^2/a} / (a\pi)^{1/2}] = \lim_{a \rightarrow \infty} [\sin(ax) / \pi x] = \lim_{a \rightarrow \infty} [(\int_{-a}^a e^{ixt} dt) / 2\pi],$$

график иллюстрирует модель  $\delta$  - функции.



$\delta$ -функция математически является не обычной, а символической функцией. Она обладает следующими важными для нас свойствами.

1.  $\delta(x) = 0$  при  $x \neq 0$
2.  $\int \delta(x) dx = 1$  (при интегрировании по всему пространству, в данном случае от  $-\infty$  до  $+\infty$ )
3.  $\int f(x) \delta(x - x') dx = f(x') \Rightarrow \int f(x) \delta(x) dx = f(0)$ .

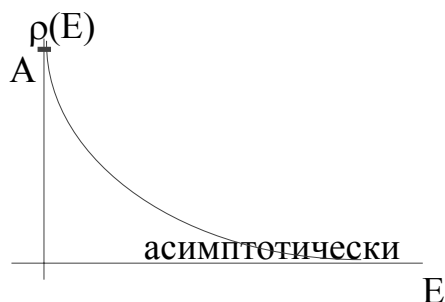
## 5.2 Каноническое распределение Гиббса

Пусть  $A$  квазизамкнута.  $A$  и  $A'$  взаимодействуют. Подсистема  $A$  находится в термостате  $A'$ . Взаимодействие осуществляется через поверхность, являющуюся общей границей, причем граница условная, так как система в целом состоит из одних и тех же частиц. Мы просто наблюдаем за поведением подсистемы как части целостной системы.

Характеристика распределения Гиббса:

Распределение Гиббса описывает распределение вероятностей (иметь ту или иную энергию, например) различных состояний подсистемы, составляющей малую, квазинезависимую часть произвольной системы (термостата), находящейся в состоянии статистического равновесия. (Если не учитывать, что вся система находится в состоянии равновесия, то рассуждения этого раздела теряют смысл.) При этом имеет место:

$$\rho(E) = A e^{-E/kT}, \quad A - \text{константа}$$



Вероятность получить от резервуара (термостата, среды) большую флуктуацию энергии для подсистемы уменьшается экспоненциально с ростом энергии этой флуктуации.

Вообще говоря,  $\rho$  есть функция фундаментальных сохраняющихся величин: энергии, компонентов импульса и момента импульса как векторов, однако выбором системы отсчета можно исключить зависимость от импульсов и моментов импульсов. Рассмотрение вероятностного характера энергии, как наиболее фундаментальной физической величины, имеют достаточно общий характер.

Распределение Гиббса можно получить, путем следующего рассуждения.

Пусть  $\Omega_0 (E^* - E)$  и  $\Omega(E)$  - статистические веса термостата и подсистемы (это числа). Тогда вероятность иметь данное состояние (по отношению к энергии в данном случае) пропорциональна произведению

статистических весов (так как они взаимодействуют) по свойству вероятности

$$P \sim \Omega_0(E^* - E) \Omega(E). \quad (1)$$

Представим через экспоненту статистический вес термостата.

$$\Omega_0(E^* - E) = e^{\sigma(E^* - E)},$$

Произведем разложение в ряд

$$\sigma(E^* - E) = \sigma(E^*) - E \partial\sigma/\partial E + \dots \approx \sigma - E/\theta, \quad \theta = (\partial\sigma/\partial E)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Omega_0(E^* - E) \approx e^{\sigma} e^{-E/\theta},$$

Введем дополнительную константу и произведем замену, имеем (см.(1))

$$P_n = \text{cst} e^{\sigma} e^{-E_n/\theta} \Omega(E_n) \quad (n \rightarrow \infty \Rightarrow dP_E = \rho(E)d\Gamma).$$

Пусть  $\theta = kT$ ,  $\text{cst}=A$

$$\underline{\rho(E) = A e^{-E/kT}}.$$

Резюме:

- i) Микроканоническое распределение - эквивалент признания равновероятными всех микросостояний данного тела
- ii) В каноническом распределении содержится утверждение о том, что среда не стремится передать свою энергию телу так, чтобы энергия этого тела возрастала до максимально возможного значения (но случайные флуктуации энергии всегда возможны и подчиняются экспоненте).

## Глава 2 Статистические распределения физических величин

### § 1 Распределения Максвелла по импульсам, скоростям и энергиям

Пусть  $p$  и  $q$  - обобщенные импульсы и координаты, тогда вероятность, (например, для частиц газа) иметь импульсы и координаты в заданных границах равна

$$dP_{p,q} = A e^{-E(p,q)/kT} dp dq. \quad (1)$$

$E$  - полная энергия частицы из числа частиц составляющих тело. Ее можно представить как сумму кинетической и потенциальной составляющих

$$E(p, q) = E_k(p) + E_n(q),$$

причем  $E_k$  зависит только от импульсов,  $E_n$  зависит только от координат. Если произведение обобщенных импульсов и координат есть элемент объема фазового пространства, то правую часть канонического распределения можно представить в виде произведения двух сомножителей по свойству пересечения вероятностей.

Пусть, кроме того, кинетическая и потенциальная составляющие энергии взаимно независимы, что очень хорошо реализуется для сильно разреженных газов и вполне удовлетворительно при нормальных условиях ( $p = 10^5$  Па,  $T = 273$  К), тогда вероятности можно перемножать.

$$dP_{q,p} = A e^{-E_k/kT} e^{-E_n/kT} dp dq = a e^{-E_k/kT} b e^{-E_n/kT} dp dq, \quad A = ab$$

$$dP_p = a e^{-E_k/kT} dp, \quad dP_q = b e^{-E_n/kT} dq.$$

Перейдем к реальному трехмерному пространству. Далее в случае распределения Максвелла рассмотрим кинетическую составляющую энергии.

## 1.1 Плотность распределения по векторам импульсов

$$E_k = m\mathbf{v}^2/2 = m^2\mathbf{v}^2/2m = \mathbf{p}^2/2m = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$$

$$dP_p = a \exp[-(1/kT2m)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)] dp_x dp_y dp_z.$$

$d\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z$  - элемент объема в пространстве импульсов. Мы изучаем вероятность для частиц - иметь тот или иной импульс или вероятность того, что некоторая доля частиц обладает импульсом в заданных пределах. Применим условие нормировки, чтобы найти вид плотности вероятности

$$P = \int p d\Gamma (\text{по всем состояниям}) = 1 \Rightarrow$$

$$P_p = a \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(1/kT2m)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)] dp_x dp_y dp_z.$$

Интегрирование проводится по каждой компоненте импульса от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Так как интегралы независимы и численно равны друг другу (три взаимно перпендикулярных направления для импульсов статистически равноправны), то можно записать

$$P_p = a \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-p_i^2/kT2m) dp_i \right]^3, \quad (-\infty, +\infty), \quad i = x, y \text{ или } z.$$

Воспользуемся табличным интегралом вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = (\pi/\alpha)^{1/2}. \text{ У нас } \alpha = (kT2m)^{-1}, \text{ тогда}$$

$$a(\pi kT2m)^{3/2} = 1 \Rightarrow a = (2\pi kTm)^{-3/2} \Rightarrow$$

$$dP_p = (2\pi mkT)^{-3/2} \exp(-p^2/2mkT) d\mathbf{p}.$$

Окончательно для плотности распределения по векторам импульсов имеем

$$\underline{\rho_p = (2\pi mkT)^{-3/2} \exp(-p^2/2mkT)}.$$

## 1.2 Плотность распределения по векторам скоростей

Выразим импульсы явно через скорости

$$p_i = mv_i, p^2 = m^2 v^2 \Rightarrow$$

$$dP_v = a \exp[-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT] m^3 dv_x dv_y dv_z.$$

$$a' = a m^3 = (2\pi mkT)^{-3/2} m^3 = (2\pi kT/m)^{-3/2},$$

$$dP_v = (2\pi kT/m)^{-3/2} \exp(-mv^2/2kT) d\mathbf{v} \quad d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z.$$

Окончательно для плотности распределения по векторам скоростей имеем

$$\underline{\rho_v = (2\pi kT/m)^{-3/2} \exp(-mv^2/2kT)}.$$

## 1.3 Плотность распределения для компонентов скорости $v_x, v_y, v_z$

Считаем компоненты скорости взаимно независимыми, а поскольку вклад каждой скорости в вектор скорости одинаков (статистически равновероятен), то для одной компоненты справедливо

$$(2\pi kT/m)^{-3/2} \rightarrow \text{замена} \rightarrow (2\pi kT/m)^{-1/2}.$$

Здесь использовано свойство пересечения вероятностей взаимно независимых событий, тогда

$$dP_{v_i} = (2\pi kT/m)^{-1/2} \exp(-v_i^2 m/2kT) dv_i \quad i = x, y \text{ или } z.$$

Для плотности распределения по компонентам скоростей имеем

$$\underline{\rho_{v_i} = (2\pi kT/m)^{-1/2} \exp(-mv_i^2/2kT)}.$$

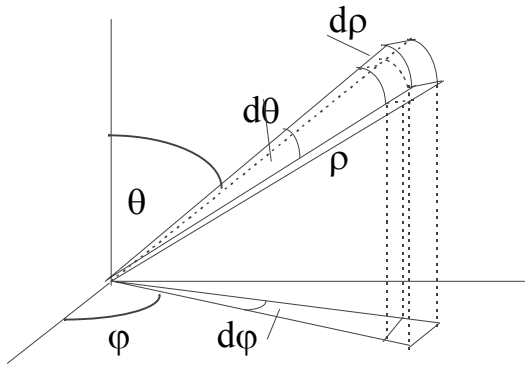
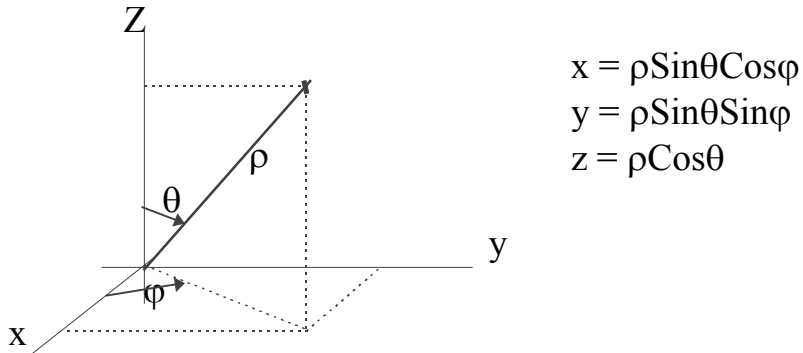
## 1.4 Плотность распределения для модуля скорости

Воспользуемся формулой

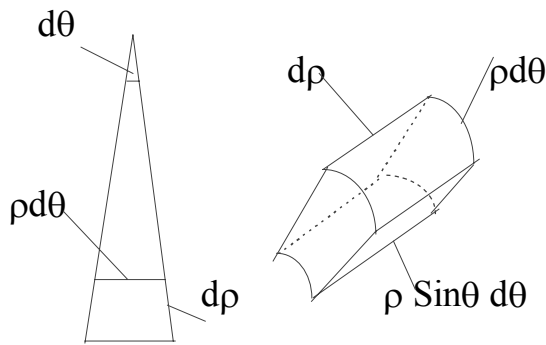
$$dP_v = (2\pi kT/m)^{-3/2} \exp(-mv^2/2kT) dv_x dv_y dv_z.$$

Вместо элемента объема в пространстве скоростей декартовой системы координат перейдем к элементу объема в сферических координатах, которые содержат в качестве одной из компонент модуль скорости  $v$ , и проинтегрируем по другим компонентам – углам: полярному  $\theta$  и азимутальному  $\varphi$ , чтобы исключить их из дальнейшего рассмотрения.

Отступление: сферические координаты, связь с ДСК







Криволинейный параллелепипед представляет собой элемент объема  $dV$  в сферической системе координат. Чтобы перейти в пространство скоростей, делаем формальную замену  $\rho \rightarrow v$

$$dV = v^2(\sin\theta) dv d\varphi d\theta,$$

тогда

$$dP_v = (m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT) v^2(\sin\theta) dv d\varphi d\theta.$$

Интегралы по углам вычисляются в пределах  $\varphi$  : от 0 до  $2\pi$ , а  $\theta$  : от 0 до  $\pi$

$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi; \quad \int_0^{\pi} (\sin\theta) d\theta = -\cos\theta \Big _0^{\pi} = -(-1-1) = 2$
--

$$dP_v = (m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT) v^2 4\pi dv.$$

Чтобы получить плотность распределения по модулям импульсов умножим и разделим это выражение (и показатель экспоненты в нем) на массу  $m$ . (Предлагается вычислить самостоятельно). Имеем

$$\begin{aligned} dP_p &= (m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-p^2/2mkT) (4\pi p^2/m^3) dp = \\ &= (2\pi mkT)^{-3/2} \exp(-p^2/2mkT) 4\pi p^2 dp. \end{aligned}$$

Для плотностей вероятности по модулям скоростей и импульсов имеем

$$\rho_v = (m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT) v^2 4\pi,$$

$$\rho_p = (2\pi mkT)^{-3/2} \exp(-p^2/2mkT) p^2 4\pi.$$

## 1.5 Плотность распределения для энергии

Формулу плотности вероятности для энергии,  $\varepsilon$ , можно получить как из распределения для модуля скорости, так и для модуля импульса. При этом необходимо использовать формулу для вероятности. Воспользуемся формулой вероятности для модулей импульсов.

$$\varepsilon = p^2/2m \Rightarrow p^2 = 2m\varepsilon \Rightarrow 2p dp = 2m d\varepsilon \Rightarrow dp = m d\varepsilon / (2m\varepsilon)^{1/2}$$

$$dP_\varepsilon = 4\pi (2\pi kT)^{-3/2} m^{-3/2} e^{-\varepsilon/kT} 2m\varepsilon [m d\varepsilon / (2m\varepsilon)^{1/2}] =$$

$$= (2/\pi^{1/2})(kT)^{-3/2} e^{-\varepsilon/kT} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon.$$

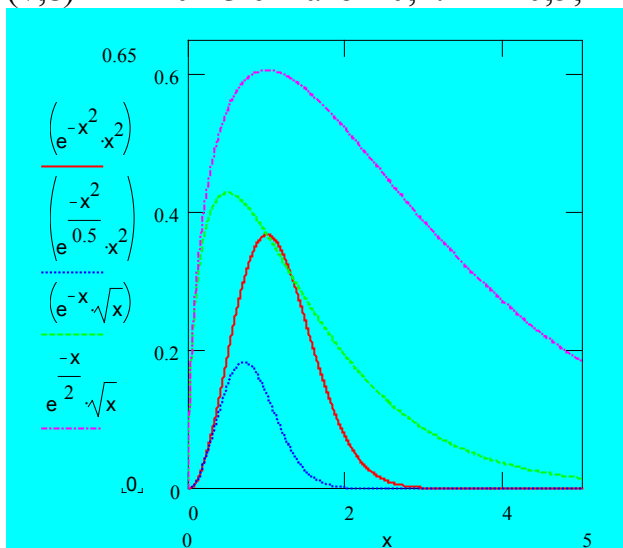
$$\rho_\varepsilon = (2/\pi^{1/2}) (kT)^{-3/2} e^{-\varepsilon/kT} \varepsilon^{1/2}.$$

## 1.6 Анализ результатов для плотностей вероятности модулей скорости, импульса и энергии

Расчетное задание для студентов. Построение графиков зависимости плотности вероятности для скорости и энергии. Для удобства расчетов формулы приведены к условно безразмерным единицам.

$$\rho_v = \exp(-v^2/T) v^2 \text{ и } \rho_\varepsilon = \exp(-\varepsilon) \varepsilon^{1/2}$$

$(v, \varepsilon) = x = 0 - 3$  с шагом 0,1.  $T = 0,5; 1$  и  $2$ .



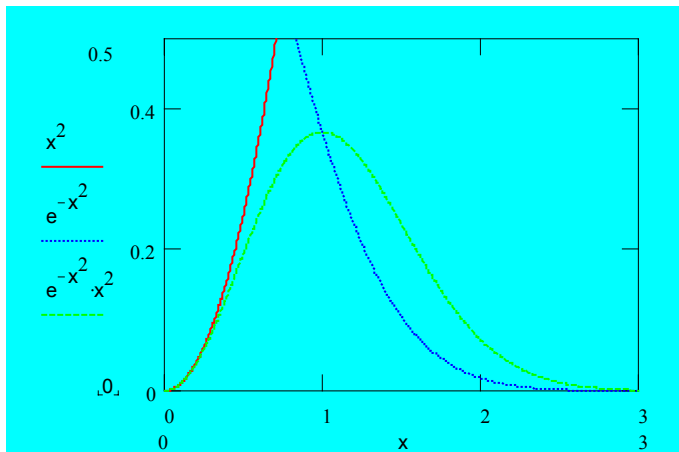


График плотности распределения для скорости формируется из экспоненциального спада и квадратичной зависимости.

Найдем среднюю арифметическую скорость идеального газа по формуле

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v \rho_v dv$$

$$\langle v \rangle = 4\pi (m/2\pi kT)^{3/2} \int_0^{\infty} \exp(-mv^2/2kT) v^2 v dv.$$

Вычислим заблаговременно интеграл

$$\int_0^{\infty} \exp(-mv^2/2kT) v^2 d(v^2/2) = (1/2)(2kT/m)^2 \int_0^{\infty} e^{-y} y dy = (1/2) (2kT/m)^2$$

При преобразованиях использованы:  $mv^2/2kT = y$ ,  $\int_0^{\infty} e^{-y} y dy = 1$

$$\langle v \rangle = 4\pi (m/2\pi kT)^{3/2} (1/2) (2kT/m)^2 = \underline{(8kT/\pi m)^{1/2}}.$$

Найдем наиболее вероятную скорость (как экстремум функции)

$$\begin{aligned} d(\rho_v)/dv &= d[4\pi(m/2\pi kT)^{3/2} v^2 \exp(-mv^2/2kT)]/dv = \\ &= 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2} [2v \exp(-mv^2/2kT) + v^2(-mv/kT) \exp(-mv^2/2kT)] = 0. \end{aligned}$$

С этого момента  $v$  приобретает статус наиболее вероятной скорости -  $v_{\text{вер}}$ .

$$2 = v_{\text{вер}}^2 m/kT \Rightarrow v_{\text{вер}}^2 = 2kT/m$$

$$\underline{v_{\text{вер}} = (2kT/m)^{1/2}}.$$

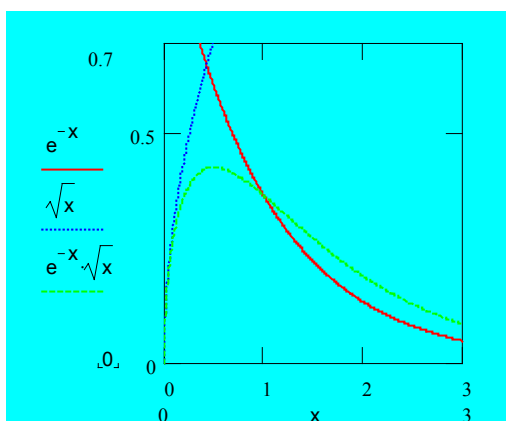
Выпишем, не вычисляя, среднеквадратичную скорость,  $\langle v^2 \rangle$

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} \rho_v v^2 dv$$

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = (3kT/m)^{1/2}.$$

Замечание: при расчетах удобнее пользоваться отношением  $k/m = R/M$ , где  $k$  - постоянная Больцмана (рассчитанная на одну частицу),  $m$  - масса одной частицы (атома, молекулы),  $R$  - газовая постоянная (рассчитанная на один моль частиц),  $M$  - масса одного моля частиц.

График для энергии формируется из экспоненциального спада (без квадрата в экспоненте) и корневой зависимости от энергии



Найдем наиболее вероятную энергию

$$d(e^{-\varepsilon/kT} \sqrt{\varepsilon})/d\varepsilon = e^{-\varepsilon/kT}/2\sqrt{\varepsilon} - e^{-\varepsilon/kT} \sqrt{\varepsilon}/kT = 0,$$

с этого момента  $\varepsilon$  приобретает статус наиболее вероятной энергии,  $\varepsilon_{\text{вер}}$

$$1/(2\sqrt{\varepsilon_{\text{вер}}}) = \sqrt{\varepsilon_{\text{вер}}}/kT \Rightarrow \underline{\varepsilon_{\text{вер}} = kT/2}.$$

Замечание:

$$\varepsilon_{\text{вер}}' = m v_{\text{вер}}^2/2 = (m/2)(2kT/m) = kT \neq \varepsilon_{\text{вер}}.$$

Расчет средней энергии. Имеем

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \int_0^{\infty} (2/\sqrt{\pi})(kT)^{-3/2} e^{-\varepsilon/kT} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \\ \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon/kT} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon &= (\text{сделаем замену переменной } \varepsilon = x^2) = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \exp(-x^2/kT) x^4 dx. \end{aligned}$$

Получился интеграл вида

$$I_n = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha x^2) x^n dx$$

О нем известно, что

$$I_0 = (\pi/\alpha)^{1/2}/2, \quad I_n = [(n-1)/2\alpha] I_{n-2}, \quad (\text{рекуррентное соотношение}) \Rightarrow$$

$$I_4 = (3/2\alpha) I_2 = (3/2\alpha)(1/2\alpha) I_0 = (3/2\alpha) (1/2\alpha) [(\pi/\alpha)^{1/2}/2], \quad \alpha = 1/kT.$$

$$\begin{aligned} 2I_4 &= (3/4) (kT)^{5/2} \sqrt{\pi} \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = (2/\sqrt{\pi})(kT)^{-3/2} 2I_4 = (2/\sqrt{\pi})(kT)^{-3/2} (3/4) (kT)^{5/2} \sqrt{\pi} \\ &\Rightarrow \\ \underline{\langle \varepsilon \rangle} &= \underline{3kT/2}. \end{aligned}$$

## § 2 Распределение Больцмана

Рассмотрим вторую составляющую полной энергии в каноническом распределении Гиббса, содержащую потенциальную энергию. Для нее

$$dP_q = b \exp[-W_{\pi}(q)/kT]$$

Вспомним, что  $W_{\pi}(q)$  - энергия частиц находящихся во внешнем поле, а  $q$  - обобщенная координата.

Рассмотрим газ, находящийся во внешнем (гравитационном) поле. Потенциальная энергия такого, идеального, или близкого идеальному, газа есть функция только координат. Заменим обобщенную координату - на декартовы координаты

$$dq = dx dy dz = dv.$$

Согласно частотному определению вероятности

$$dP = dN/N,$$

что хорошо выполняется при больших  $N$ , тогда

$$dN = N b \exp(-W_{\pi}[(x,y,z)/kT] dv$$

Пусть  $dN/dv = n$  - концентрация молекул,  $Nb = n_0$  - некая исходная концентрация молекул,  $W_{\pi} \equiv U$ , тогда

$$\underline{n = n_0 e^{-U(x,y,z)/kT}}.$$

Пример: молекулы в поле тяжести Земли

$U = mgz$ ,  $z$  - высота над поверхностью Земли

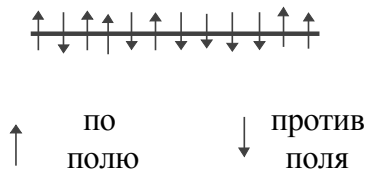
$$n(z) = n_0 e^{-mgz/kT}, z = 0 \Rightarrow n = n_0.$$

Часто распределения Максвелла-Больцмана не разъединяют, но пишут вместе

$$dN = N_0 A \exp(-U - mv^2/2) dv_x dv_y dv_z dx dy dz, \quad A = (m/2\pi kT)^{3/2}.$$

### § 3 Биномиальное распределение

Существует физически важная задача. Идеальная система состоит из  $N$  спинов и находится во внешнем магнитном поле. Такая задача может быть сведена к задачам типа: чет-нечет, верх-низ, белое - черное, 0 - 1, ... и т.д.



Ставим нашу задачу. Пусть  $p$  - вероятность для спина быть направленным вверх, тогда  $q$  - вероятность для спина быть направленным вниз. Какова вероятность  $P(n)$  того, что  $n$  штук из общего числа  $N$  спинов направлены вверх. То есть, определим вероятность конфигурации спинов, в которой  $n$  из них направлено вверх, а  $N - n$  - вниз. Запишем

$$p \dots p q \dots q = p^n q^{N-n}$$

- один из способов, при котором спины располагаются в актуальном порядке. Достаточно любые два спина из числа  $n$  поменять местами, то появится (реализуется) еще один способ достичь того же состояния в смысле его вероятности. Полное число таких способов равно числу сочетаний из  $N$  по  $n$ , тогда

$$P(n) = C_N^n p^n q^{N-n} = [N! / n!(N-n)!] p^n q^{N-n}.$$

Полученное выражение называют биномиальным распределением.

О сочетаниях.

Число сочетаний  $C_N^n$  из  $N$  элементов по  $n$  в каждой группе означает возможность составить группы по  $n$  элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группах  $C_N^n = N!/n!(N-n)!$ . Например:

$C_3^2: (1,2,3) \Rightarrow 12,23,13$  - три группы по два элемента в каждой

$$C_3^2 = 3!/2!1! = 3$$

$C_n^n = n!/n!0! = 1$ ,  $0! \equiv 1$ , используют также запись  $\binom{N}{n} \equiv C_N^n$

Пример 1

$$p=q=1/2, N=4$$

$$P(n) = C_4^n (1/2)^4$$

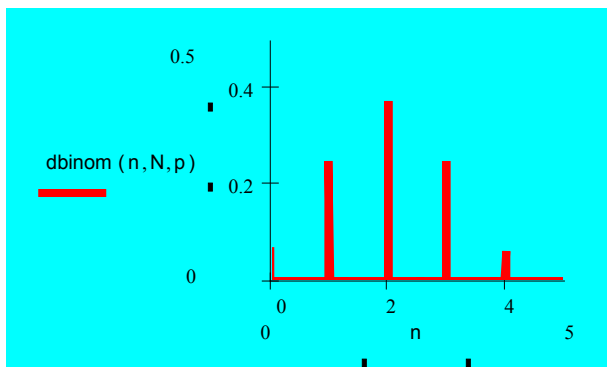
$$n=0, P(0) = C_4^0 (1/2)^4 = 4!/0!4!16 = 1/16$$

$$n=1, P(1) = C_4^1 (1/2)^4 = 4!/1!3!16 = 4/16$$

$$n=2, P(2) = C_4^2 (1/2)^4 = 4!/2!2!16 = 6/16$$

$$n=3, P(3) = C_4^3 (1/2)^4 = 4!/3!1!16 = 4/16$$

$$n=4, P(4) = C_4^4 (1/2)^4 = 4!/4!0!16 = 1/16$$



Пример 2

$$p = 1/3, q = 2/3, N = 4$$



$$P(n) = C_4^n (1/3)^n (2/3)^{4-n}$$

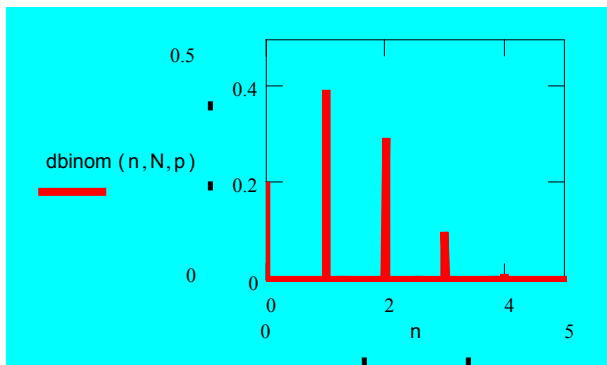
$$n = 0, P(0) = (4!/0!4!) 16/81 = 16/81$$

$$n = 1, P(1) = (4!/1!3!) 8/81 = 32/81$$

$$n = 2, P(2) = (4!/2!2!) 4/81 = 24/81$$

$$n = 3, P(3) = (4!/3!1!) 2/81 = 8/81$$

$$n = 4, P(4) = (4!/4!0!) 1/81 = 1/81$$



#### § 4 Распределение Гаусса (нормальное распределение)

Биномиальное распределение сугубо дискретное и плотность вероятности в континуальном смысле для него не записать. В пределе, при  $N \rightarrow \infty$ , можно показать, что оно переходит в другое распределение так называемое нормальное распределение.

Итак, имеем

$$P(n) = [N!/n!(N-n)!] p^n q^{N-n} \quad (1)$$

Пусть  $n'$  - число, при котором вероятность  $P(n')$  принимает максимальное значение. Чтобы его найти, необходимо вычислить производную от  $P(n)$  по  $n$  и приравнять ее к нулю. Пусть, кроме того, при  $n \gg n'$  и при  $n \ll n'$  -  $P(n)$  становится пренебрежимо малой. То есть, здесь исследу-

ются свойства  $P(n)$  при  $n$  актуально близких к  $n'$ . Вычислим логарифм от обеих частей (1)

$$\ln P = \ln N! - \ln n! - \ln(N-n)! + n \ln p + (N-n) \ln q \quad (2)$$

$n$  - квази непрерывны, используем условие максимума

$$dP/dn = 0 \Leftrightarrow d \ln P / dn = dP/P dn = 0.$$

Используем одно из приближений формулы Стирлинга

$$\ln n! = n \ln n - n + (1/2) \ln(2\pi n), \quad n \gg 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln n! = n \ln n - n.$$

Тогда

$$d(\ln n!)/dn = d(n \ln n - n)/dn \cong \ln n$$

$$d \ln(N - n)! / dn \cong - \ln(N - n).$$

Из (2) имеем

$$d(\ln P)/dn = - \ln n + \ln(N - n) + \ln p - \ln q = 0 \quad (3)$$

$$\ln[p(N - n)/nq] = 0 \Rightarrow p(N - n)/nq = 1, \quad p(N - n) = nq \Rightarrow pN = n(p + q),$$

а так как  $p + q = 1$ , а  $n$  обращает исследуемую функцию в 0, то есть  $n = n'$ , то следовательно

$$n = n' = pN \quad (4)$$

Продолжая исследование биномиального распределения около  $n \cong n'$  и при  $N \rightarrow \infty$ , разложим  $\ln P(n)$  в ряд Тейлора в точке  $n'$ , чтобы получить актуальное приближение

$$\begin{aligned} \ln P(n) &= \ln P(n') + (n - n') \{d[\ln P(n)]/dn\}_{n=n'} + \\ &+ [(n - n')^2/2!] \{d^2[\ln P(n)]/dn^2\}_{n=n'} + \dots \end{aligned}$$

Второе слагаемое обращается в 0 по условию экстремума, а вторую производную второго порядка в третьем слагаемом раскроем с использованием уже имеющейся в (3) первой производной

$$d^2[\ln P(n)]/dn^2 = d[-\ln n + \ln(N - n) + \ln p - \ln q]/dn = (-1/n) - 1/(N - n) =$$

$$= -N/n(N - n) = (n = n' = Np) = -1/pqN$$

$$\ln P(n) = \ln P(n') - (n - n')^2/2Npq$$

$$P(n) = P(n') \exp[-(n - n')^2/2Npq],$$

используем предельный переход и делаем замену  $P(n') \rightarrow P'$

$$dP = P' \exp[-(n - n')^2/2Npq] dn \Rightarrow \rho_n = P' \exp[-(n - n')^2/2Npq]$$

пусть  $n$  принадлежит множеству целых положительных и отрицательных чисел. Воспользуемся нормировкой на единицу для вычисления коэффициента  $P'$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n dn = P' \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(n - n')^2/2Npq] dn = (I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx) = \sqrt{\pi} =$$

$$= P'(\pi 2Npq)^{1/2} = 1 \Rightarrow P' = (2\pi Npq)^{-1/2}.$$

$$\underline{\rho_n = (2\pi Npq)^{-1/2} \exp[-(n - n')^2/2Npq]}.$$

Можно показать путем интегрирования, что среднее значение  $\langle n \rangle =$  (без вывода, так как это достаточно очевидно)  $= n'$ , при котором вероятность имеет максимум, что и было нами ранее показано (формула (4)). Точно также можно получить выражение для дисперсии методом нахождения среднего значения с помощью интегрирования (без вывода)  $D = \langle \Delta n^2 \rangle = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = Npq \Rightarrow \Delta n = (Npq)^{1/2}$ . Если теперь перейти к обозначениям применяемым обычно в литературе по физической статистике  $\langle n \rangle = \langle x \rangle$ ,  $\Delta n = \sigma = (Npq)^{1/2}$ , получим

$$\underline{\rho_x = [(2\pi)^{-1/2}/\sigma] \exp[-(x - \langle x \rangle)^2/2\sigma^2]}.$$

## § 5 Распределение Стьюдента

Распределение Стьюдента описывает плотность вероятности значений средних арифметических, вычисленных по выборкам из  $n$  случайных отсчетов из нормально распределенной генеральной совокупности.

Генеральная совокупность - вся совокупность измеряемых случайных величин.

Выборка - совокупность части случайно отобранных из генеральной совокупности величин. Например, 50 промежутков времени по 5 секунд каждый, измеряемые грубым и точным прибором, из всех возможных получаемых значений, нормально распределенных промежутков времени - выборка.

Утверждается следующее:

Если при нормально распределенной генеральной совокупности распределение величины  $t$  равно

$$t = (\bar{x} - m_x) / (\sqrt{D} / \sqrt{n}), \text{ где}$$

$\bar{x}$  и  $M_x$  - среднее арифметическое и математическое ожидание случайной величины  $x_i$ ,

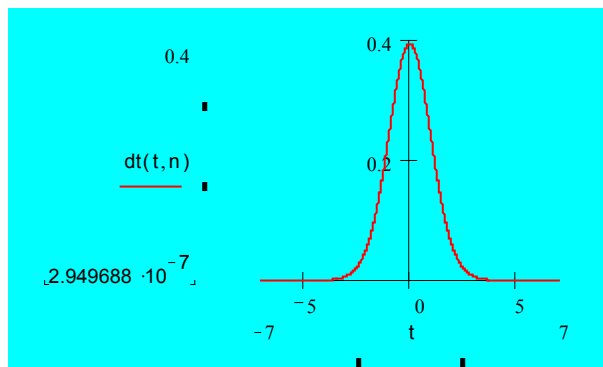
$$D = \sigma^2 = \langle (x_i - \bar{x})^2 \rangle = [\sum (x_i - \bar{x})^2] / (n - 1),$$

то тогда  $t$  подчиняется распределению Стьюдента, плотность вероятности которого имеет вид:

$$\rho_{(n-1)}(t) = \Gamma(n/2) / \{ \Gamma[(n-1)/2] [\pi(n-1)]^{1/2} [1 + t^2/(n-1)]^{-n/2} \},$$

$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du$ - гамма функция
---

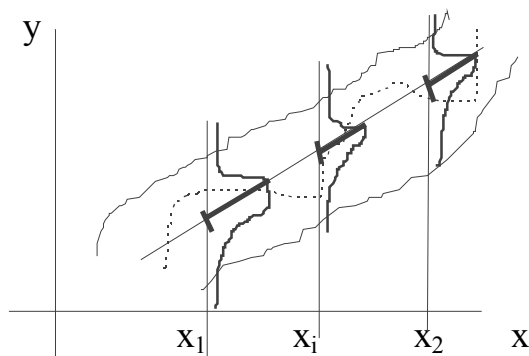
График представляет плотность распределения Стьюдента при  $n = 25$  (распределение применяется для малого числа измерений  $n < 30$ ).



Пример:

Пусть по результатам измерений необходимо провести зависимость  $y$  от  $x$ . Для каждого значения  $x_i$  должно быть измерено  $n$  значений  $y_i$ , где  $n$  может оказаться меньше 30 измерений. Получится набор сред-

них значений игреков для каждого соответствующего им значения икс. Необходимо, чтобы они были распределены в соответствии с нормальным распределением Гаусса.



Из графика следует, что в результате многократных измерений  $y(x_i)$ , образуется полоса, а усреднение дает усредненную кривую внутри этой полосы, что существенно ограничивает интерпретацию кривой  $y(x)$ . Штриховой линией внутри полосы показано, что внутри этой полосы можно провести кривую произвольного вида. Повторим, что все сказанное справедливо в том случае, если игреки в зависимости от иксов будут распределены по нормальному гауссову закону.

Данное распределение было опубликовано в 1908 году В. С. Россе- том, который подписал свою статью псевдонимом

Student.

### Глава 3 Термодинамика

Вместо вступления

**Р**,  $V, T$  - три параметра состояния газа, которыми можно описать состояние данной массы газа. Масса тоже является параметром, а также могут быть и другие параметры, тогда

$$f(P, V, T) = 0 -$$

уравнение, связывающее определенный набор параметров называют уравнением состояния.

Для одного моля идеального газа, а на практике для газа слабо взаимодействующих молекул, атомов или ионов, для разреженного газа и даже отчасти для газа при нормальных условиях справедливо уравнение

$$PV/T = \text{cst},$$

что является экспериментальным фактом и называется уравнением состояния идеального газа

$$\text{cst} = R = 1,01 \cdot 10^5 \cdot 22,4 \cdot 10^{-3} / 273 \cong 8,3 \text{ Дж/К моль}$$

Так, для одного моля газа это уравнение пишут в виде

$$PV_{\mu} = RT.$$

Для произвольного количества молей,  $\nu$  так как  $\nu_{\mu} = V/\nu$

$$PV = \nu RT,$$

где  $V$  - произвольный объем газа. Количество молей можно выразить, как известно, и другими способами, например  $\nu = m/M$ , где  $m$  - масса газа, а  $M$  - масса одного моля газа, тогда

$$PV = \nu R T/M.$$

## § 1 Энтропия. Понятие и свойства

Мы ранее определили статистический вес как число способов, которыми может быть реализовано данное состояние. Вероятность реализации данного состояния системы (например, идеального газа) пропорциональна его статистическому весу. Пусть система представлена двумя подсистемами со статистическими весами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , тогда число способов, которыми может быть реализовано состояние всей системы должно быть равно произведению статистических весов

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2 \quad (1)$$

по свойству пересечения вероятностей. Прологарифмируем (1) и умножим на постоянную Больцмана

$$\ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2 \quad | \cdot k \Rightarrow k \ln \Omega = S \Rightarrow S = S_1 + S_2.$$

### Определение

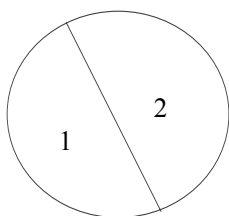
Энтропией называется произведение логарифма числа способов, которыми может быть реализовано данное состояние, на константу Больцмана. Тогда с одной стороны энтропия аддитивна. В этом состоит формальное удобство: энтропию можно складывать, а  $\Omega$  нет. С другой стороны энтропия обладает свойствами

1. Энтропия равновесной системы максимальна
2. Изолированная система, будучи предоставлена самой себе, переходит из менее вероятных состояний в более вероятные, что сопровождается ростом энтропии (так как увеличивается число способов...).

## § 2 Температура

### 2.1 Температура как параметр равновесной системы

Пусть нам дана замкнутая система, находящаяся в равновесии. Разделим ее на две части



Можно записать

$$S = S_1 + S_2, \quad U = U_1 + U_2.$$

$S$  - энтропия,  $U$  - внутренняя энергия, определяемая энергией всех частиц, составляющих систему. Так как энтропия является функцией внутренней энергии  $S = S(U)$ , то

$$\partial S / \partial U_1 = \partial (S_1 + S_2) / \partial U_1 = \partial S_1 / \partial U_1 + (\partial S_2 / \partial U_2) (\partial U_2 / \partial U_1)$$

$$\partial U_2 / \partial U_1 = \partial (U - U_1) / \partial U_1 = -1$$

Здесь  $S_2(U_2(U_1))$ , а  $S = \text{cst}$  и  $U = \text{cst}$ , имеем

$$\partial S_1 / \partial U_1 = \partial S_2 / \partial U_2 = \dots \text{ (справедливо для числа участков } > 2) = \text{cst}$$

Поскольку система была разделена на части произвольно, то можно утверждать, что  $\partial S / \partial U$  - есть сохраняющаяся величина (при постоянном объеме). Ее можно обозначить как

$$(\partial S / \partial U)_v = 1/T \Rightarrow \underline{(\partial U / \partial S)_v = T},$$

где  $T$  называют температурой.



## 2.2 Термометрия

Пусть  $a$  - некий параметр системы, меняющийся с температурой, к примеру, линейно, тогда  $T \sim a$  или

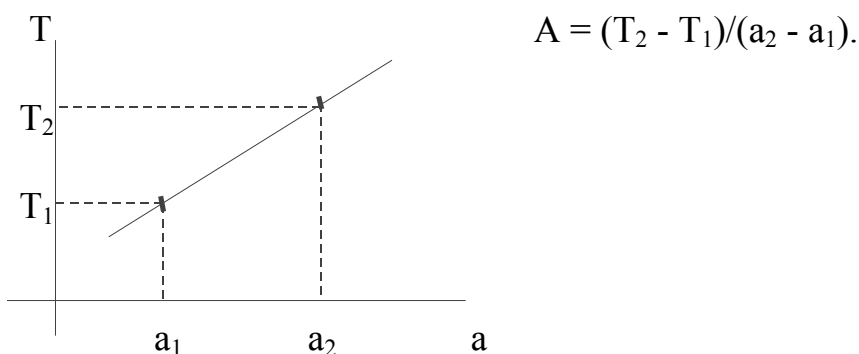
$$T = A \cdot a$$

Для того, чтобы определить значение константы  $A$  до 1954 года пользовались двумя реперными точками, а именно

$T_1 = 100^\circ\text{C}$  - точка кипения воды и

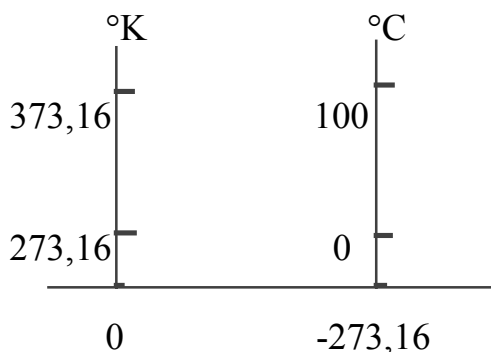
$T_2 = 0^\circ\text{C}$  - точка плавления льда, имеем

$$T_1 = Aa_1, \quad T_2 = Aa_2 \Rightarrow A = T_1/a_1 = T_2/a_2$$



С 1954 года реперная точка - тройная точка воды:  $273,16^\circ\text{K}$  (считается точной по определению).

Очевидно, что существует бесконечное множество эмпирических температурных шкал. Шкалы Цельсия и Кельвина являются наиболее распространенными. Один градус у них одинаковый.



Примеры различных видов наиболее распространенных термометров.

- i. Объем газа (как правило, разреженного, приближенного к идеальному газу)

$$T = A_v V \quad (T = 0, V \neq 0 !?)$$

Под абсолютным нулем температуры, мы будем понимать такую температуру, при которой прекращается движение частиц составляющих тело. Однако, по современным представлениям это не означает, что полностью прекращается обмен между частицами (в частности сохраняется так называемая нулевая энергия))

Газовые термометры - вне конкуренции по чувствительности, точности и воспроизводимости. По ним градуируют остальные термометры.

- ii. Жидкостные термометры (по изменению объема)

Вещество	Диапазон температур °C	
Пентан	- 200	+20
Этиловый спирт	- 110	+50
Толуол	- 70	+100
Ртуть	- 38,86	+600

- iii. Термометры электрического сопротивления (металлы и сплавы)

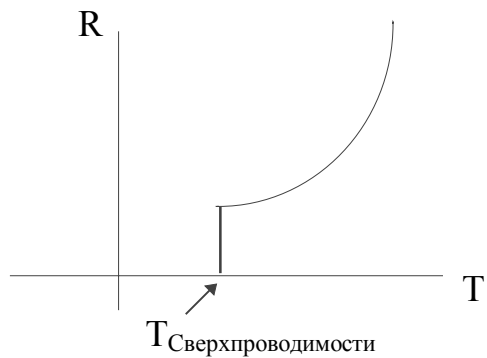
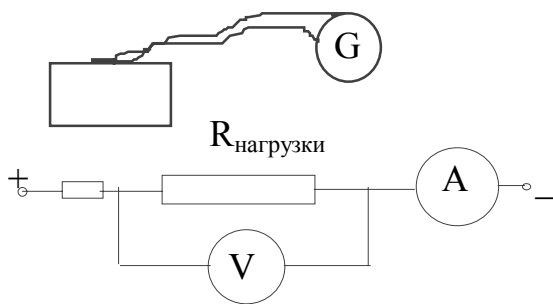
$$T = A_r R$$

В общем случае шкала нелинейная или близкая к линейной на отдельных участках

Платина	+ 10 до + 1100
Медь	- 253(жидкий H <sub>2</sub> ) до + 120

Сверху естественной границей служит температура плавления металлов, а снизу - температура сверхпроводящего состояния. Ниже даны температуры сжижения некоторых газов.

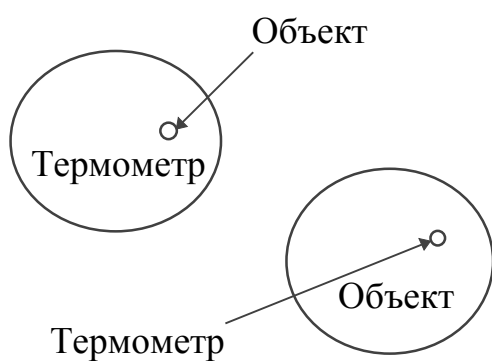
Газ	Гелий	Водород	Азот	Воздух	Кислород	
T	°K	4.2	20	77	81	90



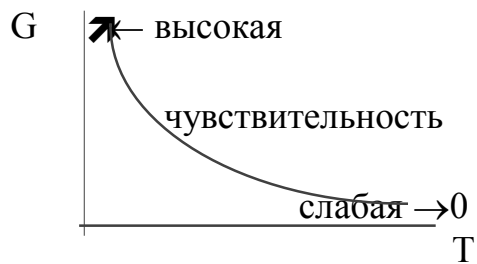
iv. Полупроводниковые термометры электрического сопротивления,  $R$  (их характеризует высокая чувствительность)

$$R \sim e^{-A/T}, \quad R = A_0 e^{-A/T} \quad (\text{германий (до } < 20^\circ\text{K}), \text{ уголь})$$

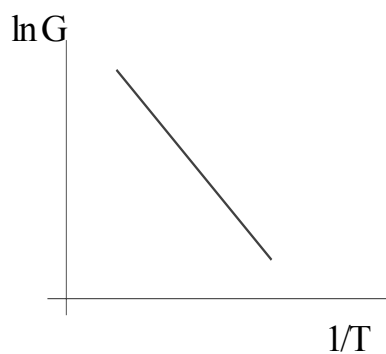
Общая проблема термометрии - соотношение размеров образца для измерения и термометра



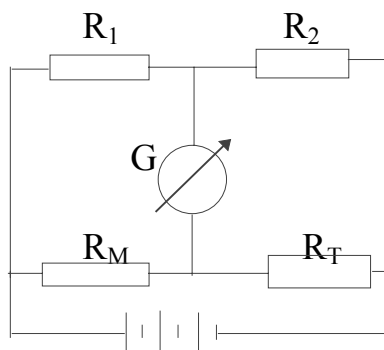
Вторая проблема - различная чувствительность на разных участках диапазона (в случае полупроводников - электрической проводимости)



Если  $R = R_0 e^{-A/T} \Rightarrow \ln(R/R_0) = -A/T$ , следовательно, можно применить линеаризацию ( $R \sim 1/G$ ,  $G$ - проводимость).



Для электрических способов применяют мостовой метод измерения - мостик Уинстона.



$R_T$  - термометр

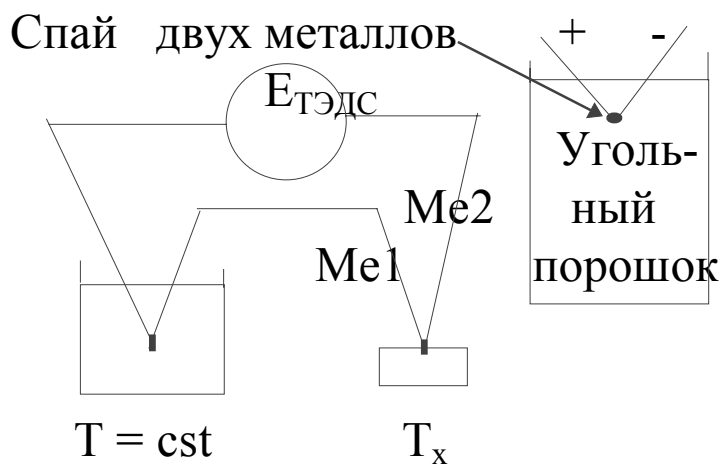
$R_M$  - магазин сопротивлений

$R_1$  и  $R_2$  - резисторы

При равновесии через индикатор  $G$  ток не течет  $\Rightarrow$

$R_T/R_M = R_2/R_1$ , откуда можно найти неизвестное сопротивление термометра -  $R_T$ . Индикация момента равновесия может осуществляться с помощью стрелки, звуком, светом и т.д. .

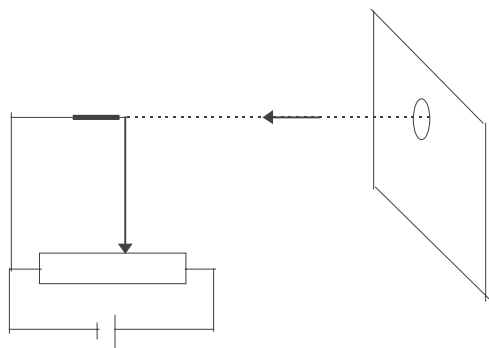
v. Термопары (низкая теплоемкость)



При соединении (спайке) двух металлов или специальных сплавов, содержащих существенно разное количество электронов в единице объема (то есть их концентрацию) происходит выравнивание величин зарядов у границы и возникает электродвижущая (ЭДС) сила, которая с изменением температуры также меняется, что и используется для измерения самой температуры (ТЭДС) .

Металл или сплав	Диапазон температур, °С
Медь-константан	- 200      + 350
Pt - Pt + 30% Rh	от $T_{комн}$ до 1400-1600

vi. Пирометры используются для измерения очень высоких температур, при которых тела раскаляются до состояния излучения видимого света. Применяется закон теплового излучения тел Стефана-Больцмана путем сравнения излучательности тел при их нагреве. Свет из отверстия на рисунке сравнивается по интенсивности со светом раскаленной спирали прибора.



Заметим в заключение, что при измерении температур, особенно очень низких, например, близких к абсолютному нулю, становится существенной проблема нагрева измеряемого объекта теплом подводимым к термометру для приведения этого термометра в рабочее состояние. Этот пример иллюстрирует и более общую проблему - возникновение искажений, вносимых измерителем, которые в отдельных случаях атомно-молекулярного уровня (известное соотношение неопределенностей Гейзенберга) могут приводить к принципиальной невозможности точных измерений.

### Международная практическая температурная шкала

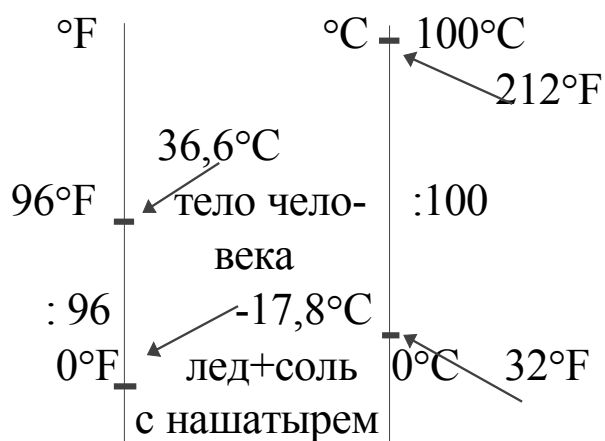
С 1968 года установлено 12 реперных точек. Опорной точкой является тройная точка воды -  $273,16^{\circ}\text{K}$  ( $0,01^{\circ}\text{C}$ )

№ п/п	Вещество	Агрегатное состояние	Температура
			$^{\circ}\text{K}$
1.	$\text{H}_2$	тройная точка	13,81
2.	$\text{H}_2$	кипение	17,042
3.	$\text{H}_2$	кипение орта- и пара- смеси	20,28
4.	$\text{O}_2$	тройная точка	54,361
5.	$\text{O}_2$	тройная точка	83,798
6.	$\text{O}_2$	кипение	90,188
7.	$\text{H}_2\text{O}$	кипение	373,15
8.	Sn	затвердевание	505,1181
9.	Zn	затвердевание	692,73
10.	Ag	затвердевание	1235,08
11.	Au	затвердевание	1337,58

а также много вторичных точек.

### 2.3 Термометр Фаренгейта (немецкий физик, 1686 - 1736 г)

Андерс Цельсий (Celsius A. 1701 - 1744) шведский астроном и физик предложил свою шкалу в 1742 году. Изучение шкалы Фаренгейта целесообразно проводить путем сравнения со шкалой Цельсия.



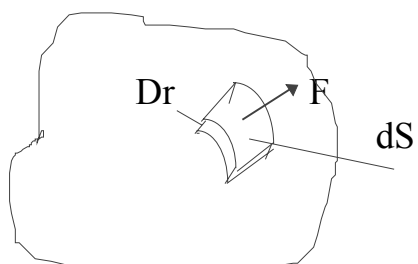
$$5\Delta t^{\circ}\text{F} = 9\Delta t^{\circ}\text{C}$$

$$t^{\circ}\text{F} = 1,8 t^{\circ}\text{C} + 32^{\circ}\text{F}$$

$^{\circ}\text{C}$	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	10	15	20	25	30	35
$^{\circ}\text{F}$	-22	-13	-4	5	14	23	32	50	59	68	77	86	95

### § 3 Давление

Давление механически определяется как отношение величины силы к величине площадки, на которую действует эта сила.



$$P = dF/dS$$

Вообще говоря, в данном случае приходится часто говорить о средней силе, хотя ее довольно трудно точно определить.

Используем выражение, связывающее силу и потенциальную энергию. Отметим, что изменение потенциальной энергии  $\Delta U$  эквивалентно, а точнее говоря равно с противоположным знаком работе, а с силой связано через градиент, тогда

$$F = -\partial U/\partial r \Rightarrow P = F/S = (-\partial U/\partial r)/S = -(\partial U/\partial V)_s.$$

Произошло такое изменение формы тела, при котором  $S$  осталось постоянной. Изменение формы тела можно представить как перестановку отдельных его частей.

$$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм. рт. ст.} = 1,05 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

#### § 4. Первый закон термодинамики

Рассмотрим первый закон термодинамики как полный дифференциал энергии. Используем то обстоятельство, что внутренняя энергия есть функция энтропии и объема в общем случае  $U(S, V)$ , тогда ее полный дифференциал равен

$$dU = (\partial U / \partial S) dS + (\partial U / \partial V) dV, \text{ где}$$

$$(\partial U / \partial S)_V = T, \quad (\partial U / \partial V)_S = -P \Rightarrow$$

$$dU = TdS - PdV$$

$dU$  - Внутренняя энергия системы, центр масс которой покоится

$TdS = \delta Q$  - Теплота

$PdV$  - Механическая работа (за счет изменения объема).

Определим теплоту как

$$\delta Q = TdS \Rightarrow dS = \delta Q / T, \quad S = k \ln p \Rightarrow TdS = kT d \ln p$$

Обычно пишут

$$\delta Q = dU + \delta A, \text{ либо в конечных приращениях } Q = \Delta U + A. (*)$$

Заметим, что соответствующее элементарному процессу приращение какой-либо физической величины  $f \rightarrow \Delta f$  можно рассматривать как бесконечно малое приращение в пределе только в том случае, если  $\sum \Delta f$  (или  $\int df$ ), соответствующие переходу из одного состояния (1) в другое (2) не зависит от пути (иначе говоря - способа), по которому совершается этот переход (как это происходит при механическом перемещении в случае консервативных сил). Это значит, что не всегда верно



$$\int_1^2 df = f_2 - f_1,$$

а в нашем случае  $\int_1^2 dQ \neq Q_2 - Q_1$   $\int_1^2 dA \neq A_2 - A_1$ , а вот для внутренней энергии это верно всегда

$$\int_1^2 dU = U_2 - U_1.$$

В этом случае говорят, что  $U$  является функцией состояния, тогда как теплота  $Q$  и работа  $A$  не являются функциями состояния. Следовательно  $dU$  является полным дифференциалом, а  $\delta Q$  и  $\delta A$  - нет, и этот факт обозначают на письме как это сделано здесь круглыми буквами дельта. Мы, однако, понимая сказанное, будем писать, иногда с оговорками, и, всегда подразумевая данный факт:  $dQ$  и  $dA$ .

Сформулируем первый закон термодинамики (\*).  
 Теплота, сообщаемая системе расходуется на приращение внутренней энергии этой системы и совершение системой работы над внешними телами.

§ 5 Макроскопические параметры состояния газа. Процессы

Имеем термодинамические параметры газа (вообще говоря, их можно отнести и к твердым телам и к жидкостям)

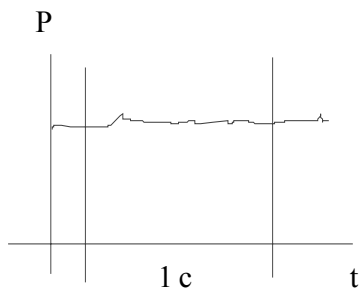
Объем	Масса	Энтропия	Давление	Теплота	Работа
V	m	S	P	Q	A
Внутренняя энергия	Плотность	Концентрация	Температура	Хим. состав и др.	
U	ρ	n	T		

В опыте, то есть физическом или ином эксперименте, (и в обыденной жизни) мы имеем дело с объемом газа, состоящим из громадного числа частиц: атомов, молекул, ионов, электронов,... квазичастиц: дырок, вакансий, экситонов, поляронов, более сложных образований, но также

микроскопических, размеры которых  $\ll$  всего объема газа. Когда некоторым прибором измеряют величину того или иного параметра, то эта величина суть результат усреднения от действия всех частиц, составляющих тело.

Если число столкновений одной молекулы с остальными может составлять  $10^{10}$  ст/с, то число столкновений между всеми молекулами при тех же условиях составляет  $10^{20}$  ст/с.

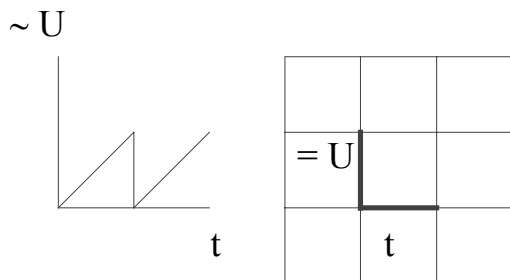
Пример: измерение давления



При быстроедействии осциллографа  $0,1 \text{ нс} = 10^{-10} \text{ с}$  он будет регистрировать  $\Rightarrow 10^{-10} 10^{20} = 10^{10}$  столкновений одновременно, поэтому и можно говорить, что наши приборы измеряют усредненные значения параметров.

Замечание.

Замечательные свойства осциллографов позволяют наблюдать формы сигналов. В нем создается так называемая развертка по времени: линейно нарастающее с заданной скоростью напряжение позволяет переместить лучик на экране с одного края на другой. По вертикали при этом подается напряжение исследуемой формы пропорциональное величине данного параметра.



Любая физическая величина преобразуется в эквивалентное ей электрическое напряжение и далее ее можно измерять преобразовывать и т.д..

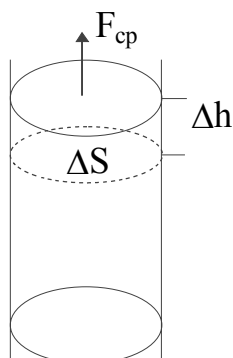
Состояние и процесс.

Предположим, что мы наблюдаем за некоторым набором параметров. Если параметры не меняются, то можно говорить о равновесном состоянии. Если некоторые из них меняются, то говорят что идет процесс (процесс изменения этих параметров). Процесс идет до тех пор, пока система не перейдет в новое равновесное состояние

$P_1$	$V_1$	$T_1$	Во время процесса меняются все параметры или хотя бы один из них.
<hr/>			
$P_2$	$V_2$	$T_2$	

Практически можно говорить о квази равновесных состояниях вместо равновесных, которые являются удобной идеализацией. Если один параметр меняется быстрее другого, к примеру, в 10 раз, то можно говорить о квази равновесии или о равновесии в отношении медленно меняющегося параметра в сравнении с другим. Например, вода в чайнике нагревается, а ее объем в процессе нагрева условно остается постоянным.

## § 6 Расчет работы и внутренней энергии в термодинамике



### 6.1 Работа

$$\delta A = F_{cp} \Delta h, \quad P = F_{cp} / \Delta S \Rightarrow$$

$$\delta A = P \Delta S \Delta h = P \Delta V. \text{ Пусть}$$

$$\delta A \cong dA \Rightarrow dA = PdV$$

$$A = \int_1^2 PdV$$

### 6.2 Внутренняя энергия

Рассчитаем среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну частицу и на одну координату. Используем каноническое распределение Гиббса.

$$\langle \varepsilon_i \rangle = [\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta \varepsilon_i) \varepsilon_i dp_i] / [\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta \varepsilon_i) dp_i].$$

$$-\partial[\exp(-\beta \varepsilon_i)]/\partial \beta = \varepsilon_i \exp(-\beta \varepsilon_i), \quad \varepsilon_i = p_i^2/2m, \quad \beta = 1/kT, \quad i\text{-я координата.}$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \{ -\partial[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta \varepsilon_i) dp_i] / \partial \beta \} / [\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta \varepsilon_i) dp_i] =$$

$$= -\partial \ln[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta p_i^2/2m) dp_i] / \partial \beta = -\partial [\ln(2m\pi/\beta)^{1/2}] / \partial \beta =$$

$$= 1/2\beta = \underline{kT/2}.$$

$$\text{В расчете использован интеграл вида } \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = kT/2 \quad i=1$$

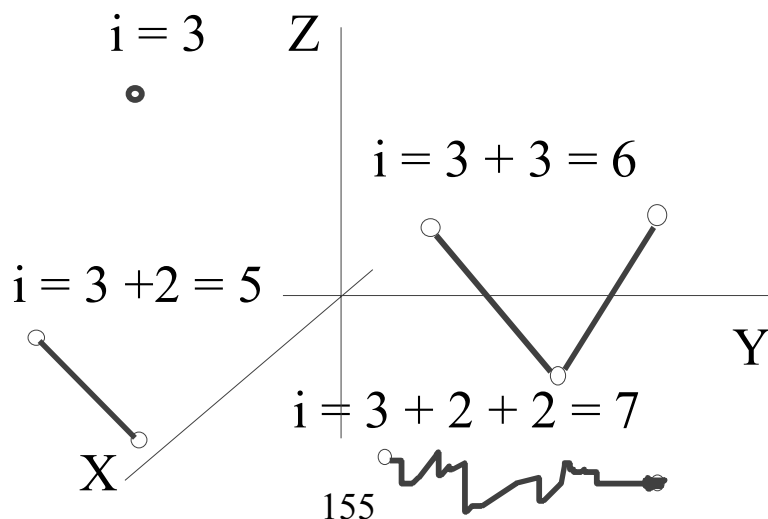
$\langle \varepsilon_i \rangle = i kT/2$  - формула для произвольного числа степеней свободы частицы (например, молекулы).

Теорема о равнораспределении кинетической энергии по степеням свободы:

на каждую степень свободы частицы, то есть на каждую координату или ось вращения, к примеру, приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия равная  $\varepsilon = kT/2$ .

Найдем внутреннюю энергию произвольного количества вещества

$$\varepsilon_i = i kT/2 \quad | \cdot N_A \Rightarrow U_M = i RT/2 \quad (U_M = \varepsilon_i N_A, R = kN_A) \quad | \cdot \nu \Rightarrow \underline{U = i\nu RT/2}$$



Точке может соответствовать три поступательных степени свободы по числу трех декартовых координат ( $\text{He}$ ,  $\text{H}^+$ , ...).

Для двухатомных молекул в модели жесткой нерастяжимой связи между ними прибавляется еще две оси вращения - вдоль линии их соединяющей и перпендикулярно ее середине ( $\text{N}_2$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ , ...).

Для трех- и более молекул реализуются все три взаимно перпендикулярные оси вращения ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ , ...).

В модели упругой (не жесткой) связи, кроме указанных степеней свободы, прибавляются еще колебательные степени свободы.

## § 7 Теплоемкость

### 7.1 Расчет теплоемкости при постоянном объеме и давлении. Закон Майера

Теплоемкостью тела,  $C$ , называется отношение бесконечно малого количества теплоты, полученного этим телом к соответствующему приращению его температуры.

$$C = \delta Q/dT.$$

Часто пишут, и мы будем придерживаться записи  $C = dQ/dT \Rightarrow$

$$C = (dU + PdV)/dT = (dU/dT) + PdV/dT.$$

Используем тот факт, что и внутренняя энергия представляется полным дифференциалом  $U(V, T) \Rightarrow$  запишем

$$dU = (\partial U/\partial T)_V dT + (\partial U/\partial V)_T dV$$

$$\underline{C} = (\partial U/\partial T)_V + (\partial U/\partial V)_T (dV/dT) + PdV/dT = (\text{второе слагаемое равно}$$

$$\text{нулю при } T = \text{cst}) = \underline{(\partial U/\partial T)_V + PdV/dT}.$$

$$1. V = \text{cst} \Rightarrow dV/dT = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{C_V} = \underline{(\partial U/\partial T)_V} = \partial(vi RT/2)/\partial T = \underline{vi R/2}, v = 1 \Rightarrow \underline{C_V = (i/2)R}.$$

$$2. P = \text{cst}$$

$$\underline{C_p} = \underline{C_v} + PdV/dT.$$

Используем уравнение Менделеева - Клапейрона

$$PV = \nu RT \Rightarrow PdV = \nu R dT \Rightarrow dV/dT = \nu R/P \Rightarrow$$

$$\underline{C_p} = C_v + \nu R = \nu(i/2) R + \nu R = \underline{[(i + 2)/2] \nu R}.$$

$$\nu = 1 \Rightarrow C_{p\mu} = C_{v\mu} + R.$$

Полученное выражение называют уравнением Майера (Майер Юлиус Роберт 1814-1878).

Для различных процессов можно рассчитать теплоту, внутреннюю энергию и работу.

1.  $T = cst$  – изотермический

$$dU = 0 \Rightarrow \delta Q = \delta A.$$

2.  $P = cst$  - изобарический

$$\delta Q = dU + \delta A$$

3.  $V = cst$  - изохорический

$$\delta A = 0 \Rightarrow \delta Q = dU$$

4.  $Q = cst$  ( $\delta Q = 0$ ) - адиабатический

$$dU = - \delta A$$

5.  $C = cst$  - политропический

$$\delta Q/dT = cst.$$

## 7.2 Виды теплоемкости

Полная теплоемкость,  $C$ , [Дж/К]

$$C = dQ/dT$$

теплота, которую необходимо передать телу, чтобы изменить его температуру на 1 градус.

Удельная теплоемкость,  $C_{уд}$ , [Дж/К кг]

$$C_{уд} = dQ/m dT$$

теплоемкость, приведенная к единичной массе.

Молярная теплоемкость,  $C_{\mu}$ , [Дж/К моль]

$$C_{\mu} = dQ/\nu dT$$

теплоемкость, приведенная к одному молю.

## § 8 Уравнение Пуассона для адиабатического процесса

$$dQ = dU + dA, \underline{dQ = 0} \Rightarrow dU = \nu C_V dT, \nu = 1 \Rightarrow dU = C_V dT,$$

$$dA = PdV \Rightarrow$$

$$C_V dT + PdV = 0 \quad | \cdot R \Rightarrow C_V R dT + R P dV = 0, \text{ но}$$

$$\text{из } PV = RT \Rightarrow PdV + V dP = R dT \Rightarrow$$

(исключим температуру)

$$C_V (PdV + V dP) + R PdV = 0, R = C_P - C_V \Rightarrow$$

$$C_V PdV + C_V V dP + (C_P - C_V) PdV = 0 \quad | : C_V, (\gamma = C_P/C_V = \text{cst})$$

$$PdV + V dP + (\gamma - 1)PdV = 0, \Rightarrow \gamma PdV + V dP = 0.$$

$$\gamma dV/V + dP/P = 0 \quad | \quad \int$$

$$\gamma \ln V + \ln P = \text{cst} \Rightarrow \ln (V^{\gamma} P) = \text{cst} \Rightarrow \underline{P V^{\gamma} = \text{cst}}, P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} = \dots$$

## § 9 Политропический процесс

$$\underline{C = \text{cst}}, C = dQ/dT \Rightarrow dQ = C dT. dQ = dU + dA, \nu = 1 \Rightarrow$$

$$C dT = C_V dT + PdV \quad | \cdot R$$

$$CR dT - C_V R dT = RP dV, (C - C_V)R dT = RP dV,$$

$$PV = RT, R dT = PdV + V dP (\text{исключим температуру}) \Rightarrow$$

$$(C - C_V)(PdV + V dP) = R PdV \Rightarrow (C - C_V) PdV = (R + C_V - C) PdV$$

$$(\text{используем уравнение Майера}) \Rightarrow C_P = R + C_V$$

$$(C - C_V) V dP = (C_P - C) PdV \quad | : PV$$

$$(C - C_V) dP/P = (C_P - C) dV/V \quad | \int$$

$$(C - C_V) \ln P = (C_P - C) \ln V + \text{cst} \quad | : (C - C_V)$$

$$[(C - C_P)/(C - C_V)] \ln V + \ln P = \text{cst}, n \ln V + \ln P = \text{cst},$$

$$\underline{P V^n = \text{cst}}, n = (C - C_P)/(C - C_V).$$

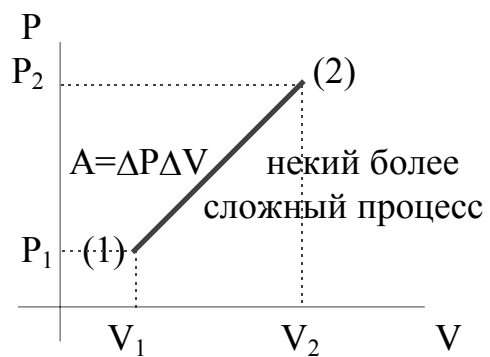
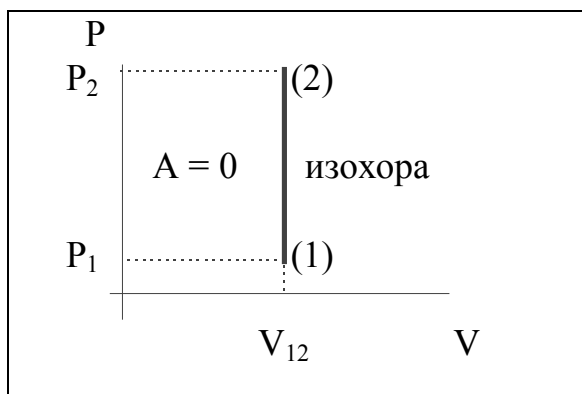
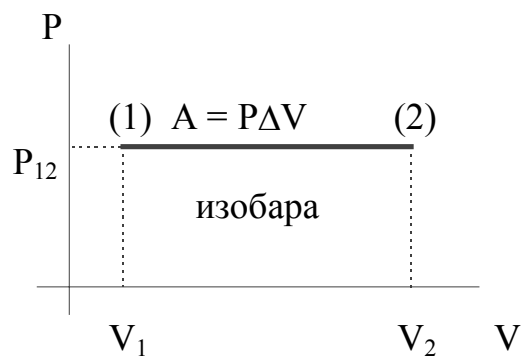
## § 10 Применение первого начала термодинамики к тепловым процессам

Первоначально термодинамика возникла как наука о превращении теплоты в работу. При этом не было надобности в исследовании микроскопической картины явлений, а исследователи опирались на так называемые основные начала термодинамики, полученные опытным путем. Мы, ненадолго, будем действовать в рамках этих представлений по-своему довольно плодотворных.

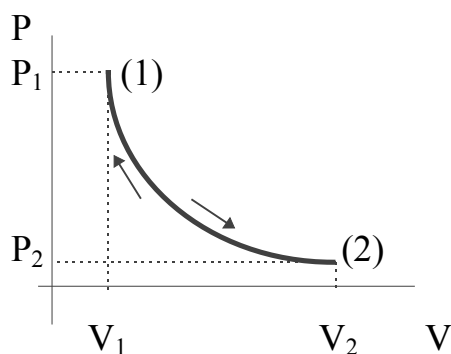
Рассмотрим некий объем газа, способный совершить работу (или над которым совершается работа внешними силами, что в известном смысле все равно и одинаково с точностью до знака). Построим для такой системы несколько диаграмм в координатах

P-V, подразумевая, что эти замкнутые циклы многократно повторяются. Нам необходимо, чтобы за один полный цикл совершалась положительная работа.





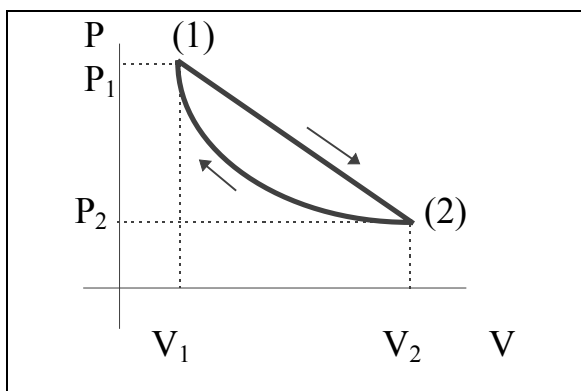
Рассмотрим процесс вида



Работа в таком процессе вычисляется по формуле

$$A = \int_1^2 P(V) dV$$

Однако, двигаясь туда - сюда по одному и тому же пути работы не совершить. Вспомним, что совершаемая работа равна численно площади под кривой. Следовательно, в прямом и обратном направлениях надо двигаться по двум разным кривым так, чтобы площади подграфиков (таков термин) оказались разными, например



Работу можно подсчитать как изменение теплоты за один полный цикл

$Q_1$  - теплота, подведенная к системе

$Q_2$  - теплота, отведенная от системы (или отданная холодильнику - холодильником часто служит просто внешняя среда), тогда

$$A = Q_1 - Q_2.$$

Коэффициент полезного действия (КПД) такого устройства можно определить как

$$\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1.$$

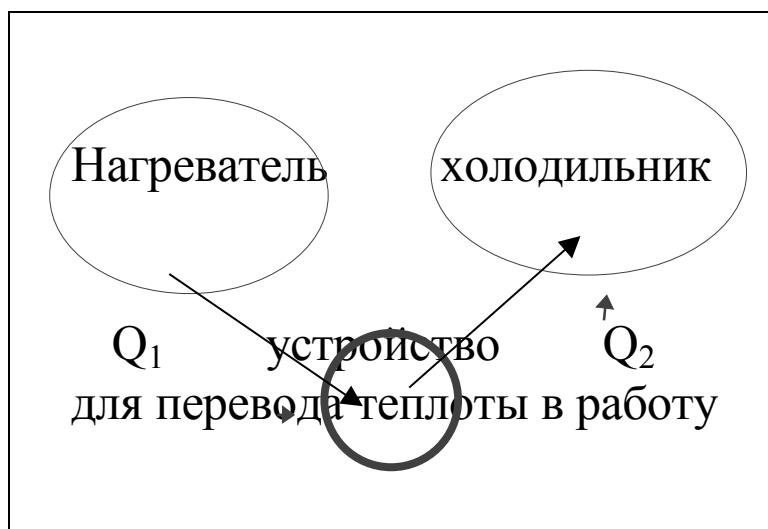
Рассмотрим противоположный случай - холодильной машины, в которой совершается работа с целью охлаждения некоего объема. Для этого запустим цикл в обратном направлении.

$Q_1$  - теплота, поглощаемая системой из окружающей среды

$Q_2$  - теплота, отводимая от системы с помощью каких-либо устройств  
 $Q_2/(Q_1 - Q_2)$  называется холодильным коэффициентом.

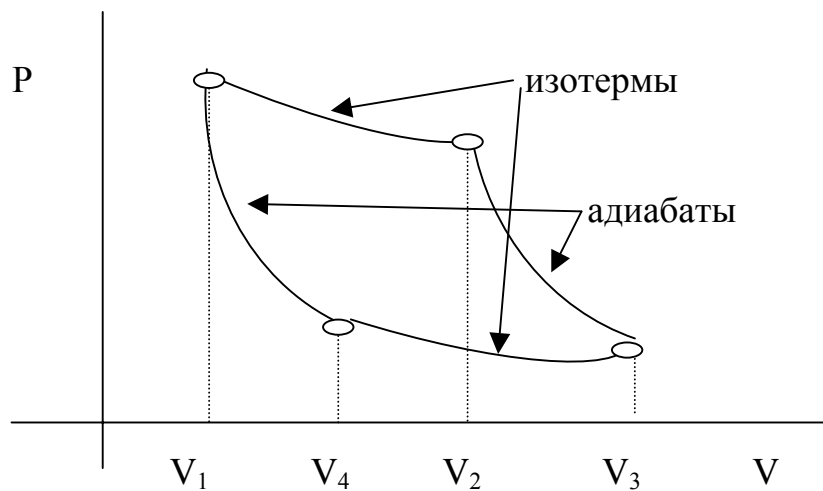
## § 11 Цикл и теорема Карно

Схема тепловой машины часто представляется в виде схемы.



Карно придумал свой совершенно конкретный цикл, позволяющий переводить теплоту в работу, состоящий из двух изотерм и двух адиабат.

Вслед за Карно построим такой цикл и рассчитаем его КПД. Заметим, что адиабата всегда идет круче, чем изотерма. Идея состоит в том, чтобы вычислить теплоту, передаваемую системе на пути 1-2-3 и теплоту, отбираемую от системы на пути 3-4-1 и вычислить КПД.



$$1. \delta Q_1 = A_{12} = \int_1^2 P dV = \nu R \int_1^2 T dV/V = \nu R T_1 \ln(V_2/V_1)$$

$$2. \delta Q_2 = 0$$

$$3. \delta Q_3 = -A_{34} = \nu R T_2 \ln(V_3/V_4)$$

$$4. \delta Q_4 = 0$$

$$Q_1 = \delta Q_1 + \delta Q_2, \quad Q_2 = \delta Q_3 + \delta Q_4,$$

$$\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1 = [\nu R T_1 \ln(V_2/V_1) - \nu R T_2 \ln(V_3/V_4)]/\nu R T_1 \ln(V_2/V_1).$$

Из графика следует, что точки 1, 4 и 2, 3 находятся на одних и тех же адиабатах.

$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$ ,  $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$ ,  $T_1 = T_2$ ,  $T_3 = T_4 \Rightarrow$  (после почленного деления равенств получим равенство отношений)

$V_1/V_2 = V_4/V_3$  и следовательно  $\Rightarrow \eta = (T_1 - T_2)/T_1$  - максимальный КПД.

$T_1$  - температура нагревателя,  $T_2$  - температура холодильника.

Теорема Карно:

КПД всех обратимых машин одинаков и определяется только температурами нагревателя и холодильника  $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$ .

Понятие обратимого процесса:

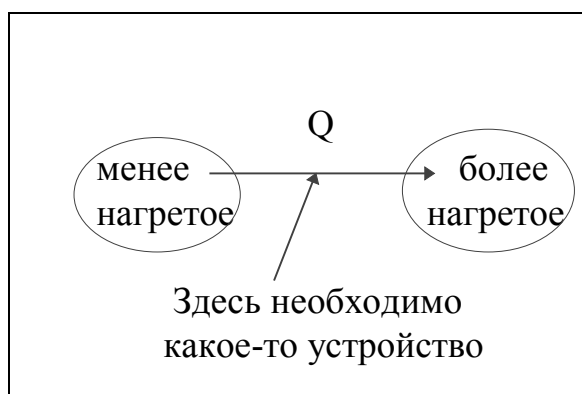
При обратимом процессе система в обратной последовательности может пройти через те же состояния, что и при прямом ходе (при этом во внешней среде никаких изменений не должно произойти).

## § 12 Второе и третье начала термодинамики

Существует чисто технический вопрос: как лучше отобрать тепло от тела? Вообще, по каким законам происходит отбирание тепла? Что надо предпринять, чтобы отобрать тепло от нагретого тела?

Формулировка Клаузиуса *второго* начала термодинамики. (Рудольф Юлиус Эмануэль 1822 – 1888г., ректор Боннского университета)

Невозможны процессы, единственным результатом которых был бы переход тепла от тела менее нагретого к телу более нагретому.



Вспомним школьную задачку о холодильнике в изолированной комнате: холодильник охлаждается, комната нагревается, энергия же берется из электрической розетки (через которую и осуществляется связь с внешней средой).

Используем формулировку второго свойства энтропии и на его основе дадим второе определение *второго* начала термодинамики.

Второе определение

изолированная система, будучи предоставлена самой себе, переходит из менее вероятных состояний в более вероятные, что сопровождается ростом энтропии (так как при этом увеличивается число способов, которыми может быть составлено данное состояние).

Из этого определения следует

энтропия изолированной системы может только возрастать.

О третьем начале термодинамики

Имеем

$$S = k \ln \Omega$$

При  $T = 0$  тело находится в состоянии, называемом основным: все движение “заморожено”. То есть при температуре абсолютного нуля число способов реализации этого единственного основного состояния равно 1.

$$\Omega = 1 \Rightarrow S = k \ln 1 = 0 \text{ или}$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$$

Это и есть определение третьего начала термодинамики, сформулируем его

Энтропия системы стремиться к 0 при стремлении к 0 температуры.

Замечание: существует определение

$$dS = \delta Q/T, \text{ но так как } \lim_{T \rightarrow 0} (\delta Q/T) = 0 \Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} S = 0$$

Некоторые сомнения: переход беспорядка в порядок

Из принципа возрастания энтропии создается впечатление, что мир движется от упорядоченного состояния к не упорядоченному и характеризуется все возрастающим беспорядком. Почему - возникает вопрос? Почему возможно превращение случайной смеси молекул и атомов в высокоорганизованные макромолекулы?

Минералы, нефть, газ, ...	растения и живые существа
---------------------------	---------------------------

Ответить точно на этот вопрос мы не можем, однако и парадокса в этом нет, так как мы живем в мире не изолированных систем и справедлива следующая формула:

энтропия системы может быть уменьшена, но только в том случае, если данная система взаимодействует с другими системами, так что в процессе взаимодействия в другом месте происходит компенсирующее увеличение энтропии.

Уменьшить энтропию некоторой системы можно лишь с привлечением различных дополнительных систем и процессов (способы разные). Методы - дело талантов и гениев, которые изобретают циклы, процессы и механизмы.

Природа при этом - самый гениальный изобретатель - изобрела живые существа (каким-то образом с использованием эволюционного отбора или иным способом).

### § 13 Уравнение состояния газа в модели Ван-дер-Ваальса

Для реальных газов уравнение  $PV = \nu RT$  - не точно, при  $P = 10^3$  атм - в 2 раза.

Ван-дер-Ваальс учел.

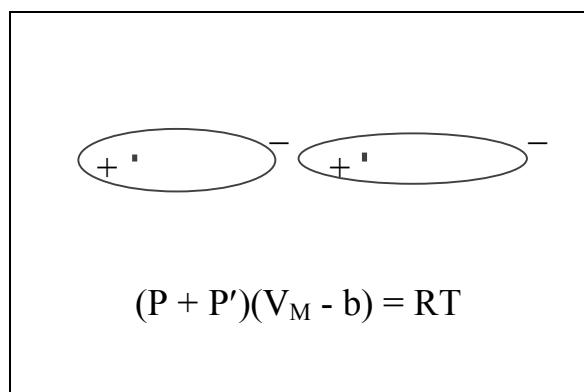
1. Размеры молекул
2. Силы взаимодействия между молекулами

1.

$P(V_M - b) = RT$ ,  $\nu = 1$ ,  $b$  - объем, занимаемый самими молекулами. Размер атома водорода  $\sim 5 \cdot 10^{-11}$  м, тогда объем составит  $\sim 125 \cdot 10^{-33}$  м<sup>3</sup>,  $N_A = 6 \cdot 10^{23}$  ат/моль  $\Rightarrow b \sim 1,25 \cdot 10^{-31} \cdot 6 \cdot 10^{23} \sim 10^{-7}$  м<sup>3</sup>/моль. Все другие молекулы больше и для них  $b$  по порядку величины всегда больше, например, для азота  $b = 3,86 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup>/моль. Константы  $b$  для разных молекул вычислены и сведены в таблицы в справочниках

2.

Молекулы взаимодействуют между собой как диполи и притягиваются разноименными полюсами. Притяжение соответствует устойчивому равновесию, а отталкивание - неустойчивому. Притягиваясь, молекулы создают дополнительное давление, которое можно учесть



Рассмотрим (вслед за Ван-дер-Ваальсом) два небольших объема внутри исследуемого сосуда с газом, расположенные в непосредственной близости друг от

друга. Сила притяжения между ними обратно пропорциональна размерам этих объемов. Если взять объемы одинаковыми, то

$$F \sim 1/V^2 \quad | : S$$

$P' = F/S \sim 1/SV^2 \Rightarrow P' = a'/SV_M^2 = a/V_M^2$ ,  $[a] = \text{Па м}^6/\text{моль}^2 = \text{Нм}^4/\text{моль}^2$ . Константы  $a$  для разных молекул вычислены и сведены в таблицы в справочниках. Например, для азота  $a = 0,135 \text{ Н м}^4/\text{моль}^2$ . Уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа имеет вид:

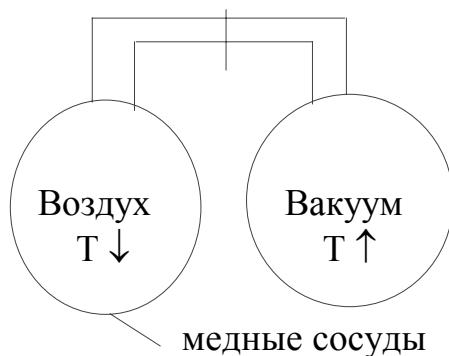
$$(P + a/V_M^2)(V_M - b) = RT.$$

Для произвольного объема газа имеем

$$V_M = V/\nu \Rightarrow (P + a\nu^2/V^2)(V - \nu b) = \nu RT.$$

## § 14 Процесс Джоуля - Томсона

Гей-Люссак решал задачу о нахождении зависимости  $U(T, V)$  - внутренней энергии от объема и температуры экспериментально.



Вентиль открывается, воздух переходит в откачанный сосуд, температура воздуха при этом в сосудах оказывается различной. Объяснение:

Так как процесс близок к адиабатическому (по условию опыта он быстрый), то часть внутренней энергии переходит в работу и температура в первом сосуде уменьшается. Но так как общее количество внутренней энергии в обоих сосудах обязано оставаться постоянным, то со временем температуры выравниваются.



Джоуль, воспроизводя эксперимент, все устройство помещал в воду. Температура воды до и после опыта оставалась одинаковой  $\Rightarrow$  при  $T = \text{cst}$  внутренняя энергия не зависит от объема.

Опыт Джоуля - Томсона (более точный 1852-1862).

Цилиндрическая трубка окружена теплоизолирующим материалом



Левый поршень перемещается так, чтобы  $P_1$  и  $P_2$  оставались неизменными. Течение газа не турбулентное, а ламинарное, стационарное. Кинетической энергией газа по сравнению с изменениями внутренней энергии можно пренебречь (актуально медленное течение газа). В опыте измерялись температуры частей (1) и (2). Эти температуры установились  $T_1$  и  $T_2$  в конце всего эксперимента. Работу, совершенную по протеканию этого процесса можно вычислить по формуле

$$A = P_2 V_2 - P_1 V_1.$$

Поскольку теплоты газ не получал, то есть процесс протекал адиабатически, то  $\Rightarrow$

$$U_2 - U_1 + A = 0 \Rightarrow U_1 - U_2 = A, \text{ здесь}$$

$U_1$  - внутренняя энергия в левой части сосуда в начальном состоянии,

$U_2$  - внутренняя энергия газа в правой части сосуда после окончания процесса и перехода во второе состояние,

$A$  - совершаемая работа.

Поскольку изменение внутренней энергии равно совершаемой работе, то

$$U_1 - U_2 = P_2 V_2 - P_1 V_1 \Rightarrow U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2 = \text{cst}$$

Таким образом,  $(U + PV)$  в процессе Джоуля - Томсона является сохраняющейся величиной.  $U + PV = I$ , где  $I$  - получило наименование энтальпии.

Следствия.

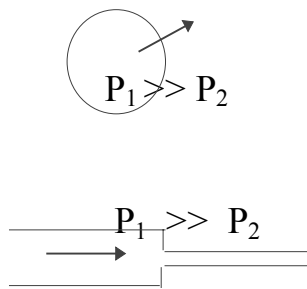
Температура части (1) для всех газов уменьшается, кроме водорода, у которого температура увеличивается. Разность температур  $T_2 - T_1 = \Delta T$  устанавливается тем меньшей, чем лучше газ удовлетворяет свойствам идеального газа. В пределе, если бы газ был идеальным

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow U_1 = U_2.$$

То есть для идеального газа процесс Джоуля - Томсона не реализуется, внутренняя энергия не зависит от изменения объема, а только температуры, что мы и имели в формуле  $\Delta U = \nu C_V \Delta T$ . Для реальных газов процесс есть!

Практические примеры.

- i. Раздувающийся мяч
- ii. Прогон воздуха через узкое отверстие, например, велосипедного насоса



Мяч и велосипедный насос холодеют при энергичном прохождении воздуха...  
Элементарная теория процесса Джоуля - Томсона.

$I = I(P, T) = \text{const}$  - запишем полный дифференциал энтальпии

$$dI(P, T) = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T dP = 0$$

тогда

$$dT/dP = - \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T / \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P.$$

При замене бесконечно малых на конечные приращения  $d \rightarrow \Delta$  отношение  $\Delta T / \Delta P$  можно интерпретировать как изменение температуры, возникающее в процессе Джоуля - Томсона за счет изменения давления, отнесенное к этому изменению давления. В результате преобразований имеем

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P = \partial(U + PV)_P / \partial T = \left(\frac{\partial U}{\partial T} + P \frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = C_P,$$

$$(\partial I / \partial P)_T = \partial(U + PV)_T / \partial P = 0 + V + P(\partial V / \partial T)_T.$$

Следовательно

$$dT/dP = - [V + P(\partial V / \partial P)_T] / C_P.$$

Если вычислить то же самое через уравнение Ван-дер-Ваальса, то

$$dT/dP = \{ [b RT / (V - b)^2] - 2a/V^2 \} / C_P (\partial P / \partial V)_T \cong \Delta T / \Delta P.$$

1.  $\Delta T > 0 \Rightarrow T_2 > T_1$  - охлаждение
2.  $\Delta T < 0 \Rightarrow T_2 < T_1$  - нагревание
3.  $\Delta T = 0$ ,  $T = T_i$  - инверсия,  $T_i$  - температура инверсии.

Характерные примеры

Для углекислоты при 100-200 атм и пропустив через вентиль, получим твердое состояние. Водород при пропускании через узкое отверстие из баллона под большим давлением может самовоспламеняться от разогрева.

Резюме:

1. Исследования Гей-Люссака, Джоуля и Томсона не только позволили обнаружить зависимость  $U(V)$  для реальных газов, они привели к открытию нового явления - процесса Джоуля-Томсона.
2. Процессом Джоуля-Томсона называют стационарное течение газа через пористую перегородку (пробку).
3. Явление изменения температуры газа при таком течении называют эффектом Джоуля-Томсона.

## Глава 4 Физическая кинетика

**Р**аздел молекулярной физики, в котором изучаются процессы, возникающие при нарушении равновесия, носит название физической кинетики. В телах могут возникать флуктуации температуры, концентрации, скорости перемещения какой-либо части системы относительно других ее частей. Такие флуктуации приводят к нарушению равновесия. Однако, известно, что система, по закону возрастания энтропии, стремится восстановить свое равновесное состояние (система предоставленная самой себе стремится перейти из менее вероятных в более вероятные состояния). При восстановлении равновесия происходит образование потоков частиц (в том числе электрически заряженных частиц). Во всяком случае, такое движение связано с движением молекул, атомов, ионов и электронов. В первом приближении будем говорить об электро-нейтральных молекулах.

Газ считаем разряженным так, что выполняются следующие три условия

1. Время соударения молекулы с другими молекулами много меньше времени между соударениями этой молекулы с другими молекулами.
2. Вероятность соударения трех и более молекул много меньше, чем вероятность соударения двух молекул.
3. Среднее расстояние между молекулами много больше, чем средняя длина волны Де - Бройля молекулы. Этим подчеркивается сугубо классическое приближение, а не квантово-механическое.

### § 1 Средняя длина свободного пробега молекул

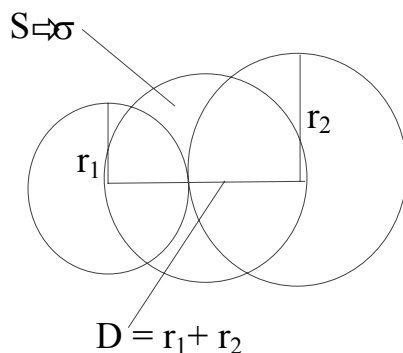
Столкновения молекул - взаимодействие, в результате которого молекулы изменяют направление своего движения. (Мы не знаем и не интересуемся тем, как на самом деле происходит собственно столкновение.) Кроме того, мы все время говорим о неких средних величинах: координатах, скоростях, импульсах

усредненных молекул (слишком много в нашем распоряжении молекул, чтобы говорить о каждой в отдельности). Также выполняются следующие два условия:

1. Одна молекула движется остальные - нет.
2. Не важна предыстория молекулы - нет влияния на данное столкновения всех предыдущих столкновений.

### 1.1 Эффективное сечение взаимодействия молекул

Пусть  $D$  - минимальное расстояние, на которое сближаются центры двух молекул при столкновении. Молекулы мы будем считать сферическими, так как силовое поле точечного электрического заряда имеет сферическую симметрию



Тогда  $D$  является диаметром круга, площадь которого называется эффективным сечением взаимодействия

$$S = \pi D^2/4 = \sigma.$$

### 1.2 Средняя длина свободного пробега

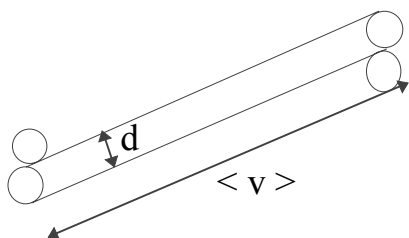
Средней длиной свободного пробега,  $\lambda$ , молекулы газа называется среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя соседними столкновениями.

Рассчитаем среднее число столкновений молекул. Пусть  $\langle v \rangle$  - средняя скорость движения молекулы, а  $\tau$  - среднее время пролета молекулы между двумя соседними столкновениями, тогда

$$\langle v \rangle = \lambda / \tau, \quad 1/\tau = \nu = \langle v \rangle / \lambda,$$

где  $\nu$  - число столкновений одной молекулы за 1 секунду.

Выделим в газе часть пространства между двумя соседними столкновениями молекулы



Путь, проходимый молекулой в единицу времени численно равен скорости (действительно, скорость есть путь в единицу времени). Основываясь на опыте, возьмем  $\langle v \rangle \gg d$ , где  $d$  - эффективный диаметр молекулы. Объем цилиндра, охватывающего область взаимодействия равен

$$(*) \quad \pi d^2 \langle v \rangle \quad (\text{здесь берется два эффективных диаметра, м}^3/\text{с}).$$

Внутри такого объема за одну секунду произойдет одно столкновение. Умножим  $(*)$  на число молекул в единичном объеме,  $n$  (концентрацию молекул,  $\text{м}^{-3}$ ), тогда получим

$$n \pi d^2 \langle v \rangle -$$

- полное число столкновений одной молекулы за единицу времени со всеми молекулами, содержащимися в единичном объеме. Мы полагали при этом движущейся только нашу данную молекулу. Учет движения всех молекул приведет (без вывода)

$$\nu = \sqrt{2} \pi d^2 \langle v \rangle n, \quad \lambda = \langle v \rangle / \nu, \quad \tau = \langle v \rangle / \nu, \quad \tau - \text{время пролета между соударениями.}$$

Тогда

$$\lambda = \langle v \rangle / \nu = 1 / \sqrt{2} \pi d^2 n.$$

Следствие: так как  $P = nkT \Rightarrow n = P/kT \Rightarrow \lambda = kT / \sqrt{2} \pi d^2 P \sim T/P$ .

## § 2 Диффузия. Коэффициент диффузии

При диффузии речь идет о переносе количества вещества (молекул и т.д.). Пусть дан газ, состоящий из двух сортов молекул, причем  $m_1 = m_2 = m$  и  $d_1 = d_2 = d$ . В этом случае молекулам обеих компонент можно приписать также одинаковую среднюю скорость теплового движения.

Определение:

Диффузией называется процесс выравнивания в смеси веществ концентраций двух или нескольких сортов веществ, обусловленный тепловым движением молекул.

При этом происходит процесс выравнивания концентраций, сопровождающийся переносом массы каждой из компонент в направлении убывания ее концентрации. Экспериментально установлено (Закон Фика)

$$N \sim dn/dz,$$

где  $N$  - число частиц, перемещающееся за единицу времени, а  $dn/dz$  - градиент концентрации в направлении оси  $z$ . Перепишем это соотношение в виде равенства, введя при этом размерный коэффициент  $D$  - коэффициент диффузии

$$N = - D \, dn/dz \, S \quad ([N] = c^{-1}, [dn/dz] = m^{-4}, [S] = m^2 \Rightarrow [D] = [m^2/c]).$$

Здесь  $S$  - величина площадки, через которую происходит перенос молекул.

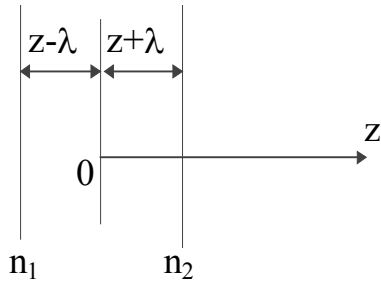
Рассчитаем число молекул, пролетающих через площадку  $S$  в единицу времени на одну координату и в одну сторону:

$$n \langle v \rangle S/6.$$

Тогда слева направо пролетает в единицу времени

$$N_1 = n_1 \langle v \rangle S/6, \text{ а справа налево } N_2 = n_2 \langle v \rangle S/6.$$

Изобразим схематично вид сбоку (посмотрим сбоку на ситуацию)



Последнее соударение молекулы, перед тем как она долетит до площадки  $S$ , произойдет на расстоянии  $\lambda$  - средней длины свободного пробега. Тогда, если выбрать начало координат на  $S$  и направить ось  $z$  слева направо концентрации частиц будут являться функциями  $z$  вида

$$n_1 = n(z-\lambda), n_2 = n(z+\lambda)$$

и число молекул перелетевших через площадку в одну сторону за единицу времени может быть вычислено в виде

$$N = N_1 - N_2 = \langle v \rangle [n(z-\lambda) - n(z+\lambda)] S/6,$$

а так как  $\lambda$  мало, то разложение в ряд Тейлора позволяет использовать приближение

$$n(z-\lambda) - n(z+\lambda) = n(z) - \lambda \frac{dn}{dz} - n(z) - \lambda \frac{dn}{dz} = -2\lambda \frac{dn}{dz} \Rightarrow$$

$$N = -\langle v \rangle \lambda S \frac{dn}{dz} / 3 = -DS \frac{dn}{dz} \Rightarrow \underline{D = \langle v \rangle \lambda / 3}.$$

Замечание

Пусть  $J = N/S$  тогда

$$J = -D \frac{dn}{dz}$$

Здесь  $J$  - плотность потока частиц, число частиц, пролетающих через единичную площадку в единицу времени. Пусть  $m_0$  - масса одной частицы  $\Rightarrow Jm_0 = M$  - масса всего переносимого вещества. Имеем

$$nm_0 = Nm_0/V = M/V = \rho - \text{плотность вещества.}$$

Получим соотношение

$$M = -D \frac{d\rho}{dz}.$$



Заметим в заключение, что в данном рассмотрении по сути дела речь шла о самодиффузии - перемешивании молекул одного и того же вещества (или молекул очень сходных по объему и массе).

### § 3 Теплопроводность. Коэффициент теплопроводности

Здесь речь идет о переносе потока тепла (или энергии). Пусть в газе каким-либо образом поддерживается в различных его частях различная температура. То есть имеется градиент температуры. В данном случае через единичную площадку пролетает одинаковое число молекул в обе стороны, но эти молекулы имеют разную кинетическую энергию, по известной формуле

$$E = i kT/2.$$

Если в газе (или иной среде) создать вдоль некоторой оси (пусть  $z$ ) градиент тепла, то там возникает поток тепла, стремящийся скомпенсировать создавшееся неравновесное состояние. Этот экспериментальный факт можно отразить зависимостями вида:

$Q \sim \Delta S \Delta t dT/dz$ , где  $Q$  - теплота или энергия (Дж), или

$q \sim \Delta S dT/dz$ , где  $q=Q/\Delta t$  - мощность, поток тепла (Дж/с = Вт), или

$q' \sim dT/dz$ , где  $q'=Q/\Delta t S$  - плотность потока (Дж/с  $m^2$  = Вт/ $m^2$ ).

Чтобы поставить знаки равенства необходимо ввести коэффициент, размерность которого определяется из формулы, например

$$q = - \kappa \Delta S dT/dz, [\kappa] = \text{Вт/м К}.$$

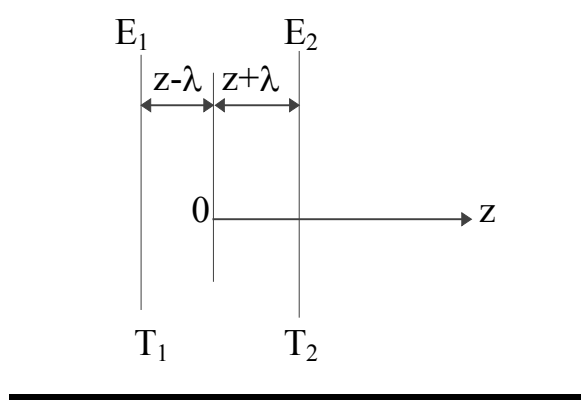
Чтобы к этому процессу не примешивалась диффузия, необходимо сохранять неизменным число молекул пролетающих через площадку  $S$ . Тогда число молекул пролетающих за одну секунду в одну сторону равно:

$$N = n \langle v \rangle S/6.$$

Рассчитаем поток тепла, проходящего через площадку. Будем исходить из предположения, что каждая молекула переносит энергию равную  $E = i kT/2$ ,

соответствующую температуре в том месте, где произошло ее последнее соударение

$$q = N\langle E_1 \rangle - N\langle E_2 \rangle = N (\langle E_1 \rangle - \langle E_2 \rangle) = (ikT_1/2 - ikT_2/2)n\langle v \rangle S/6.$$



$$T_1 = T(z-\lambda), T_2 = T(z + \lambda) \Rightarrow T_1 - T_2 = T(z-\lambda)$$

$$- T(z + \lambda) = T(z) - \lambda dT/dz -$$

$$T(z) - \lambda dT/dz = -2\lambda dT/dz.$$

При разложении в ряд Тейлора использована малость длины свободного пробега  $\lambda$  по сравнению с расстоянием, на которое происходит перенос тепла.

$$q = -(1/3)n\langle v \rangle S(ik/2)\lambda dT/dz, i k n /2 = i n k N_A/2N_A = (iR/2)n/N_A = C_v n/N_A =$$

$$C_v N/VN_A = C_v m/VM = c_v \rho.$$

$i$  - число степеней свободы,  $k$  - постоянная Больцмана,  $n$  - концентрация,  $M$  - масса одного моля,  $m$  - масса,  $N_A$  - число Авогадро,  $R$  - газовая постоянная,  $C_v$  - молярная теплоемкость,  $c_v = C_v/M$  - удельная теплоемкость,  $\rho$  - плотность вещества.

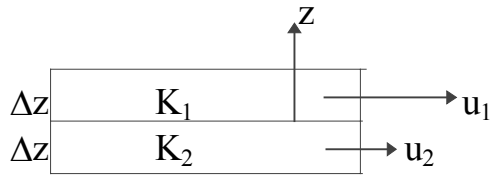
Таким образом, для мощности при переносе тепла имеем выражение

$$q = - (\lambda\langle v \rangle c_v \rho /3) S dT/dz \Rightarrow \underline{\kappa = \langle v \rangle \lambda c_v \rho /3}.$$

Заметим также, что данный расчет и полученные формулы справедливы для молекул сходных по размерам.

#### § 4 Динамическая вязкость. Коэффициент вязкости

В данном случае происходит перенос импульса молекулами за счет так называемых сил внутреннего трения. Чтобы понять суть происхождения внутреннего трения, рассмотрим два соприкасающихся слоя вещества некоторой толщины



$$m = m_1 = m_2$$

$u_1, u_2$  - скорости упорядоченного движения слоев, а  $K_1, K_2$  - импульсы слоев. Запишем переносимый импульс двумя способами

$$K^* = - \eta S \Delta t \, du/dz, \quad ([K'] = \text{кг м/с}, [\eta] = \text{Н с/м}^2 = \text{Па с}) \quad K = K^*/\Delta t$$

$$K = - \eta S \, du/dz, \quad ([K] = \text{кг м/с}^2).$$

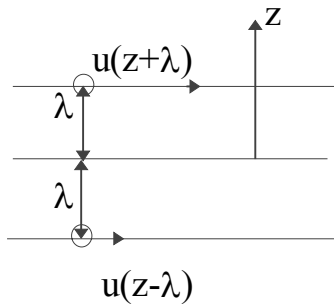
Здесь  $\eta$  - коэффициент, уравнивающий левую и правую части. Используем далее последнее выражение. Через площадку  $S$  в единицу времени из одного слоя в другой переходит число молекул

$$N = n \langle v \rangle S / 6.$$

Переходя из одного слоя в другой, молекула либо теряет, либо приобретает импульс, а также и весь слой (через одну частицу - ближайшему окружению и далее - всему слою). Запишем величину импульса, передаваемого в единицу времени через площадку  $S$

$$K = N m u = n \langle v \rangle S m u / 6, \quad K_1 - K_2 = \Delta K = N (m u_1 - m u_2) = n \langle v \rangle S m (u_1 - u_2) / 6.$$

Свое последнее соударение молекула претерпевает на расстоянии свободного пробега



$$\Delta K = n\langle v \rangle S m [u(z-\lambda) - u(z+\lambda)]/6 = - (1/3)n\langle v \rangle S m \lambda du/dz.$$

$$nm = Nm/V = M/V = \rho \quad (m - \text{масса одной молекулы, } M - \text{масса, } V - \text{объем}) \Rightarrow$$

$$\Delta K = - \rho \langle v \rangle \lambda S du/3dz \Rightarrow$$

$$\underline{\eta = \rho \langle v \rangle \lambda / 3.}$$

Приведем сравнительную таблицу явлений переноса

Изменяющаяся величина (в единицу времени)	Градиент	Название явления (коэффициент)
Число частиц $N, c^{-1}$	концентрации $dn/dz, m^{-3}/m$	Диффузия (D)
Энергия частиц $q, Дж/с$	температуры $dT/dz, K/m$	Теплопроводность (κ)
Импульс частиц $K, \text{импульс}/с = кг \text{ м}/с/с$	скорости $du/dz, м/с/м$	Вязкость (η)

## § 5 Перенос заряда

В среде со свободными носителями заряда (электронный газ в металле или полупроводнике, ионы в газе или жидкости) приложим в направлении  $z$  слабое однородное электрическое поле  $E$ . Пусть  $j_z$  - средний электрический заряд, пересекающий в единицу времени единичную площадку в направлении  $z$ .  $j_z$  называют плотностью электрического тока или плотностью потока зарядов  $[j_z] = Кл / м^2 с$ . Пусть  $q$  - заряд одной частицы,  $N'$  - число частиц, пролетающих через единичную площадку в единицу времени, тогда

$$j_z = N'q.$$

С другой стороны  $j_z \sim E$ . Чтобы поставить знак равенства необходимо ввести коэффициент

$$j_z = \sigma_q E. \quad (1)$$

Этот коэффициент пропорциональности  $\sigma_q$  называется удельной электрической проводимостью вещества. Заметим аналогию

$$N = n\langle v \rangle S/6 \Leftrightarrow j_z = N'q = q n_q \langle v \rangle_{др} (N' = n_q \langle v \rangle_{др}). \quad (2)$$

В выражении (2) отсутствует численный коэффициент  $1/6$ , так как движение всего заряда упорядочено и направлено вдоль одной координаты. Скорость  $\langle v \rangle_{др}$  в данном случае называют дрейфовой. Это скорость дрейфа зарядов в слабом электрическом поле.

Запишем уравнение движения частицы согласно 2-го закона Ньютона

$$mdv/dt = qE, \text{ после интегрирования } - v = qEt/m + v_0.$$

Произведем усреднение. Тогда  $v_0 = 0$ , как скорость в начальный момент времени,  $t = \tau$  - среднему времени свободного пробега, а  $v$  заменяется на  $\langle v \rangle_{др}$

$$\langle v \rangle_{др} = qE\tau/m.$$

Приравняем правые части (1) и (2) и подставим туда значение дрейфовой скорости

$$\sigma_q E = q n_q \langle v \rangle_{др} = q^2 n_q E \tau / m.$$

Отсюда получим значение удельной проводимости, выраженное через микро-скопические параметры

$$\sigma_q = q^2 n_q \tau / m.$$

Так как

$$\tau = \lambda / \langle v \rangle_{др} = 1 / \sqrt{2} \pi d_{эфф}^2 n \langle v \rangle_{др}, \text{ то}$$

$$\sigma_q = q^2 n_q / m \sqrt{2} \pi d_{эфф}^2 n \langle v \rangle_{др},$$

где  $n$  - концентрация всех частиц, обусловленных столкновениями, а  $n_q$  - средняя концентрация заряженных частиц. Они могут совпадать.

## Глава 5 Гидродинамика

### §1 Понятие о гидродинамике

#### 1.1 Модель сплошной среды

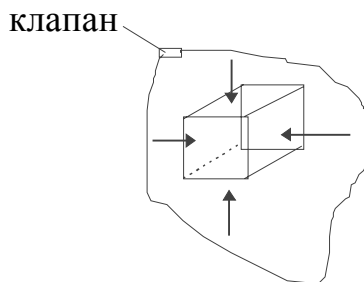
Содержание гидродинамики составляет изучение движения жидкостей. Все рассуждения, как правило, справедливы и для газов, хотя здесь используется другое название - аэродинамика. Субстанция рассматривается при этом как сплошная среда. Если в гидродинамике говорят о смещении некоторой частицы, то речь идет не о смещении отдельной молекулы, а о смещении целого элемента континуального объема. При этом, сколь маленький объем ни взять, в нем частичек предполагается актуально много (столько, сколько нам нужно), чем и хороша такая идеализация частичек, которые и сами в свою очередь состоят из воображаемых частичек всегда в достаточном количестве. Элемент такого объема можно рассматривать как точку, имеющую массу. Характеристиками жидкости здесь являются

скорость  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ , давление  $P = P(x, y, z, t)$ , плотность  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ .

Подчеркнем, что скорость (давление, плотность) рассматриваются в каждой данной точке пространства с координатами  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$  и относятся не к частицам жидкости, а к точкам пространства. Температуру можно считать как неизменной, так и любой удобной для данного рассмотрения.

Плотность  $\rho$  считаем неизменной вдоль всего объема жидкости и в течение всего времени движения. Иначе говоря, жидкость у нас несжимаемая. Сжи-

сжимаемостью называется способность вещества (тела) изменять свой объем под действием всестороннего давления.



Сжимаемость =  $(\Delta V / \Delta P)$  - изотермическая, адиабатическая. Пользуются понятием сжимаемости в виде  $\beta = - \Delta V / V \Delta P$ ,  $\text{Па}^{-1}$ . Для примера в таблице приведены коэффициенты сжимаемости некоторых жидкостей

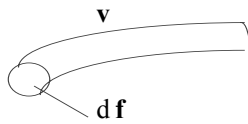
Вещество	$t^{\circ}\text{C}$	$P$ , атм	$\beta$ , $10^{-6} \text{ атм}^{-1}$
$\text{H}_2\text{SO}_4$	0	1-16	302,5
$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	20	1-50	112
Hg	20	1-10	3,91

## 1.2 Уравнение непрерывности

Пусть имеем объем  $V_0$ , тогда масса жидкости в нем

$$m = \int_{V_0} \rho dV. \quad (1)$$

Пусть  $f$  - площадь поверхности, ограничивающей объем  $V_0$ , а  $d\mathbf{f}$  - векторный элемент этой поверхности (с направлением вне (+) или во внутрь (-)).



Здесь  $\mathbf{v}$  - длина в единицу времени, тогда

$$dV_0 = \mathbf{v} \, d\mathbf{f}, \, dm' = \rho dV_0 = \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{f}, \Rightarrow m' = \int_f \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{f}. \quad (2)$$

Здесь  $m'$  - масса вытекающей из объема  $V_0$  жидкости или втекающей в него, а  $f$  - замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V_0$ . Выражение (2) характеризует массу жидкости, заключенную в данном объеме.

Получим из (1) массу, меняющуюся со временем в данном объеме жидкости

$$dm/dt = d[\int \rho dV]/dt.$$

Тогда

$$d[\int_{V_0} \rho dV]/dt + \int_f \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = 0$$

На основании теоремы Остроградского-Гаусса преобразуем интеграл по замкнутой поверхности в интеграл по объему

$$(\int_s \mathbf{g} \, d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{g} \, dV), \text{ где } \operatorname{div} \mathbf{g} = \sum_{i=1}^3 \partial g_i / \partial x_i, \, g_i - \text{компонента данного вектора, } x_i - \text{компонента радиус вектора.})$$

$$\int_f \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \int_{V_0} \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) \, dV$$

$$d[\int_{V_0} \rho dV] / dt + \int_{V_0} \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) \, dV = \int_{V_0} [\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v})] \, dV = 0$$

Так как  $V_0$  - произвольный объем, то и

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Получено так называемое уравнение непрерывности. В данном случае оно характеризует закон сохранения вещества. Часто используют  $\rho \mathbf{v} = \mathbf{j}$  - плотность потока,  $[\mathbf{j}] = \text{кг/м}^2\text{с}$ . В нашем случае плотность потока массы жидкости (а может быть: газа, частиц и т.п.).



### 1.3 Об уравнении Эйлера

Имеем определение давления

$$P = dF/dS$$

продифференцируем обе части по оставшейся координате  $| d/dx \Rightarrow$

$$dP/dx = dF/dV = F_{\text{ед. об.}}$$

Здесь  $F_{\text{ед. об.}}$  - сила, приходящаяся на единичный объем, учтем ее векторный характер

$$\mathbf{F}_{\text{ед. об.}} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = (\partial P / \partial x) \mathbf{i} + (\partial P / \partial y) \mathbf{j} + (\partial P / \partial z) \mathbf{k} = \text{grad } P.$$

В состоянии равновесия

$$\mathbf{F}_{\text{ед. об.}} = \text{grad } P.$$

Если равновесия нет, то можно записать уравнение движения согласно второму закону Ньютона

$$\rho d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}_{\text{ед. об.}} - \text{grad } P,$$

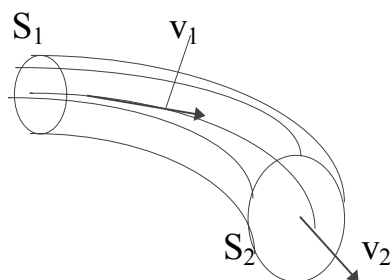
где  $\mathbf{v}$  - скорость единицы объема, а если учесть и силу веса жидкости, имеем:

$$\rho d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}_{\text{ед. об.}} - \text{grad } P + \rho \mathbf{g}.$$

Полученное выражение носит название уравнения Эйлера.

### 1.4 Теорема неразрывности струй

Картина тока жидкости представляется полем вектора скорости. Каждая линия тока является касательной к вектору скорости в данной точке. Густота линий тока пропорциональна величине скорости. Часть жидкости, ограниченная линиями тока называется трубкой жидкости. Вектора скорости не пересекают стенок трубки тока как касательные к ним.



Определение теоремы неразрывности струй:

$$S v = \text{cst}$$

Произведение величины сечения, проведенного через трубку тока в произвольной ее точке на среднюю скорость жидкости в этом сечении, есть величина постоянная.

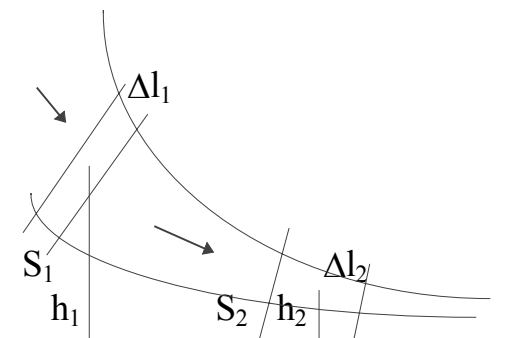
Следовательно

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \dots = S_i v_i = \dots$$

## § 2 Уравнение Бернулли

Вообще говоря, течение жидкости в трубке тока может быть произвольным. Течение жидкости называется стационарным или установившимся, если вектор скорости в каждой точке пространства текущей жидкости остается постоянным.

Рассмотрим трубку со стационарным течением. Пусть трубка ограничена стенками и сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . За время  $\Delta t$  сечения переместятся на длины  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ .



Здесь  $h_1$  и  $h_2$  - высоты центров масс элементов объемов трубки тока над заданным уровнем. Согласно теореме о неразрывности струй

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, S_1 \Delta l_1 / \Delta t_1 = S_2 \Delta l_2 / \Delta t_2,$$

$$\text{но так как } \Delta t_1 = \Delta t_2 \Rightarrow S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2 \Rightarrow \Delta V_1 = \Delta V_2.$$

То есть элементарные объемы жидкости, образующиеся около сечений  $S_1, S_2$  за один и тот же промежуток времени равны друг другу.

1. Рассчитаем кинетическую энергию элементарных объемов

$$K_1 = m_1 v_1^2 / 2 = \Delta V_1 \rho v_1^2 / 2, K_2 = \Delta V_2 \rho v_2^2 / 2$$

2. Рассчитаем потенциальную энергию относительно заданного уровня

$$W_1 = m_1 g h_1 = \rho \Delta V_1 g h_1, W_2 = \rho \Delta V_2 g h_2.$$

Для того чтобы рассчитать полное приращение энергии при переходе жидкости от объема  $\Delta V_1$  к объему  $\Delta V_2$  сложим кинетическую и потенциальную составляющие и найдем разность энергий между вторым и первым состояниями

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \Delta V_2 \rho v_2^2 / 2 + \rho \Delta V_2 g h_2 - \Delta V_1 \rho v_1^2 / 2 - \rho \Delta V_1 g h_1.$$

Данное приращение энергии должно равняться совершаемой над объемом работе при его перемещении. Работа давления на боковые стенки равна 0 (здесь перемещения нет). Остается работа за счет разницы давлений на торцах.

$$A = P_1 S_1 \Delta l_1 - P_2 S_2 \Delta l_2 = P_1 \Delta V - P_2 \Delta V, \Delta E = A \Rightarrow \rho v_2^2 / 2 + \rho g h_2 - \rho v_1^2 / 2 - \rho g h_1 = P_1 - P_2.$$

Произведено сокращение на элементарный объем, который в данном случае остается одинаковым.

$$\rho v_2^2/2 + \rho gh_2 + P_2 = \rho v_1^2/2 + \rho gh_1 + P_1.$$

Так как сечения выбирались произвольно, то

$$\rho v^2/2 + \rho gh + P = \text{cst.} \quad (1)$$

Это выражение будет точным при  $\Delta S \rightarrow 0$ .

Определение

В стационарно текущей жидкости в отсутствие внутреннего трения вдоль любой линии тока справедливо уравнение (1), которое называется уравнением Бернулли.

Уравнение Бернулли хорошо выполняется и для реальных жидкостей.

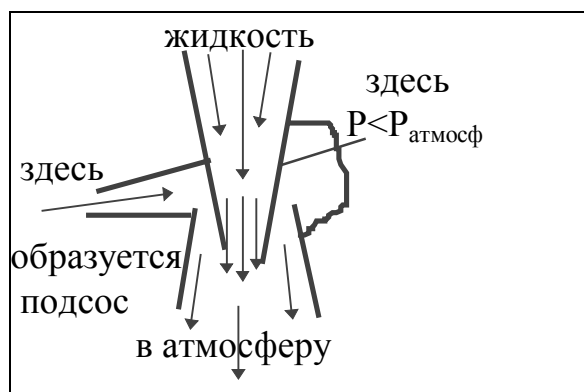
Следствие.

При  $h_1 = h_2$  (случай горизонтальных линий тока) уравнение имеет вид

$$\rho v_1^2/2 + P_1 = \rho v_2^2/2 + P_2.$$

Тогда, если  $v_1 > v_2$ , то  $P_1 < P_2$ .

Пример: Водоструйный насос



Водоструйным насосом достигается уменьшение давления до  $\sim 100$  мм. рт.ст, что в 7,6 раза меньше атмосферного давления.

### § 3 Ламинарное и турбулентное течения

Рассмотрим течение жидкости по трубе.

Ламинарное (слоистое):

жидкость разделяется на слои, которые скользят друг относительно друга не перемешиваясь, течение стационарно.

Турбулентное:

жидкость энергично перемешивается во всех направлениях (Р. Осборн, английский физик 1842-1912).

Рейнольдс для характеристики течения предложил следующую безразмерную величину

$$Re = \rho v l / \eta, [\eta] = \text{Па} \cdot \text{с} = \text{кг/м} \cdot \text{с}.$$

$\rho$  - плотность,  $v$  - средняя по сечению трубы скорость потока,  $\eta$  - коэффициент вязкости жидкости,  $l$  - характерный размер для трубы.

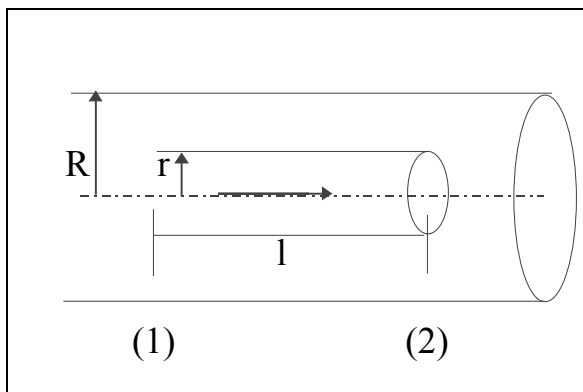
Начиная с некоторого критического значения числа  $Re$ , течение из ламинарного (для данной конфигурации сечения трубы) переходит в турбулентное. Для круглого сечения это  $Re = 1000$ . Характер течения различных жидкостей или (газов) будет одинаков для одинаковых чисел Рейнольдса.

Замечание. Иногда пользуются понятием кинематической вязкости

$$\nu = \eta / \rho \Rightarrow Re = vl / \eta, [\nu] = \text{м}^2 / \text{с}.$$

#### § 4 Формула Пуазейля

Рассмотрим течение жидкости по трубе круглого сечения. Пусть течение ламинарное. Будем искать зависимость скорости течения жидкости в трубе от радиуса трубы.



Выделим в трубе с текущей жидкостью воображаемый цилиндр. Так как движение жидкости равномерное, то сумма внешних сил, приложенных к этому цилиндру должна быть равна нулю.

Рассчитаем силы, действующие на цилиндр.

1. Основания цилиндра. Составим разность сил давления на основания

$$(P_1 - P_2) \pi r^2$$

2. Боковая поверхность. На боковую поверхность действуют силы внутреннего трения (вязкости).

$$F = K/t = \eta |dv/dr| S_{\text{бок}} = - \eta 2\pi r l dv/dr.$$

Знак минус означает убывание скорости с ростом  $r$ . Сложим силы и приравняем их к 0 (силы трения препятствуют перемещению, которому способствуют силы давления).

$$(P_1 - P_2) \pi r^2 + \eta 2\pi r l dv/dr = 0$$

$$dv/dr = - (P_1 - P_2) r / 2\eta l.$$

Интегрируем полученное дифференциальное уравнение.

$$\int dv = - (P_1 - P_2) / 2 \eta l \int r dr,$$

$$v = C - (P_1 - P_2) r^2 / 4\eta l \quad (*)$$

Найдем константу интегрирования  $C$  по граничному условию

$v = 0$  (при  $r=R$ ), то есть скорость движения у стенки жидкости равна 0, тогда

$$C = (P_1 - P_2) R^2 / 4\eta l \quad (1).$$

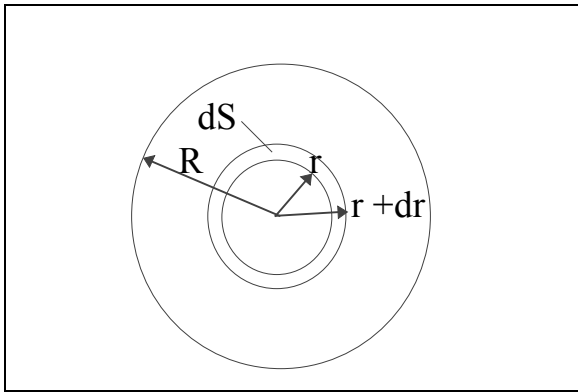
Подставим (1) в (\*) и преобразуем.

$$v = (1 - r^2/R^2)(P_1 - P_2) R^2 / 4\eta l.$$

То есть  $v \sim r^2$ , следовательно,  $v(r)$  - парабола. В центре трубы при  $r = 0$  скорость максимальна

$$v_{\text{макс}} = v(0) = (P_1 - P_2) R^2 / 4\eta l \Rightarrow v(r) = v_{\text{макс}} (1 - r^2/R^2). \quad (2)$$

Вычислим поток жидкости ( $Q$ ) - объем жидкости, протекающей за единицу времени через поперечное сечение трубы  $S$ .



Через кольцо (как это показано на рисунке) за 1с пройдет объем жидкости равный произведению площади кольца  $dS$  на среднюю скорость движения жидкости в точках кольца ( $v = l/t$ ).

Замечание: в данном случае  $dQ$  - поток в единицу времени,  $\text{м}^3/\text{с}$ , но если домножить его на плотность (что всегда можно сделать, так как плотность не меняется), то получим -  $\text{м}^3 \text{ кг}/\text{с} \text{ м}^3 = \text{кг}/\text{с}$ , то есть - ежесекундную массу. Итак

$$dQ = dS v(r) = 2\pi r dr v(r).$$

Подставим  $v(r)$  из (2)

$$dQ = v_{\text{макс}} (1 - r^2/R^2) 2\pi r dr \Rightarrow$$

$$Q = v_{\text{макс}} 2\pi \int_0^R (1 - r^2/R^2) r dr = 2\pi v_{\text{макс}} [(r^2/2) - (r^4/4R^2)] \Big|_0^R = v_{\text{макс}} \pi R^2/2 = \\ = v_{\text{макс}} S/2.$$

Подставим значение  $v_{\text{макс}}$  из (2)

$$Q = (P_1 - P_2) S R^2 / 8\eta l.$$

Полученное выражение носит название формулы Пуазейля. С учетом  $S = \pi R^2$  можно получить выражение вида

$$Q = (P_1 - P_2) S^2 / 8\eta l \pi.$$

Из формулы Пуазейля следует, что поток жидкости прямо пропорционален перепаду давления на единицу длины при прочих равных условиях

$$Q \sim (P_1 - P_2)/l.$$

## Расчет кинетической энергии потока жидкости

$$dK = dm v^2(r)/2$$

$$dm = \rho dV, dV = dS v(r), dS = 2\pi r dr \Rightarrow dm = \rho v(r) 2\pi r dr \Rightarrow$$

$$dK = \pi \rho v^3 r dr.$$

Используем выражение (2) и для расчета кинетической энергии останется вычислить интеграл

$$K = \rho \pi (\Delta P R / 4\eta l)^3 \int (1 - r^2/R^2)^3 r dr \quad ([K] = \text{Дж/с}).$$

Работу, совершаемую жидкостью при движении можно вычислять по формуле

$$A = \int \Delta P dV.$$

Чтобы перейти к интегрированию по радиальной координате (так как скорость зависит только от нее) произведем замену, получим

$$dV = v 2\pi r dr \quad ([V] = \text{м}^3/\text{с}), \quad A = 2\pi \Delta P \int v r dr =$$

$$= \pi \Delta P^2 R^2 / 2\eta l \int (1 - r^2/R^2) r dr.$$

Эффект Магнуса. (М. Генрих, 1802 - 1870, немецкий физик)



Цилиндрическое тело приводится во вращательное движение внутренними средствами. Оно находится под воздействием потока частиц слева на рисунке (ветер). Возникает сила, действующая перпендикулярно направлению потока частиц, определяемая разностью давлений.



## Глава 6 *Строение и свойства кристаллов*

### § 1 Простые кристаллические структуры. Плотность кристаллов и межатомные расстояния

**Т**вердые тела подразделяются на тела аморфные и кристаллические. В кристаллических телах из атомов образуется регулярный строй, неизменный во времени. Этот регулярный строй (расположение) атомов в твердых телах называют кристаллической структурой. Иногда говорят: кристаллическая решетка или просто решетка. При этом говорят о регулярном (правильном) дальнем порядке расположения атомов, тогда как у аморфных тел реальным является только ближний порядок. Следует иметь в виду, что в реальных кристаллах дальний порядок реализуется лишь в относительно небольших областях - зернах. На границах таких зерен порядок меняется. Размер зерен составляет доли миллиметра. Если оценить межатомные расстояния (постоянную решетки) как  $10\text{\AA}$ , тогда как  $0,1\text{ мм} = 10^6\text{\AA}$ , то количество атомов в такой цепочке составит  $\sim 10^5$  штук. Мы будем идеализировать весь кристалл, считая его бесконечным (подспудно подразумевая зерна).

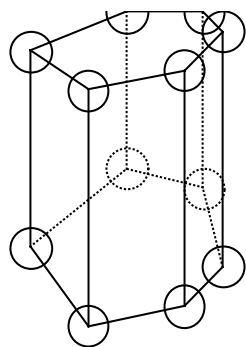
#### 1.1 О простых кристаллических структурах

Атомам надо упаковаться в твердом теле наиболее плотно (вследствие сил взаимодействия), иначе твердые тела распадутся, и не будут таковыми. Существуют различные виды связей атомов и молекул. Здесь мы будем априорно предполагать наличие таких связей.

Перечислим наиболее часто встречающиеся кристаллические структуры:  
ПК - простая кубическая структура - атомы находятся в вершинах куба.  
ОЦК - объемно-центрированная кубическая структура - к ПК добавлен атом в геометрический центр куба.

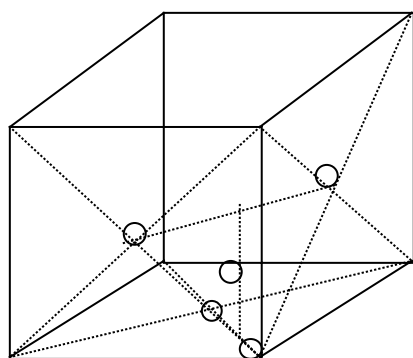
ГЦК - гранецентрированная кубическая структура - к ПК добавлено по атому в центр каждой грани.

ГЕКС - гексагональная структура с плотной упаковкой - слои шестиугольных тетраэдров с атомами в вершинах правильных шестиугольников.



Существует также много других структур.

Остановимся подробнее на структуре типа алмаза. Структура типа алмаза образуется из гранецентрированной кубической решетки. Атом в одной из вершин куба и три ближайших соседних атома такой решетки, расположенные в соседних гранях куба, сходящихся к этой вершине, образуют правильный тетраэдр. В центре этого правильного тетраэдра помещается еще один атом. Также необходимо поступить и с тетраэдрами образованными у других вершин куба.



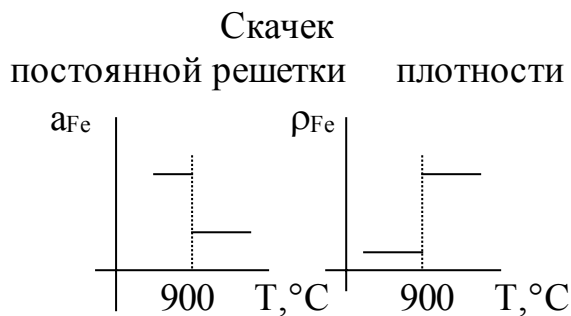
## 1.2 Плотность кристаллов и межатомные расстояния

Координационное число – число ближайших к данному атому соседних атомов, тогда

Структура	Координационное число
Типа алмаза	4
Пк	6
Оцк	8
Гцк	12
Гекс	12

Природа устроена так, что при различных упаковках решетка в целом энергетически находится (для каждой отдельной упаковки) в своем равновесном состоянии. Чем меньше координационное число, тем больший объем приходится на один атом и тем более «рыхлой» является упаковка. Пример: -  $\alpha$  и  $\gamma$  - железо.

Координационное число	Упаковка и вид железа	Температура, °C
8	ОЦК $\alpha$ - Fe	300 - < 900
12	ГЦК $\gamma$ - Fe	$\geq$ 900



Плотность кристалла можно связать с таким микроскопическим параметром как постоянная решетки. Постоянная решетки совпадает по смыслу с расстоянием между ближайшими соседними атомами только в случае простой кубической решетки. Ограничимся в данном случае представлением о постоянной решетки, как о некоем характерном расстоянии между соседними атомами в кристалле, тогда

$$V = a^3,$$

где  $V$  - некоторый характерный элементарный объем в кристалле.

$$\rho = m/V = m/a^3 = nM/N_A a^3$$

$m$  - масса атомов в данном элементарном объеме

$M$  - молярная масса (или атомная)

$N_A$  - число Авогадро,  $M/N_A$  – масса одного атома

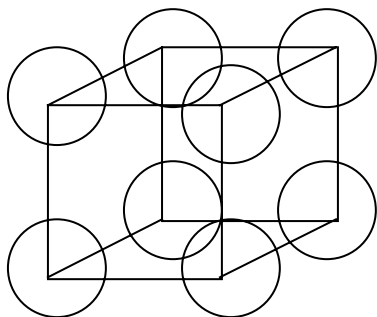
$n$  - количество атомов, приходящихся на данный элементарный объем (элементарную ячейку).

Более точно пишут:

$$\rho = nM/kN_A a^3 \Rightarrow a = (n M/k N_A \rho)^{1/3},$$

в нашем случае  $k = 1$ .

Определим  $n$  для простой кубической ячейки. Для наглядности представим атомы в решетке согласно рисунку



Для простой кубической ячейки за элементарную ячейку можно принять кубик, в вершинах которого находятся атомы.

Каждый атом в вершине на  $1/8$  часть принадлежит кубической ячейке, тогда, поскольку всего таких атомов 8, имеем  $n = 1$ .

Для ОЦК - решетки прибавится еще один атом в центре. Итого будет  $n = 2$ . Рассчитаем постоянную решетки для ОЦК решетки железа (т.е.  $\alpha$  - Fe).

$$a^3 = n M / k N_{\text{Ав}} \cong 2 \cdot 56 \cdot 10^{-3} / 1,6,02 \cdot 10^{23} \cdot 7,88 \cdot 10^3 \cong 2 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow a \cong 0,287 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 0,287 \text{ нм} = 2,87 \text{ \AA}.$$

Замечено, что ГЦК - решеткой обладают благородные газы и большинство металлов. В таблице приводятся постоянные решетки для некоторых элементов

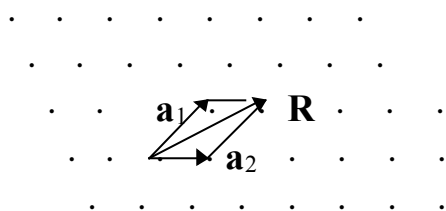
Элемент	тип решетки	постоянная решетки, А
$\alpha$ - Po -	ПК (единственный элемент с простой кубической решеткой при нормальных условиях)	
Fe	ОЦК - не плотная упаковка	2,87
W	ОЦК - не плотная упаковка	3,16
Ar (T = 4,2 K)	ГЦК - плотная упаковка	5,26
Kr (T = 58 K)	ГЦК - плотная упаковка	5,72
Xe (58 K)	ГЦК - плотная упаковка	6,20
Ti	ГЕКС - плотная упаковка	2,95
Be	ГЕКС - плотная упаковка	2,29

## § 2 Решетка Бравэ и ячейка Вигнера -Зейтца

Необходимо более строго определить элементарную ячейку в кристалле иначе называемую примитивной ячейкой.

Примитивная ячейка:

такой минимальный объем пространства кристалла, который при всех возможных трансляциях заполнит пространство до бесконечности



$\mathbf{R}$  - вектор трансляции,  $\mathbf{a}_i$  - базовые вектора (одновременно все три - некопланарные). Для произвольной точки трехмерного пространства можно записать

$$\mathbf{R} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3. \quad (1)$$

$n_i$  - целые числа.

Первое определение решетки Бравэ:

бесконечная периодическая структура, образованная дискретными точками (узлами, атомами) и имеющая абсолютно одинаковый пространственный порядок и ориентацию независимо от исходной точки.

Второе определение решетки Бравэ:

трехмерная решетка Бравэ образована всеми точками с радиус- векторами  $\mathbf{R}$  вида (1).

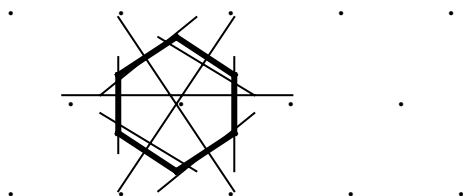
Термин “решетка Бравэ” применяется как ко множеству точек, так и ко множеству векторов, соединяющих эти точки. Иногда говорят, что решетка Бравэ понимается как множество трансляций, определяемых векторами.

Теперь можно вернуться к определению примитивной (элементарной) ячейки, основываясь на том, что параллельным переносом такой примитивной ячейки может быть образована вся решетка Бравэ.

Определение примитивной ячейки:

объем пространства, который, будучи подвергнут всем трансляциям, образующим решетку Бравэ, заполнит все пространство, нигде не перекрываясь и нигде не оставляя пустот.

Выделить примитивную ячейку не всегда легко. Это, вообще говоря, самостоятельная задача, так как существует множество разных и подчас очень сложных решеток. Ячейка Вигнера-Зейтца – одна из них: (обладает полной симметрией решетки Бравэ)



Определение.

Ячейка Вигнера-Зейтца - наименьший многогранник, ограниченный плоскостями, проведенными через середины прямых, соединяющих ближайшие узлы.

На плоском рисунке плоскости заменены прямыми. Если в пространстве попытаться изобразить для ОЦК - решетки примитивную ячейку, то получим усеченный октаэдр.

Специалисты по физике твердого тела чаще интересуются всеми указанными построениями в пространстве - обратном линейному пространству. Это связано с тем обстоятельством, что в таком обратном пространстве проще перейти к пространству энергии и импульса для микроскопических объектов типа атом, электрон, фотон, а также квазичастиц: дырка, фонон, полярон и т.п. . При этом расчеты ведутся по формулам

$$k = 2\pi/\lambda, \quad p = \hbar k = 2\pi\hbar/\lambda, \quad \varepsilon = \hbar\omega = \hbar c/\lambda.$$

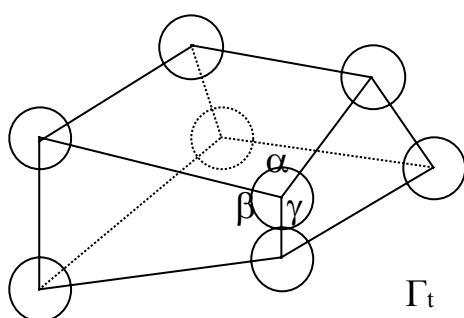
Здесь  $\lambda$  - длина волны,  $k$  - волновое число,  $p, \varepsilon$  - импульс и энергия частиц,  $\hbar = h/2\pi$  - постоянная Планка.

Замечание о терминологии: Когда говорят “элементарная” или “условная” ячейка, то при этом не подразумевается примитивная ячейка. Обратная ячейка всегда определена по отношению к конкретной прямой решетке Бравэ.

### § 3 Кристаллические системы

Рассмотрим все возможные типы симметрий решеток Бравэ по отношению к поворотам и отражениям. Такие типы симметрий носят название кристаллических систем или сингоний. Каждая из них представляет собой определенную совокупность осей и плоскостей симметрии.

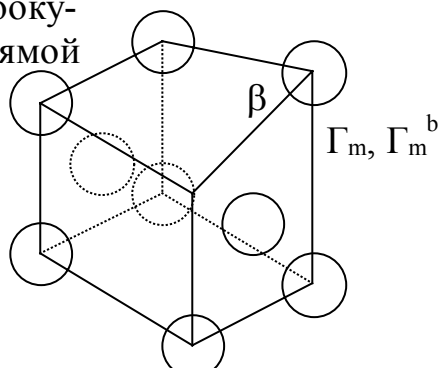
#### 1. Триклинная система (наименее симметричная из всех)



Параллелепипед с произвольными ребрами и углами  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ,  $a \neq b \neq c$ ,  $t$  - триклинная, 1 штука

#### 2. Моноклинная система

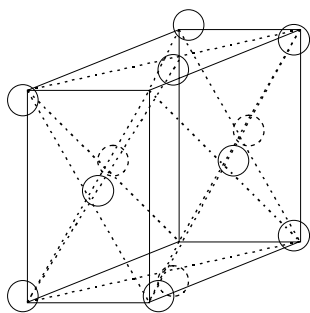
На боку-  
- прямой



Прямой параллелепипед с произвольными основаниями  $\alpha = \gamma = \pi/2$ ,  $\beta \neq \pi/2$ ,  $a \neq b \neq c$ ,  $m$  - моноклинная,  $\Gamma_m^b$  - с атомами в двух гранях (центрированными основаниями),  $b$  - базовая, 2 штуки.

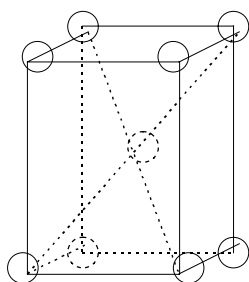
#### 3. Ортогональная система (или ромбическая)





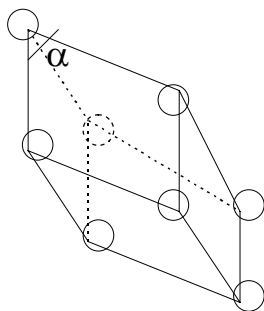
Прямоугольный параллелепипед,  $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$ ,  $a \neq b \neq c$ .  $\Gamma_0$  - ортогональный,  $\Gamma_0^v$  - объемно-центрированный,  $\Gamma_0^b$  - с центрированными основаниями - базоцентрированный,  $\Gamma_0^f$  - гранецентрированный.  $b$  - атомы только в гранях основаниях,  $f$  - атомы в центрах всех граней, 4 штуки.

#### 4. Квадратная система (или тетрагональная)



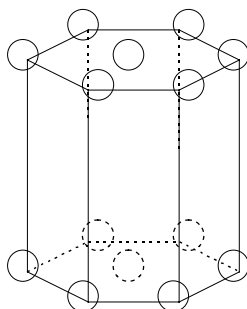
Прямая призма с квадратными основаниями  $b = a \neq c$ .  $\Gamma_q$ ,  $\Gamma_q^v$ .  $q$  - квадратная, 2 штуки.

#### 5 Ромбоэдрическая система (тригональная)



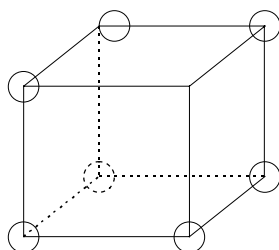
Ромбоэдр - куб, сжатый вдоль его пространственной диагонали,  $\Gamma_{rh}$ ,  $rh$  - ромбоэдрическая, 1 штука.

## 6. Гексагональная система



Правильная шестигранная призма,  $\Gamma_h$ ,  $h$  - гексагональная. Обязательно с атомами в центрах оснований - такова единственная реализация данной кристаллической системы, 1 штука.

## 7. Кубическая система



$\Gamma_c$  - Простая,  $\Gamma_c^v$  - объемно-центрированная,  $\Gamma_c^f$  - гране-центрированная, 3 штуки.

Отметим, сколько величин необходимо указать, чтобы определить решетку Бравэ кристаллической системы. Прямые углы и равные стороны при этом не указываются.

Обозначение системы	Количество реализуемых решеток данной системы	Элементы	Количество элементов, необходимое для однозначного определения системы
$\Gamma_t$	1	$\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$	6
$\Gamma_m$	2	$\beta, a, b, c$	4
$\Gamma_o$	4	$a, b, c$	3
$\Gamma_q$	2	$a, c$	2
$\Gamma_{rh}$	1	$\alpha, a$	2
$\Gamma_h$	1	$a, c$	2
$\Gamma_c$	3	$a$	1
Итого	14		

Кристаллограф Е.С.Федоров (1853 - 1919) показал, что может существовать всего:

c	36 кубических
q	68 тетрагональных (квадратных)
h	27 гексагональных
rh	25 ромбоэдрических
o	59 ромбических (ортогональных)
m	13 моноклинных
t	2 триклинных
Итого	230

Всего 230 пространственных групп, которые распределены по кристаллическим системам в соответствии с таблицей.

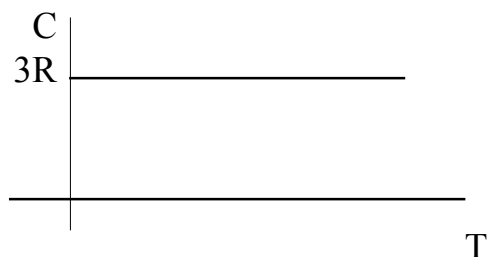
#### § 4 Теплоемкость кристаллов

Расположение частиц (атомов) в узлах кристаллической решетки отвечает минимуму их взаимной потенциальной энергии. Колебания вдоль произвольного направления можно представить как наложение колебаний вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений. При расчете теплоемкости твердых тел по модели идеального газа имеем:

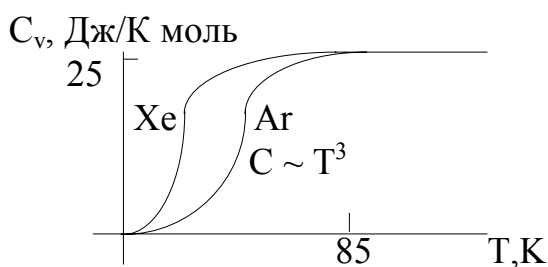
$$\varepsilon = i kT/2, i=3, U = N_A \cdot 3 kT/2 = 3RT.$$

Число Авогадро,  $N_A$ , можно использовать в случае простых химических веществ, например, металлов. Удвоение энергии (появление множителя 2) для любых твердых тел связано с тем, что колебательное движение определяется наличием как кинетической, так и потенциальной составляющих энергии, а для гармонического осциллятора их средние значения одинаковы. Тогда

$$C = dU/dT = 3R = 8/3 \cdot 3 = 25 \text{ Дж/К моль.}$$



Такая модель носит название закона Дюлонга - Пти. Однако, на начальном участке закон Дюлонга - Пти не совпадает с экспериментальными результатами. Существует модель Дебая, которая более точно отражает поведение теплоемкости при низких температурах и плавно переходит в закон Дюлонга - Пти при высоких температурах, как это иллюстрируется графиком для благородных газов



Формула в модели Дебая для теплоемкости при низких температурах имеет вид

$$C_v \cong 234 (T/\theta_D)^3 nk.$$

Здесь  $k$  - постоянная Больцмана,  $n$  - число атомов в одном моле вещества. Характерная температура  $\theta_D$ , при которой происходит переход от кубической зависимости к отсутствию зависимости теплоемкости твердых тел от температу-

ры, называется температурой Дебая. Для примера в таблицу сведены некоторые дебаевские температуры

Кристалл	$\theta_D$ , K	$T_{\text{плавл}}$ , C
Fe	420	1530
алмаз	1860	
Cu	315	1083
Ag	215	960,8
Au	170	1063
Zn	234	

До сих пор речь здесь шла о решеточной теплоемкости. Не была учтена теплоемкость, определяемая свободными электронами (точнее говоря квазисвободными, которые могут перемещаться по кристаллу под действием электрического поля, не выходя за пределы кристалла). Эти электроны называют также электронным газом, они тоже дают свой вклад в теплоемкость. В модели статистики Ферми-Дирака эта теплоемкость рассчитывается по формуле:

$$C_v = \pi^2/2 (kT/\varepsilon_F)n k.$$

Здесь  $\varepsilon_F$  - так называемая энергия Ферми - энергия состояний частиц и квазичастиц в кристалле. Отметим, что зависимость от температуры здесь линейная  $C_v \sim T$ , и поэтому влияние на теплоемкость кристаллов электронного газа заметно сказывается только при температурах еще более низких, чем дебаевские.

### Часть 3 Электричество и магнетизм

В механике нас интересовало поведение тел как единого целого или частей целого при приложении к ним сил извне. Тела в результате двигались поступательно, вращались. Частично было рассмотрено поведение тел при скоростях близких к скорости света.

В молекулярной физике мы как бы заглянули внутрь тел при большом увеличении. Изучали процессы, происходящие в телах и с телами на уровне молекул.

В данном разделе мы обратимся к кругу явлений, обусловленных наличием и взаимодействием частиц особого сорта. Под особым сортом подразумеваются частицы, обладающие (снабженные) так называемым электрическим зарядом. Взаимодействие таких частиц осуществляется через посредство электрических и магнитных (а, вообще говоря, электромагнитных) полей.

Пока заряженная частица покоится (а мы покоимся вместе с ней), поле вокруг нее называют электрическим. Оно обладает своими специфическими свойствами. Вокруг движущейся заряженной частицы (или если наблюдатель движется относительно заряженной частицы) «возникает» еще одно поле, так называемое магнитное поле. Постараемся разобраться в круге обозначенных явлений.

## Глава 1 Электрическое поле (вакуум)

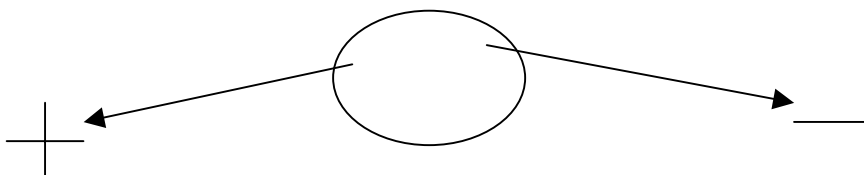
### § 1. Электрические заряды

**О**б электричестве нам кое-что известно. Что можно констатировать?

Установлено экспериментально, что все заряженные частицы можно разделить на два класса таким образом, что: если частицы А и В отталкиваются, но частица А в это время притягивает частицу С, то и частица В также будет притягивать частицу С.

Причина существования этого свойства в точности не известна

Некоторые философы существование  $+$  и  $-$  зарядов рассматривают как противоположное проявление одного качества. Так же, например, как левое и правое.



Тело сохраняет электро-нейтральность

Наша вселенная (наша жизнь) представляет собой уравновешенную (может быть не до конца, это точно не известно) смесь положительных и отрицательных зарядов.

Свойства зарядов

- а. Закон сохранения электрических зарядов
- б. Закон квантования зарядов.

Сформулируем два эти свойства, которые нам нужно будет учитывать во всем дальнейшем рассмотрении.

а.

Суммарный заряд электрически изолированной системы не изменяется.

б.

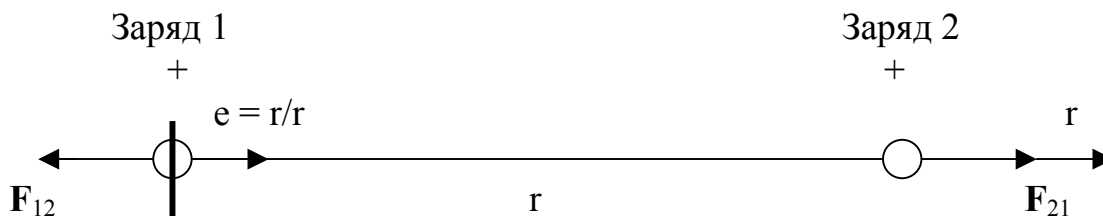
Справедливо следующее утверждение:

Минимальный (элементарный) заряд, наблюдаемый экспериментально численно равен заряду электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Наконец, последнее утверждение, которое можно констатировать, - справедлив закон Кулона для точечных зарядов

$$F = k q_1 q_2 / r^2.$$

Определение. Сила, с которой взаимодействуют электрически заряженные тела точечного размера, прямо пропорциональна величинам зарядов этих тел, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль линии их соединяющей.

Сила – вектор. Направление силы в каждом конкретном случае определяется знаками зарядов и выбором системы координат. При этом необходимо учитывать число взаимодействующих между собой заряженных тел или непрерывный характер распределения заряда. В качестве примера рассмотрим ситуацию с двумя точечными заряженными телами.



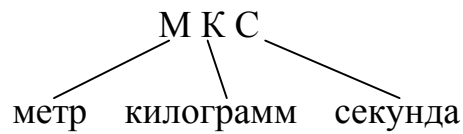
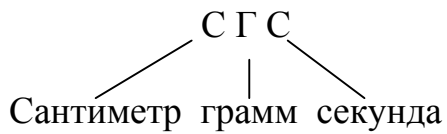
$$\mathbf{F}_{12} = k|q_1 q_2| (\mathbf{r}/r)/r^2$$

$\mathbf{F}_{12}$  – сила, действующая на заряд 1 со стороны заряда 2,  $\mathbf{e} = \mathbf{r}/r$  – орт, задающий направление оси.

## § 2. О единицах измерения заряда

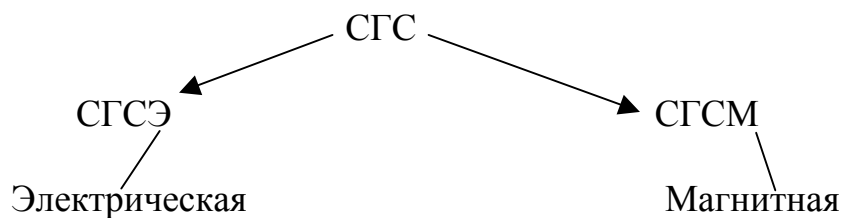
Из систем единиц измерения физических величин, которых существует много (а предложить можно бесконечно много), упомянем о:





Через эти три физические величины: длину, время и массу (их называют основными единицами измерения физических величин) можно определить все механические величины, и тогда записать точные физические законы.

Чтобы распространить единицы измерения на электрические и магнитные явления, необходимо ввести одну или несколько основных электромагнитных единиц, через нее определить остальные единицы и записать законы электромагнетизма.



## СГСЭ

Из закона Кулона получим единицу заряда СГСЭ

$$F = k q_1 q_2 / r^2 \Rightarrow (q_1 = q_2 = q, k = 1) \Rightarrow F = q^2 / r^2.$$

Пусть  $k = 1$ , то есть коэффициент в законе безразмерный и численно равен 1. Квадратными скобками (как это принято) в дальнейшем будем показывать размерности физических величин.

$$[q] = [Fr^2]^{1/2} = (\text{дн см}^2)^{1/2} = (\text{г см}^3/\text{с}^2)^{1/2} = \text{г}^{1/2} \text{см}^{3/2} \text{с}^{-1} = 1 \text{ СГСЭ}$$

единица заряда.

1СГСЭ единица заряда называется абсолютной электростатической единицей заряда.

## СГСМ

Получим ее из законов Био-Савара-Лапласа и Ампера.

а. Закон Био-Савара-Лапласа запишем в виде

$$B = k_1 i \, dl / r^2.$$

Этот закон позволяет рассчитать величину магнитной индукции, создаваемую постоянным током, проходящим через элемент  $dl$  провода. Здесь  $k_1$  – коэффициент, позволяющий уравнять левую и правую части формулы.

б. Закон Ампера

$$F = k_2 I B \, l.$$

Этот закон позволяет рассчитать величину силы, действующей на проводник длины  $dl$  с током в магнитном поле.  $dB$  из а. подставим в б., причем пусть токи и длины все равны по величине ( $l = r$ ), тогда

$$F = k_1 k_2 I^2 l^2 / r^2 = k I^2, \quad k = k_1 k_2 = 1 \Rightarrow [I] = [F]^{1/2} = \text{дн}^{1/2} = 1 \text{ СГСМ} -$$

-единица силы тока.

Она называется абсолютной электромагнитной единицей силы тока. Через эту силу тока выражаются все остальные электромагнитные единицы (+ 3 основные единицы из механики) в том числе и единица заряда.

Определение.

Одной единицей СГСМ силы тока называется сила не изменяющегося тока, который течет в двух параллельных, прямолинейных проводниках бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, находящихся на расстоянии 2 см один от другого в вакууме и вызывающего между этими проводниками силу в 1 дину на 1 см длины.

Заметим, что поскольку

$$[q]_{\text{СГСМ}} = [It] = \text{дн}^{1/2} \text{с} \Rightarrow [q_{\text{СГСЕ}} / q_{\text{СГСМ}}] = \text{дн}^{1/2} \text{см} / \text{дн}^{1/2} \text{с} = \text{см} / \text{с}.$$

Опустив аргументацию, утверждаем далее, что это отношение с размерностью скорости – скорость света в вакууме (или электродинамическая постоянная как ее называют более формально). Тогда

$$q_{\text{СГСМ}} = q_{\text{СГСЭ}}/c \Rightarrow F = q_{\text{Э1}}q_{\text{Э2}}/r^2 = c^2 q_{\text{М1}}q_{\text{М2}}/r^2.$$

Таким образом, закон Кулона в СГСМ системе единиц запишется в виде

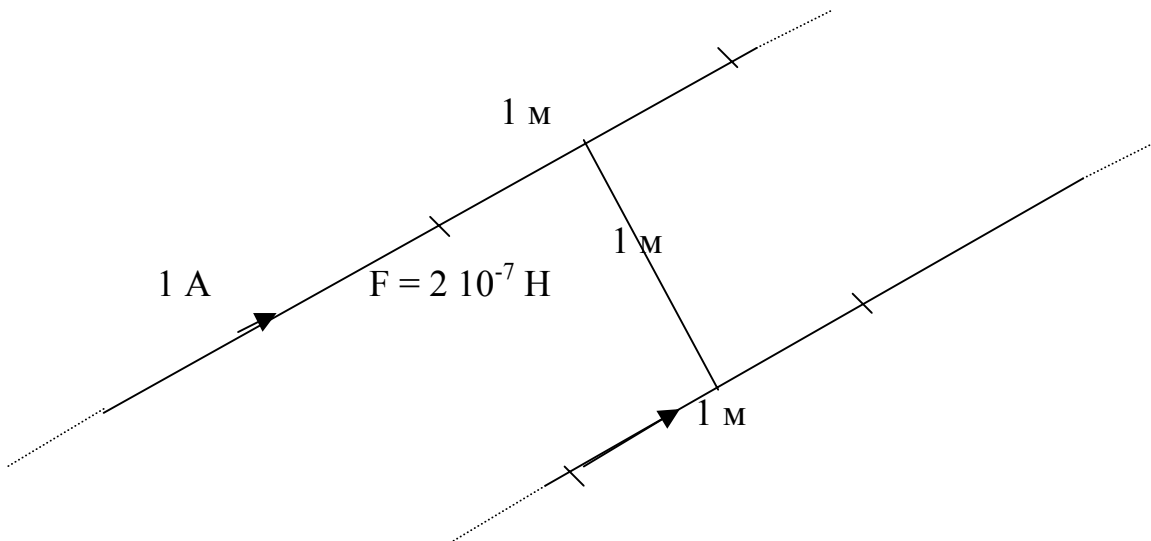
$$F = c^2 q_1 q_2 / r^2.$$

### МКСА (МКС + А – Ампер)

Основной электромагнитной единицей в МКСА является сила тока в 1А (А – ампер).

Определение

1 ампер – сила не изменяющегося тока, который течет в двух прямолинейных параллельных проводниках бесконечной длины и ничтожно малого сечения на расстоянии 1 м один от другого в вакууме и вызывает между этими проводниками силу взаимодействия равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.



Можно показать (из законов Ампера и Био-Савара-Лапласа) для прямых проводов, что

$$F = k i_1 i_2 l^2 / r^2.$$

То есть согласно определению

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ Н} = k 1 \text{ А}^2 1 \text{ м}^2 / 1 \text{ м}^2.$$

$k$  выбирают (полагают) равным:  $k = \mu_0 / 2\pi \Rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ . Из закона Ампера, уже имея 1А, получим

$B = F / i l$  Н/Ам, По определению Н/А м = Тл (Тесла), тогда  $\Phi = BS$  Тл м<sup>2</sup>. По определению Тл м<sup>2</sup> = Вб (Вебер), тогда  $\Phi = L i \Rightarrow L = \Phi / i$  Вб/А. По определению Вб/А = Гн (Генри), тогда размерность  $\mu_0$  преобразуется следующим образом  $[\mu_0] = \text{Н м} / \text{А}^2 \text{м} = \text{Тл м}^2 / \text{А м} = \text{Вб} / \text{А м} = \text{Гн} / \text{м}$ .  $\mu_0$  называют магнитной постоянной.

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

Зная  $[i] = 1 \text{ А}$ , получим единицу заряда  $q = i t$  А с . По определению, А с = Кл (Кулон).

Обратимся к закону Кулона

$$F = k q_1 q_2 / r^2.$$

Если взять  $q_1 = q_2 = 1 \text{ Кл}$ , то  $k$  оказывается не безразмерным и не равным 1, его выбирают (полагают) равным

$$k = 1/4\pi\epsilon_0 \Rightarrow F = 1/4\pi\epsilon_0 (q^2/r^2).$$

О размерности  $\epsilon_0$ :

$$[\epsilon_0] = [q^2 / Fr^2] = \text{Кл}^2 / \text{Н м}^2 = \text{Кл}^2 / \text{Дж м} = \text{Кл} / \text{В м} = \text{Ф} / \text{м}.$$

О численном значении  $\epsilon_0$ :

Из опыта косвенно следует, что два точечных электрических заряда по одному Кулону каждый, расположенные на расстоянии 1м друг от друга в вакууме взаимодействуют между собой с силой равной  $9 \cdot 10^9 \text{ Н}$ . Тогда

$$9 \cdot 10^9 = 1 \text{ Кл}^2 / 4\pi\epsilon_0 1 \text{ м}^2 \Rightarrow \epsilon_0 = 1/4\pi 9 \cdot 10^9 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$$

$\epsilon_0$  называют электрической постоянной. Она также как и  $\mu_0$  появилась в МКСА системе единиц. Далее делаем следующее утверждение.

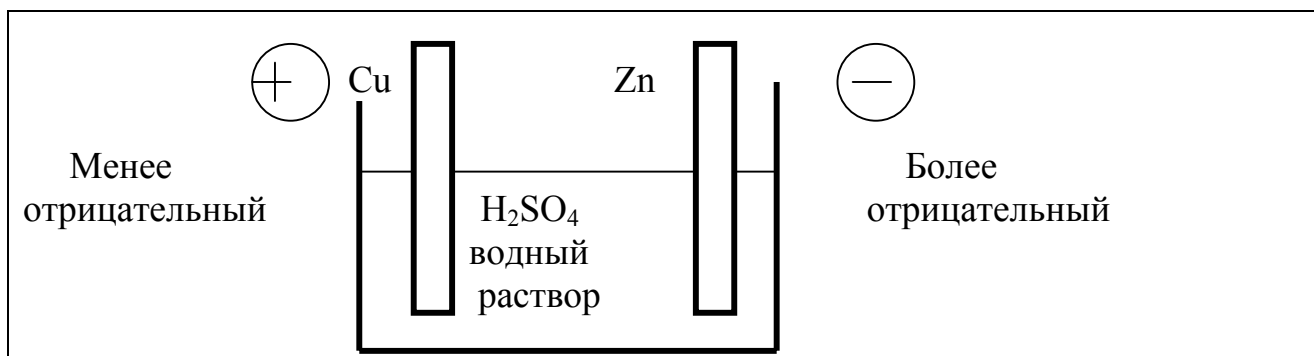
Система МКСА совпадает с СИ (SI) – международной системой единиц измерения! SI – System International of Units.

Расчет размерности и численного значения выражения  $(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  дает:  $[(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}] = \text{м/с}$ ,  $(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Заметим, что  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – скорость света в вакууме. Она же называется электродинамической (или электромагнитной) постоянной.

## § 3. О получении электрических зарядов. Гальванические элементы

### 3.1 Элемент Вольты (1800г.)

Элемент Вольты представляет собой сосуд, наполненный водным раствором серной кислоты с погруженными в нее медными и цинковыми электродами



Кислота в водном растворе диссоциирует



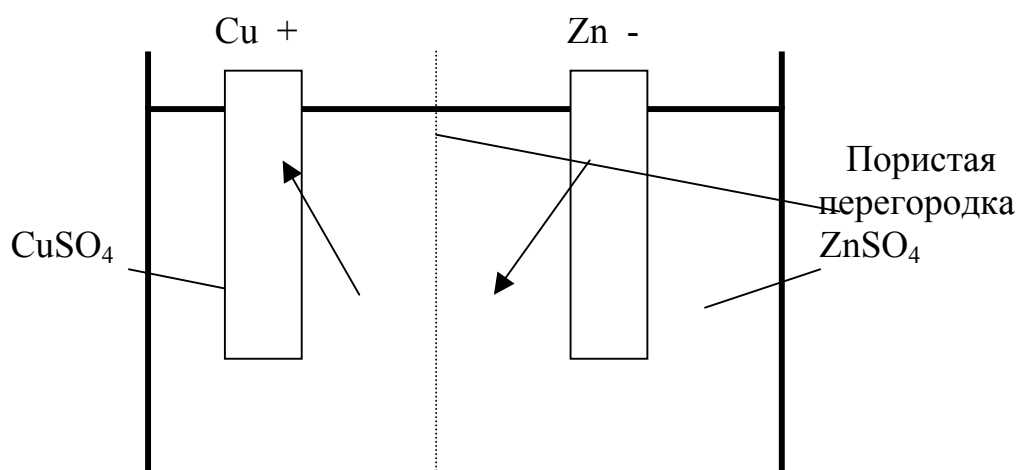
Металлы взаимодействуют с анионом  $\text{SO}_4^{--}$ , причем выходят в раствор и образуют соли



Zn (!) эффективнее уходит со своего электрода, чем медь, и заряжает цинковый электрод более отрицательно, чем медь - медный. В этом случае медный электрод можно считать эффективно положительно заряженным по сравнению с медным.

### 3.2 Элемент Даниэля-Якоби

Элемент Даниэля - Якоби отличается от элемента Вольты тем, что электроды у него погружаются не в кислоту, а в растворы солей  $\text{CuSO}_4$  - (Cu),  $\text{ZnSO}_4$  - (Zn).



Пористая перегородка предохраняет растворы от быстрого перемешивания. Растворы при этом выбираются так называемой нормальной концентрации - 1 моль/литр. При таком выборе образующийся в системе потенциал электрода будет зависеть только от типа металла (Cu, Zn, ...). Этот потенциал характеризует способность металла посылать ионы в раствор и называется нормальным абсолютным потенциалом.

Как происходит образование зарядов на электродах в элементе Даниэля-Якоби?

Zn: катионы цинка, как и у Вольты, уходя с электрода, заряжают его отрицательно.

Cu: здесь, наоборот, катионы меди идут из раствора и оседают на электроде, заряжая его положительно.

Такой эффект достигается при нормальной концентрации растворов, так как при этом равновесие сдвигается в данную сторону. Тогда, в идеале будет

$$\phi_{\text{Zn}} = - 0,76 \text{ В}$$

$$\phi_{\text{Cu}} = + 0,34 \text{ В}$$

---


$$\Delta\phi = 1,10 \text{ В.}$$

#### § 4 Электризация как разделение зарядов

В любом гальваническом элементе имеется два электрода, один положительный, другой отрицательный. Опыт показывает, что возникновение заряда

какого-то знака на объекте ВСЕГДА сопровождается появлением заряда противоположного знака, равного ему количественно (по модулю) в другом месте.

Определение.

Всякий процесс электрического заряжения тел есть процесс разделения зарядов.

Пример.

Рассчитаем заряд «свободных» электронов в одном кубическом сантиметре серебра –  $\text{Ag}_{102}^{47}$ . Серебро одновалентно.

Число атомов серебра в  $1 \text{ см}^3$

$$n = 5,86 \cdot 10^{22}. Q = 5,86 \cdot 10^{22} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 9,4 \cdot 10^3 \text{ Кл.}$$

Чтобы узнать заряд всех электронов, содержащихся в  $1 \text{ см}^3$  серебра нужно умножить полученное число на полное число электронов в его атоме.

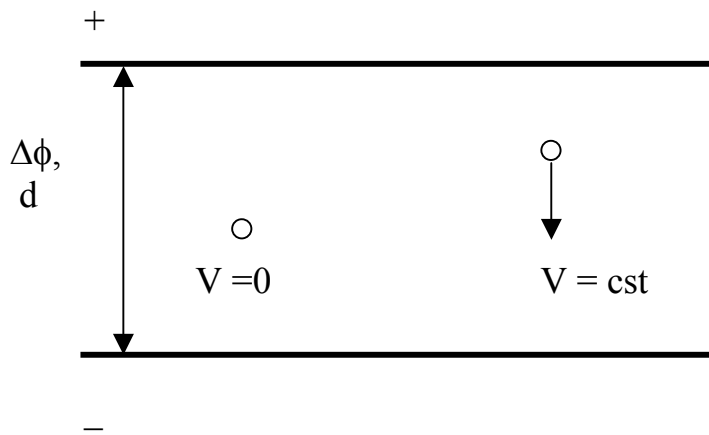
$$Q_{\text{полн.}} = 9,4 \cdot 10^3 \cdot 47 = 4,4 \cdot 10^5 \text{ Кл.}$$

Кроме электронов известны положительно заряженные элементарные частицы – протоны, которые могут существовать самостоятельно (не распадаясь неопределенно-долгое время) вне атома. Величина заряда протонов равна численно величине заряда электронов, а масса в 1836 раз больше массы электрона (напомним, что говорить о зарядах безотносительно материальных тел не имеет смысла), существуют и другие элементарные частицы имеющие электрический заряд. Следовательно, положительные заряды также как и отрицательные можно прибавлять и отнимать от вещественных объектов.

## § 5 опыты с электронами

### 5.1. Об определении элементарного заряда в опыте Милликена (1907-1913гг)

В электрический конденсатор (между его пластин) впрыскиваются частички масла. Частички масла освещаются ультрафиолетовым светом (или рентгеном) и таким образом заряжаются положительно (с них уходят отрицательно заряженные электроны). К конденсатору прикладывается электрическое напряжение величиной в несколько тысяч вольт, и он помещается в вакуум, чтобы не учитывать действующую на частицы архимедову силу.



В данном опыте уравнивается сила веса и электрическая сила, действующая на заряженные масляные капельки. Из этого равенства находится величина заряда.

$$F = qE = \Delta\phi q/d \Rightarrow mg = \Delta\phi q/d.$$

Затем ту же замеченную капельку перезаряжают облучением и опять уравнивают, меняя величину поля  $\Delta\phi$ . Эта процедура повторяется много-много раз. Получается набор зарядов

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots$$

Если предполагать, что существует минимальный далее неделимый заряд, то есть  $q_i = e n_i$ , то для набора опытов можно составить произведения

$$en_1, en_2, en_3, \dots, en_i, \dots, en_j, \dots$$

Здесь  $n$  - число элементарных зарядов, составляющих заряд частички. Далее составляются всевозможные пары разностей  $q_i - q_j$ . Среди этих разностей отыскивается, получающаяся многократно минимальная доля, которая оказалась в опыте Милликена примерно одинаковой с некоторым разбросом. Из разностей находится среднее значение, которое и принимается за элементарный заряд – заряд электрона. Милликен получил величину

$$E = 4,774 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ ед. заряда.}$$

Современное значение (по книге: Дуков В.М. «Электрон», 1946 г)

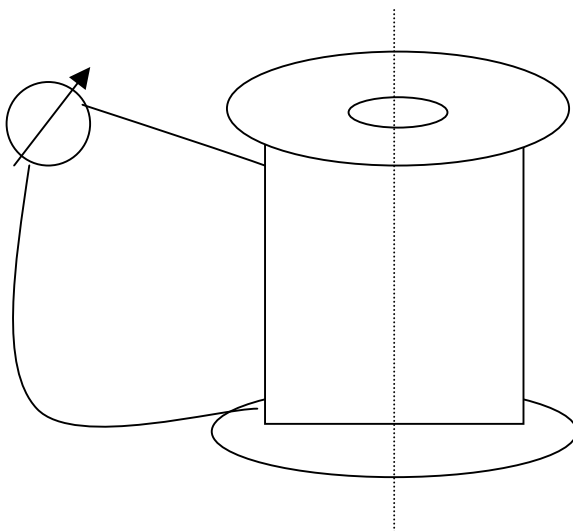


$e = 4.803 \cdot 10^{-10}$  СГСЭ ед. заряда.

Другое современное значение, которое приводится в задачниках по физике в системе единиц «SI»

$e = 1,60217733(49) \cdot 10^{-19}$  Кл.

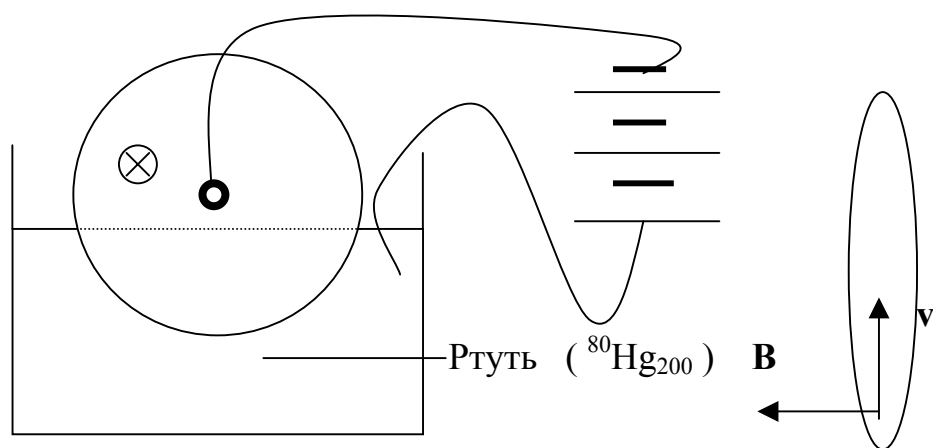
## 5.2 Обнаружение движения электронов по инерции в опыте Толмэна и Стюарта (1916г.)



Катушка с проводом приводится во вращение, а затем резко тормозится.  $L = 500$  м,  $v = 300$  м/с,  $L$  - длина проволоки,  $v$  – линейная скорость вращения.

Опыты показали, что при торможении катушки в цепи ее проволоки возникает кратковременный ток. В этих опытах определялся так называемый удельный заряд электрона – отношение заряда электрона к его массе,  $e/m$ . Величина удельного заряда совпала с результатами, полученными в других опытах.

### 5.3 Приведение диска в движение с использованием электронного тока



Сила  $F$  направлена на нас

Если приложить перпендикулярно плоскости металлического диска магнитное поле и пропустить электрический ток, так как показано на рисунке (между центром диска и его краями), то диск начинает вращаться. Причиной тому служит сила Лоренца, заворачивающая электроны по правилу векторного произведения.

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

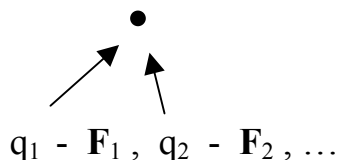
Свободные электроны при своем движении увлекают за собой и металлический диск, рассеиваясь на оболочках и ядрах атомов, составляющих решетку металла, из которого изготовлен диск.

### § 6 Напряженность электрического поля

При исследовании взаимодействия электрических зарядов, привлекает к себе внимание, прежде всего тот факт, что взаимная сила в законе Кулона действует между заряженными телами на расстоянии. Как это можно объяснить? Остается допустить наличие некоей материальной субстанции между заряженными телами, с помощью которой передается электрическое взаимодействие.

Будем полагать, что вокруг зарядов существуют поля, называемые электрическими и перейдем к оценкам (и расчетам) их количественных характеристик.

Пробным зарядом будем называть заряженное тело с размерами много меньшими расстояний, на которых изучается действие зарядов. Другими взаимодействиями пренебрегаем.



Если в данную точку в окрестности исследуемых зарядов помещать пробные заряды разной величины, то оказывается, что

$$F_1/q_1 = F_2/q_2 = \dots = \text{cst} = E.$$

Здесь  $E$  служит силовой характеристикой электрического поля в каждой его точке и называется напряженностью электрического поля.

$$[E] = \text{Нм/Кл м} = \text{Дж/Кл м} = \text{Кл В/Кл м} = \text{В/м}.$$

Рассмотрим частный случай: напряженность поля точечного заряда

$$F = q_1 q_2 e / 4\pi\epsilon_0 r^2.$$

Пусть  $q_1$  пробный заряд, тогда

$$E = F/q_1 = q_2 / 4\pi\epsilon_0 r^2.$$

Опустим значок 2, обозначив, таким образом, произвольный характер выбранной точки и зададим направление силы, имеем

$$E = qe / 4\pi\epsilon_0 r^2 = qr / 4\pi\epsilon_0 r^3.$$

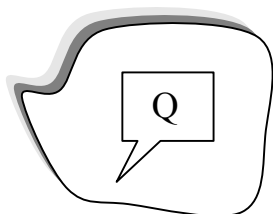
Запишем принцип суперпозиции

$$E = \Sigma E_i.$$

Суммарная напряженность электрического поля в данной точке равна сумме напряженностей, создаваемых разными заряженными телами в данной точке.

## § 7 Постановка задачи о расчете электрических полей

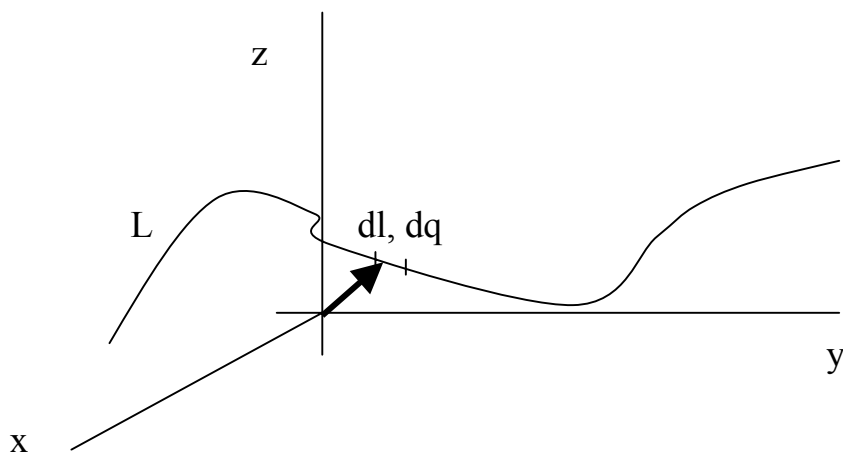
Основной задачей электростатики является расчет электрического поля, то есть нахождение величины и направления электрического поля во всех точках пространства вокруг заряженных тел.



Тело несет заряд  $Q$ . Заряд распределен по телу произвольно (в общем случае неточечным способом).

Линейно протяженное тело

Пусть  $\tau$  - линейная плотность заряда. В общем случае  $\tau = \tau(\mathbf{r}, t)$ , но в данном нашем случае зависит только от координат (то есть, радиус-вектора) и не зависит от времени.



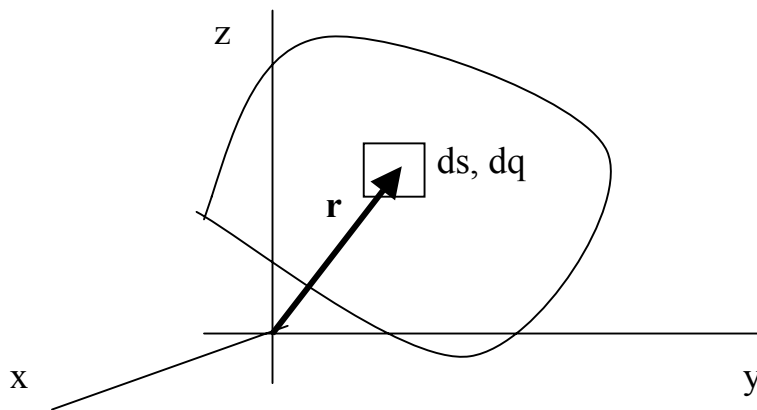
$$\tau = dq/dl \Rightarrow dq = \tau dl \Rightarrow [\tau] = \text{Кл/м}$$

$$q = \int_L \tau(\mathbf{r}) dl(\mathbf{r}), \tau = \text{cst} \Rightarrow q = \tau \int_L dl = \tau L \Rightarrow \tau = q/L$$

Тело, протяженное по плоскости

Пусть  $\sigma$  - поверхностная плотность заряда

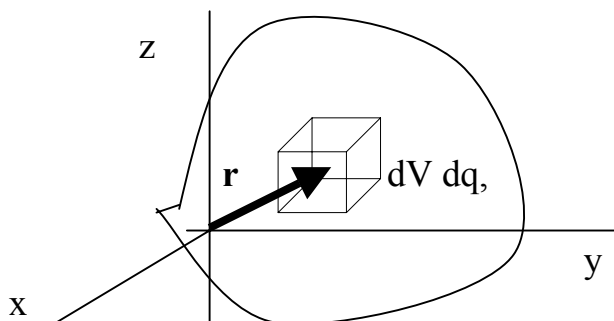
$$\sigma = dq/ds, dq = \sigma ds \Rightarrow [\sigma] = \text{Кл/м}^2$$



$$q = \int_s \sigma ds, \sigma = \text{cst} \Rightarrow q = \sigma \int_s ds = \sigma s \Rightarrow \sigma = q/s$$

Тело, протяженное в пространстве  
Здесь  $\rho$  - объемная плотность заряда

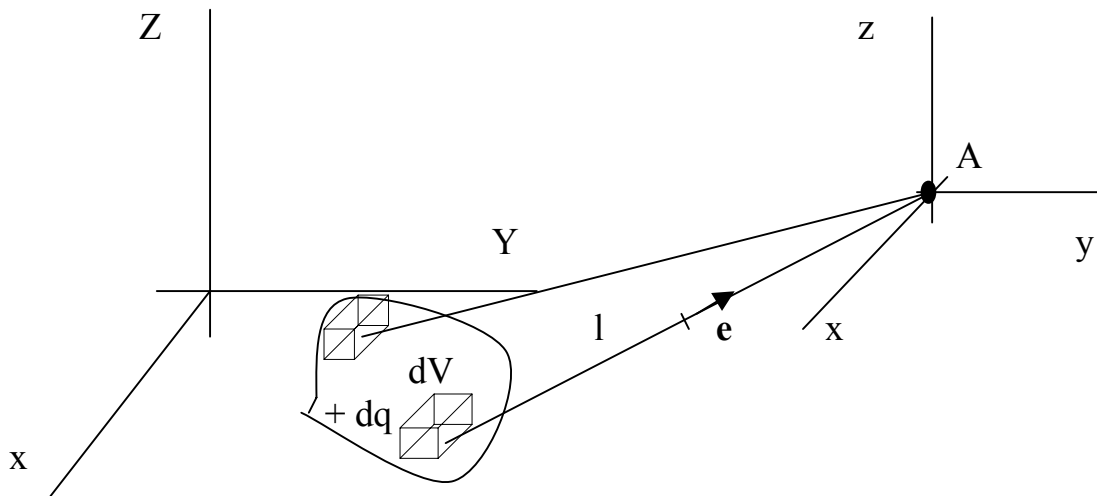
$$\rho = dq/dV, dq = \rho dV \Rightarrow [\rho] = \text{Кл/м}^3$$



$$q = \int_V \rho dV, \rho = \text{cst} \Rightarrow q = \rho \int_V dV = \rho V$$

Если  $\tau$ ,  $\sigma$  или  $\rho$  есть функции координат, то можно говорить о малых частях  $ds$ ,  $dl$ ,  $dV$ , как о точечных заряженных телах. В таких случаях, при расчете напряженности электрического поля можно воспользоваться формулой точечного заряда. Проследим такую процедуру на примере заряда, распределенного по объему.

Пусть имеем заряженное объемное тело

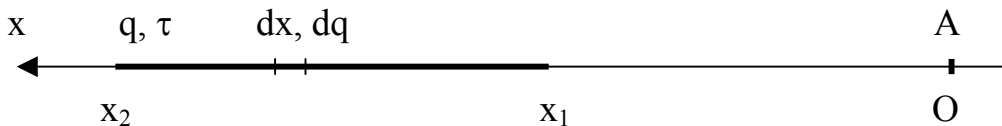


$$dE_A(x, y, z) = dq(x, y, z) \mathbf{e} / 4\pi\epsilon_0 l^2(x, y, z) = \rho(x, y, z) dV \mathbf{e} / (4\pi\epsilon_0 l^2(x, y, z))$$

$$\mathbf{E}_A = \int_V \rho dV \mathbf{e} / (4\pi\epsilon_0 l^2).$$

Пример линейно заряженного тела – отрезок прямой. Здесь также заряд распределен неточечным образом.

Пусть точка, в которой ищется напряженность электрического поля, находится на продолжении прямой. Прямую целесообразно совместить с какой-нибудь из осей, например, x. Начало координат удобно поместить в искомую точку.



$$dE_A = dq / 4\pi\epsilon_0 x^2 = \tau dx / (4\pi\epsilon_0 x^2).$$

$x_2$

$$E_A = \int_{x_1} \tau dx / (4\pi\epsilon_0 x^2)$$

$\tau = \tau(x)$  – здесь необходим конкретный вид зависимости  $\tau = \text{cst}(x)$ , тогда

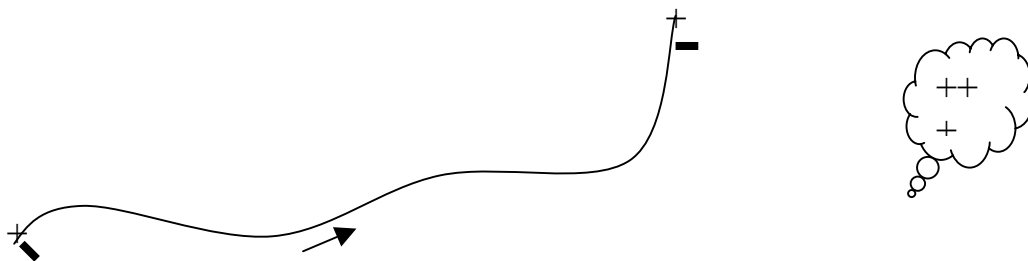
$$E_A = (\tau/4\pi\epsilon_0) \int_{x_1}^{x_2} dx/x^2 = (\tau/4\pi\epsilon_0) (-1/x) \Big|_{x_1}^{x_2} = (\tau/4\pi\epsilon_0) (1/x_1 - 1/x_2).$$

Трудности, которые возникают при решении задач об определении  $E$ , иногда можно уменьшить, введя понятие потенциала (как некую математическую процедуру).

## § 8 Потенциал электрического поля

### 8.1. Об электрическом потенциале

Напряженность является силовой характеристикой электрического поля. Можно ввести характеристику поля не силовую, а по отношению к той энергии, которая расходуется при перемещении заряда в электрическом поле. Оценим, какая работа необходима для того, чтобы перенести заряд из бесконечности (из места, где электрического поля нет) в данную точку поля. Первое определение, неформальное



Если перемещать заряды разной величины и составить отношения расходуемых энергий к величинам зарядов, то отношения

$$W_1/q_1 = W_2/q_2 = \dots = \varphi$$

будут оставаться постоянными. Такая сохраняющаяся величина называется электрическим потенциалом и имеет размерность:  $[\varphi] = \text{В}$  (Вольт).

Второе определение, формальное

Вычислим работу по перемещению заряда в электрическом поле вдоль одной координаты из бесконечности в данную точку. Учтем, что работа и потенциальная энергия равны друг другу с точностью до знака.

$$dW = -dA = -Fdx, F = qE \Rightarrow W = - \int_{\infty}^x F dx = -q \int_{\infty}^x E dx.$$

Представим напряженность электрического поля в виде полного дифференциала некоторой произвольной скалярной функции.

$E = -d\varphi/dx$ , тогда

$$W = q \int_{\infty}^x d\varphi dx/dx = q \int_{\infty}^x d\varphi = q\varphi \Big|_{\infty}^x = q\varphi(x) + q\varphi(\infty) = [\varphi(\infty) = 0] = q\varphi \Rightarrow$$

$$W = q\varphi \Rightarrow \varphi = W/q.$$

В итоге мы получили то же определение потенциала, как и в первом определении. Запишем связь напряженности и потенциала для трехмерного пространства в декартовых координатах.

$$E_y = -d\varphi/dy, E_z = -d\varphi/dz \Rightarrow \mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = -(\mathbf{i} d\varphi/dx + \mathbf{j} d\varphi/dy + \mathbf{k} d\varphi/dz) = -(\mathbf{i} d/dx + \mathbf{j} d/dy + \mathbf{k} d/dz) \varphi = -\nabla \varphi.$$

Здесь символ набла -  $\nabla$  означает математическую операцию над скалярной функцией и является математическим оператором вида

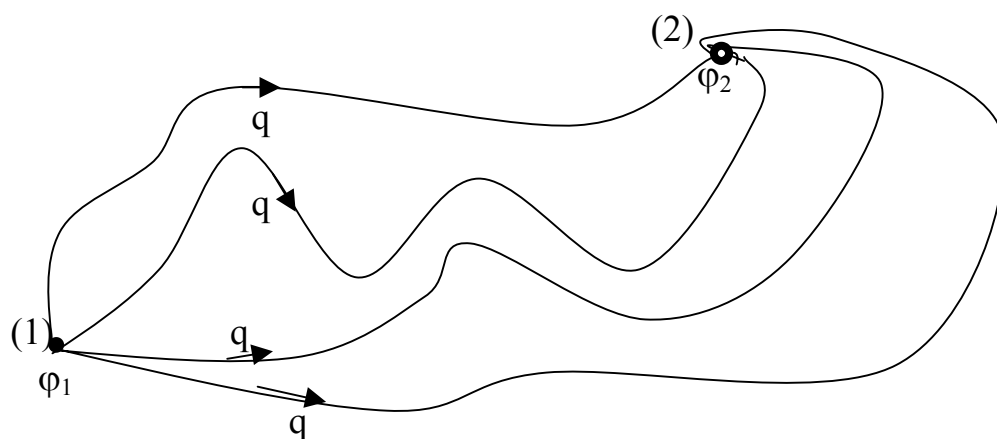
$$\nabla = -(\mathbf{i} d/dx + \mathbf{j} d/dy + \mathbf{k} d/dz).$$



## 8.2 Потенциальный характер электрического поля

Заметим, что энергия, затрачиваемая на перенос заряда в электрическом поле, не зависит от формы пути переносимого заряда, так как электрическое поле – поле консервативных сил. Заметим также здесь, что по определению

$U = \varphi_1 - \varphi_2$ , а  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ , тогда



$$\Delta\varphi = \Delta W/q, \Delta W = \Delta\varphi q = \text{cst.}$$

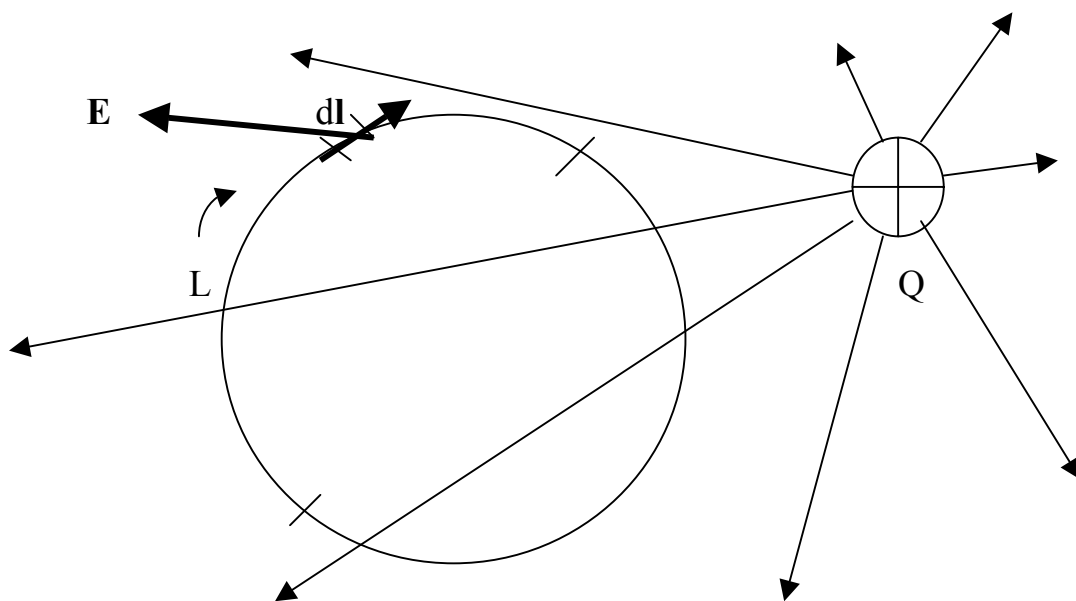
В обычной бытовой розетке (дома) разность потенциалов составляет 220 В.  
О циркуляции вектора напряженности электрического поля

Интеграл вида

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad (\mathbf{E} d\mathbf{l} = E d\mathbf{l} \cos \mathbf{E}^{\wedge} d\mathbf{l})$$

называется циркуляцией вектора  $\mathbf{E}$  по замкнутому контуру  $L$ . Такой интеграл можно вычислять как определенный интеграл в декартовой системе координат. Если учесть потенциальный характер электрического поля, то циркуляция напряженности электрического поля по замкнутому контуру равна 0.

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$



Иначе

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

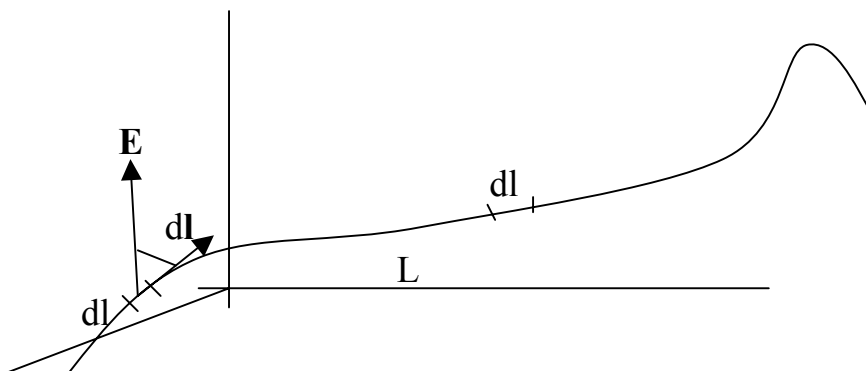
Можно также записать следующее

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = q \oint_L \mathbf{F} d\mathbf{l} = q \oint_L dA = 0,$$

откуда следует, что с точностью до постоянной работа при перемещении заряда по замкнутому контуру равна нулю. Здесь

$$\mathbf{F} d\mathbf{l} = F_x dl_x + F_y dl_y + F_z dl_z.$$

Если контур  $L$  не замкнутый



Во всех скалярных произведениях  $d\mathbf{l}$  имеет направление касательной в данной точке траектории, а  $\mathbf{E}$  может быть направлено произвольно по отношению к  $d\mathbf{l}$ . Выбор обхода контура всегда возможен в двух встречных направлениях.

Потенциал поля точечного заряда.

Имеем для точечного заряда

$$E = q/4\pi\epsilon_0 r^2 \text{ (пусть } r = x),$$

$$\varphi = - \int E(x) dx = - q/4\pi\epsilon_0 \int dx/x^2 = q/4\pi\epsilon_0 x + \varphi_\infty \text{ (}\varphi_\infty = 0\text{)}.$$

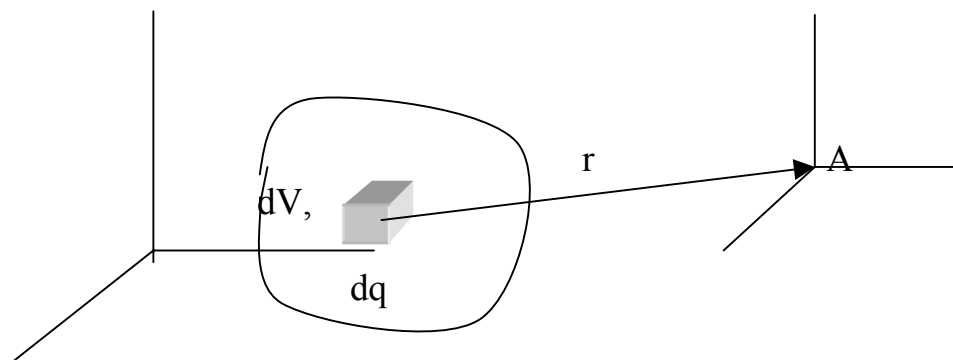
Второй вариант: определенный интеграл

$$\varphi = - \int_{\infty}^x E(x) dx = - q/4\pi\epsilon_0 \int_{\infty}^x dx/x^2 = q (1/x - 1/\infty)/4\pi\epsilon_0$$

Итак, для точечного заряда имеем расчетную формулу потенциала

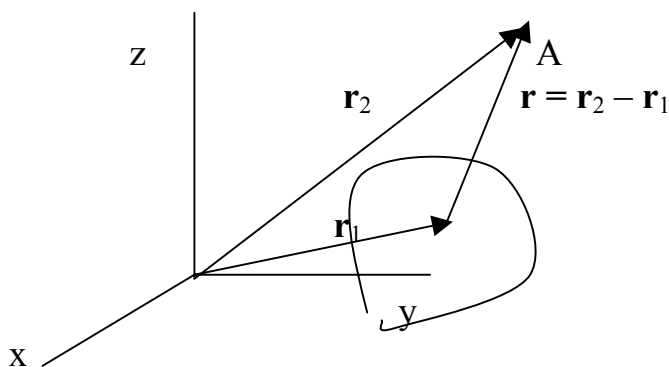
$$\varphi = q/4\pi\epsilon_0 r.$$

Теперь, как итог всему сказанному, рассмотрим задачу о расчете поля с применением скалярного потенциала.



$$d\varphi_A = dq/4\pi\epsilon_0 r = (dq = \rho dV) = \rho dV/4\pi\epsilon_0 \Rightarrow \varphi = (1/4\pi\epsilon_0) \int \rho dV/r.$$

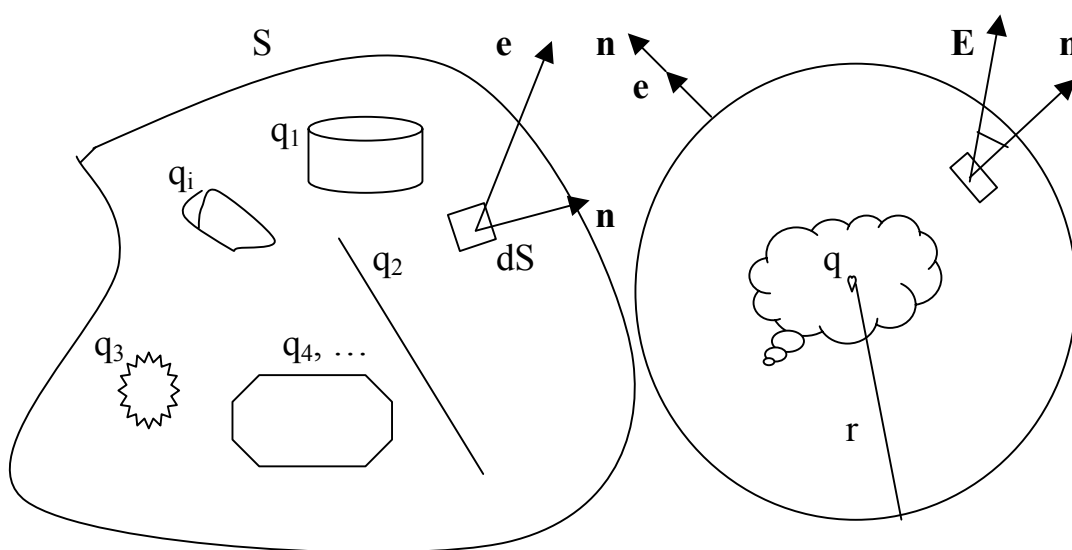
Привязку удобнее осуществлять к одной системе координат, тогда



Здесь  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  - расстояние от элемента заряженного тела до искомой точки  $A$ , в которой вычисляется потенциал электрического поля. Далее можно найти  $\mathbf{E}$ , вычисляя  $\partial\varphi/\partial x$ ,  $\partial\varphi/\partial y$ ,  $\partial\varphi/\partial z$  и подставляя вычисленные значения в  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . Такой расчет, хотя и более длителен, но проще прямого расчета  $\mathbf{E}$ , так как предполагает простую систему одномерных уравнений.

## § 9 Закон Гаусса

Рассмотрим произвольную систему неточечных электрических зарядов, а точнее говоря заряженных тел с произвольно распределенными на них зарядами. Окружим эти тела замкнутой поверхностью так, чтобы все эти тела оказались внутри нее. Пусть эта поверхность – сфера, удаленная от заряженных тел далеко так, что заряды можно считать точками по отношению к точкам сферы, приводя, таким образом, задачу к сферически симметричной задаче.



Определим поток вектора напряженности электрического поля  $d\Phi_E$  через площадку  $dS$  как произведение

$$d\Phi_E = \mathbf{E} d\mathbf{S} \Rightarrow \Phi_E = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{E} = E\mathbf{e}, d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}, q = \sum q_i, q = \int \rho dV.$$

Рассчитаем поток вектора напряженности электрического поля через заданную воображаемую поверхность. Вначале запишем подынтегральное выражение для потока

$$\mathbf{E} d\mathbf{S} = q \mathbf{e} dS \mathbf{n} / 4\pi\epsilon_0 r^2.$$

Для сферы  $\mathbf{e}\mathbf{n} = 1 \Rightarrow$

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S q dS / 4\pi\epsilon_0 r^2 = (q / 4\pi\epsilon_0 r^2) \oint_S dS = q / \epsilon_0.$$

Закон Гаусса записывается в виде

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = q / \epsilon_0.$$

Здесь слева стоит поток вектора через замкнутую поверхность, а справа заряд, ограниченный этой поверхностью, поделенный на электрическую постоянную (что означает, что закон записан в системе единиц SI).

Замечание. Для среды с диэлектрической проницаемостью отличной от единицы формула изменится тем, что электрическую постоянную необходимо помножить на диэлектрическую проницаемость,  $\epsilon$ .

Выводы:

Справедлива формула

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = q / \epsilon_0$$

Если внутри замкнутой поверхности  $S$  зарядов нет, то

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = 0$$

Закон Гаусса позволяет в случаях хорошей симметрии (например, сферической и осевой) сравнительно легко рассчитывать напряженность электрического поля вокруг заряженных тел в пространстве вокруг симметричных заряженных тел.

Пример: расчет электрического поля вокруг бесконечной равномерно заряженной плоскости.

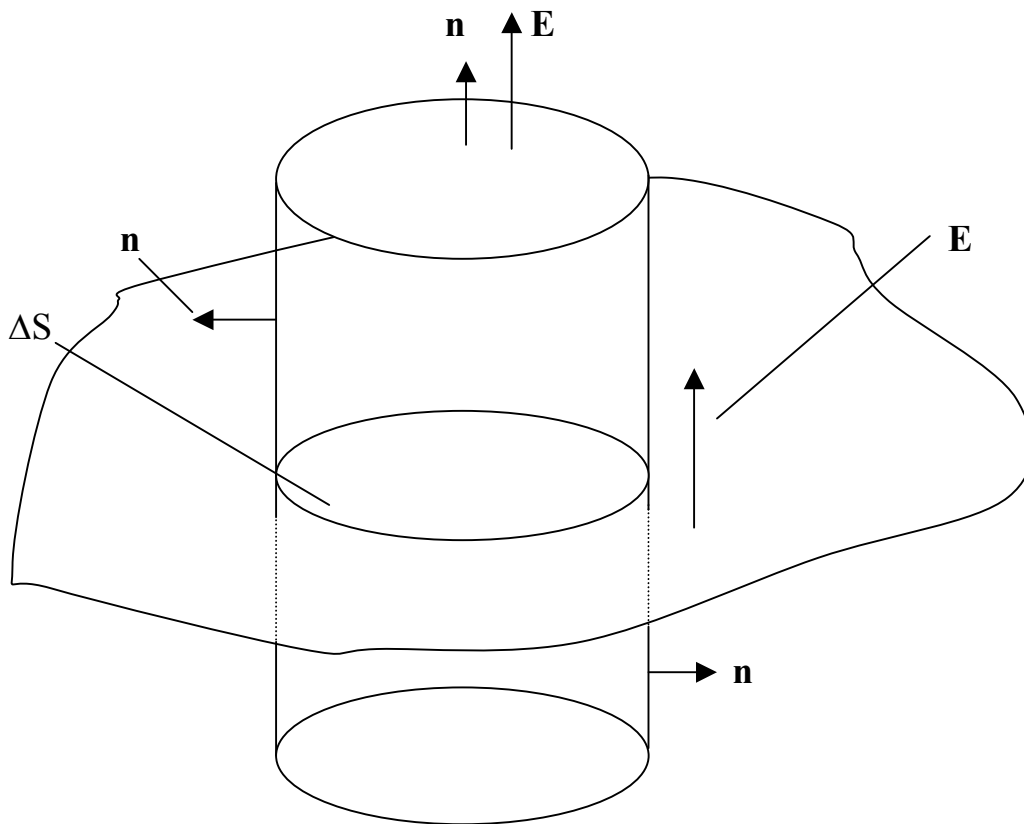
Дано:

Бесконечная плоскость равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ .

Найти:

Напряженность электрического поля

В точках пространства вокруг плоскости.



Пересечем плоскость цилиндром с боковой поверхностью перпендикулярной данной плоскости. Заряд, оказавшийся внутри цилиндрической поверхности, ограниченной боковой поверхностью и торцами, и, таким образом, замкнутой, равен

$$Q = \sigma \Delta S.$$

Для вычисления интеграла по замкнутой поверхности необходимо представить его в виде суммы трех интегралов по боковой поверхности и двум торцам

$$\oint_S = \int_{\text{бок.}} + \int_{\text{торец1}} + \int_{\text{торец2}}$$

Вследствие симметрии напряженность электрического поля, создаваемая заряженной плоскостью направлена перпендикулярно к плоскости во всех точках

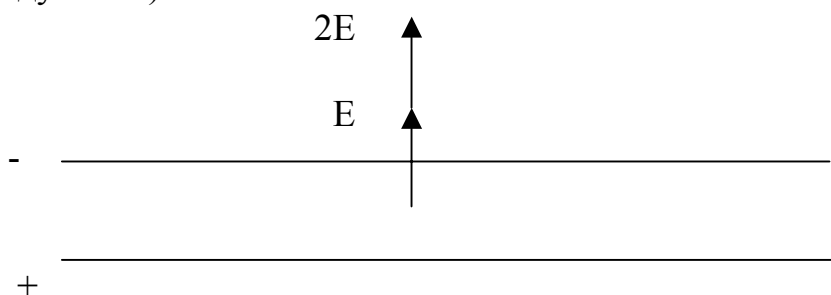
пространства (плоскость заряжена равномерно и бесконечно протяженна). Раз так, то интеграл по боковой поверхности от скалярного произведения  $\mathbf{E} d\mathbf{S}$  равен 0 (вследствие взаимной перпендикулярности  $\mathbf{E}$  и  $d\mathbf{S}$ ). Остаются интегралы по торцам, их два. В точках торцов  $E = \text{const}$ , и  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E$ , тогда поток, проходящий через торцы равен

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E \int_{2\Delta S} dS = 2E\Delta S.$$

Приравняем поток согласно закону Гаусса заряду с учетом электрической постоянной

$$2E \Delta S = \sigma \Delta S / \epsilon_0 \Rightarrow E = \sigma / 2\epsilon_0.$$

Попутно рассудим об электрическом поле между двумя бесконечными, одинаково - равномерно, но разноименно заряженными пластинами (аппроксимация плоского конденсатора с размерами пластин много больше расстояния между ними)



$$E_k = 2E = \sigma / \epsilon_0.$$

§ 10 Формулы Остроградского-Гаусса, Стокса и уравнения Максвелла для  $\mathbf{E}$  в вакууме

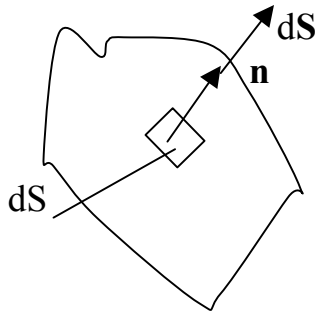
### 10.1 От формулы Остроградского- Гаусса к уравнению Максвелла

Пусть имеем поле векторов  $\mathbf{a}$ , тогда

$$d\Phi_a = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}, \quad \Phi_a = \int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$$



$\Phi_a$  называется потоком вектора  $\mathbf{a}$  через площадку  $S$ . Здесь вектор  $d\mathbf{S}$  направлен по орту нормали  $\mathbf{n}$  к площадке  $dS$ , то есть



Определим для вектора  $\mathbf{a}$  оператор

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \partial a_x / \partial x + \partial a_y / \partial y + \partial a_z / \partial z.$$

Заметим, что

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{i} \partial / \partial x + \mathbf{j} \partial / \partial y + \mathbf{k} \partial / \partial z)(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Без вывода запишем соотношение, называемое формулой Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dV.$$

Здесь объем  $V$  ограничивается замкнутой поверхностью  $S$ . Для вектора напряженности электрического поля формула переписывается в виде

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV.$$

Используем полученную формулу для записи закона Гаусса. Предварительно отметим следующее

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i = \int_V \rho \, dV.$$

Имеем

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = (1/\epsilon_0) \int_V \rho dV$$

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0) dV = 0$$

Так как объем выбирался произвольно, как объем, ограниченный произвольной поверхностью, то

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0.$$

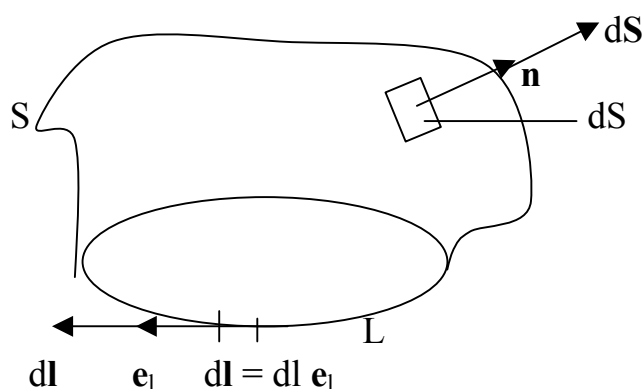
Получили одно из уравнений Максвелла. Оно связывает электрическое поле с электрическими зарядами. Его генезис: Закон Кулона – закон Гаусса – уравнение Максвелла.

## 10.2 От циркуляции вектора $\mathbf{E}$ по контуру, через формулу Стокса к следующему уравнению Максвелла

Для напряженности электрического поля имеем

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

Согласно формуле Стокса подобный интеграл по замкнутому контуру можно преобразовать в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур



Для произвольного вектора  $\mathbf{a}$  будет (без вывода):

$$\oint_L \mathbf{a} d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{a} d\mathbf{S}$$

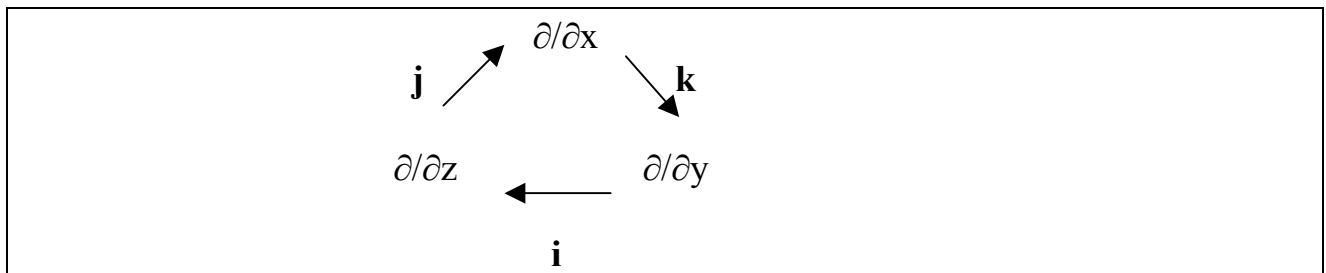
Здесь направление  $d\mathbf{l}$  определяется направлением орта  $\mathbf{e}$ , совпадающего по направлению с касательной в данной точке контура  $L$ . (Единственное, что необходимо выбрать – это направление обхода контура по или против часовой стрелки, что должно быть согласовано и с направлением орта  $\mathbf{n}$ ). Для нашей задачи формула запишется в виде

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Оператор  $\text{rot } \mathbf{E}$  можно представить как векторное произведение

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = & \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} (\partial E_z / \partial y - \partial E_y / \partial z) + \\ & + \mathbf{j} (\partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x) + \mathbf{k} (\partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y). \end{aligned}$$

Проще запомнить последовательность совокупности производных для ротора по мнемоническому правилу



Таким образом, для напряженности электрического поля имеем

$$\oint_S \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0,$$

а так как поверхность  $S$  выбиралась произвольно, вследствие произвольности выбора контура, на которую эта поверхность опирается, то и  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ .

Заметим, что по определению  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , из чего следует, что  $\text{rot}(\nabla\varphi) = 0$ ,

то есть ротор от градиента произвольной скалярной функции в данном случае равен нулю, (этот факт проверяется подстановкой), что в нашем случае и означает поле консервативных сил.

Выводы: К настоящему моменту имеем два уравнения Максвелла для электрического поля в вакууме.

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}$$

## § 11 Метод зеркальных изображений

Метод зеркальных изображений относится к способам расчета (точнее получения) картины электрического поля. Суть метода состоит в следующем. Если в электрическом поле заменить эквипотенциальную поверхность проводником той же формы, с потенциалом на нем равном потенциалу рассматриваемой потенциальной поверхности, то электрическое поле такого проводника не изменится по сравнению с исходным. Отметим последовательность процедур.

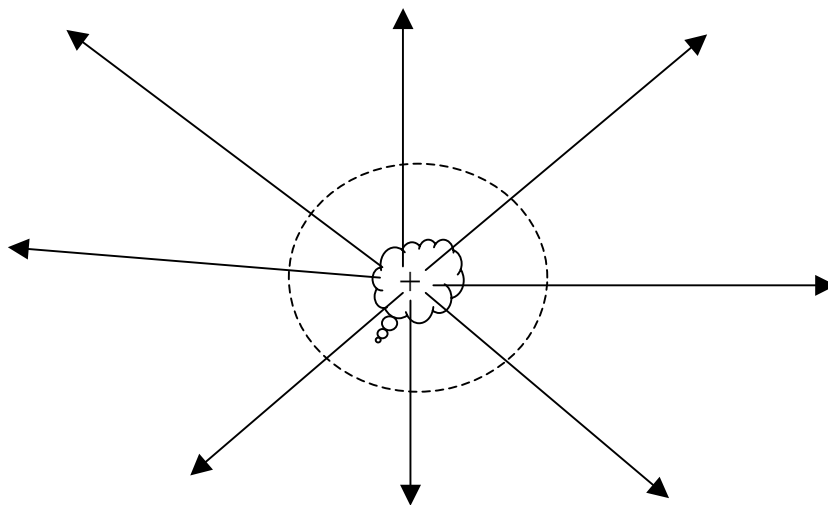
Имеем эквипотенциальную поверхность в электрическом поле

Имеем проводник той же формы

Помещаем проводник на место потенциальной поверхности.

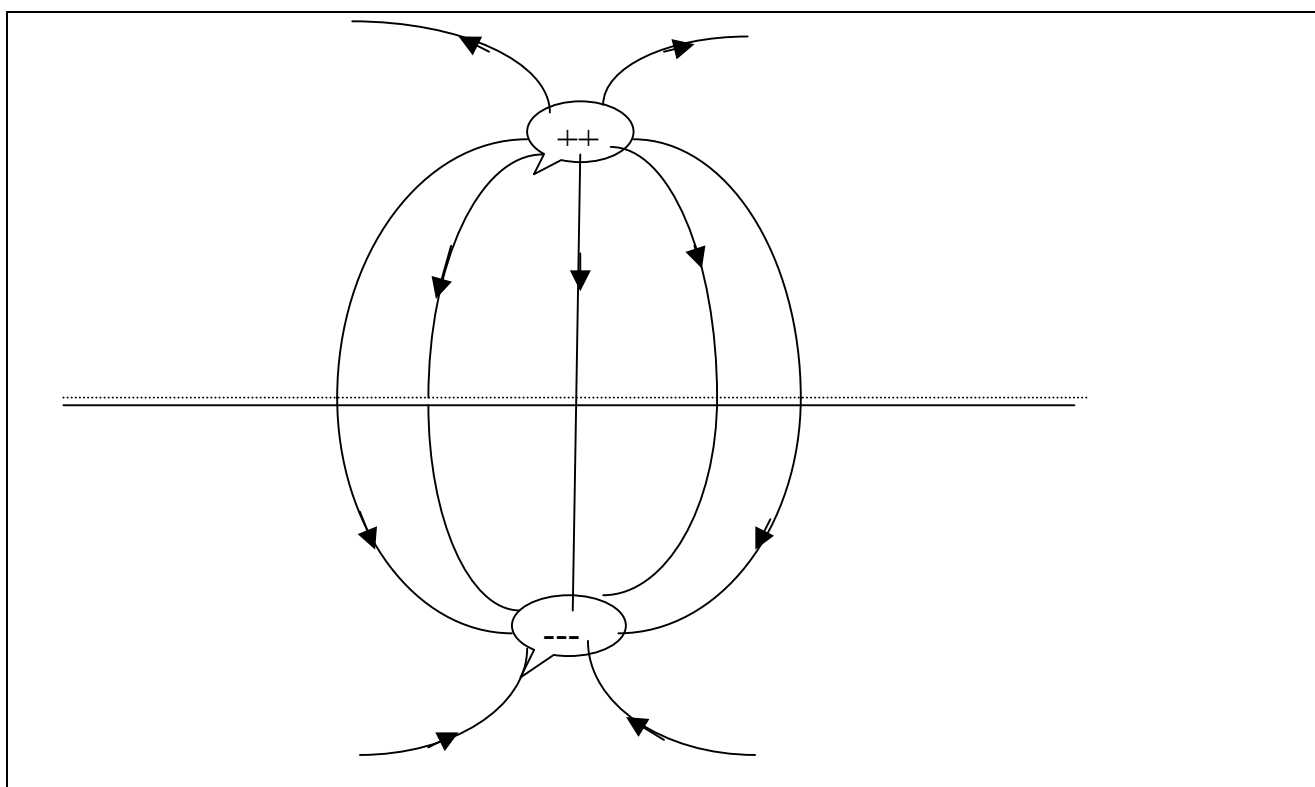
Пример1

Поместим заряженную металлическую сферу на место воображаемой эквипотенциальной поверхности сферической симметрии



### Пример 2 (иллюстрация ответа на вопрос «Почему зеркальных?»)

Имеем положительный точечный заряд и заряженную плоскость. Если за плоскостью на таком же расстоянии по нормали поместить отрицательный заряд, то картина поля в точности будет эквивалентна той, что напоминает зеркальное отражение в плоскости исходного точечного заряда и всей картины его поля



Резюмировать ситуацию проще цитатой из курса лекций по физике американского автора Р. П. Фейнмана:

«В книгах можно найти длинные перечни решений задач электростатики для гиперболических поверхностей и других сложных штук. Вас могло бы удивить, как это удалось рассчитать поля близ поверхностей столь ужасной формы, но они были рассчитаны задом наперед! Кто-то решил простую задачу с фиксированными зарядами, а затем обнаружил, что появляются некоторые эквипотенциальные поверхности новой формы, ну, и написал работу, что поля снаружи проводника такой формы могут быть изображены так-то и так-то.»

## Глава 2 Проводники в электрическом поле

### § 1 Проводник во внешнем электрическом поле

Будем представлять себе проводником тело (как правило металл, но не обязательно: это может быть жидкий электролит или ионизованный газ) имеющее на каждую структурную единицу (атом или молекулу) один или несколько свободных носителей электрического заряда. Электроны и ионы, способные проводить электрический ток и, вообще принимать участие в явлениях проводимости называются электронами и ионами проводимости. Так, например, щелочные металлы (Li, K, Na, Rb, Cs) можно представлять себе в виде регулярно расположенных ионных остовов, погруженных в более или менее однородную электронную жидкость. Металлы переходных групп и ближайшие к ним характеризуются большими энергиями связи электронов. В таблице приведены числа электронов,  $n$ , приходящихся на  $1\text{см}^3$  для некоторых элементов

$n, 10^{22}\text{см}^{-3}$	4,7	2,65	1,4	1,15	0,91	8,47
Элемент	Li	Na	K	Rb	Cs	Cu

5,86	5,90	17	13,2
Ag	Au	Fe	Zn

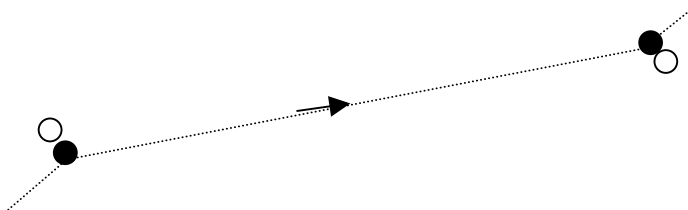
В 1897 году Джозеф Джон Томсон (не путать с лордом Кельвином Томсоном Уильямом и другими Томсонами) при исследовании катодных лучей предположил и доказал существование электронов (не путать также с сыном лорда Кельвина – Томсоном Джорджем Паджетом, который занимался дифракцией электронов на кристаллах и электронными микроскопами).

В 1900 году Друдэ разработал свою теорию электро- и теплопроводности – он рассматривал электроны в металле как электронный газ и применил к нему кинетическую теорию газов.

Основные положения теории Друдэ.

Приближение независимых электронов. В промежутках между столкновениями не учитывается ни электрон-электронное взаимодействие, ни электрон-ионное взаимодействие для квазисвободных электронов в металлах.

Столкновения рассматриваются как мгновенные события – внезапное изменение скорости частиц, причинами которого пренебрегают.

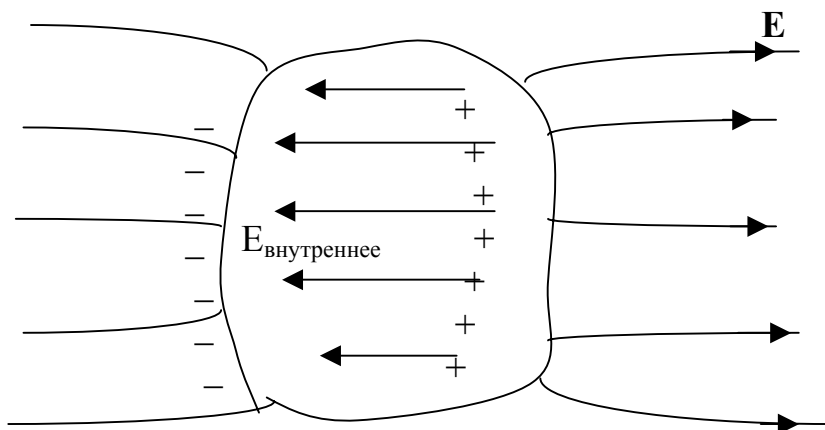


Вероятность испытать столкновение для частиц пропорциональна отношению  $dt/\tau$ , где  $\tau$  - усредненное время свободного пробега электронов (константа для данного металла),  $dt$  – время собственно столкновения.

Выведем электроны в металле каким-либо способом из состояния равновесия. Возврат к равновесию происходит благодаря взаимодействию (столкновению) электронов между собой и со структурой, причем скорости электронов сразу же после столкновений не связаны с их скоростями до столкновений и направлены случайным образом (величина средней скорости при этом соответствует равновесной температуре тела).

Популярность модели Друдэ определялась очень хорошим согласием его положений с экспериментальными результатами. Поскольку в проводниках есть заряженные частицы, которые могут двигаться свободно (квазисвободно, например, электроны внутри куска металла), то при внесении такого проводника в электрическое поле на эти частицы начинает действовать сила, и они приходят в движение.

Положительные частицы движутся в направлении вектора  $\mathbf{E}$ , отрицательные – в противоположную сторону. В результате такого движения произойдет так называемое разделение зарядов. Наступит состояние равновесия, при котором внутри проводника образуется внутреннее поле, направленное навстречу внешнему и равное ему по величине.

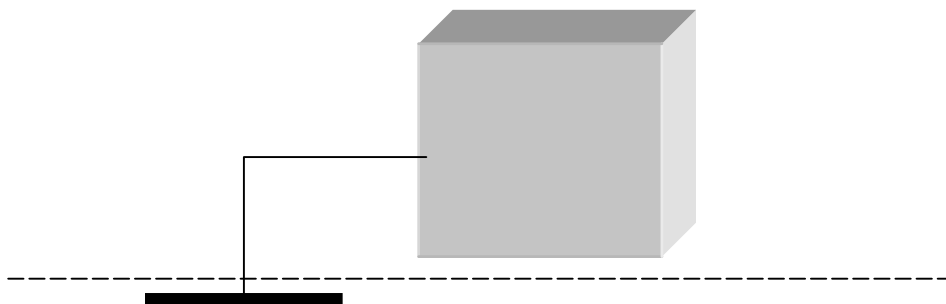


Внутреннее поле = внешнему  $\Rightarrow$  внутри проводника поле равно нулю.

Заметим также, что в состоянии равновесия силовые линии напряженности должны быть нормальным к поверхности тела, касательных составляющих у них быть не может вследствие равновесия. Иначе об этом можно сказать так: линии напряженности электрического поля должны быть перпендикулярны эквипотенциальной поверхности, которой является в данном случае поверхность самого проводника. Аналитически это можно выразить так:

$$E = -\nabla\varphi, E_x = -\partial\varphi/\partial x, E_x = 0 \Rightarrow \partial\varphi/\partial x = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const.}$$

Поверхность проводника является поверхностью одинакового потенциала. Заряды при этом находятся в тонком приповерхностном слое толщиной в среднем 1 – 2 атома. Мы можем прийти к выводу. Внутри любой металлической решетки (сетки) отсутствует электрическое поле.

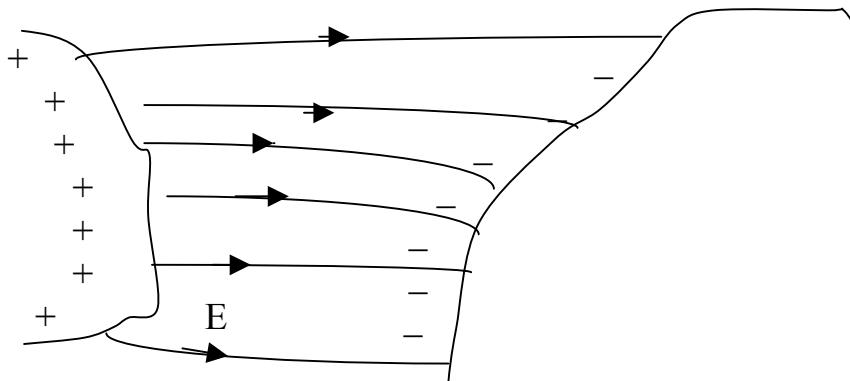


Такое устройство называют клеткой Фарадея. Внутри такой клетки можно, например, проводить точные опыты с зарядами.



## § 2 Электрическая емкость

Рассмотрим два заряженных проводника произвольной формы. Одним из них может служить Земля.



Если подзарядить один из проводников, то на другом как говорят, индуцируется дополнительный заряд противоположного знака и возрастает разность потенциалов между проводниками. Отношение же величины заряда к разности потенциалов (или электрическому напряжению) для двух данных проводников будет оставаться постоянным. Так получается сохраняющаяся величина для двух данных проводников

$$Q_1/U_1 = Q_2/U_2 = \dots = C \Rightarrow Q = CU.$$

Здесь.  $C$  - постоянная, характеризующая способность проводников аккумулировать (накапливать) заряд.  $C$  зависит от формы, качества и размеров проводника, а также качества среды (в электрическом отношении) между проводниками. Причем

$$C_{\text{со средой}} / C_{\text{вакуума}} = \varepsilon$$

Очевидно, что  $\varepsilon_{\text{вак}} = 1$ , а вот  $\varepsilon_{\text{воздуха}} = 1,000594$ .

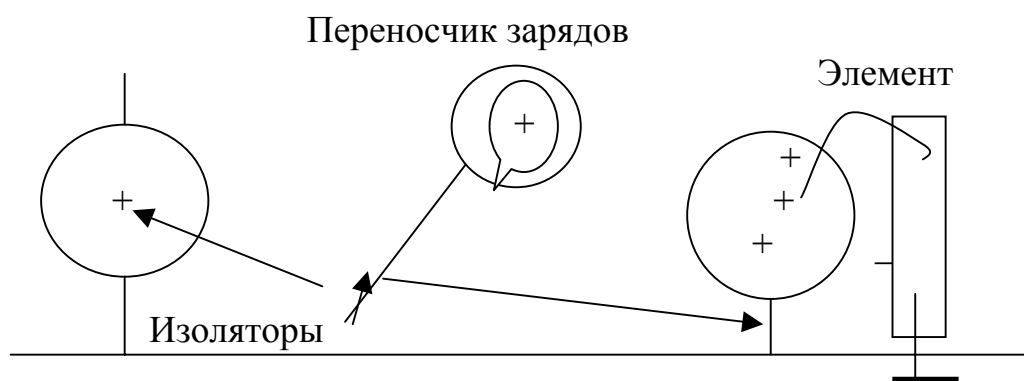
$[C] = [Q/U] = \text{Кл/В} = \text{Ф}$  (Фарада), то есть изменение заряда на 1 Кл, приводящее к изменению разности потенциалов в 1 В произойдет при наличии емкости между проводниками в 1 Ф.

### § 3 Электростатический генератор Ван-де-Граафа

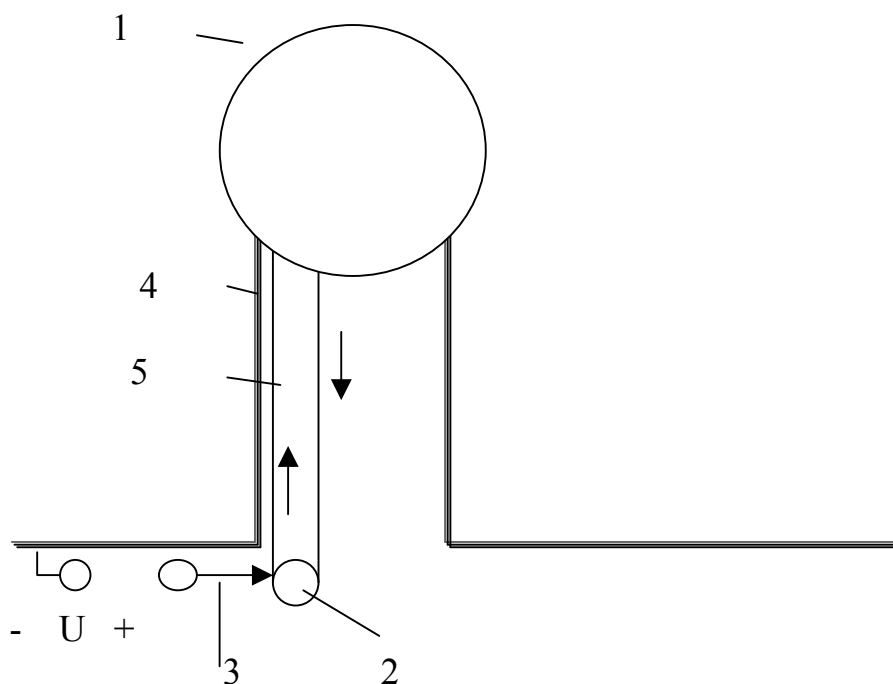
Первый электростатический генератор (ускоритель) электронов на энергию 80 КэВ (кило электрон вольт) был построен в 1929 году Ван-де-Граафом.

Вначале рассмотрим схематично способ получения значительного количества заряда. Здесь используется то обстоятельство, что заряды всегда распределяются по внешней поверхности проводника. Для получения заряда очень большой величины (что создаст высокое напряжение между разделенными зарядами) используется следующая схема. К полному шару прикасаются с внутренней стороны малым шаром на изоляторе, после того как его подзаряжают от элемента. Процедуру повторяют до тех пор, пока переносимая доля не станет равна утечке через изолятор полного шара.

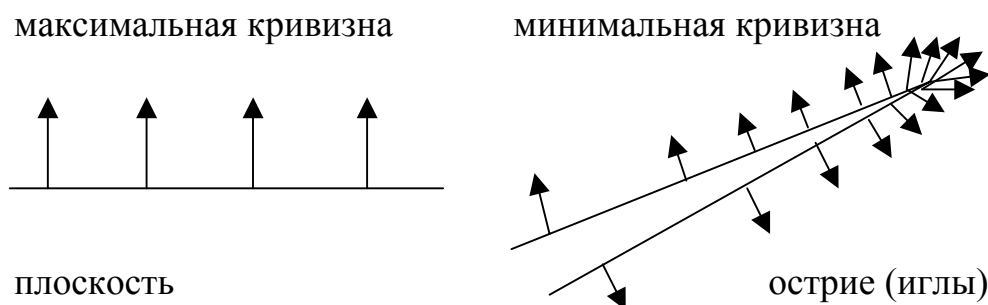
Полый шар с отверстием



Приведем схему ускорителя Ван-де-Граафа.



1 - высоковольтный электрод – шар. Такая форма оптимальна, она дает равномерное распределение заряда. Радиус шара обычно составляет несколько метров. Шар радиусом  $r = 5$  м уже считается большим. Чем меньше радиус кривизны заряженного тела, тем большая напряженность электрического поля (больше густота линий напряженности) около этих точек тела



Оценим максимально достижимую разность потенциалов исходя из радиуса сферы. Напряжение пробоя воздуха составляет  $3 \cdot 10^6$  В/м = 3 В/мкм, и сильно зависит от влажности, давления, наличия в воздухе частичек и т.д.. Тогда

$$E = \varphi/r \Rightarrow \varphi = E r = 3 \cdot 10^6 \cdot 5 = 15 \cdot 10^6 \text{ В} = 15 \text{ МВ.}$$

Практически же удастся реализовать для данных параметров  $\varphi_{\text{макс}} = 3 \div 4$  МВ. Система при этом заполняется сухим газом под высоким давлением (частица не успевает разбежаться и ионизовать другие).

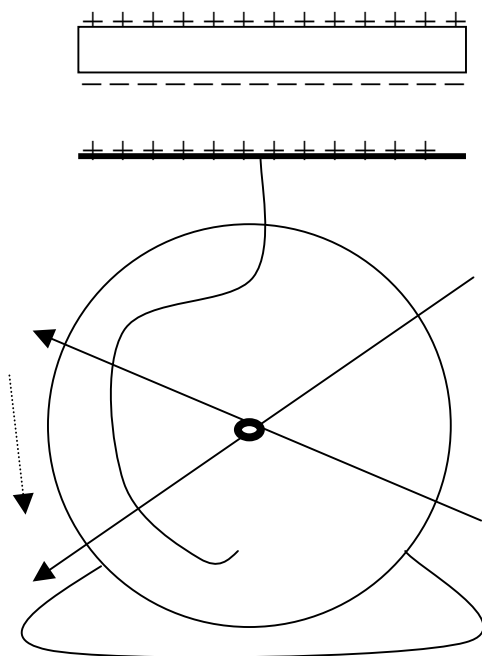
- опорный валик (с обеих сторон транспортера)
- гребенчатый электрод, используемый для подачи на ленту транспортера зарядов от источника. Точно такой же электрод в верхней части транспортера (не показан на рисунке) передает заряд на внутреннюю поверхность сферы после чего заряды равномерно распределяются по внешней поверхности сферы.
- Опорная колонна
- Транспортер зарядов.

Передача заряда осуществляется посредством коронного разряда (путем подбора соответствующего напряжения). При движении ленты транспортера совершается работа по преодолению сил электрического поля. Скорость движения ленты 20 – 40 м/с (сравним: пешеход – 6 км/час = 1,6 м/с, велосипедист – 20 км/час = 5 м/с, автомобиль – 60 км/час = 15 м/с). Когда заряд накопится генератор используем как ускоритель для разгона заряженных частиц, например, электронов.

## Глава 3 Диэлектрики в электрическом поле

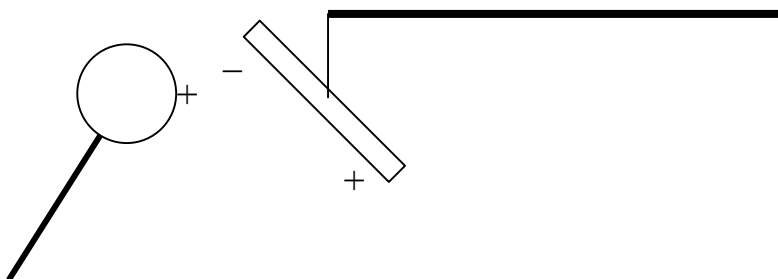
### §1 Поляризация диэлектриков

Диэлектрики – это вещества, у которых свободных носителей заряда нет !! Так в идеале. На самом деле, если в металлах свободных носителей заряда  $\approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , то в диэлектриках, вследствие несовершенства кристаллической структуры (разорванные связи, инородные атомы и пр.) количество свободных носителей оценивается от  $10^2$  до  $10^7 \text{ см}^{-3}$ . Такое количество относительно ничтожно мало. Будем считать для определенности, что все электроны в диэлектриках не свободны, но связаны с атомами и молекулами. Представим себе мысленный опыт: имеем слегка подзаряженный электромметр, поднесем к нему незаряженный диэлектрик



Мы увидим, что показания электрометра уменьшатся. Если убрать диэлектрик, то показания электрометра вернутся к исходному положению.

Если бы вместо диэлектрика был проводник, то мы объяснили бы это поведение тем, что на проводнике возник индуцированный заряд и изменил (уменьшил, скомпенсировал) поле электрометра. Если с диэлектриком рассуждать также, то надо также предполагать возникновение индуцированного заряда. Представим себе другой мысленный эксперимент.



Стеклянная палочка на нитке в поле заряженного шара поворачивается вдоль линий напряженности электрического поля. Этот опыт также свидетельствует в пользу возникновения индуцированного заряда. Однако, диэлектрики электрического тока не проводят, так как свободных носителей заряда в них практически нет.

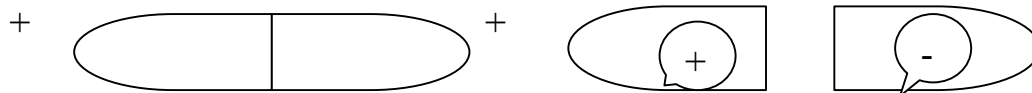
Для объяснения этих опытов привлечем явление, которое называется поляризацией диэлектриков и наличие в диэлектриках так называемых поляризационных зарядов, которые могут поворачиваться в электрическом поле, сохраняя неизменным центр масс. Терминология, таким образом, используется следующая.

Металлы – индуцированные заряды,

Диэлектрики – поляризационные заряды.

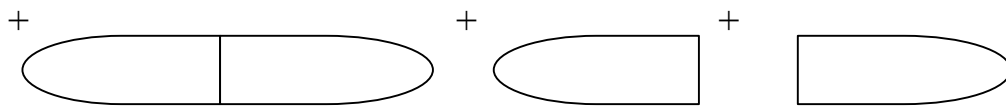
Отметим следующую разницу, которая восходит к эксперименту.

Металл

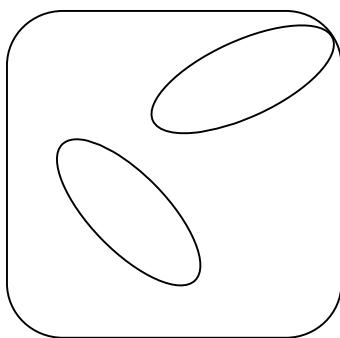


можно разрезать не вынося из поля и разделить заряды.

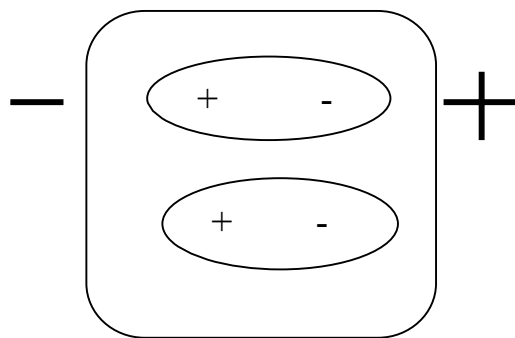
Диэлектрик



Разрезать можно – разделить заряды нельзя. Тогда, принимаем следующую модель (версию). Диэлектрики состоят из молекул, представляющих собой диполи.



без поля

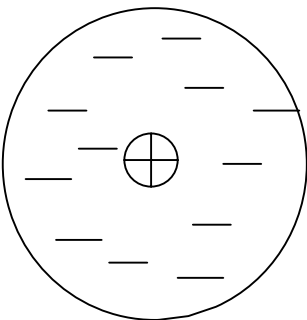


в поле

Замечание. Молекулы как диполи проявляют себя в двух видах

Неполярные: в отсутствие электрического поля центры масс и геометрические центры зарядов совпадают (симметричные молекулы). К ним относятся  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ , и т.д., как правило это газы - упругие диполи.

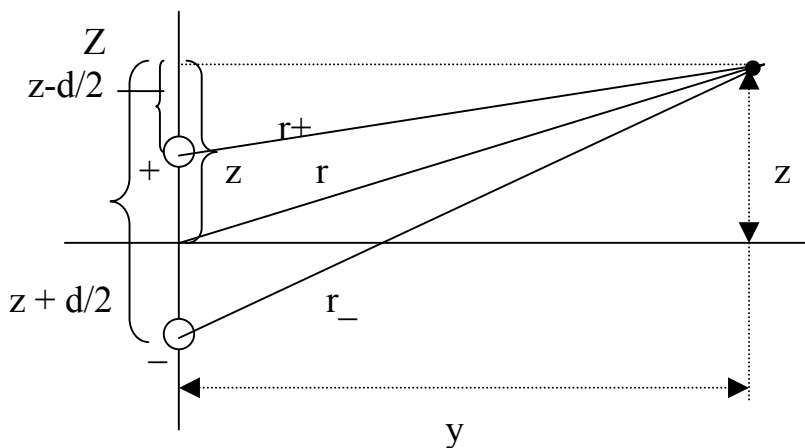
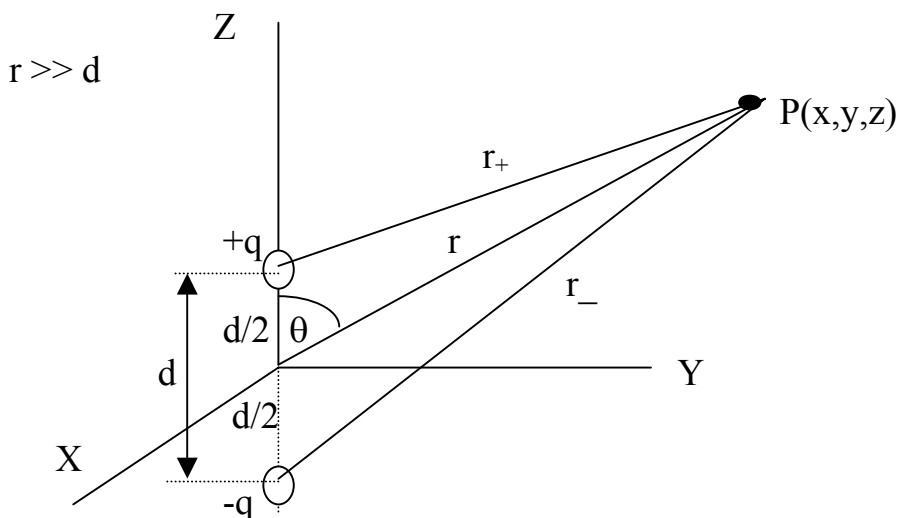
Полярные: в отсутствие электрического поля центры масс и центры зарядов сдвинуты друг относительно друга - жесткие диполи.



Однако и те и другие молекулы (сферические в поле вытягиваются и также становятся полярными) в электрическом поле поворачиваются, чтобы расположиться по полю, а центры их масс остаются при этом на месте.

## § 2 Модель расчета электрического поля диполя

Диполь в данной модели – система, состоящая из двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов ( $+q$ ,  $-q$ ), расстояние между которыми значительно меньше расстояния до тех точек, для которых ведется расчет поля диполя (напомним, что расчет электрических полей – основная задача курса электростатики). Привяжем декартову систему координат к диполю согласно рисунку



В условиях задачи потенциал искомой точки можно найти по формуле для точечного заряда

$$\varphi(r) = |q|/4\pi\epsilon_0 r(\pm), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_{\pm}^2 = y^2 + (z \pm d/2)^2,$$

$$\text{Для } +q: \quad z = d/2 \Rightarrow r_+^2 = x^2 + y^2 + (z - d/2)^2$$

$$\text{Для } -q: \quad z = -d/2 \Rightarrow r_-^2 = x^2 + y^2 + (z + d/2)^2.$$

$$\varphi_+ = q/4\pi[(z - d/2)^2 + x^2 + y^2]^{1/2}, \quad \varphi_- = -q/4\pi[(z + d/2)^2 + x^2 + y^2]^{1/2}.$$

Поскольку  $d$  относительно мало, то

$$(z \pm d/2)^2 = z^2 \pm z d + d^2/4 \cong z^2 \pm z d,$$

$$r_{\pm}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \pm z d = r^2 \pm z d = r^2(1 \pm z d/r^2).$$

$$\begin{aligned} \varphi_P &= \varphi_+ + \varphi_- = (q/4\pi\epsilon_0)[(r^2 - z d)^{-1/2} - (r^2 + z d)^{-1/2}] = \\ &= (q/4\pi\epsilon_0 r)[(1 - z d/r^2)^{-1/2} - (1 + z d/r^2)^{-1/2}]. \end{aligned}$$

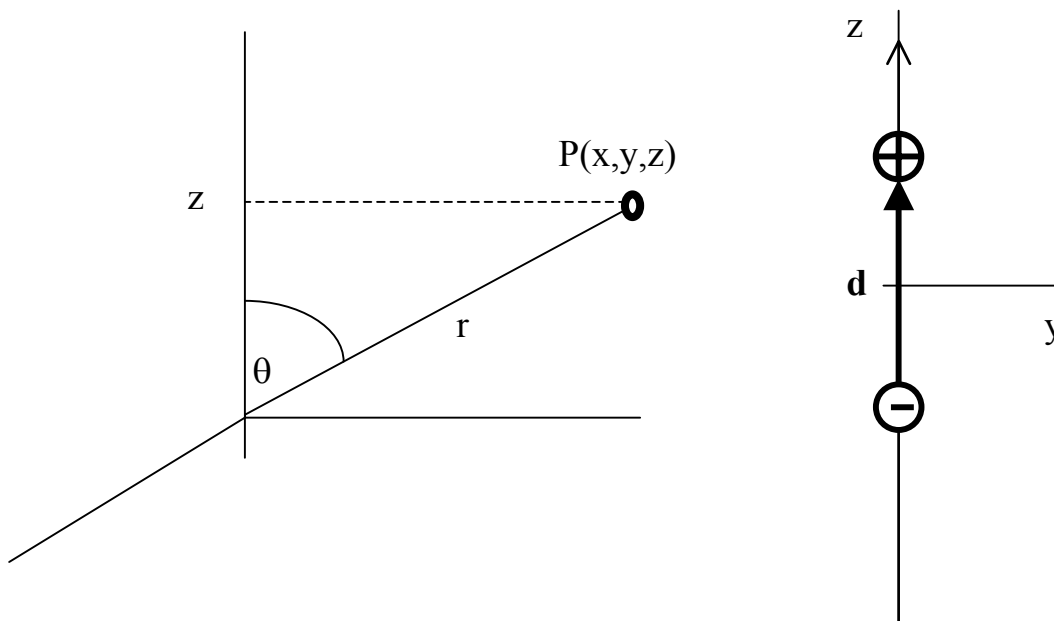
Разложим  $(1 \pm z d/r^2)^{-1/2}$  в ряд вида

$$(1 \pm x)^{-m} = 1 \pm m x \pm \dots \quad x \ll 1.$$

$$(1 \pm z d/r^2)^{-1/2} = 1 \pm z d/2r^2 \pm \dots \Rightarrow$$

$$\varphi_P = (q/4\pi\epsilon_0 r)[1 + z d/2r^2 - 1 + z d/2r^2] = q z d/4\pi\epsilon_0 r^2.$$

$$z/r = \cos \theta, \quad p = q d \Rightarrow \underline{\varphi_P = p \cos \theta / 4\pi\epsilon_0 r^2}.$$





**d** – вектор, имеющий направление от отрицательного заряда к положительному, а по величине равный расстоянию между зарядами.

Во-первых имеем:

Диполь -  $\varphi \sim 1/r^2$

Точечный заряд -  $\varphi \sim 1/r$ .

Во-вторых.

$$\mathbf{p} = q \mathbf{d} \Rightarrow \varphi_p = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Для отыскания вектора напряженности электрического поля, необходимо рассчитать его компоненты по  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Воспользуемся выражениями

$$\varphi = p z / 4\pi\epsilon_0 r^3 \text{ и } \mathbf{E} = -\nabla\varphi = -(\mathbf{i}\partial\varphi/\partial x + \mathbf{j}\partial\varphi/\partial y + \mathbf{k}\partial\varphi/\partial z),$$

$$E_z = (-p/4\pi\epsilon_0) \partial(z/r^3)/\partial z = (-p/4\pi\epsilon_0)(1/r^3 - 3z^2/r^5),$$

$$E_y = (-p/4\pi\epsilon_0) \partial(z/r^3)/\partial y = 3zy/r^5,$$

$$E_x = (-p/4\pi\epsilon_0) \partial(z/r^3)/\partial x = 3zx/r^5.$$

Замечание. Здесь, например

$$\partial(z/r^3)/\partial x = \partial[z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}]/\partial x = z(-3x)/(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} = -3xz/r^5.$$

Тогда весь вектор **E** можно записать в виде

$$\mathbf{E} = (p/4\pi\epsilon_0)[3zx\mathbf{i}/r^5 + 3zy\mathbf{j}/r^5 + (1/r^3 - 3z^2/r^5)\mathbf{k}]$$

$$E_x \quad E_y \quad E_z.$$

Таким образом, электрическое поле диполя рассчитано в данной модели с указанными допущениями.

### § 3 Поляризованность

Итак, у нас есть понятие электрического дипольного момента

$$\mathbf{p} = q \mathbf{d}.$$

Поскольку диэлектрик можно представить себе состоящим из диполей, то через понятие диполя можно охарактеризовать и диэлектрик в целом. Количественной характеристикой поляризации диэлектрика в целом служит физическая величина – поляризованность. Поляризованность – электрический дипольный момент единицы объема диэлектрика, он равен векторной сумме электрических дипольных моментов,  $\mathbf{p}_i$ , деленной на величину самого объема  $V$

$$\mathbf{P} = (1/V) \sum \mathbf{p}_i.$$

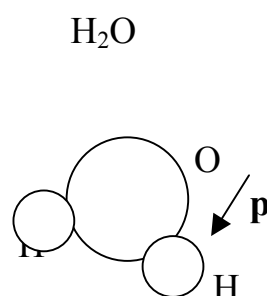
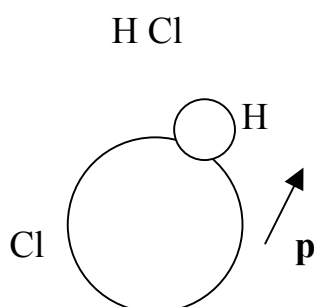
Частный случай. Если  $\mathbf{p}_i$  - все одинаковы, то есть  $q$  и  $d$  - одинаковы, то тогда и  $\mathbf{P}$  – поляризованность одинакова во всем диэлектрике. Такие диэлектрики называют однородными в смысле поляризации. О размерностях.

$$[\mathbf{p}_i] = \text{Кл м}, [\mathbf{P}] = \text{Кл/м}^2.$$

Таблица поляризованности некоторых элементов

Элемент	H	He	Li	Ne	Na	Ar	K
Поляризованность, отн. ед.	0.66	0.21	12	0.4	27	1.6	4

Оболочки щелочных металлов легко деформируются в электрическом поле из-за слабой связи валентных электронов с ядром, а благородные газы более жесткие в этом смысле, отсюда – количественные отличия в поляризованности.



Иногда применяют термин поляризуемость подчеркивая этим способность диэлектриков к поляризации в электрическом поле.

#### § 4 Вектор электрической индукции

В системе единиц «СИ» произведение  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  называется электрическим смещением вакуума и обозначается

$$\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}, [\mathbf{D}] = \Phi \text{ В/м м} = \text{Кл/м}^2.$$

Если обобщить это понятие на случай произвольной среды, а не только вакуума, то

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{D}$  – вектор электрической индукции, или иначе – электрическое смещение. Эта физическая величина содержит в себе информацию о реакции среды на приложение электрического поля (далее в данном разделе предполагается, что к диэлектрику приложено электрическое поле и исследуется вопрос о том, какое поле образуется внутри диэлектрика). В диэлектрике суммируется действие внешнего и внутреннего полей (точнее говоря происходит отклик диэлектрика своими внутренними ресурсами на приложенное внешнее поле), результирующее поле терминологически называется электрическим смещением.

Если диэлектрик изотропный, то есть у него во всех направлениях поляризация одинакова (существуют и анизотропные диэлектрики), то для него по всему объему диэлектрика можно записать следующее выражение

$$\mathbf{P} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E},$$

которое справедливо в не слишком сильных полях. Здесь  $\alpha$  – скалярная величина, называемая диэлектрической восприимчивостью и

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \alpha \epsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \alpha) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, \epsilon = 1 + \alpha.$$

Если диэлектрик анизотропный, то возникнут составляющие электрического смещения  $D_x, D_y, D_z$ , зависящие от каждой компоненты  $E_x, E_y, E_z$ , приложенного извне электрического поля.

$$\mathbf{D} = \{D_x, D_y, D_z\}.$$

$$D_x = \epsilon_{xx} \epsilon_0 E_x + \epsilon_{xy} \epsilon_0 E_y + \epsilon_{xz} \epsilon_0 E_z$$

$$D_y = \epsilon_{yx} \epsilon_0 E_x + \epsilon_{yy} \epsilon_0 E_y + \epsilon_{yz} \epsilon_0 E_z$$

$$D_z = \varepsilon_{zx} \varepsilon_0 E_x + \varepsilon_{zy} \varepsilon_0 E_y + \varepsilon_{zz} \varepsilon_0 E_z.$$

$$D_{0x} \quad D_{0y} \quad D_{0z}$$

$\varepsilon \sim \varepsilon(\mathbf{E}) \Rightarrow \varepsilon_{lm}$  (параметр двойного индекса).

В данном случае диэлектрическая проницаемость – тензор второго ранга (напомним, что вектор – тензор первого ранга, скаляр – нулевого). Компоненты тензора второго ранга запишем в виде таблицы

$$\varepsilon_{lm} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}, \quad x \rightarrow 1, y \rightarrow 2, z \rightarrow 3$$

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_k \varepsilon_{ik} E_k$$

$k, i = (1, 2, 3 \text{ или } x, y, z).$

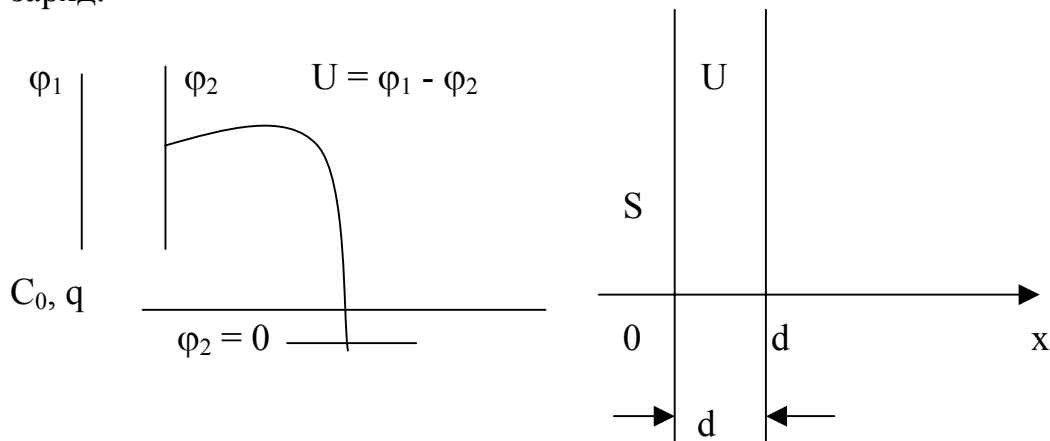
В записи дважды встречающийся индекс означает суммирование по нему

$$D_m = \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} E_i.$$

Резюме. В анизотропных диэлектриках  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  не коллинеарные вектора.

Емкость плоского конденсатора.

Рассмотрим конденсатор, прибор, способный накапливать электрический заряд.



Пусть конденсатор – плоский, причем  $d \ll \sqrt{S}$ .  $d$  – расстояние между пластинами,  $S$  – площадь пластин,  $\sigma$  – поверхностная плотность зарядов, с которой равномерно заряжены пластины конденсатора (напомним, что  $E = \sigma/\epsilon_0$ ). Найдем разность потенциалов  $U$ .

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int E \, dx = \sigma/\epsilon_0 \int dx = \sigma d/\epsilon_0, \quad \sigma = q/S \Rightarrow U = qd/S\epsilon_0,$$

$$C_0 = q/U = \epsilon_0 \sigma/d.$$

Теперь проведем мысленный эксперимент – заполним пространство между пластинами диэлектриком и будем заряжать их до такого же заряда  $q$  как и без диэлектрика. Измерим разность потенциалов. Мы выясним, что разность потенциалов другой по сравнению с конденсатором без диэлектрика. Поскольку  $q$  остается неизменной (по нашему произволу) тогда

$$Q = C_1 U_1 = C_0 U \Rightarrow C_1/C_0 = U/U_1 = E/E_1 = \epsilon.$$

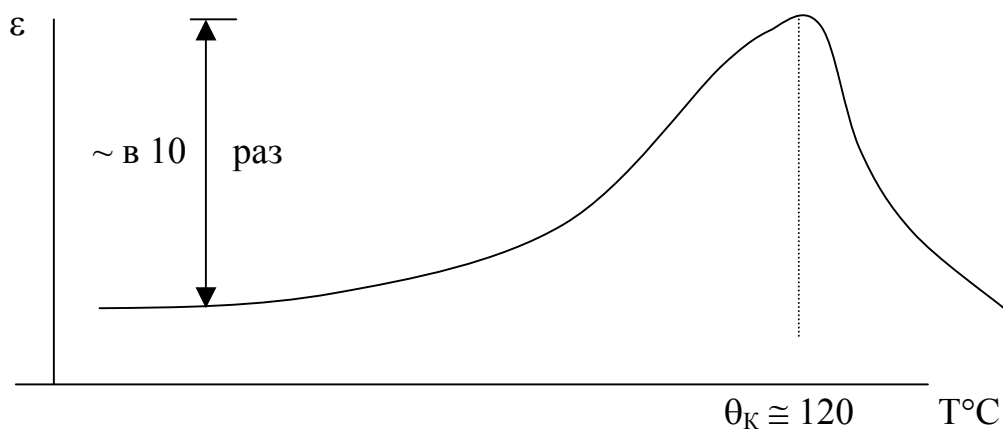
Здесь  $\epsilon$  есть та самая относительная диэлектрическая проницаемость (относительно вакуума), которая была введена нами ранее. В данном представлении  $\epsilon$  измеряется экспериментально как отношение напряжений. В таблицу сведены сильно отличающиеся диэлектрические проницаемости разных веществ.

вещество	вакуум	воздух	стекло	вода	Титанат бария Ba Ti O <sub>2</sub>
$\epsilon$	1	1.000594	5-10	81	6000-7000

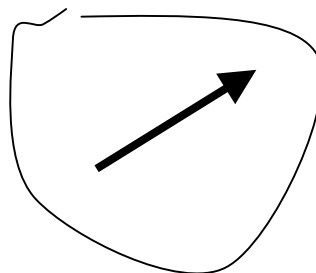
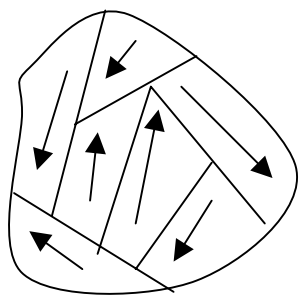
Таким образом емкость конденсатора в произвольном случае равна

$$\underline{C} = C_1 = C_0 \epsilon = \underline{\epsilon} \epsilon_0 S/d.$$

Замечание: поведение Ba Ti O<sub>2</sub> с температурой



Вещества с таким температурным поведением называют сегнетоэлектриками. Они представляются состоящими из доменов – частей с одинаково направленными диполями (дипольными моментами). Слева от максимума происходит перестройка доменов – объединение мелких в один большой домен с одинаково направленными дипольными моментами.



Справа от максимума происходит разрушение всей доменной структуры по закону  $\epsilon \sim 1/T$ , который называется законом Кюри – Вейсса. Максимальное значение  $\epsilon$  приблизительно соответствует температуре, называемой температурой Кюри -  $\theta_K$ . При обратном ходе температуры  $\epsilon$  проходит все стадии прямого пути с характерными для подобных процессов гистерезисными явлениями. В итоге  $\epsilon$  возвращается к исходному состоянию.

## § 5 Энергия электрического поля

В начале коснемся энергии, совершаемой при перемещении точечных электрических зарядов.

При перемещении электрических зарядов силы кулоновского взаимодействия совершают определенную работу  $A$ .

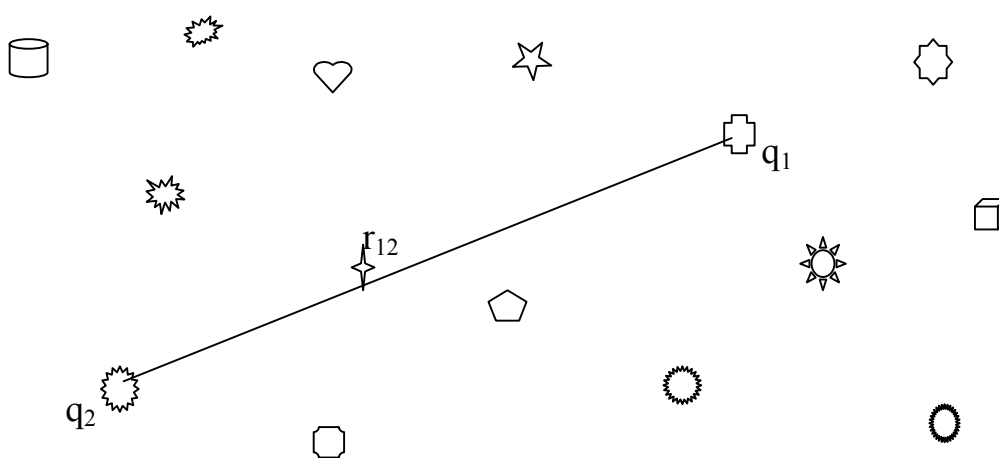
Системе электрических зарядов можно приписать энергию взаимодействия, за счет убыли которой совершается работа.

$$A = -\Delta W, \varphi = -A/q = W/q, -A = -\varphi q = \Delta W, -\Delta W = -(W_2 - W_1) = A_{21} = -A_{12}/$$

Часто работа против сил поля считается положительной, а работа самого поля – отрицательной. Пусть заряд  $q_1$  создающий поле точечный, тогда

$$\varphi = q_1/4\pi\epsilon_0\epsilon r, W = q \varphi = q_1 q / 4\pi\epsilon_0\epsilon r.$$

Рассмотрим систему большого числа точечных зарядов.



Энергия взаимодействия между 1 и 2 зарядами равна

$$W_{12} = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r_{12}.$$

Среду вокруг зарядов предполагаем эквивалентной вакууму с диэлектрической проницаемостью близкой к единице. Энергия взаимодействия между  $i$  и  $j$  зарядами запишется

$$W_{ij} = q_i q_j / 4\pi\epsilon_0 r_{ij}.$$

Если найти энергию взаимодействия между каждой парой зарядов и сложить их все, получим

$$W = (1/2) \sum_{\text{по всем парам}} q_i q_j / 4\pi\epsilon_0 r_{ij} = \sum q_i \varphi_j / 2$$

Коэффициент  $1/2$  появляется от того, что каждая пара зарядов в такой сумме просчитана дважды. Представим, что число зарядов возрастает до непрерывного их распределения (так, что становится возможен континуальный подход).

$$q_i \rightarrow dq_i, \quad dq_i = \rho_i dV_i, \quad d\phi = dq_i/4\pi\epsilon_0 r,$$

$$\phi = \int \rho dV/4\pi\epsilon_0 r$$

(по  $j$  – ым объемам)

Если для нахождения потенциалов интегрирование ведется по объемам, содержащим заряды с индексом  $j$ , то для самих зарядов интегрирование остается вести по объемам содержащим заряды  $i$ .

$$dW = (1/2) \sum dq_i d\phi_j, \quad \Sigma \rightarrow \int,$$

$$W = (1/2) \int \int dq_i d\phi_j = (1/2) \int \int \rho_i dV_i \rho_j dV_j / 4\pi\epsilon_0 r.$$

(i, j)                      (i, j)

Интегрирование как по  $i$ , так и по  $j$  в конечном итоге проводится по одному и тому же объему как суммирование в пределе по каждому элементарному объему всего объема в целом. В итоге получим равенство

$$W = (1/2) \int_V \rho \phi dV$$

Это равенство можно истолковать так: потенциальная энергия заряда величины  $q = \int \rho dV$  равна произведению величины этого заряда на потенциал, создаваемый другими зарядами в той же точке. Вообще говоря, только что была вычислена энергия внутри объема  $W_V$ . Можно также говорить и об энергии на поверхности

$$W_s = \int_S \sigma \phi dS$$

$$\Rightarrow W = W_V + W_s.$$

Заметим, что энергия поверхности как правило много меньше энергии объема. Справедливы также формулы объемной и поверхностной плотности энергии, например

$$w = dW/dV = \rho\phi/2.$$



Выразим энергию электрического поля через его напряженность.

В конденсаторе

$$U = E d, E = \sigma / \epsilon \epsilon_0 = q / S \epsilon \epsilon_0 \Rightarrow q = S \epsilon \epsilon_0 E = S \epsilon \epsilon_0 U / d.$$

$$W = Uq/2 = (1/2) E d S \epsilon \epsilon_0 = (S d = V) = \epsilon \epsilon_0 V E^2 \Rightarrow \underline{w} = W/V = \underline{\epsilon \epsilon_0 E^2 / 2}.$$

Для произвольного объема

В общем случае, если энергия распределена по объему неравномерно, имеем

$$W = dW/dV, dW = w dV \Rightarrow$$

$$\underline{W} = \int_V w dV = \int_V \underline{\epsilon \epsilon_0 E^2} dV / 2.$$

В проводнике

Поверхность проводника эквипотенциальна, то есть потенциалы точек поверхности проводника все одинаковы.

$$W = \sum q_i \phi_i / 2 = \phi / 2 \sum q_i = \phi Q / 2.$$

## Глава 4 Постоянный электрический ток

### § 1 Сила и плотность электрического тока

Электрическим током называют упорядоченное движение электрических зарядов (электрически заряженных частиц) . Для получения электрического тока необходимо выполнение двух условий одновременно.

1. Наличие свободных электрических зарядов
2. Эти заряды должны находиться в электрическом поле

Как осуществить эти условия ? Возможность приложения электрического поля как правило сводится к проблеме хороших электрических контактов. Свободные электрические заряды есть, например, в металлах, электролитах, ионизованном газе, других твердых и иных телах. Силу электрического тока определим как изменение электрического заряда со временем. Если за равные промежутки времени заряд изменяется на одинаковую величину, то

$$i = q/t, [i] = \text{Кл/с} = \text{А}.$$

А если же нет

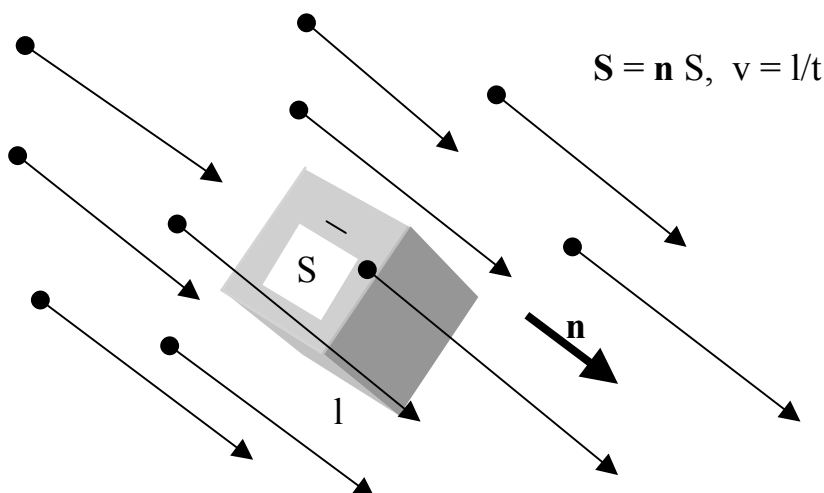
$$i = dq/dt, q = \int i(t) dt.$$

Возможен и другой подход. Прежде, чем охарактеризовать движение зарядов силой тока, введем понятие плотности тока.

Плотность электрического тока равна (численно) величине заряда, проходящего в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно линиям тока

$$j = q/St.$$

В среде с движущимися упорядоченно зарядами рассмотрим параллелепипед, составленный из линий тока



Длина такого параллелепипеда  $l$  численно равна скорости в единицу времени (скорость – единичная длина или иначе говоря длина в единицу времени). Тогда число частиц, которые пройдут через площадку  $S$  за единицу времени равняется числу частиц, заключенному внутри этого параллелепипеда, а полное же число частиц равно

$$N = n S v t \quad (v t = l).$$

$n$  – концентрация частиц (число частиц единичного объема). Полный заряд внутри параллелепипеда равен

$$q = q_e N = q_e n S v t.$$

Отсюда можно найти плотность тока, направление которого совпадает с направлением скорости частиц

$$j = q/St = q_e n v, \quad \underline{\mathbf{j}} = q_e \underline{\mathbf{n}} \underline{\mathbf{v}}.$$

Заметим, что так как

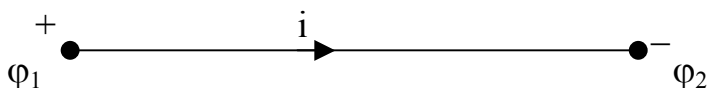
$$J = i/S, \quad i = q/t \Rightarrow j = di/dS, \quad \underline{i} = \int_{\underline{S}} \underline{\mathbf{j}} d\underline{\mathbf{S}}.$$

Интегрирование проводится по всей поверхности, через которую протекает электрический ток.

## § 2 Закон Ома

Ом экспериментально установил закон. Сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику прямо пропорциональна разности потенциалов, приложенной к концам этого проводника.

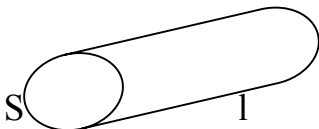
Интегральная форма записи закона Ома.



$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1, U = \varphi_1 - \varphi_2, i \sim U, \underline{i} = GU = \underline{U/R}, [G] = \text{Сименс}, [R] = \text{Ом}.$$

Дифференциальная форма записи закона Ома.

Рассмотрим отрезок проводника (кусоч проволоки). Выразим сопротивление этого куска проволоки через его размеры, считая его электрически однородным.



$$R \sim l/S, R = \rho l/S = (1/\sigma) l/S, [\rho] = \text{Ом м}, [\sigma] = (\text{Ом м})^{-1}.$$

$\rho$  - удельное сопротивление,  $\sigma$  - удельная электрическая проводимость. Приведем сводку удельных сопротивлений металлов и одного сплава при  $20^\circ\text{C}$ .

Элемент	Медь	Железо	Серебро	Константан (сплав, Cu - 58.8%, Ni - 40%, Mn - 1.2%)
$\rho, 10^{-9} \text{ Ом м}$	17	98	16	440

Проведем преобразования

$$R = l/\sigma S = U/i \Rightarrow i/\sigma S = U/l \Rightarrow j/\sigma = E \Rightarrow j = \sigma E.$$

В векторной форме

$$\underline{j} = \sigma \underline{E}.$$

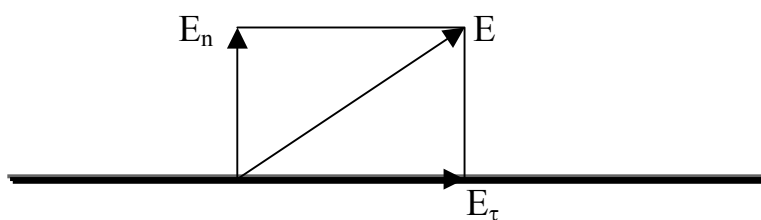
Здесь  $\underline{j}$ ,  $\sigma$  и  $\underline{E}$  характеризуют электрическое состояние среды в каждой данной точке являясь функциями координат и времени.

### § 3 Подвижность носителей заряда

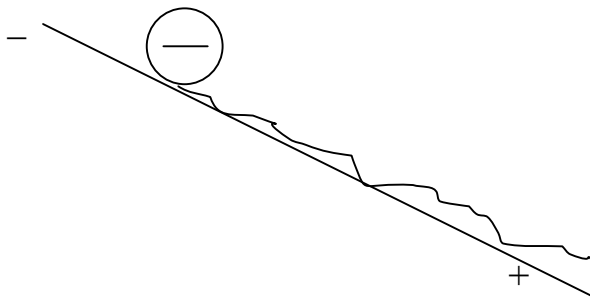
Введем новую физическую величину, характеризующую поведение заряженных частиц при их движении в электрически активной среде.

$$\underline{j} = env, \underline{j} = \sigma \underline{E} \Rightarrow env = \sigma \underline{E}, \underline{\sigma} = env/E = \underline{en}\underline{\mu}. \quad \mu = v/E, [\mu] = \text{м}^2/\text{В} \cdot \text{с}.$$

$\mu$  - скорость заряженной частицы приведенная к единичной напряженности электрического поля называется подвижностью.  $v$  называют дрейфовой скоростью ( $v_{\text{др}}$ ) или скоростью дрейфа заряженной частицы (электрона) или квази-частицы (дырка) в электрическом поле. (Заметим, что наличие падения напряжения (разности потенциалов) означает, что для вектора напряженности электрического поля существует отличная от нуля ее составляющая  $E_{\tau}$  вдоль проводника.



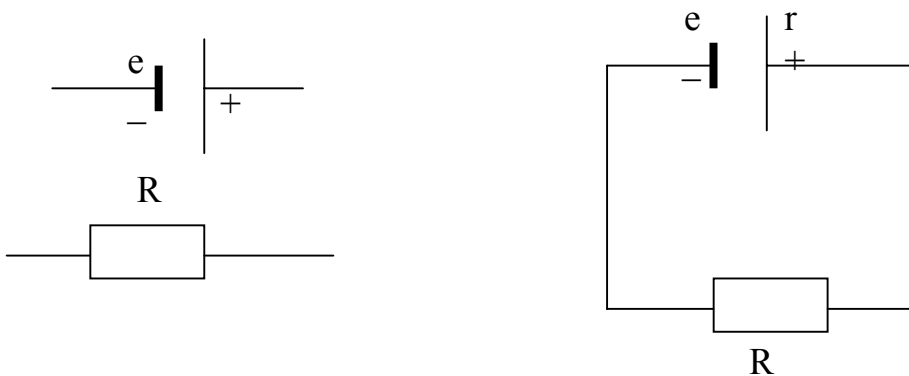
$\mu$  для данного проводника в одних и тех же условиях является постоянной величиной. Механически движение под действием электрического поля заряженной частицы можно трактовать, например, как скатывание шарика под уклон на наклонной плоскости с шероховатостями, препятствующими скатыванию.



Уклон эквивалентен напряженности электрического поля (электрическому напряжению, разности потенциалов), а шероховатости – электронным оболочкам атомов, их ядрам, носителям заряда, а также несовершенствами среды, по которой течет ток.

#### § 4 Закон Ома для замкнутой цепи

Ранее мы упоминали об элементах Вольты и Даниэля-Якоби. Существуют и другие элементы и источники напряжения (тока) . В электротехнике элементы обозначают символами.



В элементе заряды разделены. Если замкнуть цепь на внешнюю нагрузку, которой служит резистор  $R$  , то при переносе заряда по электрической цепи будет совершена работа.

$$E = A/q \Rightarrow A = e q.$$

$e$  – электрическое напряжение, для которого исторически сложилось название электродвижущая сила – ЭДС.

$$A = e i t \quad (q i t).$$

Рассмотрим участок цепи. Для него работа численно равная теплу Джоуля - Ленца рассчитывается по формуле

$$Q = A_R = U q = U i t. \quad U = i R \Rightarrow A_R = i^2 R t.$$

Для замкнутой цепи с источником ЭДС необходимо учесть внутреннее сопротивление самого источника согласно эквивалентной схеме на рисунке. Составим баланс энергий.

$$A = Q_r + A_R$$

$A$  – полная энергия высвобождаемая при химической реакции в элементе

$$A = e i t.$$

$Q_r$  – тепло, которым обменивается электролит и электроды со средой, оставаясь при этом в тепловом равновесии со средой

$$Q_r = U_r q = r i^2 t.$$

$A_R$  – работа тока на внешней нагрузке (утюг, компьютер, город и т.д.)

$$A_R = U_R q = R i^2 t.$$

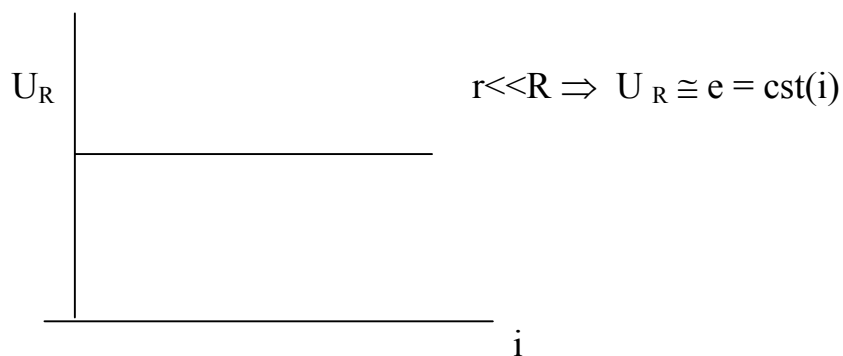
Подставив в уравнение баланса соответствующие выражения получим

$$e i t = r i^2 t + R i^2 t \Rightarrow \underline{i = e/(R + r)}.$$

Последнее полученное выражение называется законом Ома для замкнутой цепи. Внутреннее сопротивление включает сопротивление электролита и электродов. Током короткого замыкания называют ток, текущий по цепи при замкнутой накоротко внешней нагрузке  $R = 0 \Rightarrow i_{к.з.} = e/r$ .

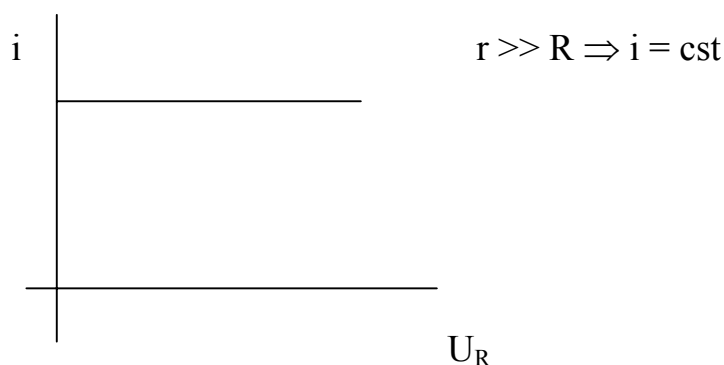
Замечание. Определим понятие источника тока и источника напряжения.

Источник напряжения.



Сопротивление нагрузки достаточно велико и изменяется в процессе работы незначительно. Создается ситуация, при которой напряжение на нагрузке остается примерно постоянным во время всего процесса работы схемы – отсюда и название: источник напряжения.

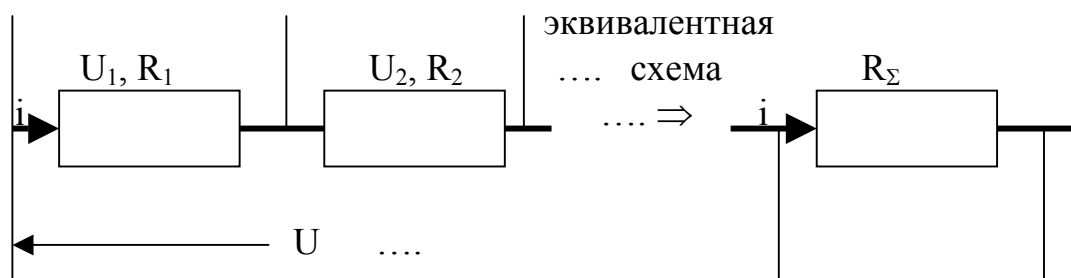
Источник тока



В данном случае сопротивление нагрузки много меньше внутреннего сопротивления. Изменение нагрузочного сопротивления слабо влияет на ток в цепи – отсюда и название: источник тока.

## § 5 Электрические цепи

### Последовательное соединение резисторов



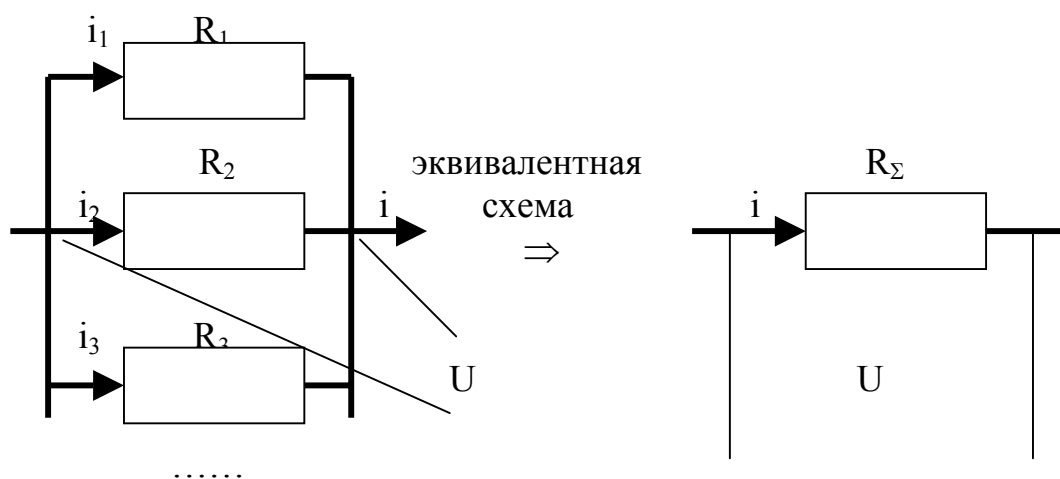


$$U = U_1 + U_2 + \dots, U = i R \Rightarrow i R_{\Sigma} = i R_1 + i R_2 + \dots = i \Sigma R_i \Rightarrow$$

$$\underline{R_{\Sigma} = \Sigma R_i}.$$

При последовательном соединении двух и более резисторов их общее сопротивление равно сумме их отдельных сопротивлений.

### Параллельное соединение резисторов

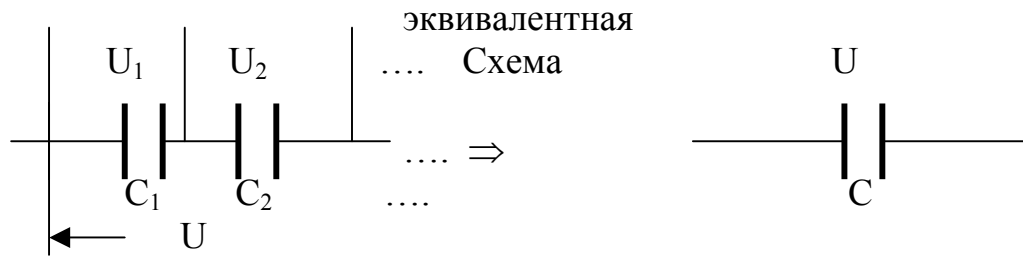


$$i = i_1 + i_2 + \dots \quad (i = U/R) \Rightarrow U/R_{\Sigma} = U/R_1 + U/R_2 + \dots$$

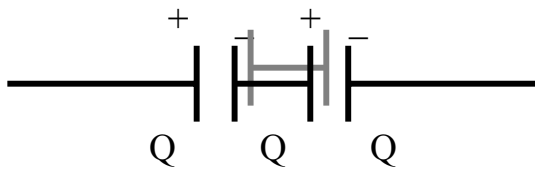
$$\underline{1/R_{\Sigma} = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots = \Sigma 1/R_i \Rightarrow R_{\Sigma} = (\Sigma 1/R_i)^{-1}}.$$

При параллельном соединении резисторов обратная величина их общего сопротивления равна сумме обратных величин сопротивлений отдельных резисторов.

## Последовательное соединение конденсаторов



Заряд между конденсаторами распределиться таким образом, что на каждом проводничке индуцируется один и тот же заряд



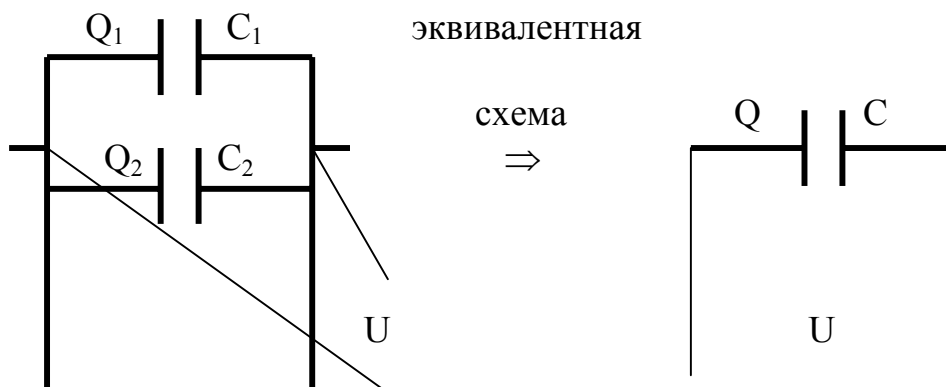
Тогда

$$U = U_1 + U_2 + \dots \quad (U = Q/C) \Rightarrow Q/C = Q/C_1 + Q/C_2 + \dots$$

$$\underline{1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots = \Sigma 1/C_i.}$$

При последовательном соединении конденсаторов обратная величина их общей емкости равна сумме обратных величин их отдельных емкостей.

## Параллельное соединение конденсаторов



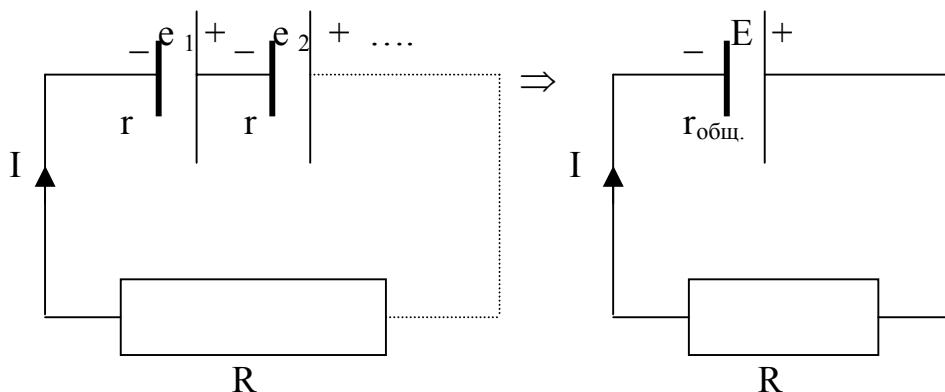
Заряды между пластинами распределяются пропорционально емкостям конденсаторов, а полный заряд равен при этом сумме этих зарядов. Пластины конденсаторов составляют как бы части пластины одного большого (эквивалентного) конденсатора.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots \quad (Q = C U) \Rightarrow C U = C_1 U + C_2 U + \dots$$

$$\underline{C} = C_1 + C_2 + \dots = \underline{\Sigma C_i}$$

При параллельном соединении конденсаторов их общая емкость равна сумме емкостей отдельно взятых конденсаторов.

### Последовательное соединение элементов



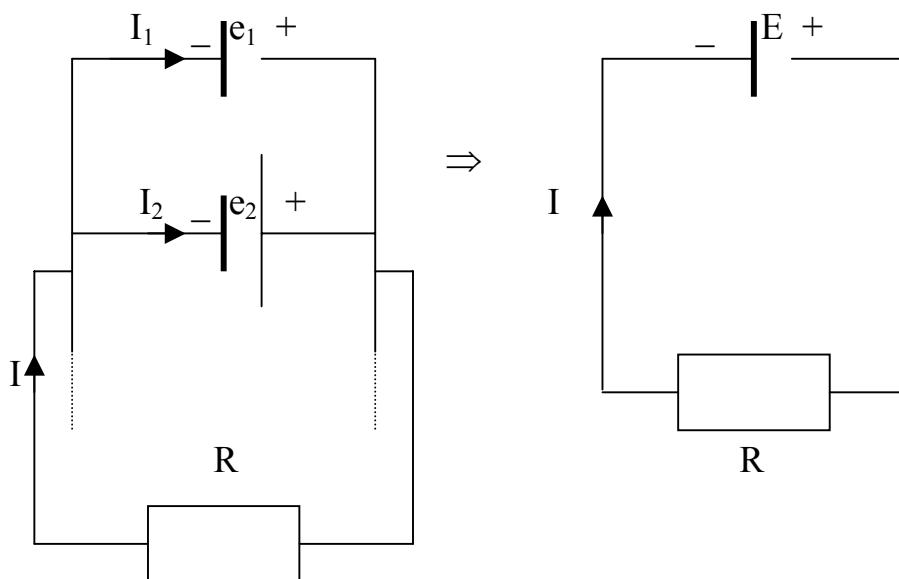
Внутреннее сопротивление эквивалентного элемента (рассчитывается как сумма последовательно соединенных резисторов) и ток в цепи (по закону Ома для замкнутой цепи) равны соответственно

$$r_{\text{общ.}} = \Sigma r_i, \quad I = E / (R + r_{\text{общ.}}) \Rightarrow$$

$$E = IR + I r_{\text{общ.}} = IR + I \Sigma r_i = IR + \Sigma e_i$$

$$R \ll \Sigma r_i \Rightarrow E = \Sigma e_i. \quad e_1 = e_2 = \dots = e \Rightarrow E = ne.$$

## Параллельное соединение элементов



Запишем значения общего тока и общего внутреннего сопротивления (как сопротивления параллельно включенных резисторов резисторов).

$$I = E / (R + r_{\text{общ.}}), \quad r_{\text{общ.}} = \left( \sum 1/r_i \right)^{-1}.$$

$$R \ll r_{\text{общ.}} \Rightarrow E' = I / \left( \sum 1/r_i \right) = \sum I_i / \left( \sum 1/r_i \right) = \left( \sum e_i/r_i \right) / \left( \sum 1/r_i \right).$$

К этому выражению можно прибавить падение напряжения на внешней нагрузке

$$E = E' + \left( \sum e_i/r_i \right) R.$$

Если все элементы одинаковы и нагрузка маленькая, то

$$e_i = e, \quad r_i = r \Rightarrow E = e \text{ (проверяется подстановкой)}.$$

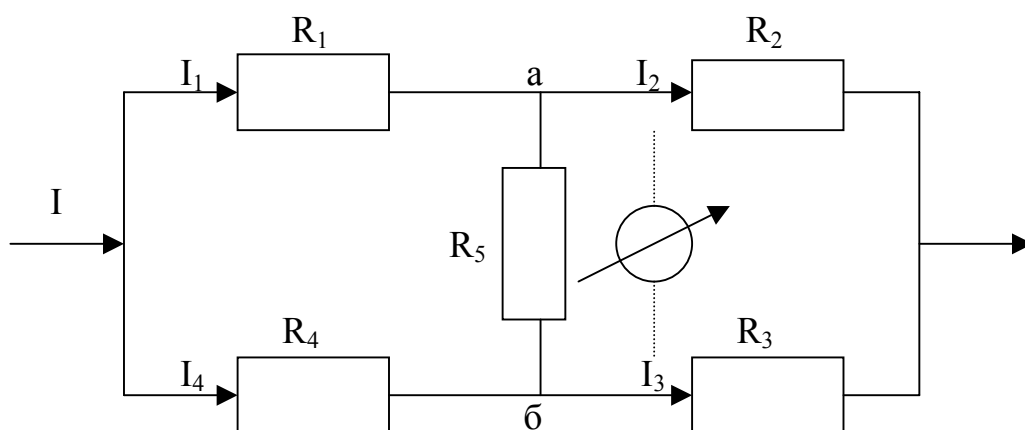
То есть, ЭДС всей батареи равна ЭДС одного источника и

$$r_{\text{общ.}} = r/n \quad (n - \text{число элементов, соединенных параллельно}).$$

Резюме:

Прибор	Вид соединения	Формула
R	Послед.	$\Sigma r_i$
R	Паралл.	$(\Sigma 1/r_i)^{-1}$
C	Послед.	$(\Sigma 1/c_i)^{-1}$
C	Паралл.	$\Sigma c_i$
E	Послед	$\Sigma e_i$ (R – мало)
E	Паралл.	$(\Sigma e_i/r_i)/\Sigma (1/r_i)$ , (R – мало)

### Резистивный мостик (Уинстона)



Такую схему не свести ни к последовательному ни к параллельному соединению резисторов. Запишем системы уравнений.

Сумма падений напряжений на резисторах в замкнутом контуре равна нулю. (Если бы внутри контура были источники, то был бы не «0», а алгебраическая сумма ЭДС).

$$U_1 + U_5 + U_4 = 0.$$

2.

$$U_5 + U_2 + U_3 = 0$$

Алгебраическая сумма токов, втекающих и вытекающих в точках а и б (узлах), также должна равняться нулю. Используемые здесь правила в литературе называют законами Кирхгофа. Ситуация, при которой ток через  $R_5$  оказывается равным нулю называется равновесием моста. Найдем аналитические условия (выражения) равновесия моста Уинстона. Последовательно  $R_5$  можно вклю-

чить измеритель тока, либо вместо этого резистора подсоединить индикатор нуля. В этом случае одинаковые токи будут протекать через пару резисторов  $R_1, R_2$  и пару  $R_3, R_4$ . Имеем из 1. И 2.

$$U_5 = 0, U_1 + U_4 = 0, U_2 + U_3 = 0 \Rightarrow U_1 = -U_4, U_2 = -U_3 \Rightarrow$$

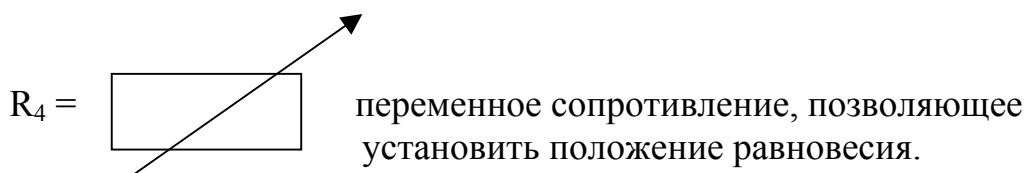
$$U_1/U_2 = U_4/U_3.$$

$$U_1 = I_1 R_1 \quad U_3 = I_2 R_3$$

$$U_2 = I_1 R_2 \quad U_4 = I_2 R_4 \Rightarrow$$

$$\underline{R_1/R_2 = R_4/R_3.}$$

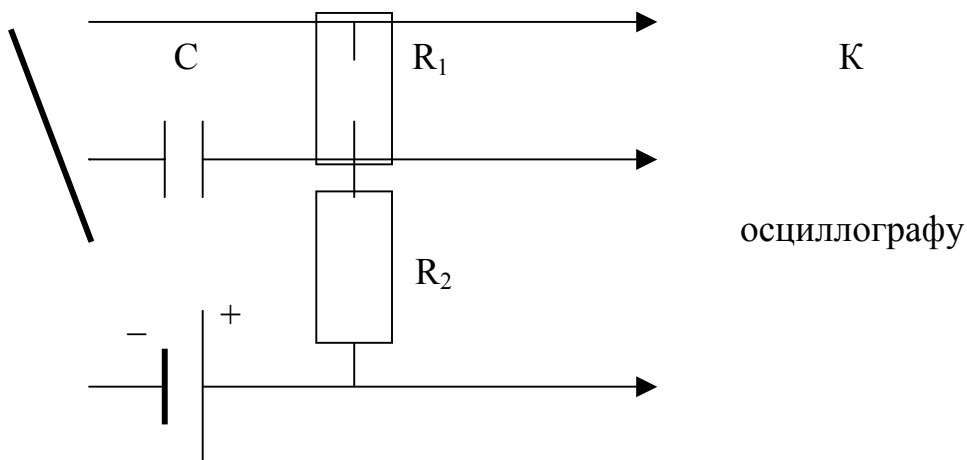
Пусть  $R_3 = R_x$  – неизвестное сопротивление и пусть



$$\underline{R_x = R_4 (R_2 / R_1).}$$

Таким образом имея эталонные резисторы и переменный резистор можно измерять сопротивление неизвестного резистора. Такой же принцип применяют для измерения неизвестной емкости (и индуктивности). Способ измерения по методу мостика Уинстона заложен в основу работы многих прецизионных измерительных приборов.

#### О зарядке и разрядке конденсатора.



Зарядка и разрядка конденсатора аналитически подчиняется закону показательной функции в зависимости от времени. Обычно в качестве основания выбирают число Непера (основание натуральных логарифмов).

$$U_{R2} = U_0(1 - e^{-At}).$$

$$t = 0 \Rightarrow U_{R2} = 0, t \rightarrow \infty \Rightarrow U_{R2} \rightarrow U_0.$$

$$U_{R1} = U_0 e^{-At}.$$

$$t = 0 \Rightarrow U_{R1} = U_0, t \rightarrow \infty \Rightarrow U_{R1} \rightarrow 0.$$

Такое поведение объясняется тем, что если сила, заставляющая скапливаться заряды на пластине постоянна, то сила отталкивания одноименных зарядов на пластинах возрастает по мере увеличения числа этих зарядов.

## § 6 Уравнение непрерывности

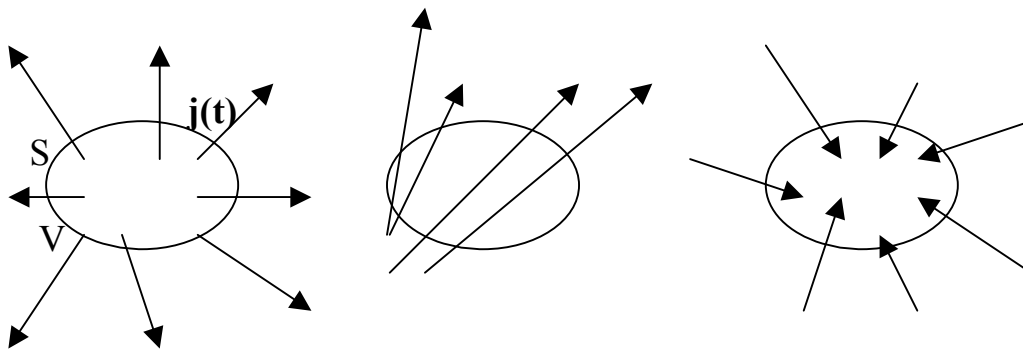
Рассмотрим некоторую электрически активную среду, то есть среду со свободными электрическими зарядами. Представим себе в этой среде воображаемую замкнутую поверхность, Ограничивающую объем  $V$ . Возможны три случая.

Ток только вытекает изнутри через поверхность

Весь ток протекает через поверхность, не застревая в ней

Ток только втекает через поверхность внутрь и весь остается («гибнет») там

Возможно также действие всех трех вариантов сразу.



Рассмотрим только тот ток, который ведет к убыли заряда, тогда

$$i = -dq/dt, q = \int_V \rho dV, i = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \Rightarrow -d/dt = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} \Rightarrow$$

$$-d/dt \int_V \rho dV = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}$$

Согласно формуле Остроградского-Гаусса заменим интегрирование по замкнутой поверхности интегрированием по объему, заключенному внутри этой поверхности

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV \Rightarrow \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV = -d(\int_V \rho dV)/dt \Rightarrow$$

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{j} + d\rho/dt) dV = 0$$

Ввиду произвольности объема, ограниченного произвольно выбранной поверхностью в проводящей среде имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + d\rho/dt = 0.$$

Эта формула выражает так называемое условие непрерывности или закон сохранения заряда при протекании тока. Определение.

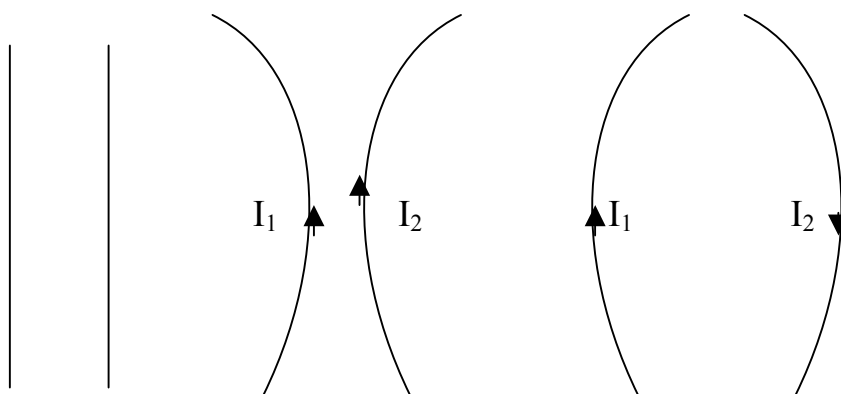
Убыль заряда со временем из замкнутого объема равна дивергенции плотности тока, выходящего через замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем.



## Глава 5 Магнитное поле (вакуум)

### § 1 Магнитная индукция – характеристика магнитного поля

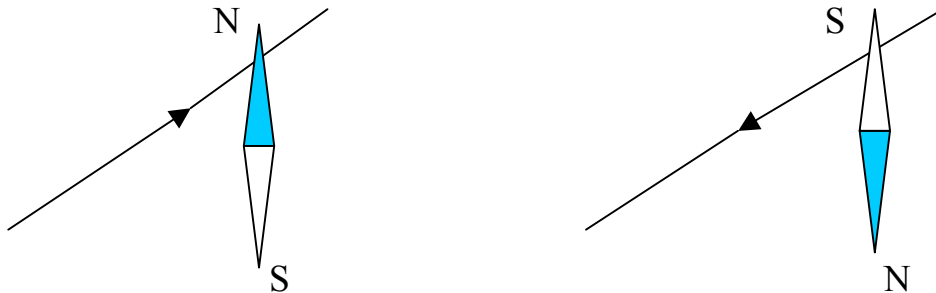
В электростатике заряды были неподвижны и рассматривалось электростатическое поле неподвижных электрических зарядов. Исключение составлял постоянный электрический ток, однако, мы не рассматривали изменений в среде вокруг проводников с токами (этим мы займемся здесь и сейчас) и уравнение непрерывности, где надо было связать заряды и токи. В уравнении непрерывности изменение плотности зарядов со временем можно было рассматривать очень медленным, квазистатическим процессом, хотя в принципе оно справедливо при перемещении зарядов с любой скоростью. Рассмотрим взаимодействие проводников с токами. Из опыта следует.



Ампер ( Андре Мари, французский математик, физик, химик, 1775-1836гг) установил, что провода взаимодействуют с силой  $F$  в том случае, если по ним течет электрический ток, причем

$$F \sim I_1 I_2 / r.$$

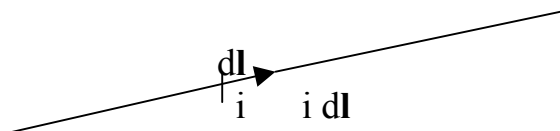
Для изучения этих взаимодействий можно использовать (как аналог точечного заряда) элементарный магнит. Магниты существуют в земной коре в готовом виде. Опыты с магнитами впервые производил Эрстед (Ханс Кристиан, датский физик и химик, 1777-1851 гг.).



При замене направления тока стрелка разворачивается. Магнитную стрелку Эрстеда можно заменить элементом тока. Такой прием отчасти искусственный, но полезный, для определения магнитного поля вокруг проводников с токами, как характеристики состояния среды при наличии движущихся зарядов. Таким образом, вокруг движущихся зарядов предполагается наличие материальной субстанции, так называемого магнитного поля, которое ответственно за магнитное взаимодействие: действие силы на проводники с током и природные магниты.

Ампер установил закон, согласно которому магнитное поле способно вызывать появление механической силы, действующей на элемент тока

$$dF \sim i B dl$$



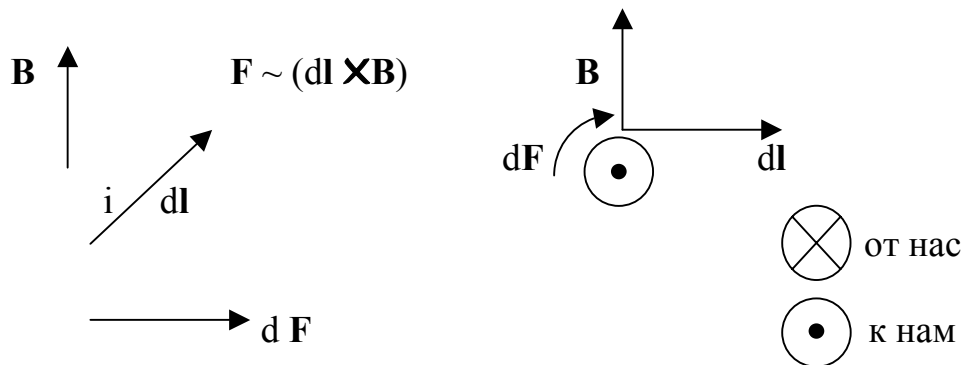
причем

$$F_1/(i dl)_1 = F_2/(i dl)_2 = \dots = F_i/(i dl)_i = \text{cst} = B.$$

Здесь  $F$  – сила, действующая на произвольный элемент тока,  $(i dl)$  – произведение тока на элемент длины – элемент тока,  $b$  – величина магнитной индукции, характеризующая магнитное взаимодействие, ее единица измерения определяется как:

$$[B] = [F/idl] = \text{н/А м} = \text{Тл}.$$

Определим направление  $\mathbf{B}$ . Опыт показывает, что  $d\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $d\mathbf{l}$  взаимно перпендикулярны, причем  $d\mathbf{l}$  совпадает по направлению с током в данной точке, а  $d\mathbf{F}$  приложена к середине  $d\mathbf{l}$ . Заметим, что длина  $d\mathbf{l}$  выбирается много меньше расстояния, на котором в данном опыте изучается действие тока, неоднородностью поля в данном опыте можно пренебречь. Для такой тройки векторов определено векторное произведение, так что



В системе единиц СИ закон Ампера запишется в виде

$$d\mathbf{F} = i (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Если поворачивать  $d\mathbf{l}$  к  $\mathbf{B}$ , то  $d\mathbf{F}$  направлено по правилу правого винта.

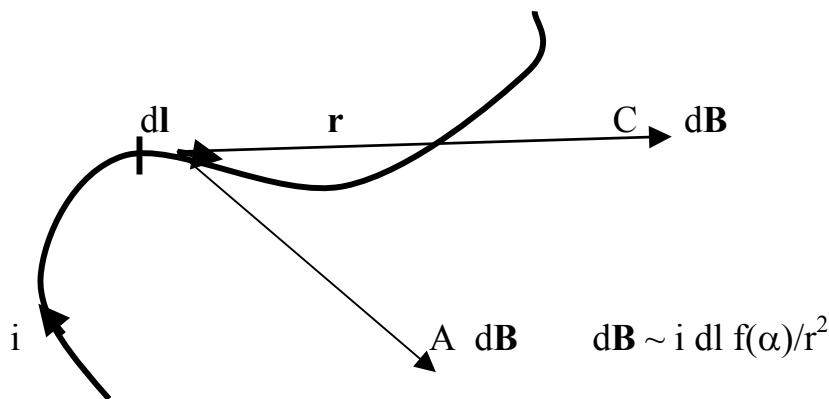
Для  $\mathbf{B}$  справедлив принцип суперпозиции

$$\mathbf{B} = \Sigma \mathbf{B}_i$$

Результирующий вектор магнитной индукции данной точки пространства равен сумме векторов магнитной индукции, вызываемых каждым источником магнитного поля в отдельности в этой точке.

## § 2. Формула Био-Савара-Лапласа

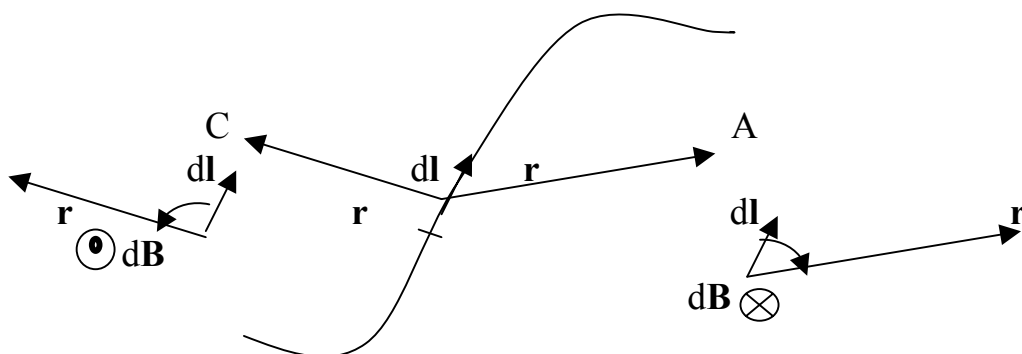
Эта формула получена экспериментально. Рассмотрим произвольный проводник с током и поставим задачу: найти магнитную индукцию, создаваемую элементом  $d\mathbf{l}$  с током  $i$  этого проводника в окружающем пространстве.



Экспериментально установлено, что магнитная индукция пропорциональна силе тока в проводнике, длине проводника и обратно пропорциональна расстоянию между проводником (в данном случае элементом длины  $dl$ ) и искомой точкой, в которой рассчитывается индукция магнитного поля. Направление  $d\mathbf{B}$  является функцией угла для элемента с током. Чтобы записать точный закон, необходимо учесть систему единиц и взаимное направление векторов  $d\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $d\mathbf{B}$ . По аналогии с законом Ампера воспользуемся векторным произведением

$$d\mathbf{B} \sim (d\mathbf{l} \times \mathbf{r}).$$

Начала векторов можно совмещать параллельным переносом и так по правилу векторного произведения определить направление вектора  $d\mathbf{B}$ .



Запишем в системе единиц «СИ»

$$d\mathbf{B} = (\mu/4\pi)i d\mathbf{l} \times \mathbf{r}/r^3, \mathbf{r}/r (\mathbf{e}_r) - \text{орт.}$$

Формула включает три составляющих  
Величина

$$dB \sim dl \text{ i } f(\alpha)/r^2.$$

## Направление

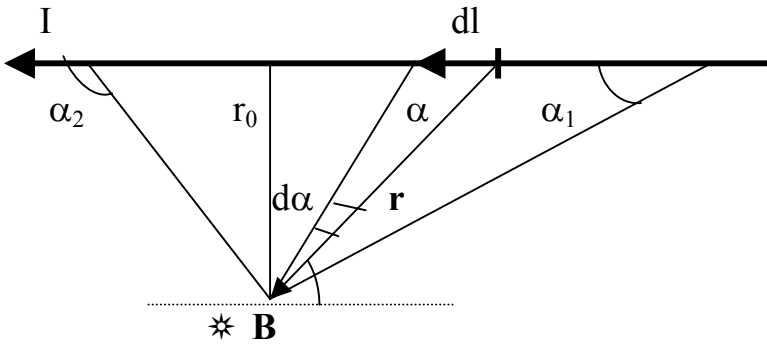
$$d\mathbf{B} \sim d\mathbf{I}\mathbf{X}\mathbf{r}.$$

## Удовлетворение системе единиц «СИ»

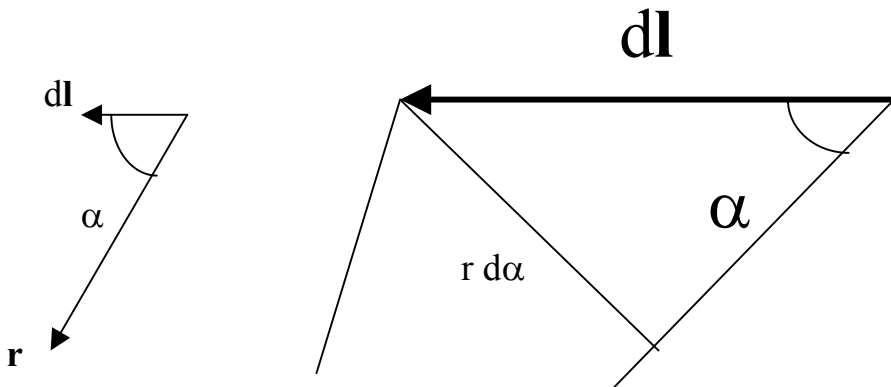
$\mu_0/4\pi.$

### § 3 Магнитная индукция прямого провода с током

Рассмотрим отрезок конечной длины прямого провода с током  $AB$  и рассчитаем индукцию магнитного поля в произвольной точке  $C$  около провода, используя закон Био-Савара-Лапласа.



$$d\mathbf{B} = (\mu_0 4\pi) I (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})/r^3, \quad d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = dl \, r \sin \alpha$$



$$dl/r \, d\alpha = 1/\sin \alpha \Rightarrow dl = r \, d\alpha / \sin \alpha, \, r_0/r = \sin \alpha \Rightarrow r = r_0 / \sin \alpha \Rightarrow$$

$$dl = r \, d\alpha / \sin \alpha = r_0 \, d\alpha / (\sin \alpha)^2.$$

Таким образом переменная интегрирования свелась к углу  $\alpha$ . Проведем интегрирование по углу  $\alpha$  (как суммирование в пределе вклада от каждого элемента  $dl$  в индукцию магнитного поля в искомой точке). Для этого подставим в формулу Био-Савара-Лапласа значения для всех изменяющихся величин выразив их через угол  $\alpha$ .

$$dB = (\mu_0 / 4\pi) I \sin \alpha \, d\alpha / r_0.$$

$$B = \mu_0 I / 4\pi r_0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \, d\alpha = (\mu_0 I / 4\pi r_0) (-\cos \alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} =$$

$$= (\mu_0 I / 4\pi r_0) (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Рассмотрим предельный случай бесконечного прямого провода

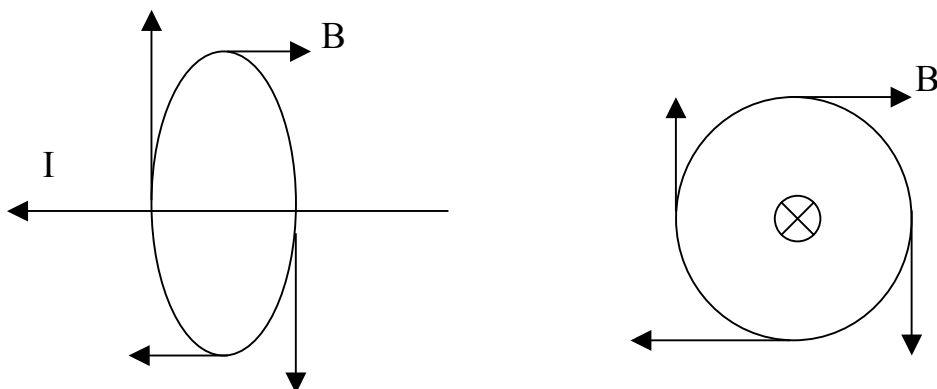
$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi \Rightarrow B = \mu_0 I / 2\pi r_0.$$

Отступление. Французские физики Био Жан Батист (1774-1812), Савар Феликс (1791-1841) и наиболее известный из них Лаплас Пьер Симон (1749-1827) занимались исследованиями в сфере магнетизма. Лаплас известен также как астроном и математик. Ему принадлежат приоритеты введения понятий удельной теплоемкости, потенциальной функции, а также небесная теория возникновения планет с жидким ядром.

#### § 4 Соленоидальный (вихревой) характер магнитного поля

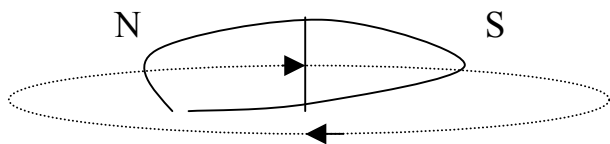
Под линиями индукции магнитного поля мы будем понимать воображаемые линии, касательные к которым в каждой точке такой линии направлены также как и вектора магнитной индукции. На примере прямого провода с током

можно видеть, что линии индукции магнитного поля представляют собой замкнутые concentric окружности.



Эрстед назвал такие воображаемые линии вихрями.

Вспомним, что линии напряженности электрического поля разомкнуты, они начинаются на положительных зарядах (заряженных телах), а заканчиваются на отрицательных. Такое векторное поле мы называем потенциальным. Поскольку линии индукции магнитного поля не прерываются, то (по этому случаю) все векторные поля, обладающие непрерывными линиями называют соленоидальными (вихревыми). В этой ситуации нет оснований говорить о магнитных зарядах. Магнитную среду такие линии пронизывают также не прерываясь.



## § 5 Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции

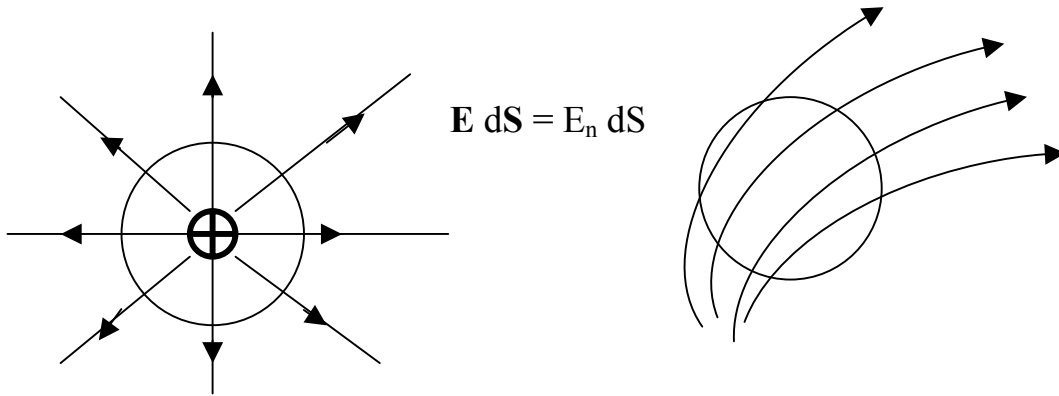
Составим интеграл вида

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi_B.$$

Это есть поток  $\Phi$  магнитной индукции  $\mathbf{B}$  через некоторую поверхность  $S$ . Определим такой поток через замкнутую поверхность

$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

В интеграле появился кружок, означающий интегрирование по замкнутой поверхности. Поток вектора магнитной индукции для любой замкнутой поверхности, построенной в магнитном поле равен 0, так как внутри такой поверхности нет магнитных зарядов и внутри нее не зарождаются линии магнитной индукции, подобно тому как это происходит с электрическими зарядами.



Тогда

$$\oint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0 \quad (\Phi_B = 0)$$

Согласно формуле Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0.$$

Поскольку поверхность выбиралась произвольно, то и объем, ограниченный этой поверхностью, тоже произвольный и следовательно

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Эта формула отражает факт соленоидальности магнитного поля.

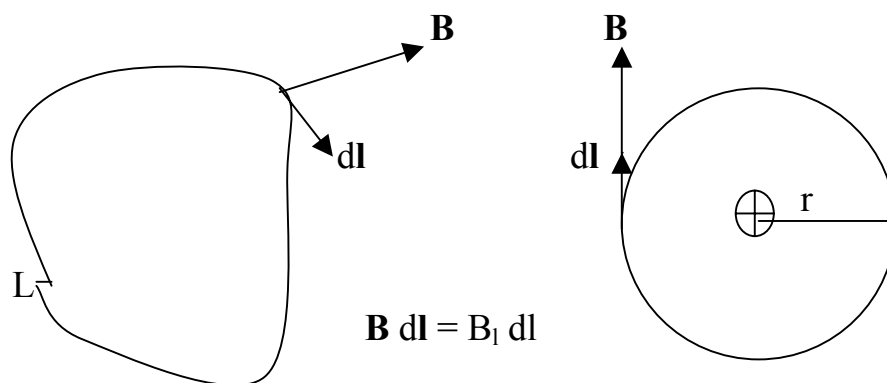


## § 6 Закон полного тока

Составим интеграл (контурный интеграл)

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l}.$$

Здесь  $L$  – некий контур (вообще говоря замкнутый, но не обязательно) в магнитном поле, а  $d\mathbf{l}$  – вектор, численно равный  $dl$  и из одной с ним точки проведем вектор  $\mathbf{B}$ .



Пусть рассматриваемый контур совпадает с воображаемой замкнутой линией магнитной индукции вокруг прямого провода с током, имеющей форму окружности. Тогда  $\mathbf{B}$  и  $d\mathbf{l}$  совпадут по направлению. Вычислим контурный интеграл, для чего вначале составим под интегральное выражение. Имеем магнитную индукцию прямого провода с током бесконечной длины

$$\mathbf{B} d\mathbf{l} = (\mu_0 I \mathbf{e}_l / 2\pi r) d\mathbf{l} = \mu_0 I dl / 2\pi r \quad (d\mathbf{l} = dl \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_l \mathbf{e}_l = 1).$$

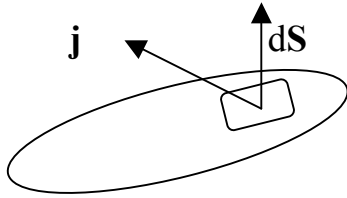
Проинтегрируем полученное выражение по замкнутому круговому контуру

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = (\mu_0 I / 2\pi r) \oint_{L=2\pi r} d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

В поле векторов интеграл от скалярного произведения некоторого вектора на вектор элемента замкнутого контура называется циркуляцией (у нас вектора  $\mathbf{B}$ ) по контуру  $L$ . В этом случае закон полного тока можно сформулировать следующим образом. Циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру, создаваемая токами, которые охватываются данным контуром, равна сумме этих токов, умноженных в системе единиц «СИ» на магнитную постоянную  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Если среда электрически неоднородная, то вместо токов задается плотность токов

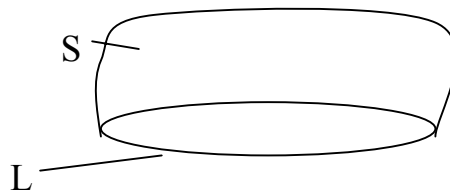
$$J = di/dS \Rightarrow i = \int \mathbf{j} dS$$



$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} dS.$$

Применим формулу Стокса

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} dS = \mu_0 \int_S \mathbf{j} dS$$



Поскольку контур, а следовательно и поверхность «натянутая» на этот контур выбираются произвольно, то

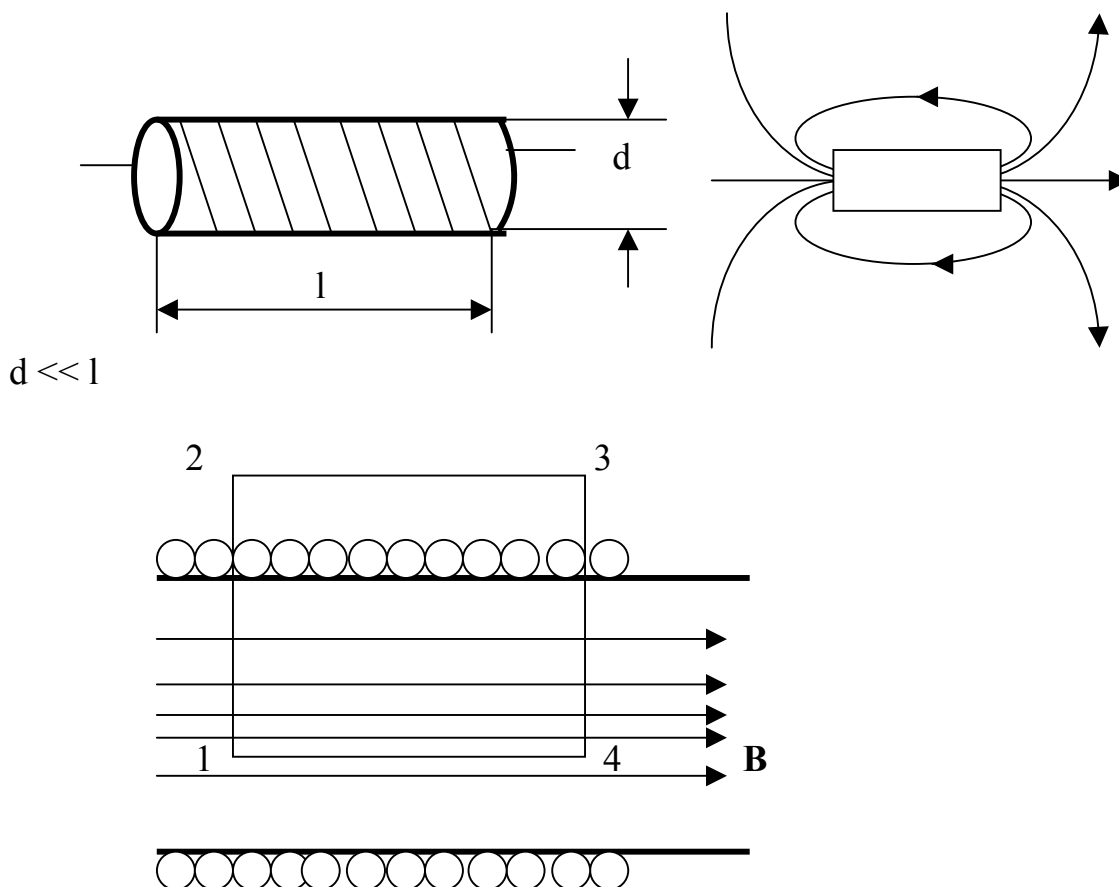
$$\int (\text{rot } \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}) dS = 0 \Rightarrow \underline{\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}}.$$

Сводка формул для стационарных электрического и магнитного полей в вакууме

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \text{ div } \mathbf{B} = 0, \text{ rot } \mathbf{E} = 0, \text{ rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

## § 7 Поле соленоида

Соленоид представляет собой провод, навитый на электрически непроводящий каркас цилиндрической формы, с электрическим током



Каждый виток создает поле так, что на оси соленоида (и в ближайшей окрестности оси) густота линий одинакова (поле однородно), а снаружи их густота ничтожно мала. Для расчета поля на оси соленоида воспользуемся законом полного тока

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \sum i_k.$$

Вычислим интеграл – циркуляцию вектора магнитной индукции по контуру обозначенному на рисунке. Интегрирование разобьем по четырем сторонам прямоугольника, имеем

$$\int_1^2 \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_1^2 B dl \cos 90^\circ = 0, \quad \int_2^3 (B \approx 0) dl = 0, \quad \int_3^4 B dl \cos 90^\circ = 0, \quad \int_4^1 (B \approx 0) dl = 0$$

Остается участок

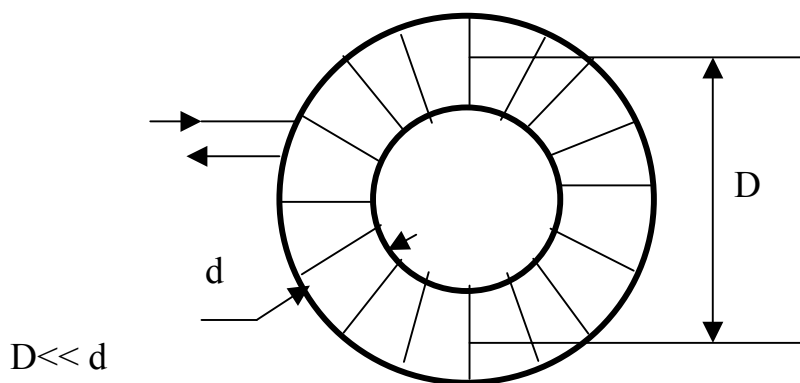
$$\int_1^4 \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_1^4 B d\mathbf{l} = (B = \text{cst}) = B \int_1^4 d\mathbf{l} = BL.$$

Согласно закону полного тока вычисленная циркуляция магнитной индукции равна сумме токов, которые охватывает замкнутый контур с точностью до коэффициента. Пусть  $N$  – количество проводников, которое охватывает данный контур, тогда

$$BL = \mu_0 N i \Rightarrow \underline{B} = N\mu_0 i/L = \underline{\mu_0 n i}.$$

Здесь  $n$  – число проводников, приходящееся на единицу длины соленоида (удельное число проводников).

Провод с током, навитый на непроводящий каркас в виде кольца круглого сечения называют тороидом



Если  $D \ll d$ , то для него также справедлива формула длинного соленоида.

## § 8 Магнитное поле движущегося заряда

Электрический ток есть упорядоченное движение заряженных частиц. Попробуем оценить создаваемое одной такой частицей магнитное поле (это может быть магнитное поле на большом расстоянии от движущегося электрона, протона и т.д.). Нам известно как рассчитывается магнитное поле, создаваемое малым отрезком провода с током (элементарным током) по формуле Био-Саварра-Лапласа

$$dB = (\mu_0/4\pi)i d\mathbf{l} \sin\alpha /r^2,$$

но

$$i = j S, j = q n v \Rightarrow i = q n v S \Rightarrow i dl = q n v S dl = q n v V.$$

Здесь  $j$  – плотность тока,  $S$  – сечение малого отрезка провода,  $n$  – концентрация частиц ( $n = N/dV \Rightarrow N = n dV$ ),  $v$  – скорость перемещения частиц,  $q_e$  – элементарный заряд,  $V (dV)$  – объем (элементарный объем),  $N$  – полное число частиц. Подставим полученное выражение в исходную формулу и положим  $N = 1$ .

$$B = (\mu_0/4\pi) N q_e v \sin\alpha/r^2.$$

Векторная форма образуется по свойству векторного произведения

$$\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi) q_e(\mathbf{v} \times \mathbf{r})/r^3.$$

## § 9 Сила Лоренца

Рассмотрим силу, действующую на заряженную частицу в электрическом и магнитном полях.

а. Электрическое поле. Из определения электрического поля имеем

$$\mathbf{F}_E = q \mathbf{E}$$

б. Магнитное поле. Воспользуемся формулой силы Ампера

$$\mathbf{F} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}), F = i l B \sin\alpha, i l = j S l = q n v V = q v N$$

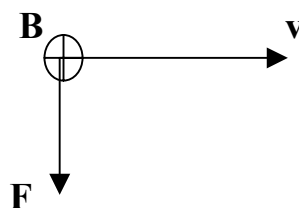
$$(i = j S, j = q n v, n V = N = 1).$$

$$F = q v B \sin\alpha, \mathbf{F}_B = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$B \wedge l = 0$$

$$v = 0$$

$$q = 0 \Rightarrow F = 0$$



Объединим силы, действующие на частицу в электрическом и магнитном полях

$$\underline{\mathbf{F}}_{\text{Л}} = \mathbf{F}_{\text{Е}} + \mathbf{F}_{\text{Н}} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

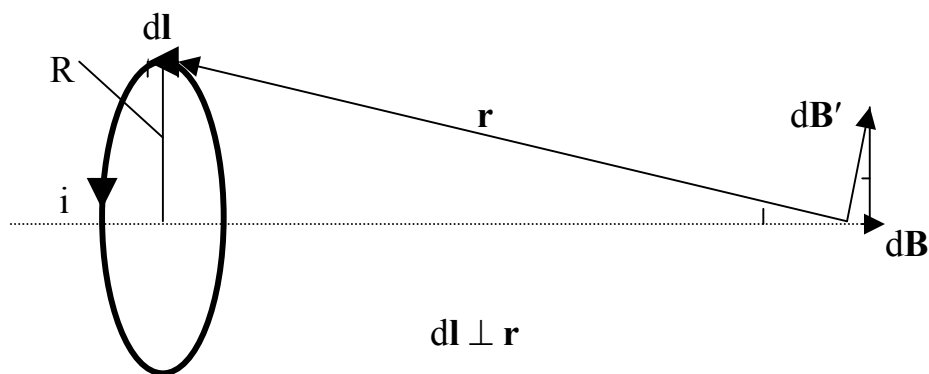
Так называемая сила Лоренца названа по имени физика-теоретика из Нидерландов Лоренца Хендрика Антона (1853-1928).

## Глава 6 Магнитное поле в веществе

До сих пор мы предполагали, что образующиеся вокруг проводников с токами или вокруг движущихся зарядов (что то же самое) магнитные поля действуют в вакууме. Формулы всех законов записаны для вакуума. Если вместо вакуума окажется какая-либо среда (как это обычно бывает на практике), то запись законов несколько изменится. Опыт показывает, что магнитные поля в различных средах могут как усиливаться так и ослабевать. Чтобы приблизиться к пониманию такого поведения, необходимо обратиться к ряду экспериментальных данных и теоретических расчетов, в частности, на уровне электронных оболочек атомов.

### § 1 Магнитный момент и намагниченность

Для описания магнитных явлений необходимо ввести некоторые понятия. Широко распространены в природе замкнутые токи. К ним относятся движущиеся электроны атомных оболочек. Их называют элементарными токами (заряд элементарен, контур мал). Рассмотрим такой элементарный ток и рассчитаем магнитную индукцию на оси, проходящей через центр круга, ограниченного таким контуром и перпендикулярной данному кругу.



Здесь необходимо проинтегрировать (просуммировать в пределе) проекции векторов  $d\mathbf{B}'$  на ось в формуле Био-Савара-Лапласа.

$$dB/dB' = R/r, dB' = (\mu_0/4\pi) i dl r \sin (dl^\wedge r) / r^3.$$

$$dB = dB' R/r = (\mu_0/4\pi) i l dl/r^3.$$

Интегрирование проводится по длине контура, что и дает в результате его длину

$$B = \mu_0 i \pi R^2 / 2\pi r^3.$$

Введем понятие магнитного момента контура с током



$$p_m = iS, \mathbf{p}_m = i \mathbf{S}, \mathbf{S} = S \mathbf{n}, [p_m] = \text{А м}^2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 i \mathbf{S} / 2\pi r^3 = \mu_0 \mathbf{p}_m / 2\pi r^3.$$

Вектором магнитного момента  $\mathbf{p}_m$  контура с током называется произведение величины тока, текущего по контуру на величину площади, обтекаемого током контура с направлением перпендикулярно плоскости контура и определяемым по правилу правого винта.

Для объяснения намагничивания тел (то есть возникновения в среде внутреннего магнитного поля) Ампер и предположил, что в молекулах веществ циркулируют некие круговые токи (молекулярные токи). Каждый такой ток обладает магнитным моментом и может создавать в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты среды направлены хаотически (по случайному закону). При действии внешнего магнитного поля, а иногда и спонтанно (в природных магнитах) магнитные моменты могут приобретать преимущественную ориентацию, тогда суммарный магнитный момент среды отличен от нуля.

Вещества с отличным от нуля суммарным магнитным моментом характеризуются магнитным моментом единицы объема, тогда ( $p_m$  – магнитный момент одной молекулы),



$\Sigma \mathbf{p}_m$  – магнитный момент всех молекул, содержащихся в объеме  $\Delta V$

$\Delta V$ .  $\mathbf{J} = \Sigma \mathbf{p}_m / \Delta V$  - намагниченность

Объем  $\Delta V$  мал с точки зрения макроскопии, но содержит очень большое число микроскопических токов. Определение. Вектором намагниченности называется отношение суммы векторов магнитных моментов отдельных молекул, содержащихся в малом объеме  $\Delta V$  к величине этого объема.

Таким образом, магнитное поле в веществе (среде) равно сумме внешнего, приложенного к веществу поля, и внутреннего, образующегося при приложении внешнего

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{внешн}} + \mathbf{B}_{\text{внутр}}.$$

## § 2 Напряженность магнитного поля

Для описания магнитного поля наряду с магнитной индукцией используется и другая физическая величина. По определению для вакуума (в системе единиц СИ)

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, [\mathbf{H}] = \text{Тл м/Гн} = \text{Вб/Гн м} = \text{А/м}.$$

Закон Био-Савара-Лапласа при этом можно записать как

$$d\mathbf{H} = i (d\mathbf{l} \times \mathbf{r}) / 4\pi r^3.$$

Для поля, создаваемого круговым током

$$\mathbf{H} = \mathbf{p}_m / 2\pi r^3.$$

$\mathbf{H}$  называется напряженностью магнитного поля. Сравним размерности  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{J}$  - они одинаковы. Можно показать, что

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{внешн}} + \mathbf{B}_{\text{внутр}} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}.$$

Направления  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{J}$  обычно не совпадают. В тех же случаях, когда они совпадают можно записать

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{H}.$$

Напомним, что внутреннее поле в большинстве случаев порождается внешним.  $\kappa$  называют магнитной восприимчивостью, она безразмерна. В этом случае результирующее поле (магнитную индукцию) можно записать в виде

$$\underline{\mathbf{B}} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 \mathbf{H} + \kappa \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \kappa) \mathbf{H} = \underline{\underline{\mu \mu_0 \mathbf{H}}}.$$

$\mu = 1 + \kappa$  называют магнитной проницаемостью вещества, из которого состоит среда.

Замечание. Намагничивание вещества (зависимость магнитной индукции от напряженности внешнего приложенного к этому веществу магнитного поля) происходит часто по сложному закону, то есть  $\mu$  не является в общем случае постоянной величиной.

### § 3 Законы магнитного поля в среде (и с учетом $\mathbf{H}$ )

Закон Ампера

$$d\mathbf{F} = i (\mathbf{dl} \times \mathbf{B}) \Rightarrow d\mathbf{F} = i \mu \mu_0 (\mathbf{dl} \times \mathbf{H}).$$

Закон Био-Савара-Лапласа

$$\mathbf{B} = (\mu \mu_0 / 4\pi) i (\mathbf{dl} \times \mathbf{r}) / r^3 \Rightarrow \mathbf{H} = i (\mathbf{dl} \times \mathbf{r}) / 4\pi r^3.$$

Закон полного тока

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu \mu_0 \sum_i I_i \Rightarrow \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_i I_i.$$

Форма записи законов Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\text{Для вакуума} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

В среде

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_{\text{среды}} = \mu_0 (\mathbf{j}_{\text{среды}}), \quad \mathbf{j}_{\text{среды}} = \mathbf{j}_{\text{внешн}} + \mathbf{j}_{\text{внутр}}, \quad \mathbf{j}_{\text{внутр}} = \operatorname{rot} \mathbf{J},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_{\text{среды}} = \mu_0 (\mathbf{j}_{\text{внешн}} + \operatorname{rot} \mathbf{J}) \Rightarrow \operatorname{rot} [(\mathbf{B}_{\text{среды}}/\mu_0) - \mathbf{J}] = \mathbf{j}_{\text{внешн}}.$$

$$\mathbf{B}_{\text{среды}} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{H}) \Rightarrow \mathbf{H} = (\mathbf{B}/\mu_0) - \mathbf{J} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{внешн}}.$$

Если опустить обозначение «внешнее» у плотности тока, то формулы как для вакуума так и для среды приобретают точно одинаковый вид.

#### § 4 Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики

В справочниках магнитные свойства веществ различают часто по магнитной восприимчивости  $\kappa$ . Составим таблицу.

Диамагнетики		Парамагнетики	
$[\kappa = \mu - 1] \cdot 10^6$ , $\mu < 1$ , $\kappa$ - отрицательна		$[\kappa = \mu - 1] \cdot 10^6$ , $\mu > 1$ , $\kappa$ - положительна	
Азот	- 0.0062	Кислород (газ)	1.8
Водород	- 0.063	Алюминий	21
Углекислота	- 5.3	Платина	300
Графит	- 50	Хлористое железо	2500
Вода	- 9.0	Кислород (жид- кость)	3400
Серебро	-26	-	-
Висмут	- 170	-	-

Ферромагнетики (железо и его сплавы)			
$[\kappa = \mu - 1], \mu \gg 1, \kappa \approx \mu$			
	Исходная намаг- ниченность	После      принуди- тельного      намагни- чения	Состав
Железо	200	500	
Железо- кремний	600	10000	96.7%Fe, 3.3% Si
Пермалой	8000	100000	22% Fe, 78% Ni
Супермалой	-	800000	79% Ni, 5%Mo, 16% Fe

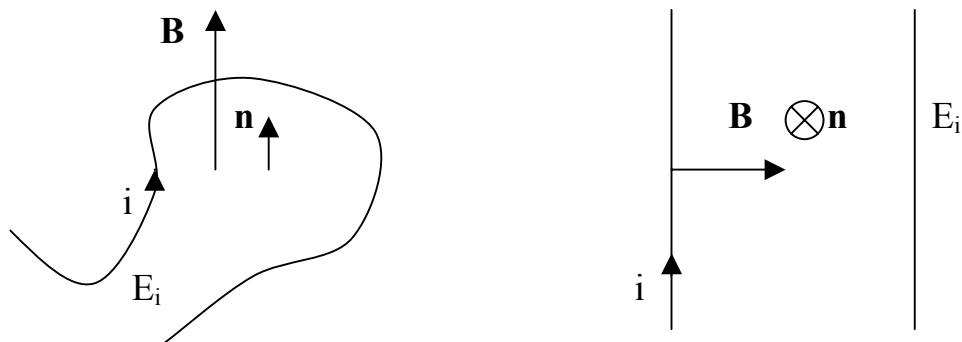
Из таблицы следует, что диа- и парамагнетики имеют разные знаки магнитной восприимчивости, а порядок величин сравнительно близкий. Ферромагнетики имеют знак магнитной восприимчивости такой же как у парамагнетиков, однако, их абсолютная величина на 8-10 порядков больше, чем у первых двух магнетиков.

## § 5 Электромагнитная индукция

Мы уже знаем, что электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Естественно, что существует и обратный эффект в том смысле, что магнитное поле порождает в проводниках токи (потoki заряженных частиц), а следовательно вызывает появление ЭДС. Это явление называется электромагнитной индукцией (М. Фарадей 1831), токи называют индукционными. Сформулируем закон Ленца о направлении индукционных токов. Индукционный ток всегда направлен таким образом, что его действие противоположно действию причины его вызвавшей.

## 5.1 Об основном законе электромагнитной индукции

Индукционный ток, а следовательно и ЭДС индукции появляется если: проводник пересекает линии магнитной индукции или, что тоже самое изменяется число линий индукции, проходящих через площадку, ограниченную проводящим контуром



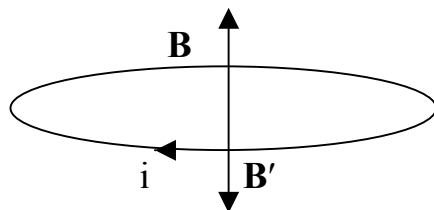
Опытным путем Фарадей установил, что

$$E_i \sim d\Phi/dt \quad (E_i = f d\Phi/dt, d\Phi_B = \mathbf{B} d\mathbf{S}).$$

ЭДС индукции  $E_i$  прямо пропорциональна изменению потока магнитной индукции, или ЭДС равна скорости изменения потока магнитной индукции с (точностью до некоторого коэффициента  $f$ ). Теперь переформулируем закон (или правило) Ленца применив понятие потока. ЭДС индукции стремится препятствовать всякому изменению магнитного потока его вызывающего. Рассмотрим размерность скорости изменения потока.

$$[d\Phi/dt] = \text{Вб/с} = \text{Тл м}^2/\text{с} = \text{Н м/А с} = \text{Дж/К} = \text{В},$$

то есть размерность прямо выражает ЭДС индукции. Исследуем размерность, величину и знак коэффициента  $f$ . Во первых ясно, что он безразмерный. Если взять в законе 1Вб, 1 В и 1 с, то  $|f| = 1$ . Чтобы рассудить о знаке  $f$ , обратимся к правилу Ленца. Согласно правилу Ленца  $\mathbf{B}$  вызывает в контуре такой ток  $i$ , что этот ток образует встречное поле, направленное противоположно исходному следовательно знак коэффициента должен быть отрицательным  $f = -1$ .



$$\underline{E_i} = - d\Phi/dt.$$

## 5.2 О самоиндукции

Изменяющийся в проводнике ток  $i_1$  вызывает изменяющееся магнитное поле  $B_1$ , это магнитное поле (линии  $B_1$  пересекают контур) в свою очередь вызывает другой ток  $i_2$ . Здесь прослеживается непосредственная и многократная связь токов и магнитных полей. Один раз запустить, а дальше чередование токов и магнитных полей будет самопроизвольно повторяться. Если бы не потери, то и до бесконечности.

$$i_1 \rightarrow B_1 \rightarrow i_2 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots$$

Токи  $i$  - называются экстра токами. Заметим, что

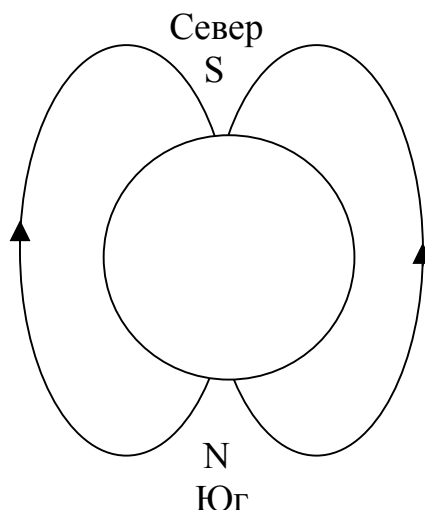
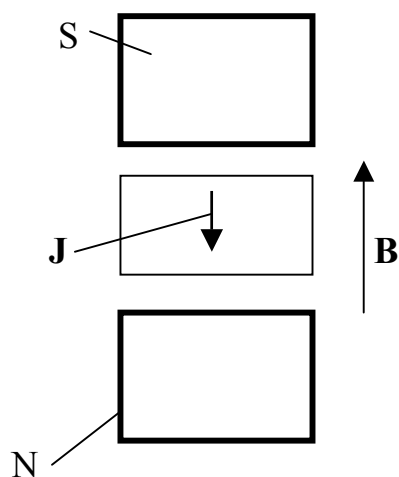
$$B \sim \Phi \sim i \Rightarrow \Phi \sim i, d\Phi = L di, [L] = \text{Вб/А} = \text{Гн (Генри)}.$$

Тогда ЭДС самоиндукции определим как

$$\underline{E_s} = - d\Phi/dt = - L di_s/dt.$$

## § 6 Диамагнетизм – проявление электромагнитной индукции элементарных токов

Итак, если  $\mu < 1$ , то мы говорим, что вещества диамагнитны. Это означает, что намагниченность  $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{H}$  в этих веществах направлена навстречу намагничивающему их внешнему магнитному полю.



Напомним, что направление магнитных линий в магнитах принято от северного полюса к южному. Географические полюса не совпадают с магнитными (здесь наоборот).

## 6.1 О магнитомеханическом отношении для электрона

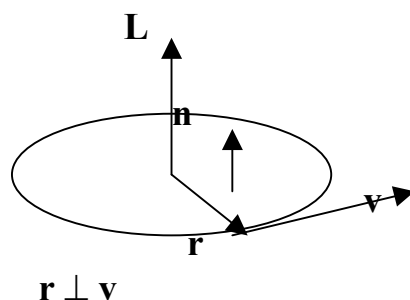
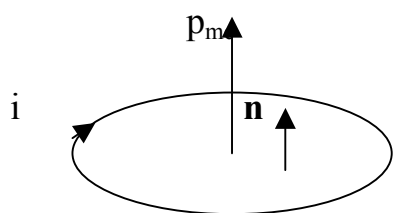
Пусть электрон движется по круговой орбите радиуса  $r$  со скоростью  $v$ . Найдем для такого электрона отношение магнитного момента к механическому.

$$\mathbf{p}_{me} = i \mathbf{S}, \mathbf{S} = S \mathbf{n}, S = \pi r^2 i, i = q / t = q / (2\pi r / v) = q v / 2\pi r \Rightarrow$$

$$\mathbf{p}_{me} = q v r / 2, \mathbf{p} = q v r \mathbf{n} / 2.$$

Теперь запишем механический момент той же самой системы

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{r} = m \mathbf{v} \times \mathbf{r} \text{ (здесь } \mathbf{p} \text{ – импульс)}. \mathbf{L} = m (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$



Найдем отношение

$$\mathbf{P}_{me} / \mathbf{L} = q \mathbf{v} \times \mathbf{r} / 2 m (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = q / 2 m.$$

Отношение векторов мы понимаем также как скалярное произведение. Получили универсальную константу: орбитальное магнитомеханическое отношение для электрона

$$p_{me} / L = q / 2 m, q = -e, m = m_e \Rightarrow \underline{p_{me} / L = -e / 2 m_e}.$$

$$e / 2 m_e = 1.6 \cdot 10^{-19} / 2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} = 8.8 \cdot 10^{10} \text{ Кл/кг}.$$

Заметим, что отношение заряда электрона к его массе (удельный заряд электрона) является фундаментальной физической постоянной

$$e/m_e = 1.8 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}.$$

Заметим также, что выражение  $e \hbar / 2 m_e$ , где  $\hbar = 1.06 \cdot 10^{-34}$  Дж с называется постоянной Планка также является фундаментальной физической постоянной, которая называется магнетоном Бора.

$$e \hbar / 2 m_e = \mu_B \cong 10^{-23} \text{ Дж/Тл}.$$

Отметим важный для нас факт. Если вещество не помещено во внешнее магнитное поле, то электроны его атомных оболочек имеют орбитальные моменты распределенными во всех направлениях по случайному закону (кроме случаев пара- и ферромагнетизма), так что ориентация суммарного магнитного момента равна нулю.

## 6.2 Расчет изменения механического момента количества движения орбитального электрона при включении магнитного поля

При включении магнитного поля на замкнутых электронных токах согласно закону электромагнитной индукции будет генерироваться электрическое поле, а так как электрическое сопротивление для таких элементарных токов практически отсутствует, то образующаяся ЭДС действует и после включения магнитного поля. Для электрона каждого атома или молекулы можно записать

$$E_i = -d\Phi/dt = -d(BS)/dt.$$



Предположим, что контуром является окружность, центр которой совпадает с ядром атома (его центром), радиус которой –  $r$ . Среднее тангенциальное поле  $E$  на этом контуре (в точках этого контура) можно выразить через ЭДС

$$E = E_i / 2\pi r \Rightarrow E_i = 2\pi r E, E_i = - \pi r^2 dB/dt.$$

Приравняем правые части

$$E = - r dB/2 dt.$$

Индукированное таким образом электрическое поле, действуя на атомный электрон создает ему момент силы,  $M$ , действующей на этот электрон относительно центра.

$$M = F r = - e E r = - e (- r dB/ 2 dt) r.$$

По определению момент силы равен первой производной от момента импульса по времени. Преобразуем

$$dL/dt = e r^2 dB/2 dt \Rightarrow d(L - e r^2 B/2)/ dt = 0 \Rightarrow L - (e r^2 B/2) = cst.$$

Выражение в скобках есть константа по времени. Обозначим константу как  $L_0$ , тогда

$$L - L_0 = \underline{\Delta L = e r^2 B/2}.$$

Получили изменение момента количества движения  $\Delta L$ , которое сообщается электрону при включении магнитного поля.

### 6.3 Дополнительный магнитный момент электрона в атоме – причина диамагнетизма

Чтобы найти добавку магнитного момента  $\Delta p_m$  используем орбитальное магнитомеханическое отношение для электрона

$$p_{me}/L = - e/2m_e, p_{me} = - L e/2m_e.$$

Заменим момент количества движения на его изменение, выражение для которого было получено ранее

$$\underline{\Delta p_{me}} = - \Delta L e/2m_e = - (e/2m_e)(e r^2 B/2) = \underline{- e^2 r^2 B/4 m_e}.$$

Таким образом мы рассчитали дополнительный магнитный момент элементарного электронного тока (орбитального электрона в атоме), который появляется при включении внешнего магнитного поля. Знак «-», как можно убедиться непосредственно из закона Ленца, означает, что направление добавочного магнитного момента противоположно (причем всегда!) включаемому магнитному полю. Самый сильный диамагнетик – висмут.

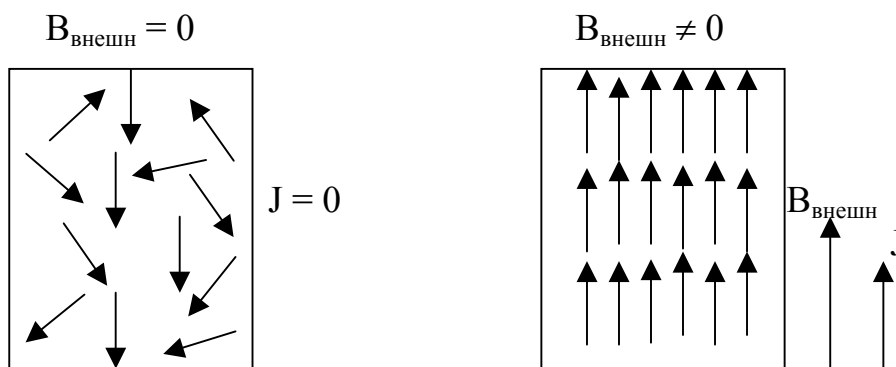
Заметим, что радиусы атомных электронов различны, более того понятие радиуса определено лишь при классическом приближении описания природы.

Отметим в заключение еще раз, что причина возникновения диамагнетизма фундаментальна (диамагнетизм реализуется всегда) благодаря действия ЭДС индукции и в соответствии с законом Ленца.

## § 7 Парамагнетизм. Опыт Штерна и Герлаха

### 7.1 Постановка задачи

Если магнетик (вещество, проявляющее магнитные свойства) состоит из атомов и молекул, суммарный магнитный момент которых в отсутствие внешнего магнитного поля равен нулю, то результат воздействия внешнего магнитного поля на такой магнетик не исчерпывается диамагнетизмом. Вновь рассмотрим случай, когда в отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов ориентированы беспорядочно, так что намагниченность  $\mathbf{J}$  такого вещества равна  $0$ .



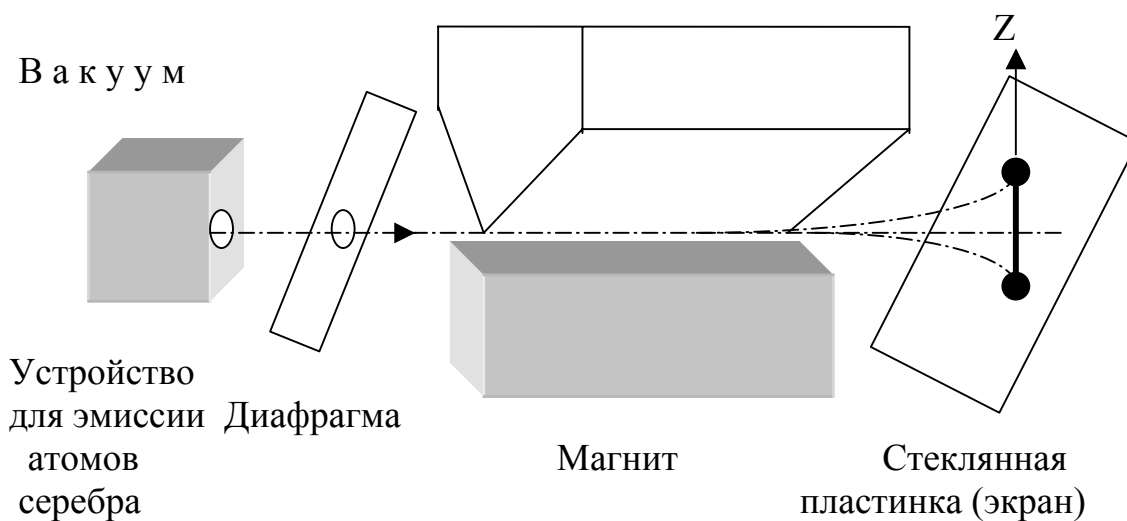
$$\mathbf{B}_{\text{среды}} = \mathbf{B}_{\text{внешн}} + \mu_0 \mathbf{J}.$$

Если же включить магнитное поле, то магнитные моменты атомов расположатся упорядоченно. Таковы факты. Теперь обратимся к природе возникновения магнитных моментов в парамагнетиках.

## 7.2 Не скомпенсированные спины электронов – природа парамагнетизма

Атом, у которого число электронов нечетно, будет иметь добавочный магнитный момент (магнитные моменты каждой пары электронов взаимно скомпенсированы согласно правилу Паули). Тогда при объединении каждого такого атома в двухатомную молекулу добавочный магнитный момент должен пропадать, что и реализуется на практике. Природу парамагнетизма надо искать в свойствах самого электрона. Таким свойством является спин электрона – его собственный магнитный момент. Такова природа электрона.

Чтобы почувствовать проявление этой природы необходим эксперимент. Таким экспериментом стал опыт Штерна и Герлаха (1922г.). Приведем схему экспериментальной установки Штерна и Герлаха.



Идея опыта: Если величины магнитных моментов атомов серебра распределены от 0 до  $\mu_{z \max}$  непрерывным образом, то при прохождении атомов серебра через неоднородное магнитное поле они должны на стеклянном экране распределиться в виде полосы, соответствующей разбросу от  $-\mu$  до  $+\mu$ . Итак, пучок атомов серебра направлялся между полюсными наконечниками магнита. Поскольку в неоднородном магнитном поле на магнитный момент (в течение вре-

мени пролета между наконечниками магнита), то атомы серебра отклонятся вверх или вниз в зависимости от направления магнитного момента каждого атома. **В** направлена при этом вдоль

20	Ca	$\dots 4s^2$
21	Sc	$\dots 3d^1 4s^2$ начало заполнения внутренних оболочек
22	Ti	$\dots 3d^2 4s^2$
23	V	$\dots 3d^3 4s^2$
24	Cr	$\dots 3d^5 4s^1$
25	Mn	$\dots 3d^5 4s^2$
26	Fe	$\dots 3d^6 4s^2$ ферромагнетики
27	Co	$\dots 3d^7 4s^2$
28	<b>Ni</b>	$\dots 3d^8 4s^2$
29	Cu	$\dots 3d^{10} 4s^1$
30 ...	Zn	$\dots 3d^{10} 4s^2$
36	Kr	$\dots 3d^{10} 4s^2 4p^6$ (18 электронов – заполненная оболочка)

Если, например, у железа в кристаллическом состоянии магнитный момент какого-либо атома как-то сориентирован (для определенности вверх), то магнитный момент соседнего с ним атома имеет (почему-то) сильную тенденцию также быть направленным именно вверх, точно так же, как и многие другие атомы в окружении данного атома. Именно это свойство делает железо, кобальт, никель, а также гадолиний сильными магнетиками. Теория ферромагнетизма сложна и во многом в настоящее время неясна и поэтому мы будем опираться строго на опытные факты.

## §8. Ферромагнетизм.

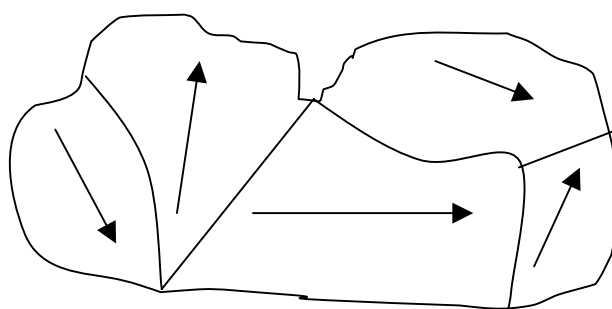
У ферромагнетиков можно изменять намагниченность от У ферромагнетиков можно изменять намагниченность от исходного или природного значения внешним относительно ничтожным полем до огромного значения насыщения (в сотни раз тысяч дольше, чем у парамагнетиков).

Опыты Штерна и Герлаха показывают, что элементарные магнитные моменты (магнитные моменты единичных атомов) пара- и ферромагнетиков имеют порядок одной величины. Заметим, что опыты Штерна и Герлаха позволили найти магнитные моменты не спаренных электронов многих атомов. Таким образом, напрямую магнитными моментами атомов объяснить ферромагнетизм нельзя.

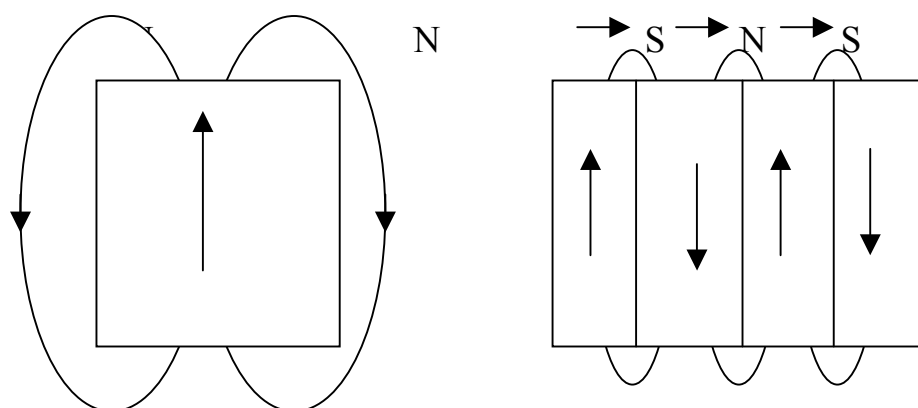
Магнитомеханическое отношение (его еще называют гиромагнитным) у ферромагнетиков в два раза больше, чем ожидаемое расчетное для атомарных орбит электронов и соответствует отношению собственных магнитного и механического моментов самого электрона. Это обстоятельство указывает на то, что намагниченность ферромагнетиков обуславливается очень сильной ориентацией спинов электронов, а не их орбитальных моментов.

То, что спины электронов выстраиваются в ферромагнетиках параллельно друг другу в одном направлении объясняется наличием так называемого обменного взаимодействия, сущность которого заключается в том, что энергетически спинам электронов выгоднее в ферромагнетиках так выстраиваться. Обменное взаимодействие не кулоновского характера, короткодействующее и проявляется на внутренних оболочках атомов переходных металлов, объединенных в твердые тела, то есть у уплотненных атомов. При этом энергия всей рассматриваемой системы (некоторой области кристалла – домена) согласно общему принципу должна быть минимальной. У газов и жидкостей ферромагнетизм не обнаружен, только у твердых тел!

Наличие доменной структуры у ферромагнетиков доказано экспериментально с помощью очень простой процедуры. Поверхность кристалла, подозреваемого на ферромагнетизм тщательно полируется, а затем на нее насыпают например железные опилки удлиненной формы. После этого кристалл встряхивается и в разных областях – доменах опилка выстраиваются по разным направлениям.

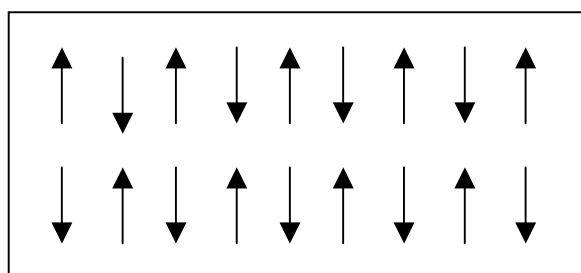


Сами домены как цельные образования также располагаются в кристалле таким способом как это им энергетически более выгодно, например



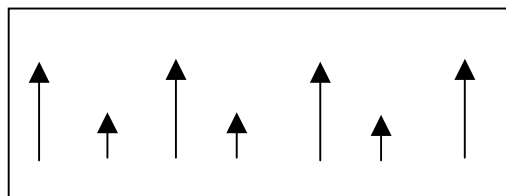
Так же как и один домен на весь кусок ферромагнитного кристалла, точно так же и дробление на относительно большое число доменов ферромагнетику энергетически оказывается не выгодным, он «выбирает» какое-то промежуточное состояние между двумя крайностями. Существуют разновидности доменных структур.

Антиферромагнетики



У двух пространственных подрешеток (которые реально существуют в кристалле и их мысленно можно выделить) намагниченность приблизительно одинакова. В итоге, вследствие близкой по величине намагниченности этих подрешеток, у антиферромагнетиков получается малая результирующая намагниченность.

Ферриты (ферримангнетики)

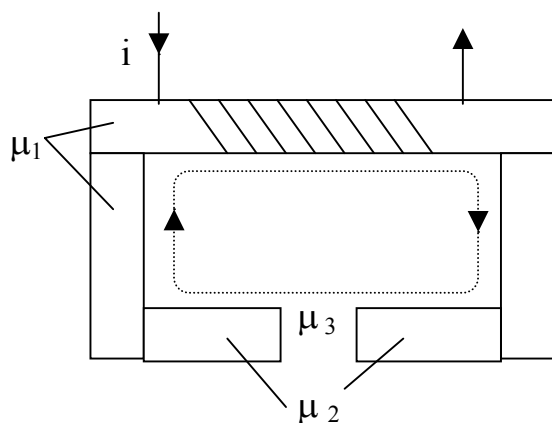


Намагниченность подрешеток очень сильно отличается. Результат – значительная намагниченность

Замечание. С ростом температуры ферромагнетика доменные структуры разрушаются. Выше характерной температуры - точки Кюри также как и у сегнетоэлектриков - ферромагнитные свойства пропадают. Ферромагнетики превращаются в парамагнетики.

## § 9 Магнитные цепи

Представим себе ситуацию, когда линии магнитной индукции пересекают некую площадку и рассмотрим магнитный поток, например, в тороиде. Тороид представляет собой магнитопровод. Витки с током вызывают появление магнитного поля в сердечнике тороида и, следовательно - магнитного потока. Соленоид, тороид или иной магнитопровод прямоугольной конфигурации, к примеру, могут состоять из частей имеющих различные магнитные проницаемости.



Поскольку линии магнитного поля всегда замкнуты, то согласно закону полного тока

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum i.$$

Линии индукции пересекают все имеющиеся токи  $\rightarrow N i$ . С другой стороны циркуляцию по замкнутому контуру можно разбить на участки, в целом составляющие замкнутый контур.

$$\oint_L H_1 dl = \int_{l_1} H_1 dl + \int_{l_2} H_2 dl + \int_{l_3} H_3 dl = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = N i.$$

Выразим напряженность магнитного поля через магнитный поток (подразумевая магнитное поле соленоида)

$$\Phi = BS = \mu\mu_0 HS \Rightarrow H = \Phi / \mu\mu_0 S.$$

Магнитный поток  $\Phi$  во всем ярме (и в зазоре) одинаковый. Сечение ярма также выбираем постоянным, тогда

$$\Phi l_1 / \mu_1 \mu_0 S + \Phi l_2 / \mu_2 \mu_0 S + \Phi l_3 / \mu_3 \mu_0 S = N i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi = N i / [l_1 / \mu_1 \mu_0 S + l_2 / \mu_2 \mu_0 S + l_3 / \mu_3 \mu_0 S].$$

В формуле вида

$$\Phi = (\sum i_k) / (1/\mu_0) \sum l_m / S_m \mu_m$$

можно усмотреть формальную аналогию (по форме записи) с законом Ома. При этом роли физических величин поменяются. В роли ЭДС оказываются токи  $E_m = \sum i_k$ , новое название - магнитодвижущая сила (МДС), роль сопротивления выполняет выражение вида

$R_m = l / \mu\mu_0 S$  – магнито сопротивление, а в роли тока оказывается магнитный поток  $\Phi$ . Получим формулу вида

$$\Phi_m = E_m / R_m, [\Phi_m] = \text{Вб}, [E_m] = \text{А}, [R_m] = \text{А/Вб}.$$

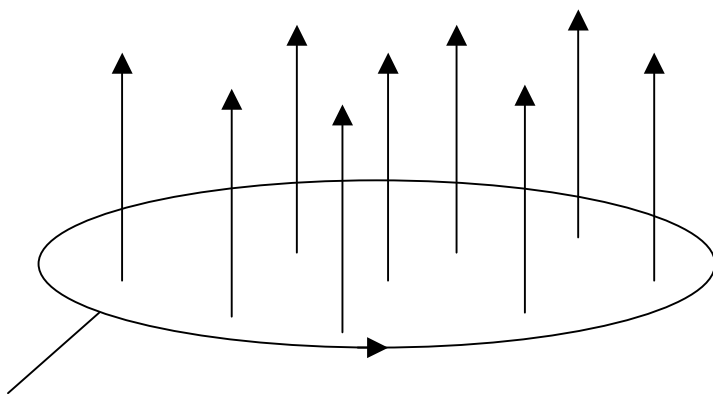
Применяя аналогии с электрическим током, можно рассчитывать магнитные цепи так же как и электрические, используя все известные законы и правила (с определенными оговорками) и тем более уже известные решения.



## **Глава 7   Связь электрического и магнитного полей**

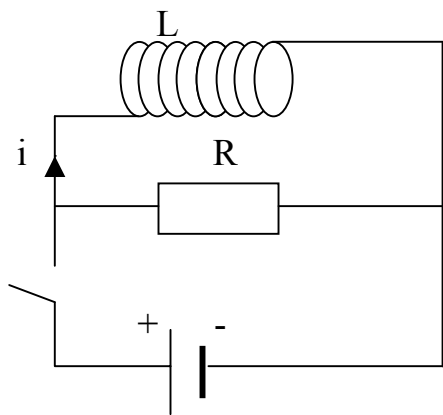
### **§ 1 О вихревых электрических полях. Первое положение теории Максвелла**

Из опыта известно, что изменяющееся магнитное поле (точнее говоря изменяющийся магнитный поток) вызывает в замкнутом контуре электрический ток. Свободные заряженные частицы при этом по-видимому должны приходить в движение.



## Металлический провод или орбита заряженной частицы

Электрическое поле приводит в движение заряженную частицу и заставляет ее двигаться с ускорением – то есть совершает работу. Неподвижная заряженная частицы в магнитном поле так и остается неподвижной как это следует из опыта, а у движущейся частицы в магнитном поле искривляется ее траектория согласно формулы для силы Лоренца. Магнитное поле не совершает работы над заряженной частицей. Возникает вопрос: обладает ли магнитное поле энергией? Попробуем ответить на этот вопрос путем прямого расчета энергии магнитного поля. Рассчитаем энергию магнитного поля в соленоиде, для этого рассмотрим электрическую цепь.



При замкнутом ключе через соленоид течет ток и в нем возникает магнитное поле. Если разомкнуть ключ, то через активное сопротивление некоторое время будет протекать электрический ток, поддерживаемый возникающей в соленоиде ЭДС самоиндукции. Работу этого тока можно рассчитать.

$$dA = \Delta\phi dq = E_s i dt = -L i di \quad (\Delta\phi = E_s, dq = i dt, E_s = -L di/dt) \Rightarrow$$

$$A = \int -L i di = -Li^2/2, W_{\pi} = Li^2/2.$$

Эта работа израсходуется на приращение внутренней энергии активного сопротивления  $R$ , проводов и соленоида. Выразим эту внутреннюю энергию через характеристики магнитного поля. Для длинного соленоида справедливы соотношения

$$\psi = N\Phi = n l B S = n^2 V \mu\mu_0 i \quad (N = n l, \Phi = BS, B = \mu\mu_0 n i) \Rightarrow$$

$$i = B / \mu\mu_0 n. \quad (1)$$

С другой стороны

$$\psi = L i \Rightarrow L = \psi/i = n^2 V \mu\mu_0. \quad (2)$$

Подставим (1) и (2) в выражение для энергии

$$W = V B^2 / 2 \mu\mu_0.$$

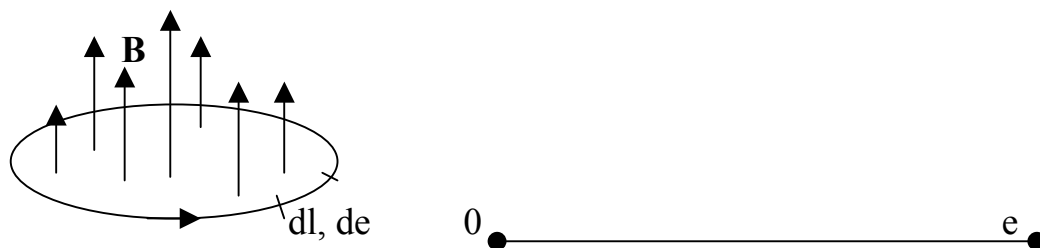
Удобнее привести энергию к единичному объему

$$\underline{w} = W/V = \underline{B^2 / 2 \mu\mu_0}.$$

Здесь  $w$  – объемная плотность энергии  $[w] = \text{Дж/м}^3$ . С учетом формулы  $B = \mu\mu_0 H$

$$\underline{w} = \mu\mu_0 H^2 / 2 = \underline{B H / 2}.$$

Таким образом, магнитное поле обладает энергией, но работы над зарядами не совершает, что следует из экспериментов. Тогда вслед за Максвеллом мы можем сделать очень важный вывод: при изменении магнитного поля возникает электрическое, оно-то и совершает работу над зарядами, заставляя их двигаться по замкнутым траекториям согласно закону электромагнитной индукции. На пути этой траектории – (замкнутого контура) - возникает ЭДС -е, а на участке контура – разность потенциалов.



Потенциальный характер электрического поля не нарушается. Растянув мысленно такой контур получим линию с разностью потенциалов на концах. В этом случае можно говорить и о напряженности такого электрического поля.  $E^*$  - напряженность вихревого электрического поля сторонних (магнитных) сил.  $dl$  – элемент контура (направление выбирается по току), тогда

$$E^* = de/dl \Rightarrow de = E^* dl \Rightarrow$$

$$e = \oint_L \mathbf{E}^* d\mathbf{l}.$$

Используем закон электромагнитной индукции ( $E_i = - \partial\Phi/\partial t$ ,  $e=E_i$ ), подставим

$$\partial\Phi/\partial t = - \oint_L \mathbf{E}^* d\mathbf{l}$$

Получили формулу, выражающую первое положение теории Максвелла. Это уравнение отражает количественную связь между изменяющимися магнитным и вихревым электрическим полями. Преобразуем

$$\partial(\oint \mathbf{B} d\mathbf{S})/\partial t = - \oint_L \mathbf{E}^* d\mathbf{l}$$

Пусть  $E_i$  – проекция  $\mathbf{E}^*$  (далее \* опустим) на направление  $\mathbf{l}$ , тогда

$$\partial\Phi/\partial t > 0 \Rightarrow \oint E_i d\mathbf{l} < 0.$$

Следствие. В проводниках при изменении магнитного поля возникают вихревые замкнутые токи, которые приводят к разогреву материала проводника.

Воспользуемся формулой Стокса для получения компактного вида первого положения Максвелла

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} \Rightarrow \int_S (\partial\mathbf{B}/\partial t) d\mathbf{S} = - \int_S \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} \Rightarrow \text{rot } \mathbf{E} = - \partial\mathbf{B}/\partial t.$$

Таким образом, к уравнениям Максвелла, полученным ранее прибавилось еще одно. Вспомним, что  $\text{rot}$  это сумма производных по координатам, справа же стоит производная по времени.

Зависимость от времени вторгалась в данное изложение постепенно. Последовательность выражений, в которых появлялась зависимость от времени такова:

$\text{div } \mathbf{j} = - \partial\rho/\partial t$  – уравнение непрерывности,

$E_i = - d\Phi/dt$  – закон электромагнитной индукции,

$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial\mathbf{B}/\partial t$  – первый закон Максвелла.

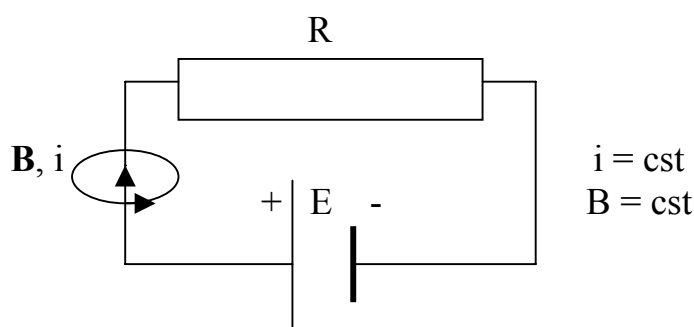
## § 2 Токи смещения. Второе положение теории Максвелла

Ранее нами было получено уравнение

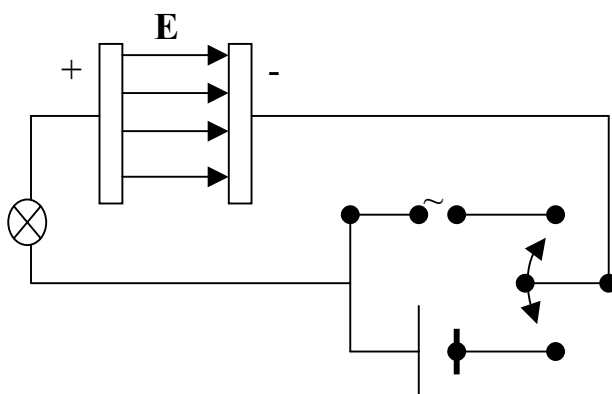
$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{j}_{\text{проводимости}}$$

для стационарных (не зависящих от времени) полей. Ротор вектора  $\mathbf{H}$  в данном случае в каждой пространственной точке равен плотности тока проводимости.

Рассмотрим вопрос о том каковы не стационарные (зависящие от времени) токи и какие явления им сопутствуют. Пусть имеем цепь с резистором и источником.



По этой цепи может протекать постоянный ток, а он связан в свою очередь с постоянным магнитным полем. Рассмотрим другую цепь, имеющую в своем составе электрический конденсатор.



Если замкнуть переключатель на источник постоянного тока, то электрического тока в цепи не будет. Если же замкнуть цепь на источник переменного тока (синусоидального или иного), то электрический ток будет действовать в цепи, о чем может свидетельствовать загорающаяся лампочка. Причем лампочка будет гореть с переменной интенсивностью. Такой ток Максвелл назвал током смещения. Между обкладками конденсатора находится вакуум (или воздух), то

есть ток смещения каким-то образом «течет» в пустом пространстве. Название «ток смещения» перешло от диэлектриков, где оно более удачно, так как там происходит смещение диполей в электрических полях. Необходимо помнить, что раньше существовала теория эфира, заполняющего все пространство, по которому якобы происходило перемещение света (а следовательно и всего электромагнитного излучения).

Согласно теории Максвелла в конденсаторе кроме электрического поля образуется связанное с ним магнитное поле как если бы между обкладками существовал ток проводимости с силой равной силе тока в проводящих частях схемы. Заметим, что осталось раскрыть обкладки этого конденсатора и мы выпустим электромагнитное поле в свободное пространство, при этом одна из обкладок конденсатора выполнит функцию передающей антенны.

Найдем количественную связь между изменяющимся электрическим и связанным с ним магнитным полем. Аппроксимируем поле в конденсаторе как поле между бесконечными равномерно заряженными плоскостями.

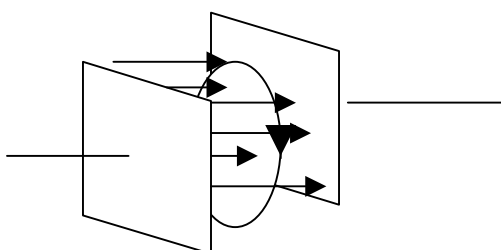
$$E = \sigma / \epsilon \epsilon_0 \Rightarrow \sigma = \epsilon \epsilon_0 E = D, q = \sigma S = DS.$$

$$i = dq/dt = d(DS)/dt \Rightarrow j = i/S = dD/dt, \Rightarrow \underline{dD/dt = j_{\text{смещения}}}.$$

Такой ток смещения существует в любой цепи, а также в вакууме и любой среде. В этом случае полную плотность тока для произвольной среды можно записать как сумму

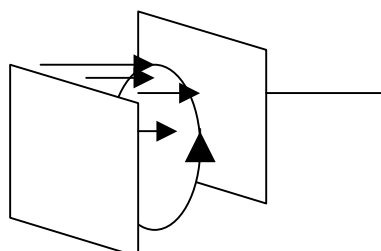
$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{проводимости}} + \mathbf{j}_{\text{смещения}}.$$

Сформулировать второе положение Максвелла можно, например, так: электрический ток смещения вызывает появление магнитного поля, вихревого по своей природе. Приведем определение Максвелла второго положения его теории. Переменное во времени электрическое поле вызывает появление вихревого магнитного поля. Рассудим о направлении магнитного поля, вызываемого током смещения.



$$\partial D / \partial t < 0 \Rightarrow D - \text{убывает,}$$

то левый винт у  $\mathbf{H}$



$\partial \mathbf{D} / \partial t > 0 \Rightarrow \mathbf{D}$  – возрастает,



то правый винт у  $\mathbf{H}$

Ток смещения определяется не самим  $\mathbf{D}$ , а его первой производной по времени. Ранее мы писали уравнение вида

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{проводимости}}$$

$\mathbf{H}$ , как выясняется, порождается не только током проводимости, но еще и током смещения, тогда

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$$

### § 3 Значение теории электромагнетизма Максвелла

Максвелл Джеймс Кларк, английский физик, уроженец Шотландии. Впервые опубликована его теория в работе 1864 года «Динамическая теория электромагнитного поля». Основные положения этой теории включены также в «Трактат об электричестве и магнетизме» 1873 года.

Приведем цитату. «Для человеческого ума недоступна совокупность причин явлений. Но потребность отыскивать причины вложена в душу человека, и человеческий ум, не вникнув в бесчисленность и сложность условий явлений, из которых каждое отдельное может представляться причиною, хватается за первое самое понятное сближение и говорит: вот причина.» Л.Н.Толстой «Война и мир».

В электромагнетизме обобщение шло от Кулона к Фарадею и далее к Максвеллу. Подсчитаем число уравнений и число неизвестных величин, фигурирующих в теории Максвелла.

$\text{div } \mathbf{D} = \rho$	$\text{div } \mathbf{B} = 0$
$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$

Распишем все векторные уравнения.

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \quad (1)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & (\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}) \mathbf{i} + (\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}) \mathbf{j} + (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}) \mathbf{k} = \\ & = - \partial(B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) / \partial t, \quad (3,4,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}) \mathbf{i} + (\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}) \mathbf{j} + (\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}) \mathbf{k} = \\ & = j_x \mathbf{i} + j_y \mathbf{j} + j_z \mathbf{k} + \partial(D_x \mathbf{i} + D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k}) / \partial t. \quad (6,7,8) \end{aligned}$$

Итого имеем: неизвестных – 12 (четыре вектора по три компоненты каждый), а уравнений – 8 в задаче по вычислению компонентов векторов напряженности электрического поля – **E**, электрического смещения – **D**, индукции магнитного поля – **B**, напряженности магнитного поля – **H**. Добавим к ним уравнения, связывающие искомые величины.

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

а также уравнение непрерывности

$$\text{div } \mathbf{j} = - \partial \rho / \partial t.$$

В этом случае число уравнений превысит число неизвестных и по заданным распределениям объемной плотности заряда и плотности тока можно рассчитать поля **B** и **H**.

Уравнения Максвелла содержат в себе все основные законы поведения электрического и магнитного полей включая и электромагнитную индукцию и поэтому они являются общими уравнениями электромагнитного поля в покое-щихся средах. Теория Максвелла объединяет, вообще говоря, известные факты. Совершенно новым в теории Максвелла стало предположение Максвелла о магнитном поле токов смещения. Он теоретически предсказал существование электромагнитных волн, что блестяще доказано современным состоянием теле и радио коммуникации



## Часть 4    Оптика и атомная физика

### Глава 1    Электромагнитные волны

#### § 1 Потенциалы электромагнитного поля. Волновое уравнение

Имеем уравнения Максвелла в системе единиц СИ

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon \varepsilon_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\operatorname{div} \mathbf{H} = 0), \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$$

Далее в этом параграфе будем работать в гауссовой системе единиц. Перепишем в гауссовой системе уравнения Максвелла.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \partial \mathbf{H} / c \partial t$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial \mathbf{E} / c \partial t + 4\pi\mathbf{j} / c$$

Теперь эти же уравнения запишем для вакуума. В этом случае равны нулю заряды и токи.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (1), \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \partial \mathbf{H} / c \partial t \quad (3), \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial \mathbf{E} / c \partial t \quad (4).$$

Ранее был определен скалярный потенциал в виде

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi \quad (\text{rot grad} \equiv 0).$$

По аналогии можно ввести векторный потенциал такой, что

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (5).$$

Подставим (5) в правую часть (3)  $\Rightarrow$

$$\text{rot} (\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / c \partial t) = 0.$$

Тогда потенциальным оказывается все выражение в круглых скобках и его можно ( по аналогии) представить как градиент некоторой функции, то есть

$$\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / c \partial t = - \text{grad } \varphi.$$

Здесь использовано то же самое обозначение, что и для скалярного градиента (изменена система единиц) , функция  $\varphi$  по-прежнему скалярная, но в отличие от прежнего скалярного потенциала новая  $\varphi$  является и функцией времени. Тогда, в отличие от электростатики, напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  (при наличии вихревого характера поля) уже не представима как градиент некоторой скалярной функции, а записывается в виде

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi - \partial \mathbf{A} / c \partial t \quad (6) .$$

Задача вычисления магнитной индукции (или напряженности магнитного поля) можно свести теперь к вычислению скалярного и векторного потенциалов  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ .

Исключим из уравнений Максвелла  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . Для этого (5) и (6) подставим в (4) .

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = - \partial^2 \mathbf{A} / c^2 \partial t^2 - (\text{grad } \partial \varphi / \partial t) / c .$$

Справедливо соотношение

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \quad (\Delta = \nabla \cdot \nabla = \text{div grad}),$$

которое проверяется прямым вычислением. Используем это соотношение

$$\Delta \mathbf{A} - \partial^2 \mathbf{A} / c^2 \partial t^2 = \text{grad} (\text{div } \mathbf{A} + \partial \varphi / c \partial t) - 4\pi \mathbf{j} / c. \quad (7)$$

Подставим (6) в (1)

$$\operatorname{div} (-\operatorname{grad} \varphi - \partial \mathbf{A} / c \partial t) = 0 \Rightarrow -\Delta \varphi - \partial \operatorname{div} \mathbf{A} / c \partial t = 0. \quad (8)$$

Так как вектор-потенциал не определен, то, вообще говоря, его можно доопределить произвольным образом. Доопределим его согласно так называемому соотношению Лоренца, а именно

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \partial \varphi / c \partial t = 0.$$

Тогда (7) перепишется в виде

$$\Delta \mathbf{A} - \partial^2 \mathbf{A} / c^2 \partial t^2 = 0, \quad (9)$$

а (8) представимо в виде

$$-\Delta \varphi + \partial^2 \varphi / c^2 \partial t^2 = 0. \quad (10)$$

Таким образом (9) и (10) являются уравнениями относительно скалярного и векторного потенциалов,  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  являются функциями координат и времени.

Оператор вида

$\Delta - \partial^2 / c^2 \partial t^2 = \square$
--

называется оператором Даламбера (даламберианом), а соответствующее ему уравнение относительно произвольной векторной функции – уравнением Даламбера. Если рассматривать уравнения (9) и (10) в вакууме, как мы это и проделали (где нет ни токов ни зарядов), то они примут вид

$$\square \varphi = 0, \square \mathbf{A} = 0 \text{ или, например, } \Delta \varphi - \partial^2 \varphi / c^2 \partial t^2 = 0.$$

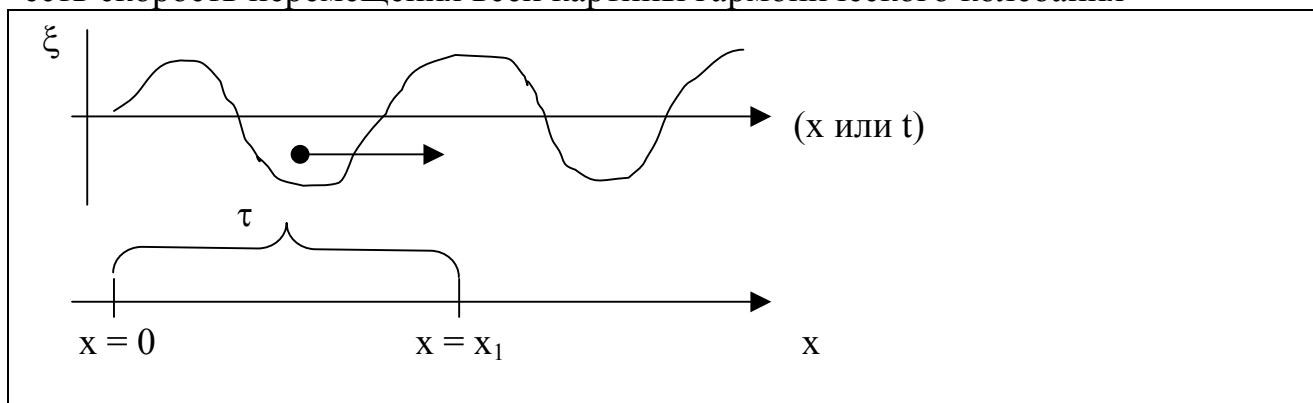
Уравнение такого вида называют волновым. В математической физике существует точное решение этого уравнения.

## 2.1 Уравнение плоской волны

Под уравнением плоской волны мы будем понимать вполне определенную функциональную зависимость какой-либо характеристики волны (в нашем случае электромагнитной волны) ( $E, H, w, S, I, \dots$ ) от координат и времени. Пусть  $\xi$  (кси) есть некая обобщенная характеристика электромагнитного колебания. Рассмотрим ее поведение вдоль одной из координат.

$$x = 0 \Rightarrow \xi = \xi(0, t) = a \cos(\omega t + \varphi).$$

Здесь в решении отсутствует зависимость от координаты. Введем эту зависимость для обобщенной характеристики (обобщенной координаты). Пусть  $v$  – скорость распространения электромагнитной волны – групповая скорость, то есть скорость перемещения всей картины гармонического колебания



Если наблюдать колебание в фиксированной точке координат, меняя время, или двигаться вдоль координаты при фиксированном времени, то картинки, то есть зависимости обобщенной координаты  $\xi$  от координаты  $x$  и времени  $t$ , окажутся одинаковыми. Из точки  $x = 0$  колебание через время  $\tau$  придет в точку  $x_1$ . Колебания расположенные в плоскости  $x_1$ , перпендикулярной направлению распространения волны будут отставать по времени от колебаний в плоскости  $x = 0$  на время  $\tau$ . Тогда для точки  $x_1$  можно записать зависимость в виде

$$\xi(x_1, t) = a \cos[\omega(t - \tau) + \varphi],$$

но  $\tau = x_1/v$  или  $x/v$ , если  $x$  выбирать в произвольном месте на оси, тогда

$$\xi(x, t) = a \cos [\omega(t - x/v) + \varphi]. \quad (*)$$

Это уже и есть решение уравнения плоской волны (в направлении оси  $x$ ).  
Справедливо для продольных и поперечных волн.

Преобразуем (\*), учитывая

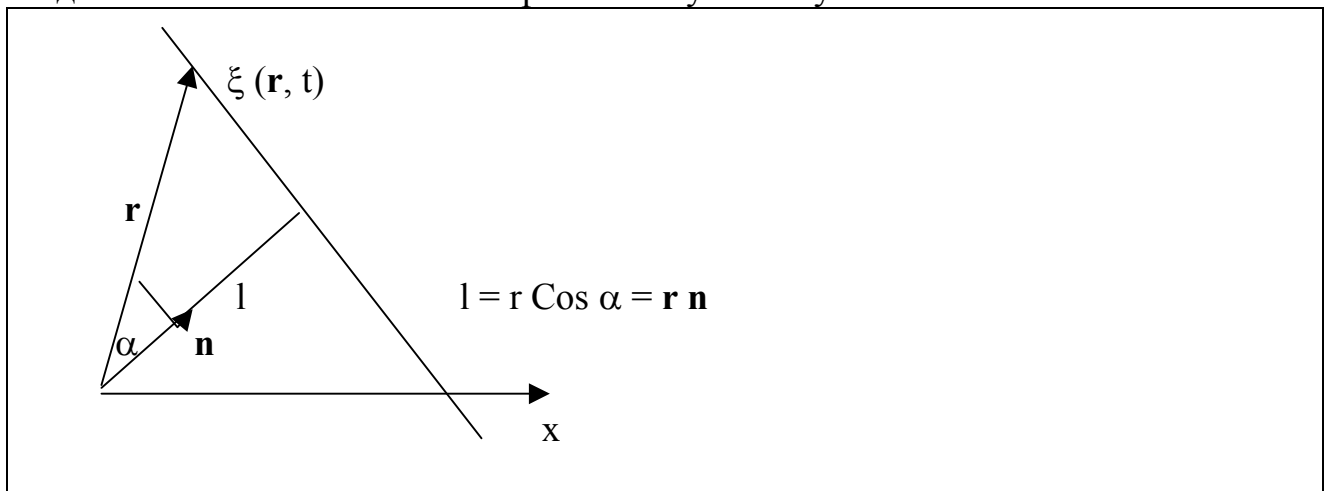
$$\omega/v = \omega/v\lambda = 2\pi v/v\lambda = 2\pi/\lambda = k_x, [k] = \text{м}^{-1}, (v = \lambda\nu, \omega = 2\pi\nu).$$

$k_x, k$ ,  $\mathbf{k}$  называют волновым числом, получим

$$\xi(x, t) = a \cos (\omega t - k_x x + \varphi).$$

Плоскую волну можно совместить с произвольным направлением.

Рассмотрим произвольное направление фронта волны в трехмерном пространстве. Выберем начало отсчета, направление оси  $x$  и радиус-вектор, проведенный из начала отсчета в произвольную точку волны.



$$\xi(\mathbf{r}, t) = a \cos [\omega(t - l/v) + \varphi] = a \cos (\omega t - k \mathbf{r} \mathbf{n} + \varphi) =$$

$$= a \cos (\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r} + \varphi), \quad (\tau = l/v, \mathbf{k} = k\mathbf{n}).$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – орт вдоль направления  $l$  – направления распространения волны (по кратчайшему пути из начала координат).

Тогда волновому вектору приписывается заданное направление – направление распространения волны, при численном значении, определенном ранее как

$$k = 2\pi/\lambda, \mathbf{k} = 2\pi\mathbf{n}/\lambda.$$

## 2.2 Фазовая и волновая скорости

Пусть фаза волны – постоянная величина. Это возможно тогда, когда  $v = \text{cst}$  ( $\omega = \text{cst}$ ). В этом случае производная от фазы по времени есть 0.

$$d(\omega t - kx + \varphi) / dt = \omega - k dx / dt = 0 \Rightarrow v_{\phi} = dx/dt = \underline{\omega/k} = v\lambda = \lambda/T.$$

Таким образом, с фазовой скоростью перемещается фронт волны или, иначе говоря, поверхности (или точки) постоянной фазы волны. Это справедливо для строго монохроматических волн. Если волна не строго монохроматическая, то среднюю фазовую скорость можно рассчитывать как отношение средних значений величин

$$\langle v_{\phi} \rangle = \langle \lambda \rangle / \langle T \rangle = \langle \omega \rangle / \langle k \rangle.$$

Если же отклонения от монохроматичности значительные, то понятие фазовой скорости теряет смысл. Скорость точек волновых фронтов является функцией волнового вектора (величины обратно пропорциональной длине волны, которая в каждой точке волнового процесса разная) и при непрерывном распределении для этой зависимости справедлива формула

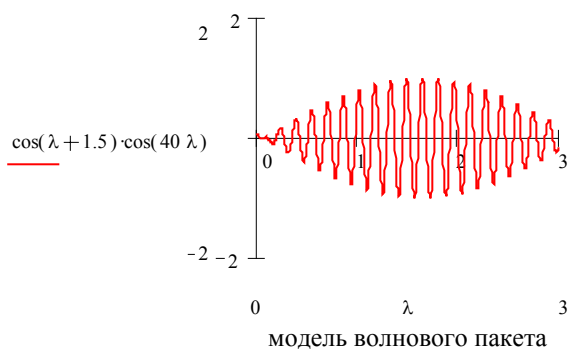
$$v = d\omega/dk \Rightarrow \omega = \int v dk.$$

Скорость в этом случае называется групповой. Очевидно, что при линейной зависимости  $\omega(k)$  можно использовать конечные приращения

$$\langle v_{\text{гр}} \rangle = \Delta\omega/\Delta k, \text{ но } \underline{v_{\text{гр}} = d\omega/dk}.$$

Если точки среды, по которой идет волновой процесс существенно по-разному преломляют волну, то о такой среде говорят, что она является дисперсной, а волна диспергирует в ней. Дисперсия в переводе с латинского языка означает рассеяние, разбросанность.

В качестве иллюстрации здесь целесообразно привлечь амплитудную фазовую или частотную модуляцию. К примеру, при амплитудной модуляции несущая частота представляет собой как бы волновой пакет, сгусток энергии. Также и в двух других случаях.

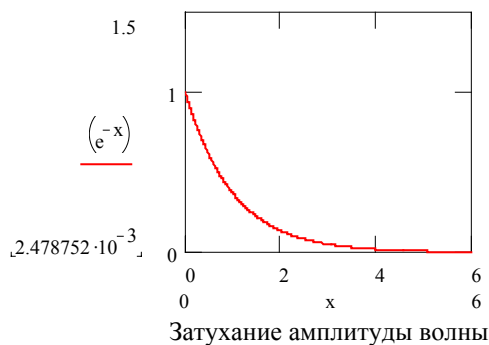


Скорость распространения такого сгустка и является групповой скоростью. Таким образом групповая скорость волн – это скорость переноса энергии волны. При этом для гармонического колебания фазовая и групповая скорости совпадают.

### 2.3 Затухающие и сферические волны

Решение уравнения плоской волны в виде (\*) справедливо в том случае, если волна не поглощается средой. Пусть амплитуда волны убывает по закону экспоненты в зависимости от координаты

$$a = a_0 e^{-\gamma x}.$$



тогда

$$\xi(x, t) = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx + \varphi).$$

График такой зависимости от координаты представляет собой затухающую косинусоиду.

Фронт сферической волны (небольшой кусочек которого на достаточно большом расстоянии представляет собой плоский фронт) на актуально больших расстояниях суть концентрические сферы с центром в источнике. Амплитуда сферической волны убывает по закону обратной пропорциональности с расстоянием. Энергия волны на единичной площадке сферы имеет все меньшую и меньшую плотность. Полная энергия волнового фронта как бы размазывается по все большей и большей сфере. Пусть  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, тогда

$$\xi(\mathbf{r}, t) = (a'/r) \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi).$$

$a'$  здесь уже не амплитуда в прежнем понимании, а некий коэффициент, численно равный амплитуде на единичном расстоянии от источника, а по размерности равный амплитуде, умноженной на размерность длины.

### § 3 Плоская электромагнитная волна

Ранее нами было получено волновое уравнение. Здесь волновое уравнение будет получено с использованием решения плоской волны с обобщенной координатой. Построим уравнение, решением которого является решение вида

$$\xi(x, t) = a \cos(\omega t - k_x x + \varphi).$$

Запишем вторые производные от данного решения по координате и времени

$$\partial^2 \xi / \partial x^2 = -k_x^2 a \cos(\omega t - k_x x + \varphi) = -k_x^2 \xi$$

$$\partial^2 \xi / \partial t^2 = -\omega^2 a \cos(\omega t - k_x x + \varphi) = -\omega^2 \xi.$$

Поделим левые и правые части

$$\partial^2 \xi / \partial x^2 = k_x^2 \partial^2 \xi / \omega^2 \partial t^2, \quad k/\omega = 1/\lambda v = T/\lambda = 1/v \Rightarrow$$

$$\underline{\partial^2 \xi / \partial x^2 = (1/v^2) \partial^2 \xi / \partial t^2}.$$

Получили волновое уравнение для одномерного случая. В трехмерном случае будет



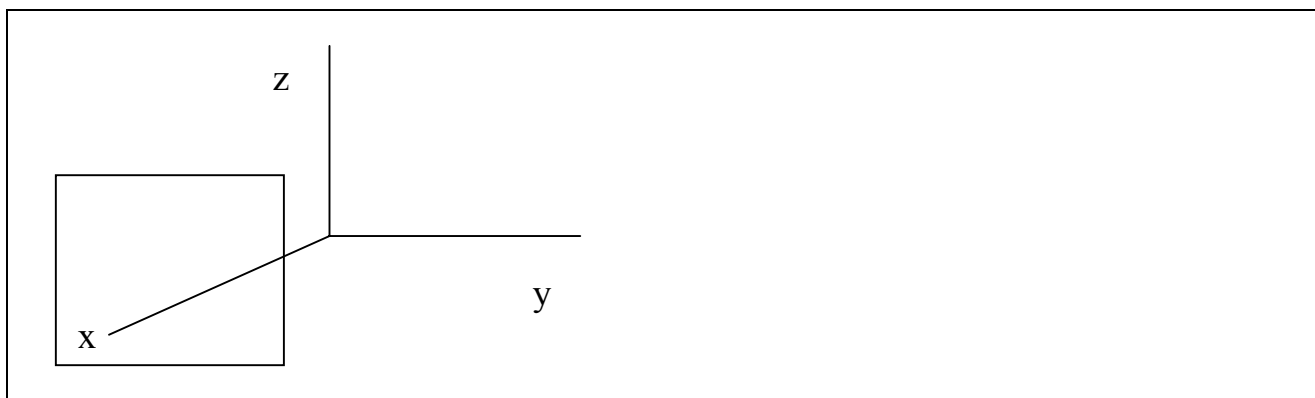
$$\Delta \xi = (1/v^2) \partial^2 \xi / \partial t^2 \quad (\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2).$$

Обратимся к уравнениям Максвелла в вакууме (в системе единиц СИ)

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0.$$

Пусть плоский волновой фронт электромагнитной волны движется перпендикулярно оси  $x$



Распишем уравнения на компоненты и выпишем из них уравнения, которые останутся для плоских волновых фронтов

$$\begin{aligned} & \mathbf{i} \left( \cancel{\partial E_z / \partial y}^0 - \cancel{\partial E_y / \partial z}^0 \right) + \mathbf{j} \left( \cancel{\partial E_x / \partial z}^0 - \cancel{\partial E_z / \partial x}^0 \right) + \mathbf{k} \left( \cancel{\partial E_y / \partial x}^0 - \cancel{\partial E_x / \partial y}^0 \right) = \\ & = -\partial (\mathbf{B}_x \mathbf{i} + \mathbf{B}_y \mathbf{j} + \mathbf{B}_z \mathbf{k}) / \partial t, \\ & \mathbf{i} \left( \cancel{\partial H_z / \partial y}^0 - \cancel{\partial H_y / \partial z}^0 \right) + \mathbf{j} \left( \cancel{\partial H_x / \partial z}^0 + \cancel{\partial H_z / \partial x}^0 \right) + \mathbf{k} \left( \cancel{\partial H_y / \partial x}^0 - \cancel{\partial H_x / \partial y}^0 \right) = \\ & = \partial (\mathbf{D}_x \mathbf{i} + \mathbf{D}_y \mathbf{j} + \mathbf{D}_z \mathbf{k}) / \partial t, \\ & \cancel{\partial B_x / \partial x}^0 + \cancel{\partial B_y / \partial y}^0 + \cancel{\partial B_z / \partial z}^0 = 0, \quad \cancel{\partial D_x / \partial x}^0 + \cancel{\partial D_y / \partial y}^0 + \cancel{\partial D_z / \partial z}^0 = 0 \end{aligned}$$

Выпишем уравнения для компонентов векторов

$$-\partial E_z/\partial x = -\partial B_y/\partial t \quad (1) \quad -\partial H_z/\partial x = \partial D_y/\partial t \quad (3)$$

$$\partial E_y/\partial x = -\partial B_z/\partial t \quad (2) \quad \partial H_y/\partial x = \partial D_z/\partial t \quad (4)$$

$$-\partial B_x/\partial t = 0, \quad \partial D_x/\partial t = 0, \quad \partial B_x/\partial x = 0, \quad \partial D_x/\partial x = 0 \Rightarrow B_x, D_x = \text{cst}(x, t).$$

Смещением начала координат и выбором начала отсчета постоянные величины на фоне переменных составляющих можно положить равными нулю. Это означает в нашем случае, что поле электромагнитных волн имеет переменные составляющие по осям  $y, z$ , но не имеет по оси  $x$ .  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны направлению распространения волны (то есть оси  $x$ ). Преобразуем оставшиеся уравнения и получим уравнения для одной и той же компоненты  $E, D, H$ , или  $B$ . Для этого возьмем производную от (3) по  $x$ , раскроем  $D_y$  по формуле  $D_y = \epsilon_0 E_y$  и поменяем порядок производных по времени и координате

$$\partial^2 H_z/\partial x^2 = -\partial/(\partial D_y/\partial t)\partial x \Rightarrow \partial^2 H_z/\partial x^2 = -\partial(\epsilon_0 \partial E_y/\partial x)/\partial t.$$

Произведем замену в правой части согласно (2) и раскроем  $B_z$  по формуле  $B_z = -\mu_0 H_z$

$$\partial^2 H_z/\partial x^2 = -\epsilon_0 \partial(-\partial B_z/\partial t)/\partial t = -\epsilon_0 \partial(-\mu_0 \partial H/\partial t)/\partial t \Rightarrow$$

$$\underline{\partial^2 H_z/\partial x^2 = \epsilon_0 \mu_0 \partial^2 H_z/\partial t^2}.$$

Найдем численное значение и размерность выражения

$$[c] = [(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}] = \text{м./с}, \quad c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

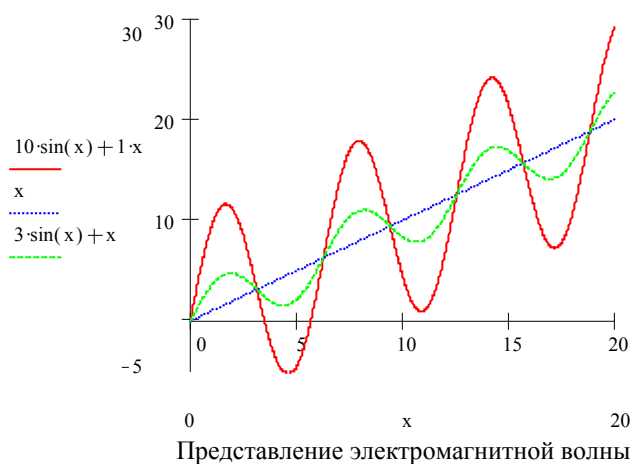
То есть  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – электродинамическая постоянная. Она же есть и скорость света в вакууме. Точно такое же уравнение можно получить относительно компоненты  $\mathbf{E} - E_y$ . Тогда имеем, опустив индексы  $z, y$ .

$$\partial^2 H/\partial x^2 = \partial^2 H/c^2 \partial t^2, \quad \partial^2 E/\partial x^2 = \partial^2 E/c^2 \partial t^2. \quad (**)$$

А так как  $1/c^2 = T^2/\lambda^2 = k^2/\omega^2$ , то уравнения (\*\*) являются волновыми уравнениями и их решения:

$$E = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi_1), \quad H = H_m \cos(\omega t - kx + \varphi_2).$$

Чтобы эти уравнения выполнялись одновременно, необходимо выполнение равенства начальных фаз. График электромагнитной волны имеет вид



Таким образом, мы имеем плоскую электромагнитную волну с взаимно перпендикулярными направлениями у  $E$ ,  $H$  и  $x$ .

## § 4 Энергия и импульс электромагнитной волны

### 4.1 Вектор Пойнтинга

Выражение для объемной плотности энергии электромагнитного поля имеет вид

$$w = w_E + w_H = \epsilon_0 E^2 / 2 + \mu_0 H^2 / 2.$$

Покажем, что справедливо равенство

$$E \sqrt{\epsilon_0} = H \sqrt{\mu_0}.$$

Для этого подставим решения уравнений плоской волны в (2) и (3) из § 3 и перемножим почленно равенства как результаты подстановки

$$- E k = \mu_0 \omega H$$

×

$$-\omega E \varepsilon_0 = k H$$

=

$$E^2 \varepsilon_0 = H^2 \mu_0 \Rightarrow E \sqrt{\varepsilon_0} = H \sqrt{\mu_0}.$$

Произведем замену в выражении для объемной плотности энергии

$$w = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} HE/2 + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} HE/2 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} EH = EH/c.$$

Чтобы рассудить о направлении объемной плотности энергии, вспомним, что  $E$  и  $H$  взаимно перпендикулярны, а перенос энергии осуществляется перпендикулярно обоим этим направлениям. Если учесть, что направление волнового процесса совпадает с направлением переноса энергии (по оси  $x$ ), то согласно векторному произведению

$$\mathbf{w} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) / c.$$

В литературе принята величина

$$\mathbf{S} = c \mathbf{w} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

$\mathbf{S}$  называют вектором Пойнтинга. По направлению вектор Пойнтинга совпадает с направлением распространения плоской электромагнитной волны.

Заметим, что для сферических волн  $E \sim 1/r$  и  $H \sim 1/r \Rightarrow S \sim 1/r^2$ . О размерности.  $[w] = \text{Дж/м}^3$ ,  $[S] = \text{Дж/м}^2\text{с}$ . По физическому смыслу  $S$  есть энергия, приходящаяся (пронизывающая) единичную площадку за единицу времени. Таким образом, энергетические характеристики электромагнитной волны затухают обратно пропорционально квадрату расстояния.

## 4.2 Импульс электромагнитной волны

Электромагнитную волну рассматривают как частицу нулевой массы покоя. Рассмотрим электромагнитную волну как частицу, движущуюся со скоростью  $v < c$  ( для электромагнитной волны в вакууме  $v = c$  ). Исключим скорость  $v$  в выражениях для энергии и импульса.

$$E^2 = m^2 c^4 / (1 - v^2/c^2) \Rightarrow 1 - v^2/c^2 = m^2 c^4 / E^2,$$

$$p^2 = m^2 v^2 / (1 - v^2/c^2) = m^2 c^2 [(v^2/c^2 - 1) + 1] / (1 - v^2/c^2) =$$

$$= m^2 c^2 [(-m^2 c^4/E^2) + 1] / (m^2 c^2 c^2/E^2) = (E^2/c^2) (1 - m^2 c^4/E^2) =$$

$$= E^2/c^2 - m^2c^2 \Rightarrow \underline{p^2 = E^2/c^2 - m^2c^2}. \quad m = 0 \Rightarrow p = E/c.$$

Таким образом, для частицы с нулевой массой покоя получена формула, связывающая импульс и энергию. Найдем импульс единичного объема.

$$p_{\text{ед. объем}} = w/c = EH/c^2 = S/c^2, \quad p_{\text{ед. объем}} = S / c^2.$$

Итак, нами введено понятие электромагнитных волн. Электромагнитные волны описываются волновым уравнением, подчиняются всем законам волновых процессов: поляризации, интерференции, дифракции, дисперсии. Электромагнитные волны поперечны, они не требуют среды для своего распространения и осуществляют перенос энергии.

## § 5 О шкале электромагнитных волн

№ п/п	Вид излучения	$\lambda$ , по- рядок вели- чины	$\lambda$ , "точно"	$\nu$
		м	произ- вольные единицы	Гц
1.	Сверхвысоко энергетические $\gamma$ - кванты (фотоны)? Комментарий: В 1980-1990 гг. произошел ренессанс физики космических лучей. К наблю- давшемуся ранее источнику вы- сокоэнергетических $\gamma$ -квантов – двойному пульсару Лебедь X-3 с энергией $\gamma$ -квантов $E \sim 10^{15}$ эВ (Лебедь X-3 считался почти мифическим источником) в 1988г был обнаружен еще один источник высоко энергетиче- ских частиц Геркулес X-1 (по	$10^{-21}$	$10^{-6} F$ (F – Фер- ми, $1F =$ $10^{-15} \text{ м}$ )	$10^{29}$

	<p>наименованию звездного скопления). Он идентифицируется по трем группам признаков. Среди них такой как период действия источника, составляющий 1,2357 секунды. Он зарегистрирован тремя радиотелескопами: в Лос-Аламосе, предназначенном для регистрации широких атмосферных ливней, в Аризоне и на Гавайских островах на телескопах черенковского излучения. До 50-х годов, пока не было ускорителей, все частицы обнаруживались только в космическом излучении. Сверх высокочастотное излучение невозможно создать на ускорителях и такие энергии невозможно объяснить стандартными моделями ускорения космических лучей</p>			
2.	<p>Тормозное излучение. Образуется в результате резкого торможения высоко энергетических частиц в веществе мишени.</p>	$10^{-16}$	0,067F	$10^{24}$

3.	<p>Гамма лучи</p> <p>При распаде элементарных частиц (радиоактивном распаде). Комментарий: <math>\gamma</math>-распад (<math>\gamma</math>-излучение) обычно сопровождается <math>\alpha</math>- и <math>\beta</math>-распадами в ядрах атомов, например <math>^{27}\text{Mg}</math> 9,5 мин</p> <p>0,834 МэВ</p> <p>1,015 МэВ</p> <p><math>^{27}\text{Al}</math></p> <p><math>^{27}\text{Mg} \rightarrow \beta^- + ^{27}\text{Al} + \gamma</math></p>	$10^{-13} - 10^{-11}$	100F -0,1Å (1Å= $10^{-10}\text{м}$ = $10^5\text{F}$ )	$10^{21} - 10^{19}$
4.	Рентгеновские лучи. При переходе возбужденных атомов в стационарные состояния как излучение электронов и тормозное излучение	$10^{-11} - 10^{-8}$	0,1-100Å	$10^{19} - 10^{16}$
5.	Ультрафиолетовый свет. Излучение возбужденных атомов	$10^{-8} - 10^{-7}$	100 – 3900 Å	$\sim 10^{15}$
6а.	Видимый свет. Темно-синяя граница.	$\sim 10^{-7}$	3900Å = = 0.39мкм (1мкм = = $10^{-6}\text{м}$ = = $10^{-4}\text{Å}$ )	$\sim 10^{15}$
6б.	Видимый свет. Красный. Свет, к которому наиболее чувствителен глаз человека.	$\sim 10^{-7}$	0,5461 мкм	$\sim 10^{15}$
6в.	Видимый свет. Темно-красная граница	$\sim 10^{-6}$	0,76 мкм	$\sim 10^{15}$

7.	Инфракрасное излучение.	$\sim 10^{-5}$	1-20 мкм	$10^{13}$ - $10^{14}$
8.	Микроволновое излучение. Линия межзвездного водорода. Замечание: радиолокация (ра- дарами) осуществляется в диа- пазоне от миллиметровых до метровых длин волн.	$\sim 10^{-1}$	21 см	$10^9$ Гц = 1 ГГц
9.	Несущая частота телевидения. Частотная модуляция.	1- <10	1,5-5,5 м	100- -10 МГц
10.	Несущая частота радио. Амплитудная модуляция.	$10^2$ - $10^3$	200-600м и более	100 кГц
11.	Радиоволны звуковой частоты	$10^4$ - $10^7$	$10$ - $10^4$ км	$10^4$ - 10 Гц

Звуковая частота – 16 000 Гц.

## § 6 О характеристиках электромагнитных волн

Итак, решение уравнения электромагнитных волн записывается в виде

$$E(\text{ или } H) = E_0(\text{ или } H_0) \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$E$ ,  $H$ ,  $E_0$ ,  $H_0$  – текущие и амплитудные значения электрического и магнитного полей.  $[E] = \text{А/м}$ ,  $[H] = \text{В/м}$ .

$\omega$  - Угловая (или циклическая) частота  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $[\omega] = \text{рад/с}$ .

$t$  – время, с

$k$  – волновое число  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $k^* = 1/\lambda$

$k^*$  - спектроскопическое волновое число,  $\text{м}^{-1}$



$\varphi$  - начальная фаза, рад

$c$  – скорость света в вакууме или электродинамическая постоянная.

Волновой процесс энергетически можно охарактеризовать ( и в то же время описать количественно) многими способами с применением параметров:

$E, \lambda, \nu, \omega, k, k^*, \lambda^*, \dots$

Связь между ними реализуется с помощью формул

$$E = h\nu = \hbar\omega = hc/\lambda = \dots, \hbar = h/2\pi, \lambda^* = 2\pi\lambda.$$

Пусть речь идет о волновом процессе с длиной волны  $\lambda = 0,5$  мкм (из видимой области спектра), тогда

1.  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = 500 \text{ нм} = 5000 \text{ \AA}$
2.  $k^* = 2 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1} = 2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$
3.  $\nu = 3 \cdot 10^8 / 0,5 \cdot 10^{-6} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$
4.  $E = hc/\lambda = h\nu = 4,26 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$

Чтобы не выражать энергетические величины через числа больших порядков в системе единиц СИ, используют внесистемную единицу энергии – электрон вольт (эВ). 1 эВ это энергия, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов,  $\Delta\varphi$ , в 1 В.

$$1 \text{ эВ} = E = e \Delta\varphi = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$1 \text{ Дж} = 1 / 1,6 \cdot 10^{-19} = 6,25 \cdot 10^{18} \text{ эВ.}$$

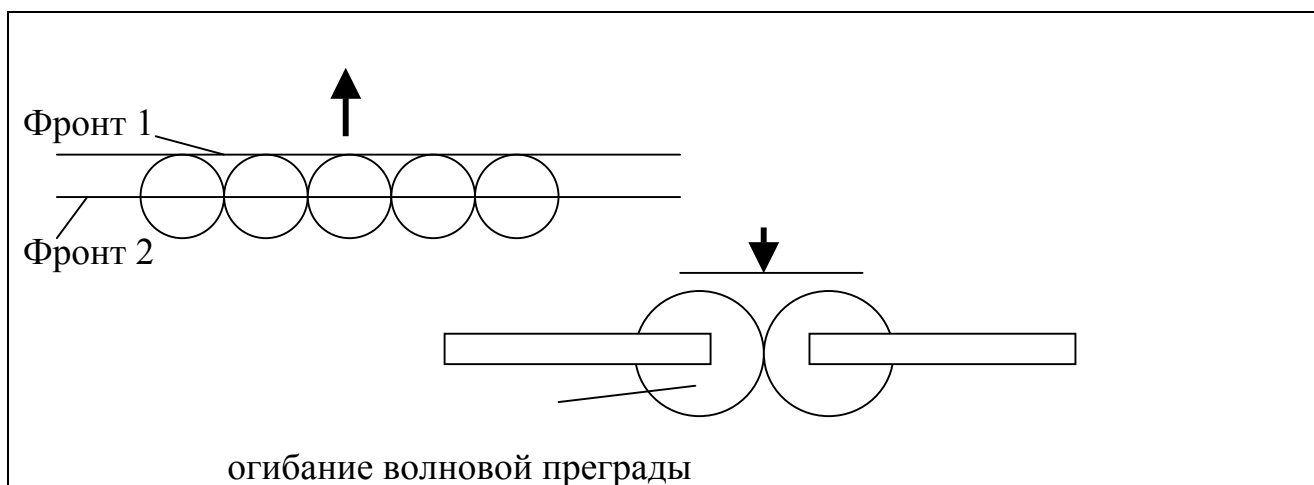
Тогда для нашей длины волны  $E = 4,26 \cdot 10^{-19} / 1,6 \cdot 10^{-19} \cong 2,7 \text{ эВ.}$   
Составим таблицу.

$\lambda$				E		$\nu$	$k^*$
м	мкм	нм	$\text{\AA}$	Дж	эВ	Гц	$\text{см}^{-1}$
$2 \cdot 10^{-6}$	0,5	500	5000	$4,26 \cdot 10^{-19}$	2,7	$6 \cdot 10^{14}$	$2 \cdot 10^4$

## § 7 Принципы Ферма, Гюйгенса и Гюйгенса-Френеля

Принцип Ферма (Ферма П. 1601-1675). Свет при распространении из одной точки в другую выбирает путь, которому соответствует наименьшее время распространения (согласно телеологическим (цель) соображениям природа действует целенаправленно (здесь речь идет о целесообразности, признаваемой по отношению к природе во времена Ферма)).

Принцип Гюйгенса. (Г. Христиан 1629-1695 - Нидерланды). Каждая точка, до которой доходит волновое движение служит центром вторичных волн. Огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент. Построим огибающую, при прохождении фронтом волны щели

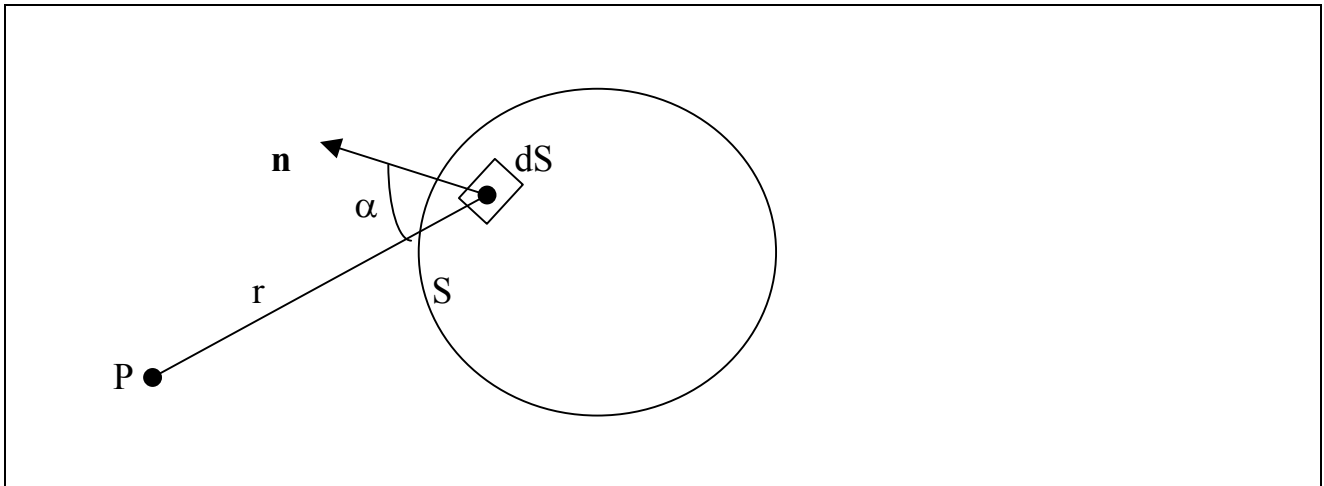


Из рисунка следует, что даже при таком построении получается огибание волновой преграды. Однако, этот принцип не дает указаний об интенсивности волны.

Принцип Гюйгенса-Френеля (Ф. Огюстен Жан 1788-1827). Рассмотрим сферическую волну.

$$\xi = (a'/r) \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi).$$

Каждый элемент волновой поверхности служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине этого элемента.



В точку  $P$ , лежащую на пути волновой поверхности, через некоторое время приходит волновой колебательный процесс. Пусть  $\xi = E$ , тогда  $d\xi = dE$ .

$$dE = [\kappa'(\alpha) a_0 dS / r] \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi).$$

Здесь

$\omega t + \varphi$  - фаза колебания в месте расположения волновой поверхности (начало координат в точке  $r = 0$ ),

$dS$  – элемент волновой поверхности,

$k$  – волновое число,

$r$  – расстояние от элемента поверхности  $dS$  до точки  $P$ ,

$\varphi$  - начальная фаза, определяемая амплитудой колебания в том месте, где находится  $dS$ ,

$\kappa'(\alpha)$  – коэффициент, зависящий от угла  $\alpha$  между нормалью,  $\mathbf{n}$ , к площадке  $dS$ , и направлением от  $dS$  к точке  $P$  вдоль  $r$ .

Чтобы найти полную напряженность электрического поля  $E$  в точке  $P$  надо проинтегрировать (просуммировать) выражение  $dE$  по всей поверхности  $S$ .

$$E = \int_S [\kappa'(\alpha) a_0 / r] \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi) dS.$$

## § 8 Поляризованные электромагнитные волны

Перейдем к изучению явлений, в которых главную роль играет определенное положение в пространстве плоскости, в которой колеблется вектор  $\mathbf{E}$  (поскольку  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  связаны однозначно, то достаточно изучить поведение вектора  $\mathbf{E}$ ). Представим  $\mathbf{E}$  в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (1)$$

(начальную фазу можно положить равной нулю) так что

$$\text{Re} [\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}] = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}).$$

$\mathbf{E}$  может быть представлен в виде проекций на два взаимно перпендикулярных направления

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_y + \mathbf{E}_z.$$

$\mathbf{E}_0$ , вообще говоря, может быть комплексным

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha} \Rightarrow E_0^2 = \mathbf{b}^2 e^{-2i\alpha}.$$

$\mathbf{b}^2$  обязательно вещественно по определению модуля вещественного числа

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i \mathbf{b}_2, \mathbf{b}^2 = \mathbf{b}_1^2 + \mathbf{b}_2^2 \Rightarrow \mathbf{b}^2 = \mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2 + 2i \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2.$$

Следовательно  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  должны быть ортогональными (взаимно перпендикулярными). С учетом сказанного вычислим реальную часть от (1).

$$\mathbf{E} = \text{Re} \{(\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)[\cos(-\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t) - i \sin(-\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t)]\} =$$

$$= \text{Re} [\mathbf{b}_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) + i \mathbf{b}_2 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) - i \mathbf{b}_1 \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) +$$

$$+ \mathbf{b}_2 \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] = \mathbf{b}_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) + \mathbf{b}_2 \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}).$$

$$\mathbf{E}_y = \mathbf{b}_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}_z = \mathbf{b}_2 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (2)$$

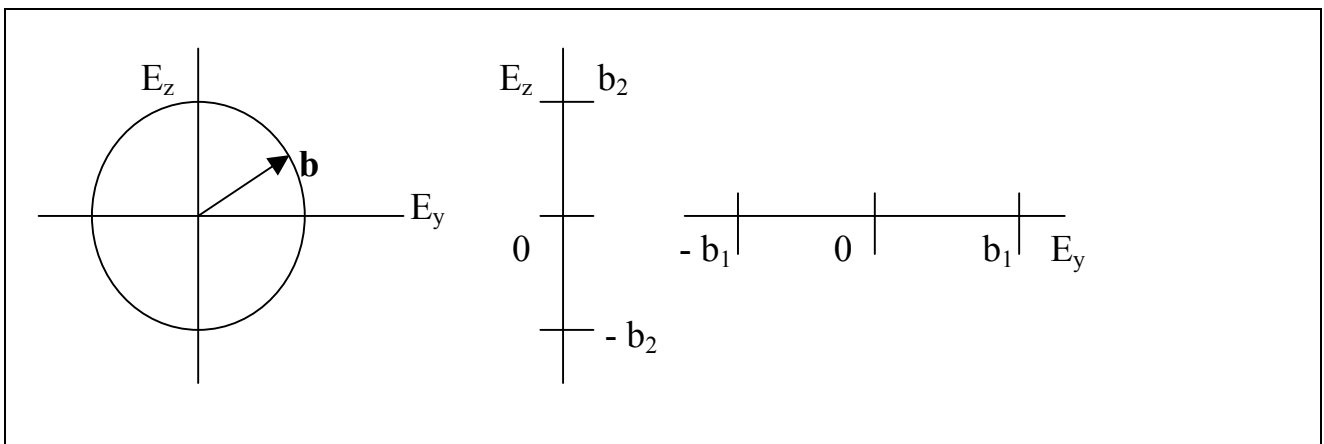
Полученная зависимость  $\mathbf{E}$  от времени имеет в данном случае параметрический вид. Возведем обе части (2) в квадраты и сложим, имеем

$$E_y^2 / b_1^2 + E_z^2 / b_2^2 = 1.$$

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. В каждой точке пространства вектор  $\mathbf{E}$  (а точнее говоря его конец) вращается с частотой  $\omega$  в плоскости перпендикулярной направлению распространения волны. Причем, его конец описывает эллипс. Вращение может происходить как по, так и против правого винта. Рассмотрим их.

Пусть  $b_1 = b_2 = b$ . Эллипс вырождается в окружность.

i.  $E_y^2 + E_z^2 = b^2$



ii.  $E_y = 0 \Rightarrow E = E_z = b_2$

iii.  $E_z = 0 \Rightarrow E = E_y = b_1$ .

Таким образом, электромагнитные волны обладают тем свойством, что математическое поведение векторов напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , а также магнитного поля  $\mathbf{B}$  можно описать как вектора, вращающиеся с определенной частотой. Концы этих векторов могут описывать эллипсы, окружности или прямые линии. Вращение при этом может происходить в двух возможных направлениях. Само явление носит название «поляризация». Плоскость, в которой колеблется вектор называют плоскостью поляризации.

По виду поляризации различаются, например: линейная, круговая по правому винту, эллиптическая против правого винта и т.д..

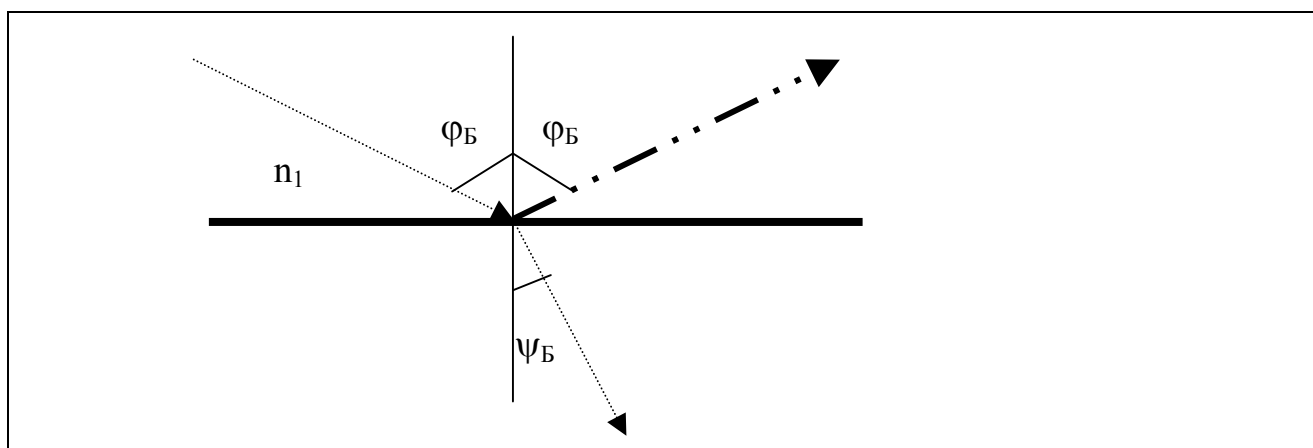
## § 9 Способы поляризации

Под не поляризованными электромагнитными волнами подразумевается множество цугов волн (цуг – излучение одиночного электрона при изменении его состояния), для которых вектора напряженности электрического и индукции магнитного полей расположены хаотически, то есть случайным образом по отношению друг к другу в зависимости от времени и координат. При этом они меняют свою поляризацию за  $10^{-8}$  секунды.

Надо иметь в виду, что свет (например, Е – компонента) взаимодействует с веществом, через которое проходит. Если в веществе есть заряженные частицы, то электрическое поле возбуждает колебание этих частиц, в чем и состоит отчасти суть взаимодействия.

### 9.1 Закон Брюстера (Б. Дэйвид, Шотландия 1781-1868, 1815 годы)

При падении не поляризованного света на границу двух сред с различными показателями преломления ( $n_1 < n_2$ ) отраженный свет при некотором угле падения оказывается линейно поляризованным в плоскости перпендикулярной к плоскости падения



причем

$$\psi_B + \phi_B = \pi/2.$$

С другой стороны согласно Декарту (1637), а позднее Снеллиусу

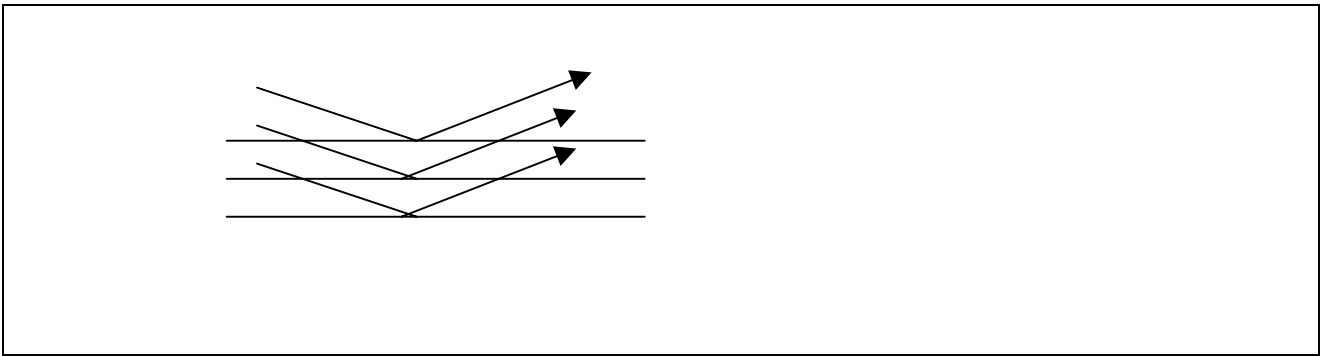
$$\sin \phi / \sin \psi = n, \quad n = n_2/n_1,$$

где  $n$  – относительный показатель преломления  $\Rightarrow$

$$\sin \varphi_B / \sin \psi_B = \sin \varphi_B / \cos \varphi_B = \underline{\underline{\operatorname{tg} \varphi_B = n}}.$$

Полученное выражение называют формулой Брюстера. Зрительно поляризованный (отраженный) свет воспринимается как свет меньшей интенсивности по сравнению с не поляризованным светом – естественным (падающим и преломленным). (При случайном законе распределения плоскостей поляризации отдельных цугов – в половину).

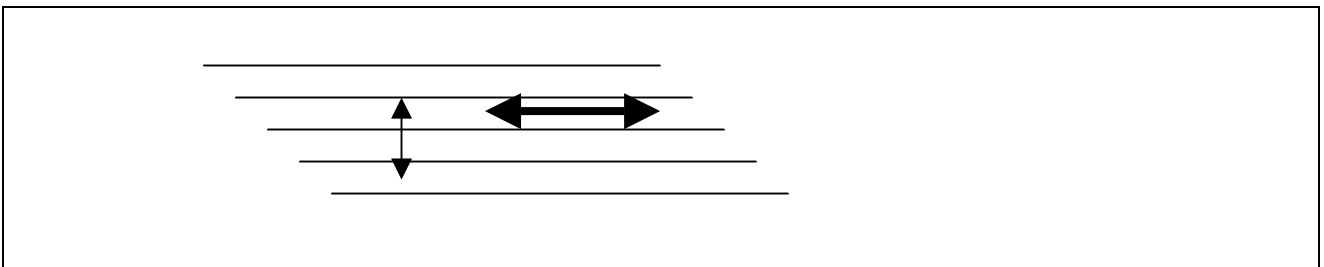
Таким образом, отражение под углом Брюстера дает простейший способ получения поляризованного света. Малая интенсивность пучка поляризованного света - недостаток способа Брюстера. Стопа Столетова – сложенные вместе пластины позволяют частично этот недостаток устранить.



## 9.2 Идеальный поляризатор. Закон Малюса (М. Этьен Луи, Франция, 1775-1812, 1811)

Способ Брюстера в наше время практически не используется, применяют поляроиды.

Вещество поляроида имеет в своем составе молекулы, состоящие из длинных углеводородных цепей. Кроме того, это вещество дополнительно растягивают так, что молекулы вытягиваются вдоль определенного направления

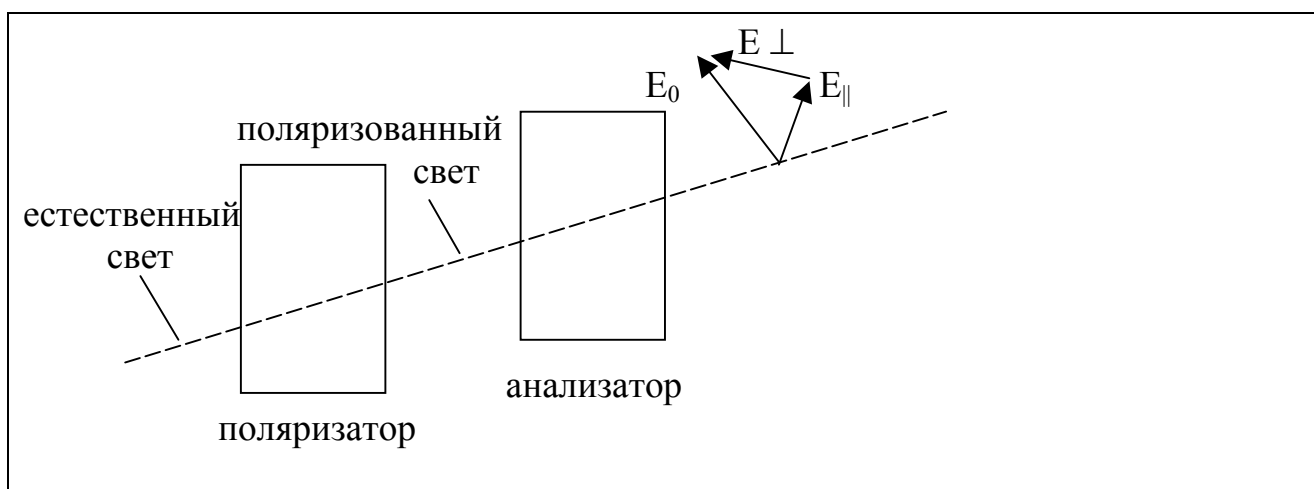


В цепочках из молекул есть свободные электроны. При падении электромагнитного излучения на поляроид:

а) вдоль цепочек - электроны поглощают электромагнитное излучение и таким образом «уничтожают» его. Энергия электромагнитной волны переходит в другие виды.

б) поперек цепочек - электроны не могут свободно перемещаться, так как их движение ограничено узкой шириной цепочки. В этом направлении падающее излучение не гасится.

Для пояснения закона Малюса составим схему



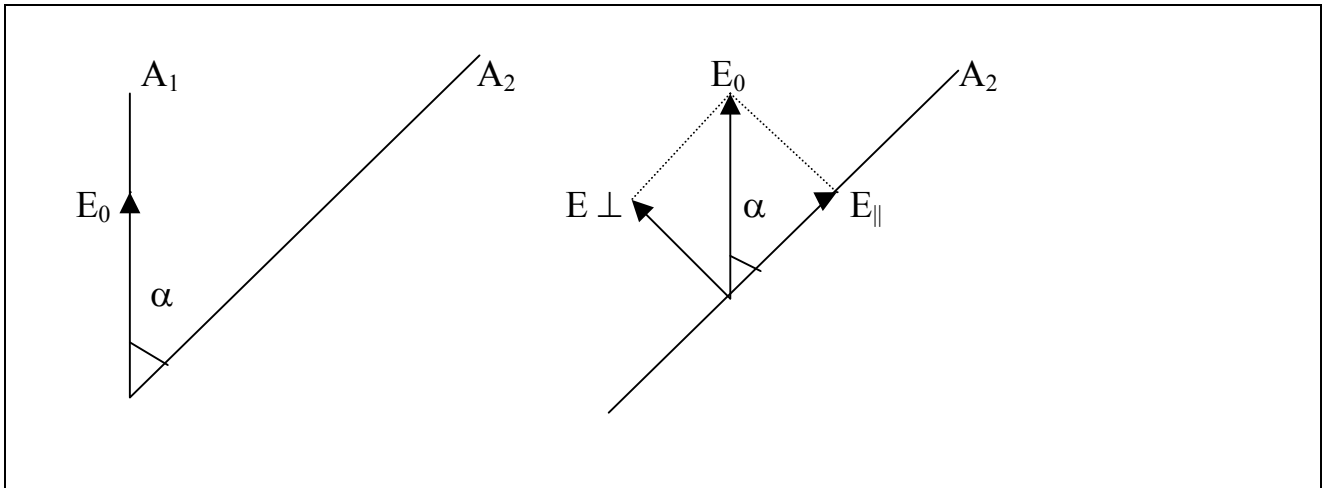
Поляризатор и анализатор на самом деле одинаковы и оба являются поляроидами. Разница состоит лишь в их назначении. Естественный свет, пройдя поляризатор становится поляризованным.

При вращении анализатора вращается плоскость поляризации и таким образом происходит управление интенсивностью поляризованного света от минимального значения до максимального значения. Если свет окажется полностью поляризованным, то минимальная интенсивность будет равна нулю и тогда можно говорить об идеально поляризованном свете и идеальном поляризаторе.

Заметим, что современные лазеры дают практически полностью поляризованный свет.

Рассмотрим схему проекций  $E$  на оси поляроидов.





$A_1$  – ось первого поляроида (поляризатора),  $A_2$  – ось второго поляроида (анализатора). Пусть  $E_0$  – напряженность электрического поля волны за поляризатором (а точнее говоря в пространстве между поляризатором и анализатором). Анализатор пропустит волны с  $E$  параллельными своей оси (или параллельные доли), а перпендикулярные составляющие поглотит. Можно записать

$$E_{\parallel} = E_0 \cos \alpha.$$

Возведем в квадрат обе части равенства (опустим значок параллельности)

$$E^2 = E_0^2 \cos^2 \alpha.$$

Заметим, что

$$E^2 \sim H^2 \sim EH = I.$$

Здесь  $I$  – интенсивность излучения, а ее единица измерения равна

$$[I] = [EH] = \text{ВА/м}^2 = \text{Дж/с м}^2,$$

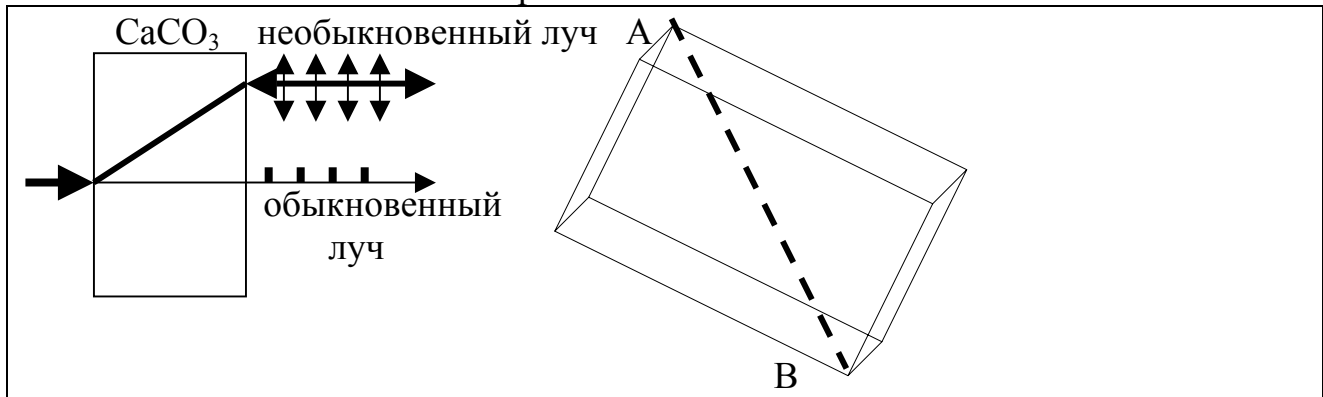
то есть это энергия, проходящая через единичную площадку в единицу времени. Равенство

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

называют законом Малюса. Здесь  $I_0$  – интенсивность света за поляризатором, а  $I$  – интенсивность света за анализатором. Изучая зависимость  $I(\alpha)$  можно вы-

яснить характер поляризации света эллиптический, круговой или линейный. Отметим в заключение, что к естественным поляроидам относится, например турмалин, а к искусственным – герпатит (йод с хинином).

Двойное лучепреломление (Бартолину Эразм, Дания, 1625-1698 гг.) наблюдается как правило при прохождении света через не кубические кристаллы. Классический пример – исландский шпат (углекислый кальций –  $\text{CaCO}_3$ ) в виде больших и оптически чистых кристаллов



Оба луча полностью поляризованы, причем, во взаимно перпендикулярных направлениях. Тогда для них различаются диэлектрические проницаемости и показатели преломления, причем

$$n_{\text{обыкн}} = 1.6585, \text{ а } n_{\text{не обыкн}} = 1.4863$$

Кристаллы исландского шпата раскалыванием легко приводятся к форме ромбоэдра. Оптическая ось (по линии АВ), вдоль которой вырезается кристалл, совпадает с диагональю как показано на рисунке.

## § 10 Интерференция электромагнитных волн

Явление наложения волн называют интерференцией. Рассмотрим наложение двух волн в данной точке пространства. Исследуемую точку поместим в начало координат ( $r = 0$ ). Пусть мы имеем два колебания одинаковой частоты.

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t + \alpha_1), E_2 = \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Найдем амплитуду результирующей волны. Для этого представим  $E_1$  и  $E_2$  в комплексном виде. Вернуться к исходным выражениям можно будет взяв реальные части от комплексных выражений после преобразований.

$$E_1 = E_{01} \exp (\omega t + \alpha_1), E_2 = E_{02} \exp (\omega t + \alpha_2),$$

тогда результирующее колебание должно иметь вид

$$E = E_1 + E_2 = E_{01} \exp (\omega t + \alpha_1) + E_{02} \exp (\omega t + \alpha_2).$$

Чтобы получить выражение для амплитуды сделаем следующее. Исключим из выражения время и частоту следующей процедурой: представим результирующее колебание в виде произведения его амплитуды на экспоненту с той же частотой и неизвестной начальной фазой. Затем образуем выражение комплексно сопряженное исходному выражению, и перемножим их почленно.

$$E_0 e^{i\omega t} \exp (i\alpha) = E_{01} e^{i\omega t} \exp (i\alpha_1) + E_{02} e^{i\omega t} \exp (i\alpha_2)$$

$$E_0 \exp (i\alpha) = E_{01} \exp (i\alpha_1) + E_{02} \exp (i\alpha_2)$$

×

$$E_0 \exp (-i\alpha) = E_{01} \exp (-i\alpha_1) + E_{02} \exp (-i\alpha_2)$$

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01} E_{02} \exp[-i(\alpha_2 + \alpha_1)] + E_{01} E_{02} \exp[i(\alpha_2 + \alpha_1)].$$

Рассмотрим реальную часть от полученного выражения

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} \cos (\alpha_2 - \alpha_1).$$

В интенсивностях полученное выражение примет вид

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Максимально возможное значение амплитуды равно

$$I - (I_1 + I_2)^2 = (\alpha_1 = \alpha_2, I_1 = I_2 = I') = 4I'.$$

Рассмотрим выражение, составляющее отношение разности хода ( расстояние, которое проходят волны к данному моменту времени) двух волн к длине волны ( длина волны или частота двух исследуемых здесь волн предполагается одинаковой), которое показывает сколько длин волн уложится в разности хода  $\Delta$ :  $\Delta/\lambda$ . Выразим в угловых единицах данное отношение умножением на  $2\pi$  и приравняем к разности фаз  $\alpha_2 - \alpha_1 = \delta$ . Пусть  $\cos \delta = 1 \Rightarrow \delta = 0 + 2\pi k \Rightarrow$

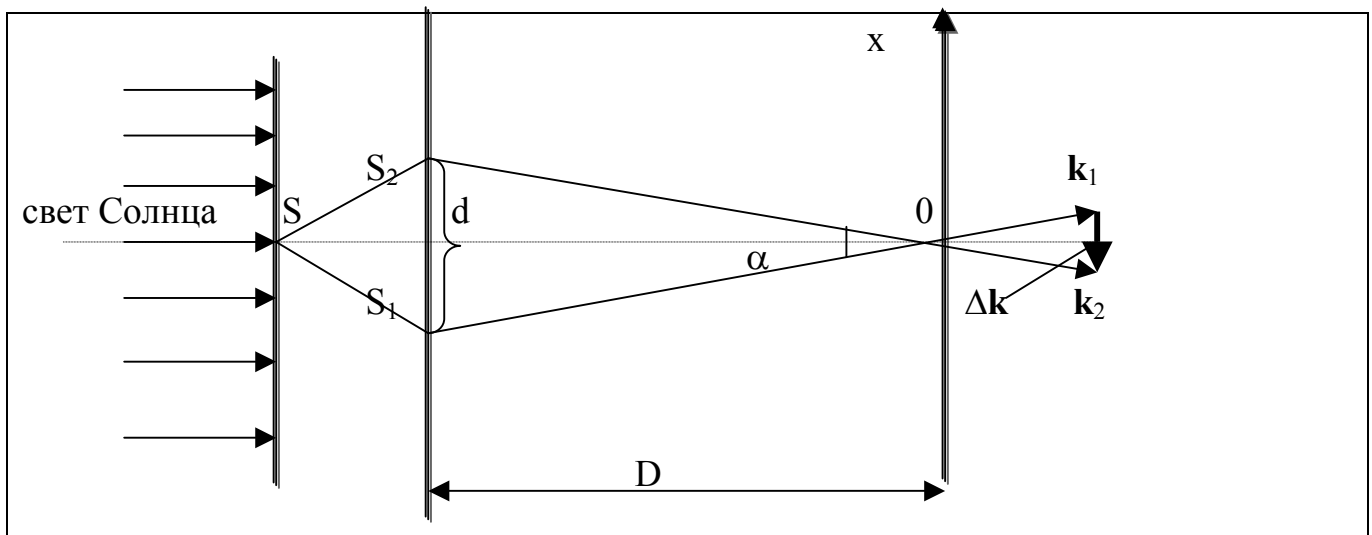
$$\delta = 2\pi\Delta/\lambda \Rightarrow 2\pi k = 2\pi\Delta/\lambda \Rightarrow \underline{\Delta = k\lambda} = 2k\lambda/2.$$

Получено условие максимума при сложении двух волн. Здесь  $k$  – натуральное число. То есть половина длины волны умножается на четное целое число – таково условие максимума при наложении двух волн.

Получим условие минимума. Исходим из того, что  $\cos \delta = -1 \Rightarrow \delta = \pi + 2\pi k = \pi(1 + 2k) \Rightarrow$

$$\delta = 2\pi\Delta/\lambda \Rightarrow 1 + 2k = 2\Delta/\lambda \Rightarrow \underline{\Delta = (1 + 2k)\lambda/2}.$$

## § 11 Опыт Юнга (Ю. Томас, 1773-1829, 1807гг)



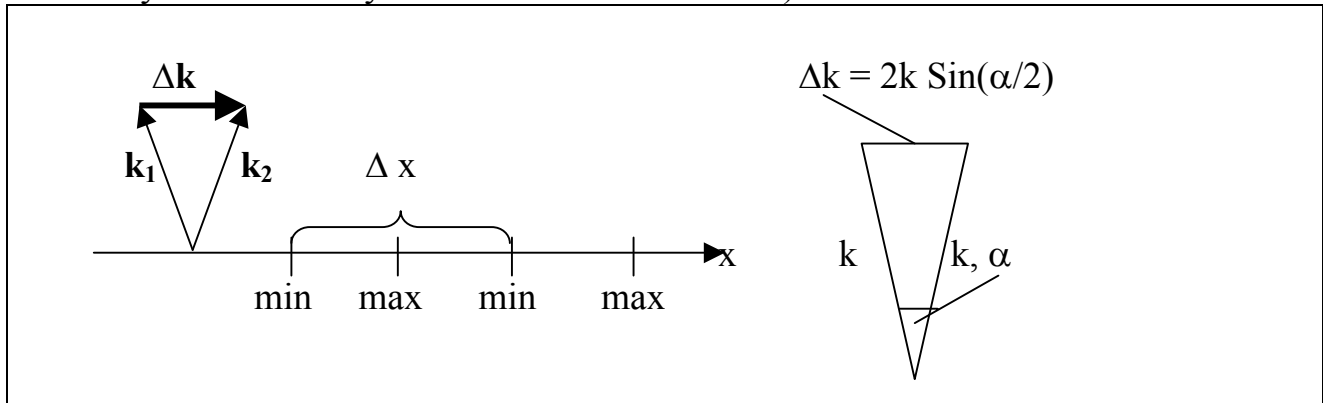
$S$  – малое отверстие,  $S_1$  и  $S_2$  – узкие отверстия в виде щелей, длина которых много больше, чем их ширина. Ввиду общности происхождения пучки когерентны и монохроматичны: синусоидальные волны с постоянными (от времени) частотой, фазой и амплитудой. Рассмотрим перекрытие двух плоских волн произвольного направления.

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r} + \alpha_1), E_2 = E_{02} \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r} + \alpha_2).$$

Здесь  $\varphi_1 = \alpha_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}$ ,  $\varphi_2 = \alpha_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}$ . Пусть  $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = k$ , то есть модули равны, а направления различны, тогда

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r} + (\alpha_2 - \alpha_1)$$

Волновые векторы  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  в одной точке и в ней складываются, тогда в направлении параллельном  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  будут наблюдаться в результате наложения волн чередования максимумов и минимумов интенсивности. Вдоль этого направления (по оси  $x$ ) расположим экран (точнее говоря, совместим экран с направлением оси  $x$ , в тех точках пространства, где образуются чередования максимумов и минимумов интенсивности света).



Найдем расстояние  $\Delta x$  между двумя соседними минимумами или максимумами (ширину полосы). Поскольку косинус периодическая функция с периодом  $2\pi$ , то

$$\Delta k \Delta x = 2\pi, \quad 2k \sin(\alpha/2) \cdot \Delta x = 2\pi \Rightarrow \underline{\Delta x} = \pi / k \sin(\alpha/2) =$$

$$\lambda / 2 \sin(\alpha/2) = (\alpha - \text{мало}) = \underline{\lambda / \alpha}.$$

В опыте Юнга можно положить  $D = 1$  м,  $d = 1$  мм,  $\alpha \approx \sin \alpha \approx d/D = 10^{-3}$  рад. Рассмотрим, например, красный свет  $\lambda = 600$  нм.

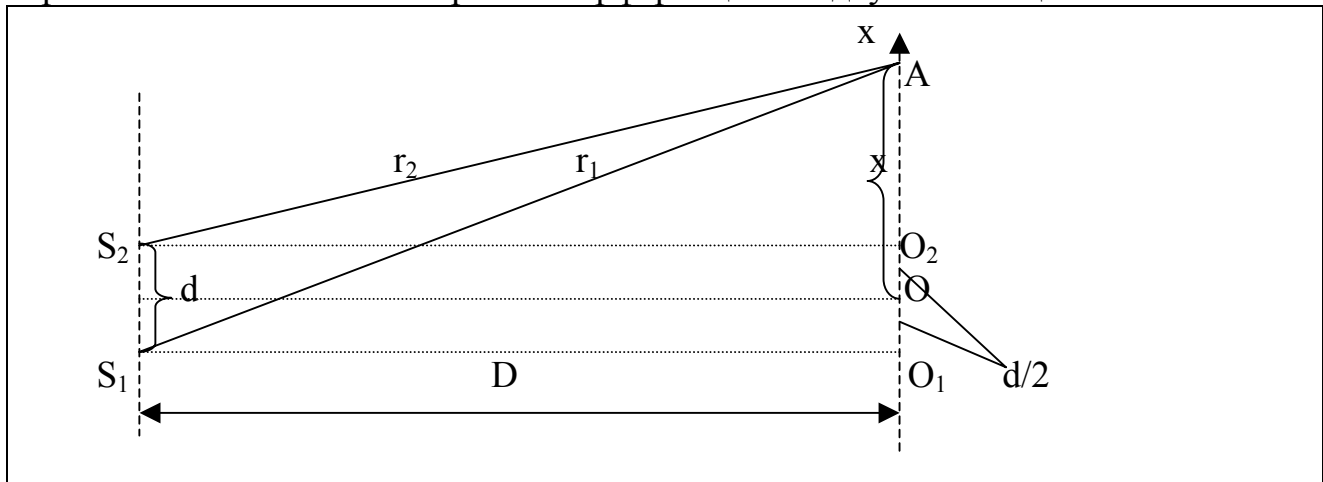
$$\Delta x = \lambda / \alpha = 0.6 \cdot 10^{-3} / 10^{-3} = 0.6 \text{ мм}.$$

Юнг действовал таким образом, что, оценив из опыта ширину полосы, получил длину волны света по формуле

$$\underline{\lambda = \alpha \Delta x}.$$

При интерференции обычно рассматривается сложение волн от конечного (2 и более) числа источников. В качестве источников часто служат щели, которые разделяют материнский пучок ( во времена Юнга стеклянные пластинки серебрились и на них процарапывались щели, так делал, например, Релей). Ес-

ли расстояние от щелей до экрана выбирать много больше расстояния между щелями, тогда интерференционные полосы на экране становятся практически прямолинейными. Рассмотрим интерференцию от двух таких щелей.



Найдем разность хода лучей в точке А

$$r_1^2 = D^2 + (x + d/2)^2, r_2^2 = D^2 + (x - d/2)^2.$$

Вычтем почленно эти равенства

$$r_1^2 - r_2^2 = 2xd, r_1 + r_2 \cong 2D \Rightarrow \Delta = r_1 - r_2 = x d / D.$$

Угол  $\alpha$ , под которым из точки А, а вообще из произвольной точки экрана видно расстояние между щелями называют углом схождения интерферирующих лучей.

$$\alpha \approx \sin \alpha \approx d / D \Rightarrow \Delta = x \alpha.$$

Используем соотношение, связывающее разность фаз и разность хода лучей, имеем

$$\delta = 2\pi\Delta / \lambda = 2\pi x \alpha / \lambda.$$

Подставим разность фаз в формулу для результирующей интенсивности, имея в виду, что  $I_1 = I_2 = I'$

$$I = 2I' [ 1 + \cos (2\pi x \alpha / \lambda) ].$$

Таким образом данная формула применительно к конкретной экспериментальной схеме позволяет проследить зависимость интенсивности интерфе-

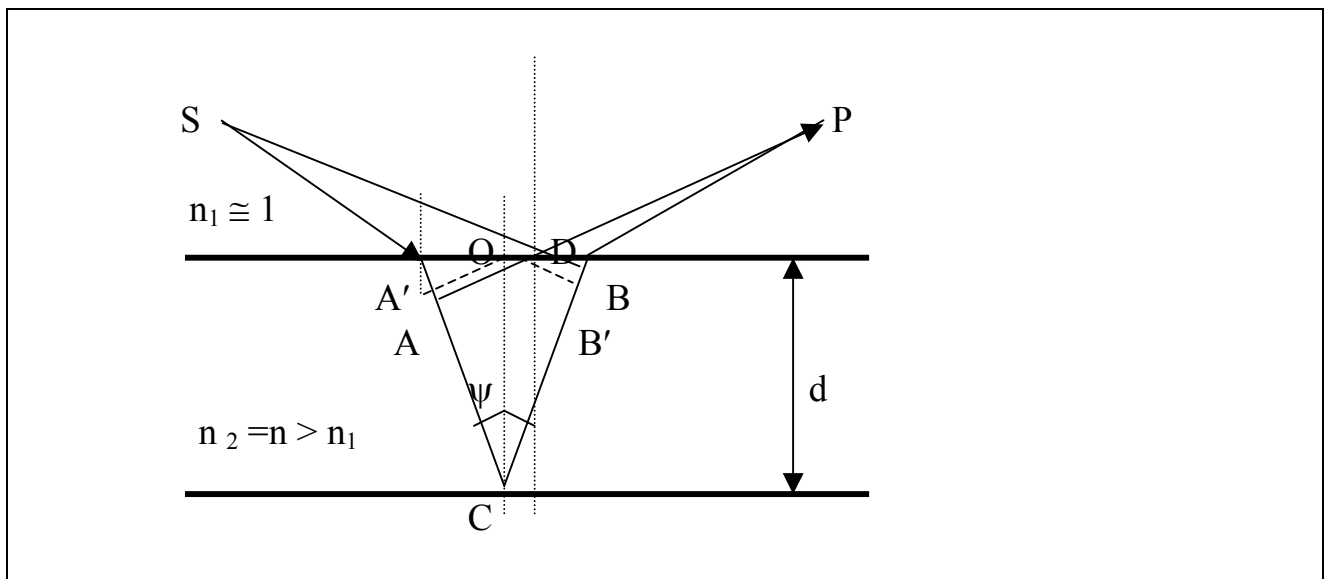
рирующего света от координаты. Как следует из формулы интенсивность периодически меняется в зависимости от координаты  $x$ .

## § 12 Интерференция в пленках

К пленкам можно отнести тонкие пленки масла или нефти, стенки мыльных пузырей, пленки, возникающие на поверхности металлов при закалке (цвета побежалости) и т. д.

### Вариант 1

Рассмотрим ход лучей в плоскопараллельной пластинке (пленке) толщины  $d$ , с показателем преломления  $n$ , освещенной точечным источником  $S$ .



У двух лучей отраженного и преломленного, пришедших одновременно в точку  $P$  возникает разность хода, а следовательно возможны и явления интерференции. Найдем разность хода этих лучей в произвольно выбранной точке  $P$ .

$$\Delta = SACBP - SDP.$$

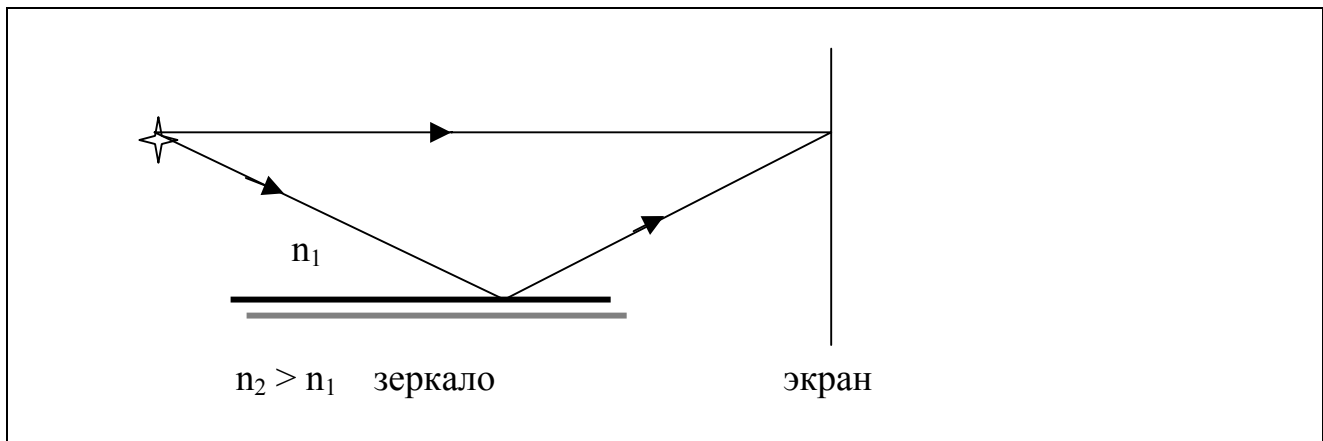
Восстановим перпендикуляры  $DA$ ,  $DB$ ,  $OA'$ ,  $OB'$  к лучам согласно чертежу, тогда

$$A'CB' = A'C, A'C = d \cos \psi.$$

Разность хода лучей равна пути, проходимому лучами внутри пластинки, с учетом показателя преломления среды пластинки, что эффективно удлиняет путь в  $n$  раз. Окружающая среда предполагается воздухом или вакуумом и в этом случае  $n_1 = 1$ . С учетом сказанного формула принимает вид

$$\Delta = 2 d n \cos \psi.$$

Кроме того, необходимо учесть, что при отражении от оптически более плотной поверхности волна изменяет фазу на  $\pi$ , что соответствует изменению хода в половину длины волны. Ее необходимо прибавить или отнять от окончательного результата. Такой факт является экспериментальным и впервые исследован Ллойдом по схеме



Однако, если отражение происходит внутри более плотной среды, то такой эффект не наблюдается.

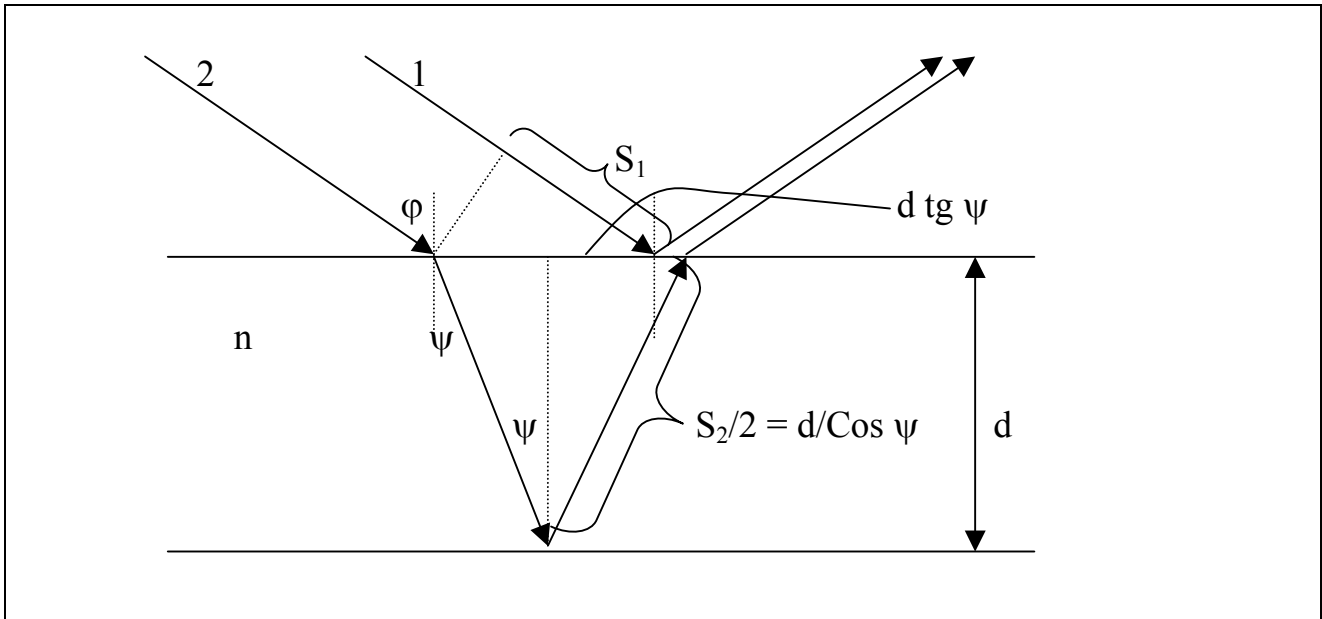
Таким образом, формула разности хода лучей по данной схеме отражения и преломления лучей имеет вид

$$\Delta = (2 d n \cos \psi) + \lambda / 2.$$

## Вариант 2

Рассмотрим ход лучей при параллельном падении на пластинку. Рассчитаем разность хода лучей, образующуюся при этом.





$$\Delta = n S_2 - S_1$$

$$S_1 = 2 d \operatorname{tg} \psi \sin \varphi, S_2 = 2 d n / \cos \psi. (\sin \varphi / \sin \psi = n \Rightarrow$$

$$\sin \varphi = n \sin \psi \text{ (исключим угол } \varphi \text{)}.$$

$$\Delta = 2 d n (1 - \sin^2 \psi) / \cos \psi = 2 d n \cos \psi.$$

С учетом эффекта Ллойда формула приобретает вид такой же как и в варианте 1 .

$$\Delta = 2 d n \cos \psi + \lambda/2.$$

Разность хода можно выразить также через угол падения

$$n \cos \psi = n (1 - \sin^2 \psi)^{1/2} = (n^2 - n^2 \sin^2 \psi)^{1/2} = (n^2 - \sin^2 \varphi)^{1/2}.$$

$$\Delta = 2 d (n^2 - \sin^2 \varphi)^{1/2} + \lambda/2.$$

Зная разность хода лучей, можно рассчитывать координаты минимумов и максимумов в чем и состоит иногда задача интерференции.

### § 13 Дифракция

1-е определение. Отклонение от прямолинейного распространения электромагнитного излучения, если оно не может быть истолковано как результат

отражения, преломления или изгибания электромагнитного излучения в средах с непрерывно меняющимся показателем преломления.

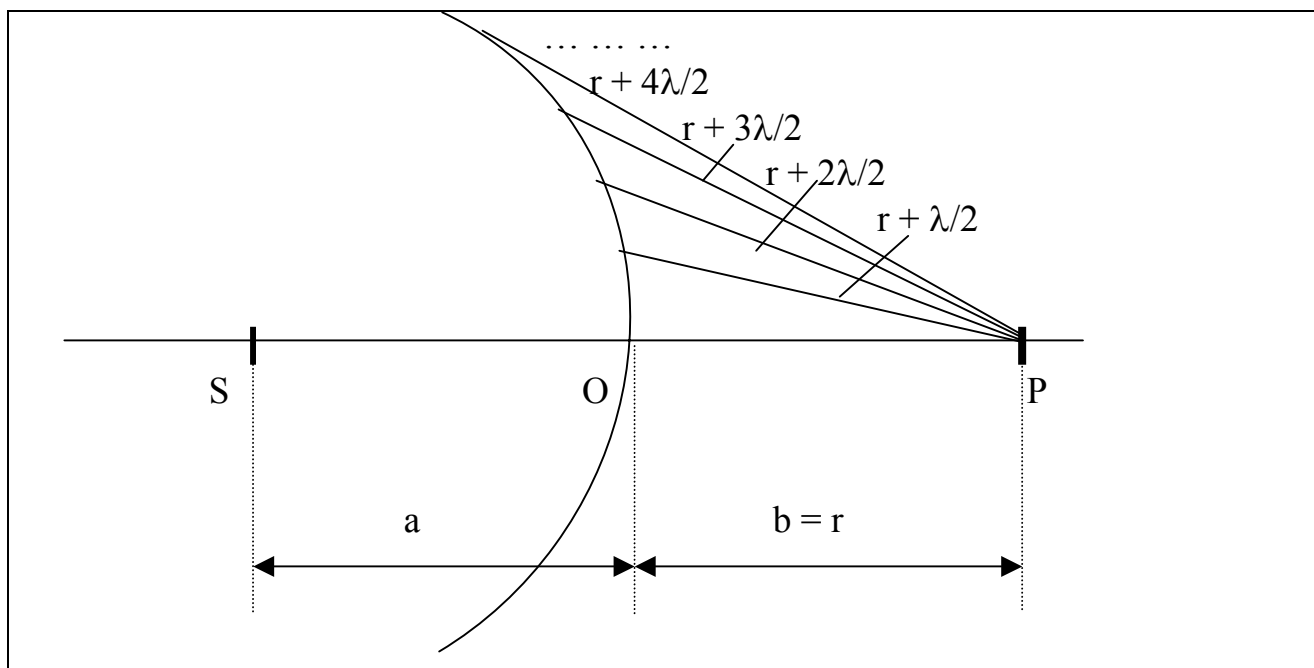
Всякая дифракционная задача, если ее рассматривать более строго сводится к нахождению решений уравнений Максвелла при наличии начальных и граничных условий.

2-е определение. Совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики. К условиям наблюдения дифракционных явлений необходимо отнести, кроме наличия собственно волнового процесса и неоднородностей, одинаковый порядок величин размеров неоднородностей и длины волны. По характеру волнового фронта дифракцию разделяют на

1. Дифракцию Фраунгофера (Ф. Йозеф, немецкий физик, 1787-1826 гг.) – практически плоский волновой фронт (далеко от источника и относительно малая поверхность).
2. Дифракция Френеля (Огюстен Жан Ф., Франция, 1788-1827 гг.) – волновой фронт, имеющий ярко выраженную сферичность.

Зоны Френеля.

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля интенсивность волн в данной точке можно найти суммируя действие каждой точки волнового фронта, а в пределе интегрируя по всей волновой поверхности. Однако, такая процедура практически чрезвычайно сложна, поэтому понадобились иные методы. Один из них является метод зон Френеля



Определим (вслед за Френелем) амплитуду волнового процесса, возбуждаемого в (·) Р сферической волной, распространяющейся в однородной изотропной

среде из точечного источника  $S$ . С учетом симметрии волновой поверхности относительно оси  $SP$ , разобьем поверхность на зоны таким образом, чтобы расстояние от  $(\cdot) P$  до каждой последующей зоны отличалось на половину длины волны от предыдущей зоны, то есть

$$r_m = b + m\lambda / 2.$$

Колебания, приходящие в  $(\cdot) P$  от соседних зон (отличающихся на  $\lambda/2$ ) по фазе отличаются на  $\pi$ , то есть находятся в противофазе. Ранее, согласно принципу Гюйгенса-Френеля было

$$E = \oint_S \kappa(\varphi) a_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_0) dS / r$$

Это же выражение можно иметь, взяв реальную часть от следующего

$$E = \oint_S K(\mathbf{r}) \exp(-i \mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad K(\mathbf{r}) = \kappa(\varphi) \exp[i(\omega t - \varphi_0)] a_0 dS / r d\mathbf{r}.$$

Сделаем ряд допущений. Проинтегрируем в пределах одной произвольно выбранной зоны. Будем считать, что  $K$  в пределах одной зоны остается постоянной.

$$E_m^* = \int_{r+m\lambda/2}^{r+m\lambda/2} e^{-i k r} dr = [K_m(-) / ik] \{ \exp[-ik(r+m\lambda/2)] - \exp[-ik(r+(m-1)\lambda/2)] \}$$

$$1)\lambda/2\} = [(-1)^1 e^{-i k r} / ik] \{ \exp[-m\lambda ik/2] - \exp[-(m-1)\lambda ik/2] \}.$$

Вспомним, что справедливо следующее

$$\operatorname{Re} e^{-m\lambda ik/2} = \cos(-mk\lambda/2) = \cos(k = 2\pi/\lambda) = \cos(-\pi m) = (-1)^m.$$

$$\operatorname{Re} e^{\lambda ik/2} = \cos(k\lambda/2) = \cos \pi = -1.$$

Найдем вещественную часть напряженности электрического поля

$$E_m = (-1)^{m+1} 2 e^{-i k r} K_m / ik.$$

Получился знакопеременный ряд в зависимости от номера зоны. Для небольших значений  $m$  по этой формуле можно рассчитывать напряженность элек-

трического поля (магнитную индукцию, интенсивность света). Проведем далее следующие рассуждения.

а. Просуммируем напряженности от первой до  $m$  – ной зоны

$$E = + (E_1 + E_2 + \dots + E_m).$$

б. Просуммируем напряженности от второй до  $m + 1$  – ой зоны. Эта сумма должна с большой точностью равняться сумме, вычисленной в п. а. , но, с учетом сдвига по фазе на  $\pi$ , - со знаком минус.

$$E = - (E_2 + E_3 + \dots + E_m + E_{m+1}).$$

Сложим

$$2E = E_1 - E_{m+1}, |E_m| \approx |E_{m+1}| \Rightarrow E = (E_1 + E_m) / 2.$$

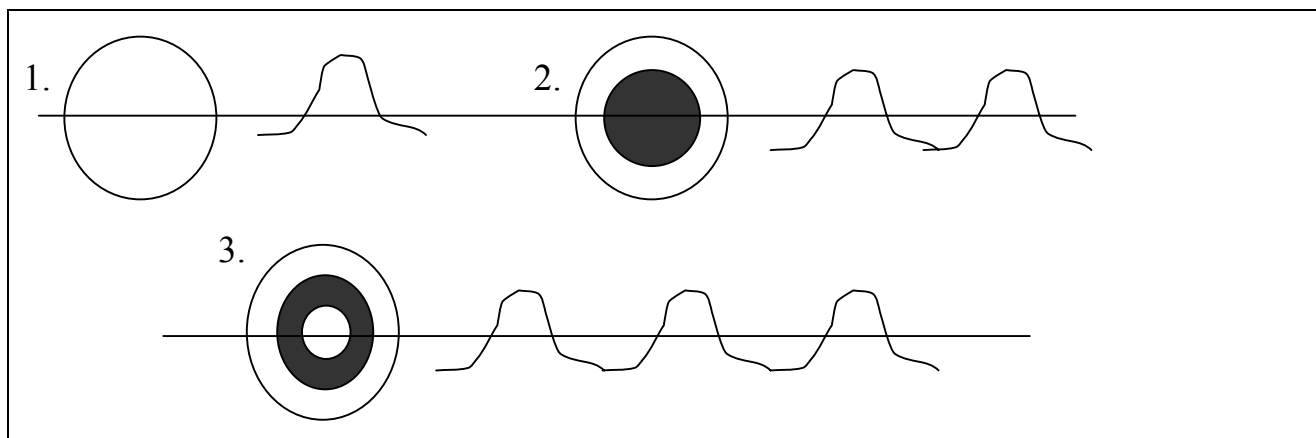
Последнее выражение выполняется тем с большей точностью, чем больше  $m$  .

#### § 14 Дифракция от круглого отверстия переменного радиуса. Радиусы зон Френеля

Имеем схему опыта



1. Сужая отверстие, оставим только первую зону ( $m = 1$ ) . Получим светлое пятно с центром в точке Р ( усиление света). Если удалять экран (или приближать), то пятно плавно темнеет или светлеет.



2. Откроем две первые зоны Френеля ( $m = 1$  и  $2$ ). Получим внутри темное пятно, окруженное световым кольцом.
3. Откроем три первые зоны. Получим чередование светлых и темных колец, начиная от центрального светлого пятна.

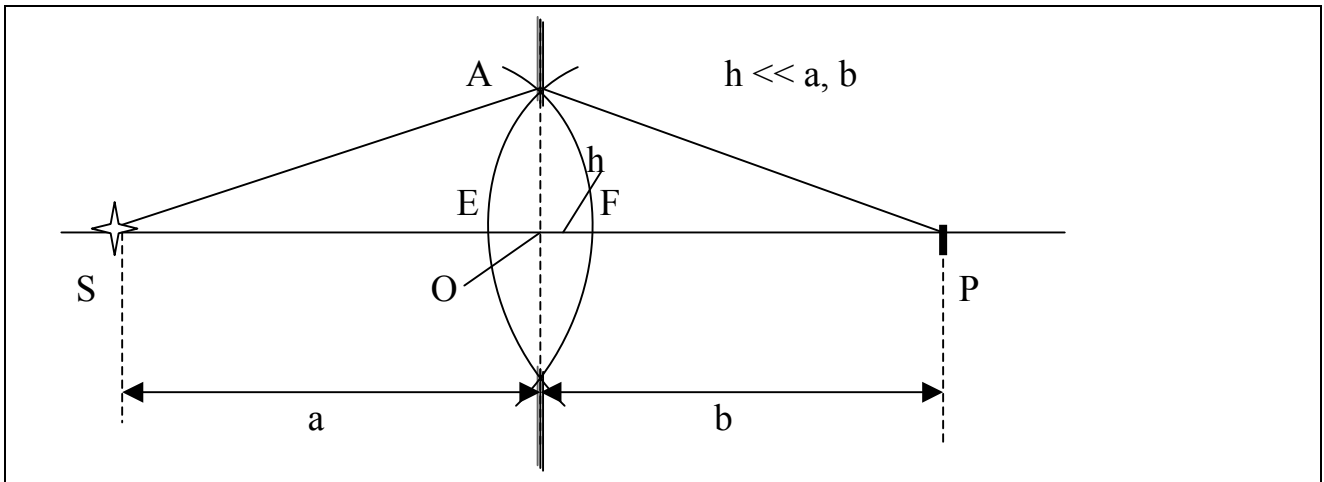
И так далее ... Можно отметить закономерность:

$m$  – нечетное – светлое пятно в центре,  
 $m$  – четное - в центре темное пятно.

Если закрыть все четные или нечетные зоны Френеля, то оставшиеся зоны усилят действие друг друга.

Рассчитаем связь между размерами отверстия и числом зон Френеля, укладывающихся в этом отверстии. Пусть  $D$  – диаметр отверстия,  $a$  и  $b$  соответственно расстояния от отверстия до источника и точки  $P$  на экране. С центрами в точках  $S$  и  $P$  проведем сферические поверхности волновых фронтов, укладывающихся в размер отверстия.

Рассмотрим треугольник  $OSA$  согласно рисунку. Здесь  $h = OF$  – расстояние от волновой поверхности до отверстия вдоль прямой  $SP$ .



$$(D/2)^2 = a^2 - (a - h)^2 \cong 2 a h = 2 a OF, \quad (D/2)^2 \cong 2 b OE \Rightarrow$$

$$OF = D^2 / 8a, \quad OE = D^2 / 8b \Rightarrow EF = OF + OE = D^2 (1/a + 1/b) / 8.$$

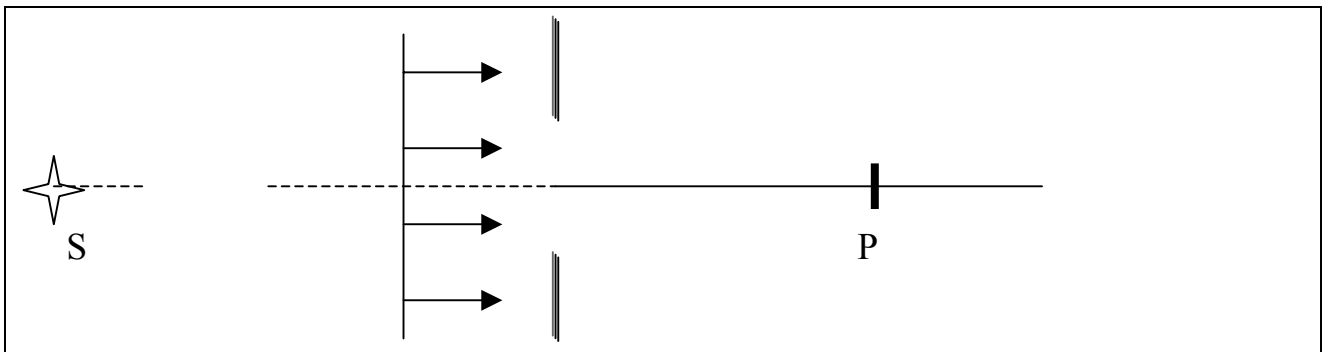
Если разделить отрезок EF на  $\lambda/2$ , то получим число зон Френеля, укладывающихся в нем. Если  $m$  получится целым, то  $D/2 = R_m$  – есть радиус  $m$ -й зоны.

$$m = EF / (\lambda/2) = D^2 (1/a + 1/b) / 8 (\lambda/2) = R_m^2 (1/a + 1/b) / \lambda \Rightarrow$$

$$\underline{R_m^2 = m \lambda / (1/a + 1/b)}.$$

Пусть  $\lambda = 0.6 \text{ мкм}$ ,  $m = 1$ ,  $a = b = 1 \text{ см} \Rightarrow R_m = 5.5 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 55 \text{ мкм}$ . Для  $a = b = 1 \text{ м} \Rightarrow R_m = 5.5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0.55 \text{ мм}$ .

Плоская волна (дифракция в смысле Фраунгофера) может быть аппроксимирована удалением источника S на бесконечность ( $a \rightarrow \infty$ ).

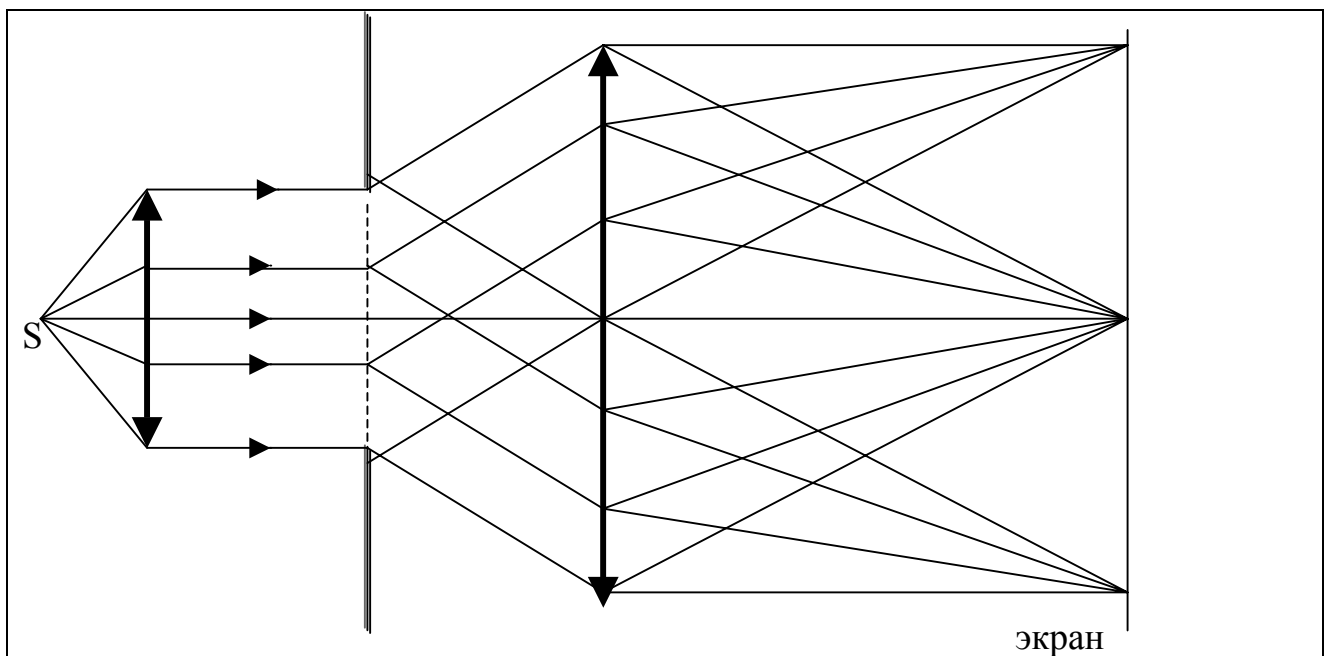


Так как  $a \gg b$ , то

$$\underline{R_m^2 = b m \lambda}.$$

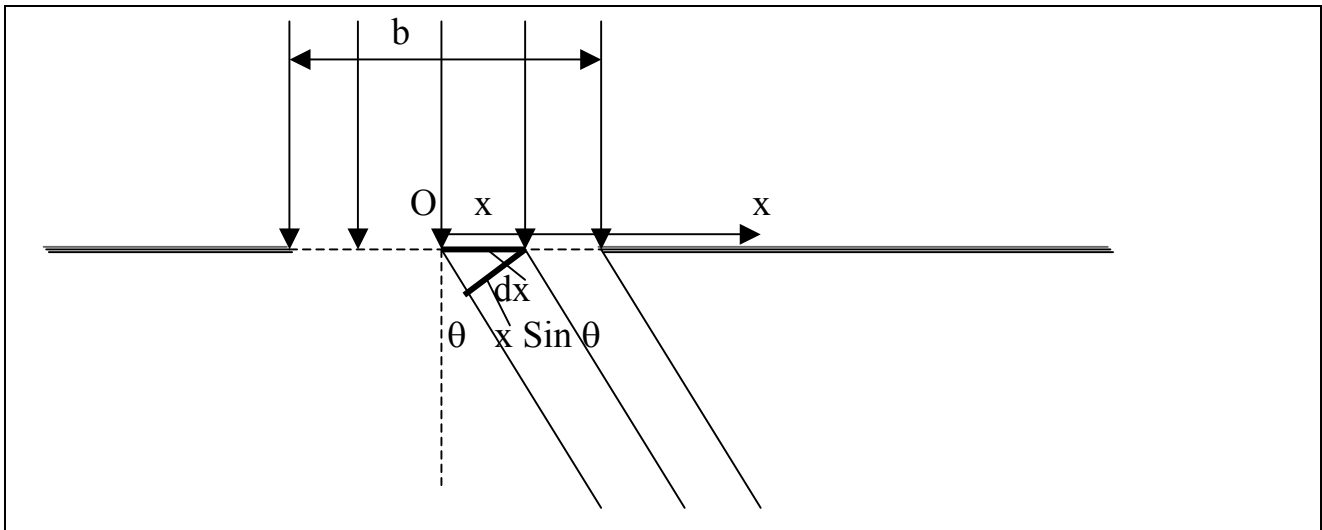
§ 15 Дифракция от прямоугольной длинной щели по Фраунгоферу. Расчет интенсивности

При практической реализации дифракции по Фраунгоферу источник света помещается в фокусе линзы, а дифракция, вообще говоря, возникает на какой-либо неоднородности (в данном случае – щели).



Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости другой линзы на экране.

Для рассмотрения картины явления проще отвлечься от деталей.



Имеется длинная прямоугольная щель, такая, что ширина этой щели равна  $b$ , а длина бесконечна (перпендикулярно чертежу). Пусть на щель падает плоская монохроматическая волна. Световое поле за щелью определим по принципу Гюйгенса-Френеля. Результирующее поле в бесконечности найдем как относительную напряженность электрического поля

$$E_{\text{отн}} = E(x) / E_0' = \int_{-b/2}^{b/2} e^{i k x \sin \theta} dx.$$

Здесь  $E_0'$  включает в себя все множители, не влияющие на относительное распределение волнового поля. Кроме того, заметим, что

$$dE_{\text{отн}} = E(x) dx / E_0, E_{\text{отн}} = \text{Re } e^{i k x \sin \theta}.$$

Вычислим интеграл (начало отсчета выбрано в центре щели).

$$E_{\text{отн}} = \int_{-b/2}^{b/2} e^{i k x \sin \theta} dx = (e^{i k x \sin \theta} / i k \sin \theta) \Big|_{-b/2}^{b/2} = b (e^{i \alpha} - e^{-i \alpha}) / 2 i \alpha,$$

$$\alpha = (k b \sin \theta) / 2.$$

Раскроем по формуле Эйлера разность экспонент

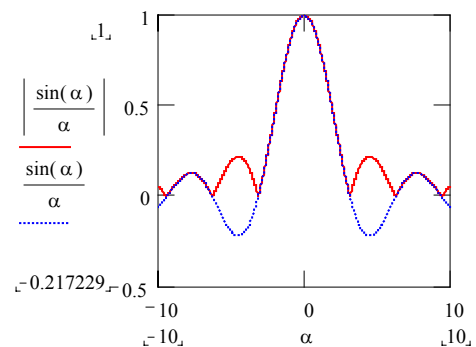
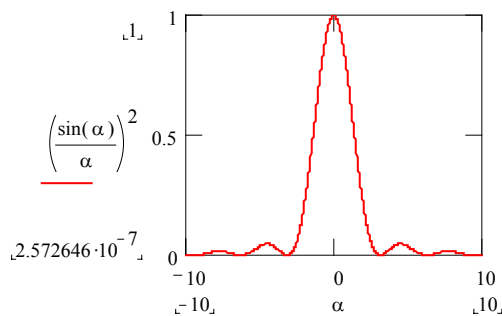
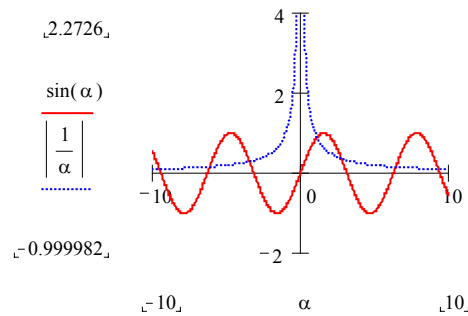


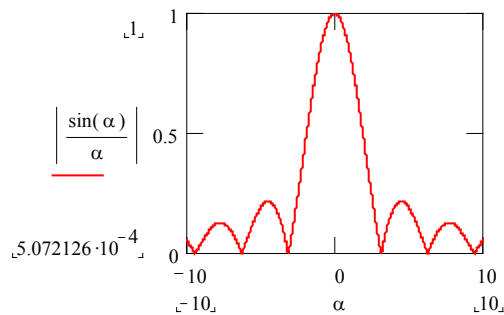
$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin \alpha \Rightarrow E_{\text{отн}} = (b \sin \alpha) / \alpha.$$

$$\text{Пусть } E_0 = E_0' b \Rightarrow$$

$$E = E_0 \sin \alpha / \alpha, I \sim E^2 \Rightarrow E^2 = E_0^2 (\sin \alpha / \alpha)^2 \Rightarrow \underline{I = I_0 (\sin \alpha / \alpha)^2}.$$

Чтобы получить качественно графическое представление зависимости интенсивности  $I$  от угла  $\alpha$ , рассмотрим последовательность графиков, приводящую к нужному результату. Для этого необходимо во первых перемножить две зависимости периодическую синусоидальную и гиперболическую. Заметим, что в нуле в пределе получается конечное число (в данном случае  $I_0$ ). Прежде, чем возвести в квадрат, сначала можно представить себе поведение модуля числа - при этом части кривой зеркально отражаются из отрицательных в положительные квадранты оси ординат симметрично оси  $\alpha$ .





Для расчета значения экстремумов нужно вычислить производную от функции по углу, приравнять ее к нулю и найти те значения аргумента, то есть угла  $\alpha$ , при которых реализуются максимумы и минимумы.

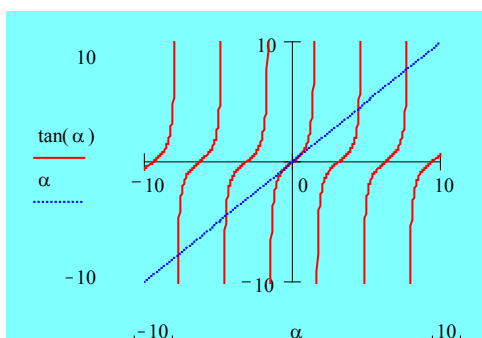
$$[(\sin \alpha / \alpha)]'_x = 2 \sin \alpha (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) / \alpha^3.$$

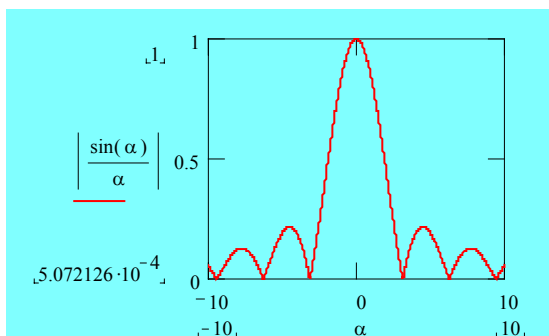
$$1. \sin \alpha = 0, 2. \alpha \cos \alpha - \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \tan \alpha$$

1. а.  $\alpha = 0 \Rightarrow (k b \sin \theta)/2 = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$  – получено положение центрального максимума

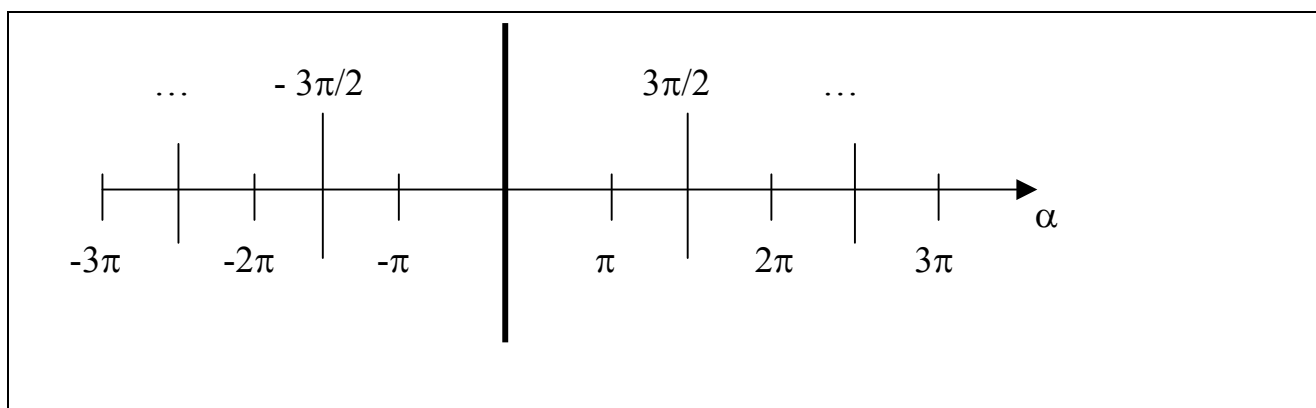
б.  $\alpha = \pi m \Rightarrow k b \sin \theta = 2 \pi m \Rightarrow (\text{т.к. } k = 2\pi/\lambda) \Rightarrow \underline{b \sin \theta = \lambda m}$ . Здесь получены условия всех минимумов.

2. Трансцендентное уравнение  $\alpha = \tan \alpha$  решается либо численными методами, либо графически





Положения оставшихся максимумов можно получить как середины между двумя соседними минимумами. Очевидно, что решения в этом случае будут приближенными.



Эти решения можно объединить в виде

$$(2k + 1)\pi/2 \cong \pi b \sin\theta / \lambda \Rightarrow b \sin \theta \cong (2k + 1)\lambda/2.$$

При этом  $k = 1, 2, \dots$  (кроме нуля). Иногда неточность относят за счет угла отмечая этот факт штрихом  $\theta \rightarrow \theta'$  и тогда решение записывается в виде

$$b \sin \theta' = (2k + 1)\lambda/2.$$

Угол  $\theta'$  отличается от исходного на поправку, позволяющую записать данное равенство. Решение будет тем точнее, чем больше  $\alpha$ , то есть, чем больше угол  $\theta$ .

Запишем без вывода решение важного практического случая – дифракцию Фраунгофера для круглого отверстия

$$\alpha = k R \theta = 2\pi R \theta / \lambda.$$

Здесь  $R$  – радиус отверстия, остальные обозначения те же.

## § 16 Голография

Перевод слова голография означает – полная запись. Впервые предложена М. Вольфке в 1920 году (Польша), затем забыта и вторично изобретена в 1947 году Габором (Англия).

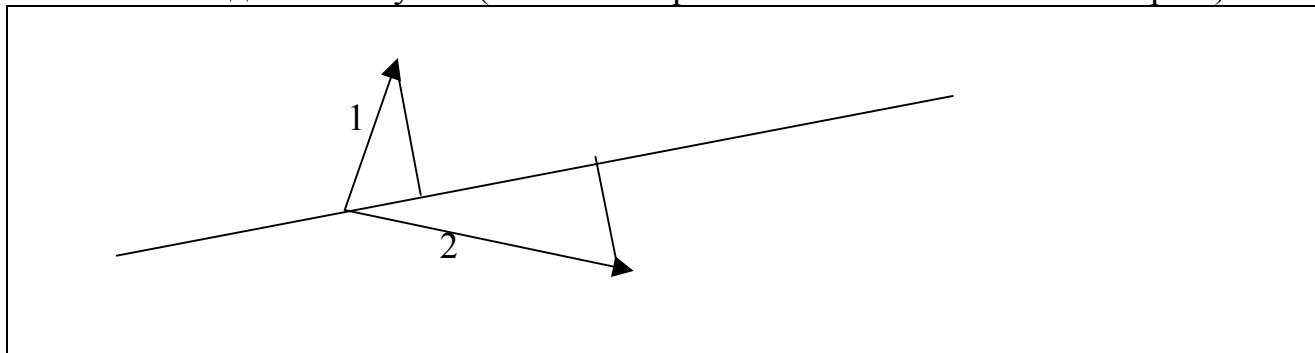
Голография – получение оптических изображений путем (так называемого) восстановления полного волнового фронта (обязательно и амплитуд и фаз волновых процессов). Для практического осуществления голографии (полной записи) требуются источники света обладающие высокой степенью временной и пространственной когерентности поляризованного света. Указанным условиям удовлетворяет свет лазеров. В 1960 году появились первые лазеры.

### 16.1 Интерференция поляризованного света

Главной особенностью интерференции поляризованного света является то, что при наложении двух лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях никакой интерференционной картины с характерным для нее чередованием минимумов и максимумов интенсивности получить не может.

Заметим, что для продольных волн, для которых направление совпадает с направлением их распространения, все направления эквивалентны: была бы среда однородна. Для поперечных волн (вектора  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  поперечны и взаимно перпендикулярны) – не эквивалентны. Необходимо получить колебания вдоль одного направления.

Колебания лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях можно свести в одну плоскость (и в одну линию), пропустив их через поляризатор, установленный так, чтобы его плоскость не совпадала с плоскостями ни одного из лучей (чтобы все три были взаимно не компланарны).



Пусть имеем лучи обыкновенный  $n_o$  и необыкновенный  $n_e$ . При нормальном падении на пластинку толщиной  $d$  они идут не разделяясь, но с разными скоростями, следовательно у них отличаются показатели преломления и оптические длины пути

$$L_o = d n_o, L_e = d n_e, L_o - L_e = d(n_o - n_e) = \Delta.$$

Разность хода (и разность фаз) возникнет за счет отличия оптических длин пути.

$$\Delta\varphi = 2\pi \Delta / \lambda = 2\pi d (n_o - n_e) / \lambda.$$

Однако, для интерференции необходимо также, чтобы колебания принадлежали одинаковым цугам волн. Цуг – последовательность горбов и впадин (то есть волновой процесс), образующаяся в процессе излучения от отдельного атома (за время  $\sim 10^{-8}$  секунды). За это время успевают образоваться цуги протяженностью  $\sim 3$  метра

$$l = c \tau = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8} = 3 \text{ м.}$$

Так как различные цуги не когерентны (не согласованы по фазе со временем и в пространстве), то их лучи не когерентны. Если на кристаллическую пластинку (поляризатор) падает плоско поляризованный свет, то колебания каждого цуга (одного и того же цуга) разделяются между обыкновенным и необыкновенным лучами в одинаковой пропорции, зависящей от ориентации оптической оси пластинки относительно плоскости колебаний в падающем луче. Только в этом случае  $o$  и  $e$  когерентны и будут интерферировать. Свойством когерентности обладают лучи лазеров.

## 16.2 О лазерах

Лазеры это источники света, для которого одинаковы: частоты, фазы, поляризация, направление распространения. Английская аббревиатура лазер означает:

L – light

A – amplification by

S – stimulation

E – emission of

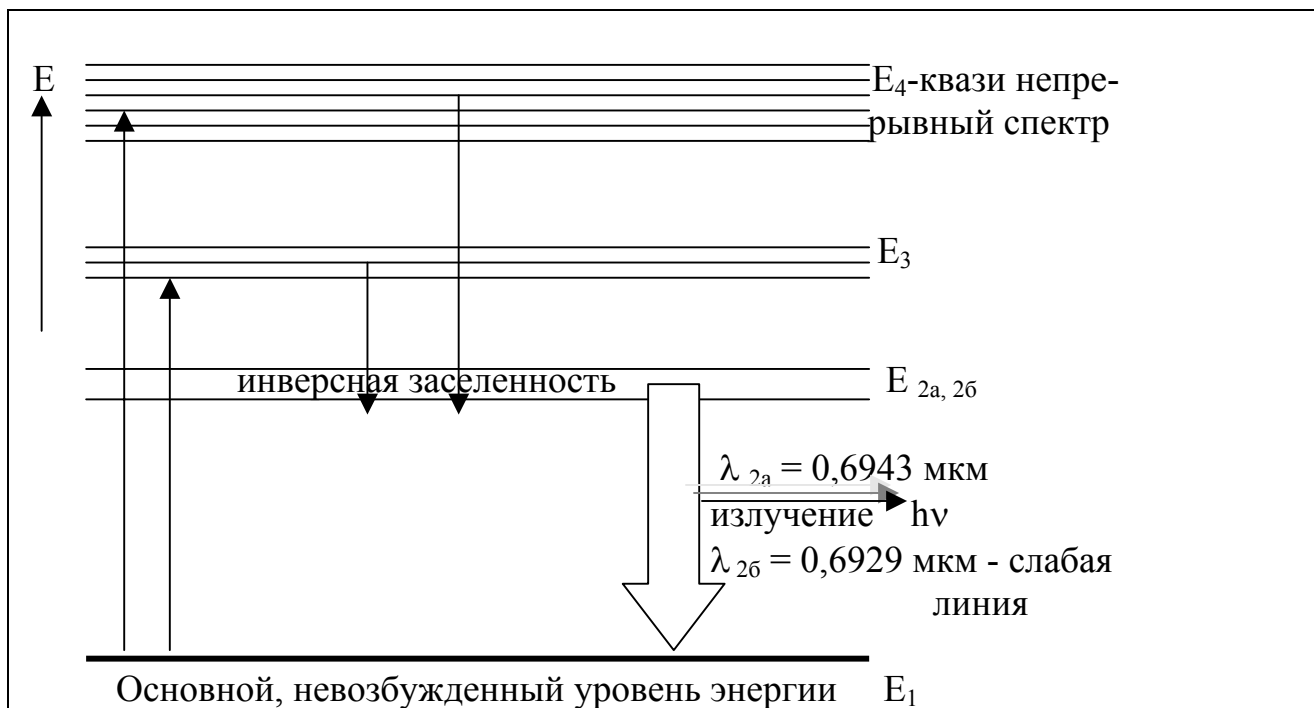
R – radiation

Русская аббревиатура ОКГ – оптический квантовый генератор.

Пример

Рубиновый лазер (разработан Мейманом в 1961 году).

Представим себе схему энергетических уровней электронов в кристалле.



По вертикальной оси отложена энергия электронов. В результате взаимодействия атомов твердого тела (в нашем случае рубина) электроны в нем могут приобретать дискретные значения энергии, или, как говорят, уровни энергии, которые могут сгруппироваться по два в несколько, а для больших значений в верхней части рисунка, переходят в квази непрерывный спектр.

Расстояния между уровнями в этом спектре достаточно малы для свободного (точнее квази свободного) «перемещения» электронов по ним, принимая значения энергий от минимальной до максимальной. Между  $E_1$  и  $E_2$  создается так называемая инверсная заселенность путем оптической накачки.

Оптическая накачка осуществляется при освещении кристалла мощной вспышкой света (это излучение спонтанного вида от разных атомов, разной фазы, поляризации, направления, реализуемое любым не лазерным методом, например, газоразрядной лампой-вспышкой)

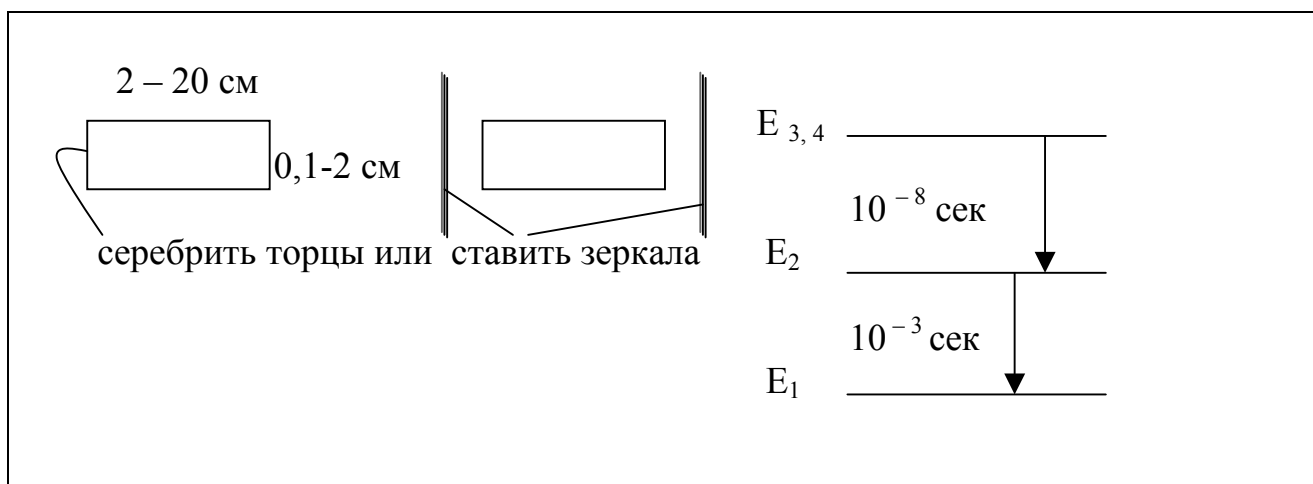


Схема энергетических уровней для рубина, представленная в нашем случае, обладает тем свойством, что время жизни электронов на уровнях энергии  $E_{3,4}$  много меньше, чем на уровне энергии  $E_2$ .

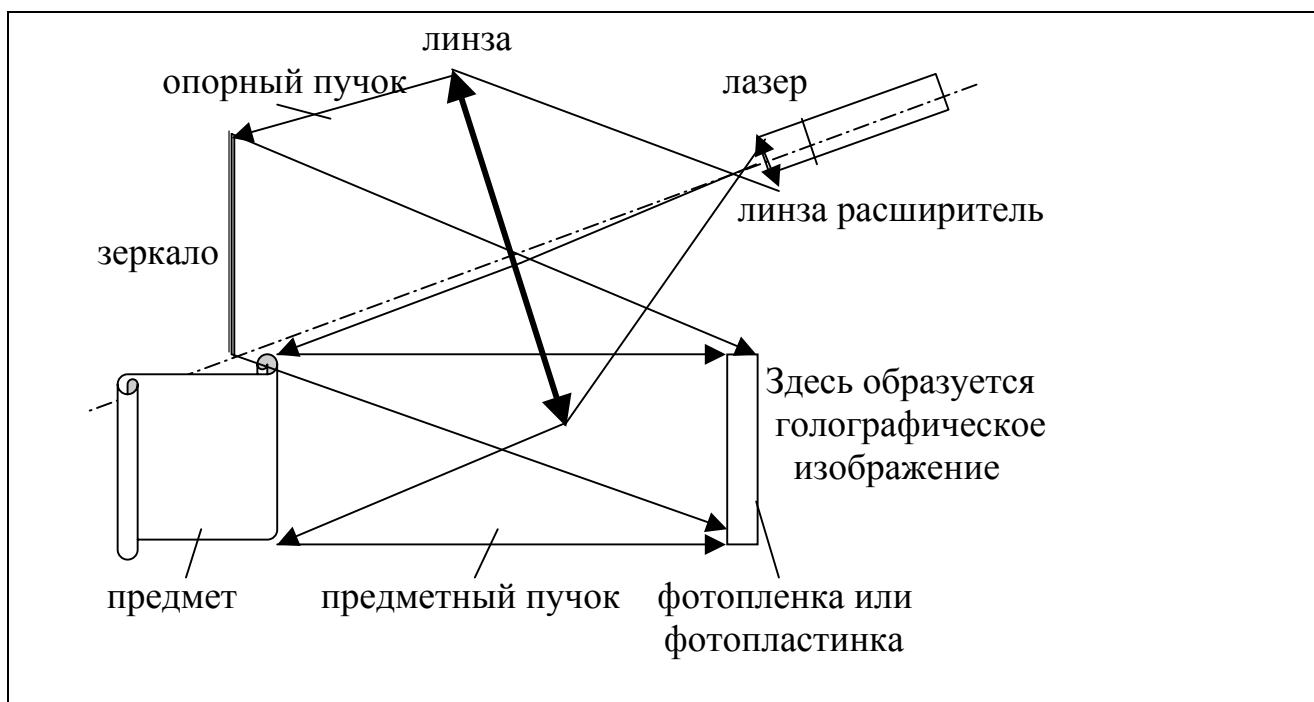
Таким образом, создается эффект накопления электронов на уровне  $E_2$ , после чего осуществляется переход  $E_2 \rightarrow E_1$  – излучение света с оговоренными ранее свойствами. Заметим, что степень поляризации света лазера практически равна единице.

Итак, для получения голографического снимка имеется источник света – лазер.

### 16.3 Получение голографического снимка

Построим схему, включающую:

- фотографируемый предмет,
- лазер, в качестве источника света,
- фотопластинку или фотопленку, на которой будет зарегистрировано голографическое изображение (носитель информации в виде голографического изображения).



Свет от лазера расширяется с помощью системы линз, а затем частично попадает на зеркало и частично на фотографируемый предмет. Предмет и зеркало расположены таким образом, что свет, отраженный от них, попадает в одно и то же место. При освещении предмета от него распространяется рассеянная волна. Отделившаяся от предмета рассеянная волна сохраняет в дальнейшем независимое существование и несет полную информацию о форме и других свойствах предмета. В том месте, где встречаются предметный (от предмета) и опорный (от зеркала) пучки происходит их интерференция. Эта интерференционная картинка может быть зарегистрирована на фотопленке или фотопластинке.

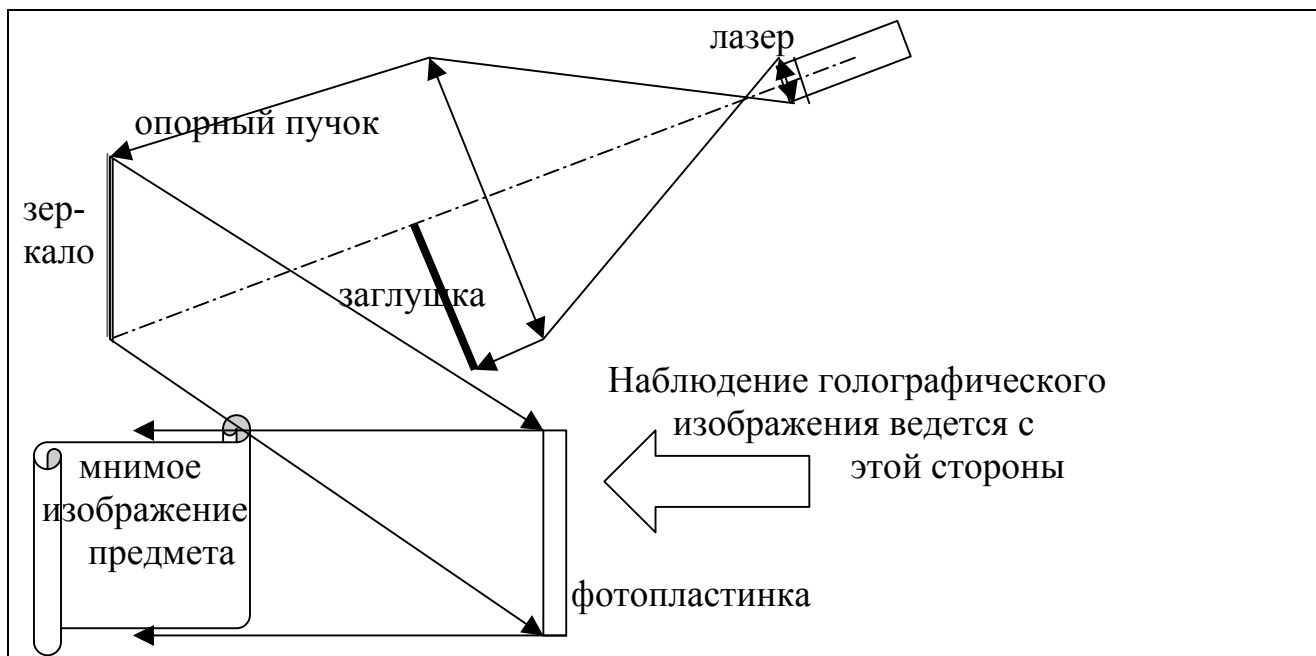
#### 16.4 Получение голографического изображения как восстановление волновой картины с помощью снимка

Отличие голографической пластинки от обычной фотопластинки состоит в том, что в голографическом варианте экспонированная и проявленная фотопластинка несет информацию не только об амплитуде (степень почернения), но и о фазе интерферирующих волн. Информация о фазе получается (по Габору), если осветить пластинку вторым пучком от лазера и заставить его интерферировать с пучком, который отразил (рассеял) сам предмет. Напомним, что оба эти пучка поляризованные. В этом случае фотография и носит название голограммы. Расположение, форма и интенсивность дифракционных пятен голограммы полностью определяются геометрической формой и фактурой предме-

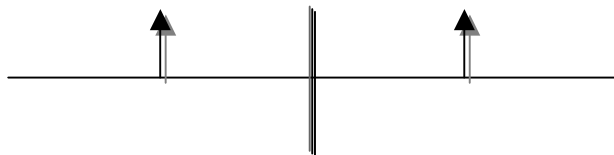


та. В таком закодированной виде голограмма содержит полную информацию об амплитудах и фазах рассеянной волны.

Чтобы перевести с пластинки изображение в пространство, опорный пучок направляется на фотопластинку, дифрагирует на ней, в результате чего образуется волна, имеющая точно такую же структуру, как и волна отражавшаяся предметом.



Изображение объемное, мнимое (как в зеркале)



и смотреть на него можно со стороны фотопластинки из разных положений, но ограниченно. Если при съемке близкие предметы закрывали удаленные, то и при просмотре голографического снимка сместившись в сторону можно заглянуть за предмет: восприятие от периферической части голограммы (там, где тоже были лучи и они тоже интерферировали). Часть пластинки также даст картину, но менее четкую. Таковы основные принципы черно-белой голографии.

## **Глава 2    Квантовая оптика**

Хотя этот раздел и назван квантовой оптикой, но резкого деления на квантовую и волновую природу электромагнитного излучения делать не следует. Скорее мы здесь будем искать ответ на вопрос: в какой мере электромагнитные волны - кванты ?

### **§ 1 Тепловое излучение. Закон теплового излучения Кирхгофа**

Обратимся к электромагнитному излучению инфракрасной области, так называемому тепловому излучению и частично видимого спектра (за счет внутренней энергии тел). Заметим, что внутренняя энергия является как бы посредником между данным разделом и таким разделом физики как молекулярная физика.

Все тела вокруг нас в разной степени нагреты и передают путем излучения тепло друг другу в окружающем пространстве. Сильно разогретые тела – спирали лампочек, печей излучают видимый свет. Менее нагретые тела – красноватый, очень сильно – голубой. Известны также различного вида люминесценции – светлячки, гнилушки, люминесцентные лампы, как различные виды холодного свечения. Химические реакции – хемотропная люминесценция, ударная или катодоллюминесценция, фотоллюминесценция – результат поглощения электромагнитного излучения. Эти виды излучения находятся за рамками данного рассуждения.

При разговоре о тепловом излучении необходимо появляется понятие равновесного излучения. Повысим температуру тела – возрастет интенсивность излучения (иначе, мощность), понизим, – убудет. Из опыта следует: тела не могут самопроизвольно бесконечно охлаждаться или нагреваться. Если увеличить подвод тепла к телу, то увеличится и излучение и установится новое равновесие. Замкнутая равновесная система не охлаждается и не нагревается, возможны только флуктуации. При получении порции тепла система перейдет в новое

равновесие. При постоянном поступлении тепла в незамкнутую систему излучение и количество поступающего тепла придут в равновесие.

Введем некоторые количественные физические величины, характеризующие состояние излучения.

$w$  – объемная плотность энергии излучения (лучистой энергии), ее размерность – Дж / м<sup>3</sup>. Это энергия, приходящаяся на единичный объем пространства.

Образуем спектральную объемную плотность лучистой энергии, приходящуюся на единичный интервал частоты (линейной или циклической) или длины волны.

$$w_{\lambda} = dw / d\lambda, w_{\nu} = dw / d\nu, w_{\omega} = dw / d\omega$$

Такая многозначность возникла исторически из-за многозначности в характеристиках электромагнитного излучения. Здесь можно говорить об объемной плотности лучистой энергии, приходящейся на единичный интервал частоты ( 1 Гц ) или длины волны ( 1 м, а чаще 1 мкм, 1 нм, ...). Спектральная зависимость энергии обнаруживается, как известно, по экспериментальным фактам, согласно которым энергия фотонов прямо пропорциональна частоте электромагнитного излучения (или обратно пропорциональна длине волны излучения). Определим размерности трех введенных спектральных плотностей энергии.

$$[w_{\lambda}] = \text{Дж} / \text{м}^3 \text{ м}, [w_{\nu}] = \text{Дж} / \text{м}^3 \text{ Гц}, [w_{\omega}] = \text{Дж} / \text{м}^3 \text{ м рад}.$$

Объемная плотность энергии для всех трех вариантов вычисляется путем интегрирования по всем возможным частотам или длинам волн.

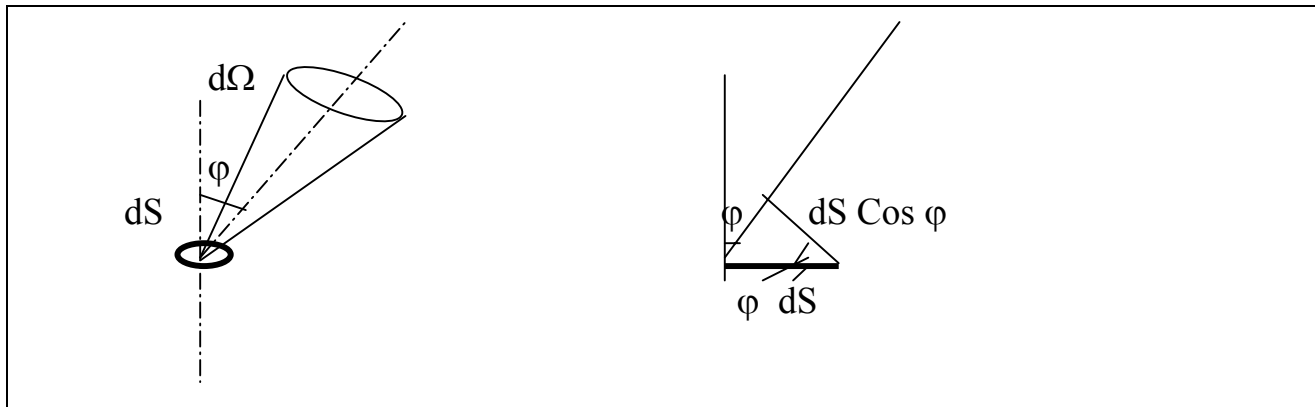
$w = \int_0^{\infty} w_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} w_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} w_{\omega} d\omega$
--

Очевидно достаточно важное соотношение

$$w_{\lambda} d\lambda = w_{\nu} d\nu = w_{\omega} d\omega.$$

Экспериментаторы как правило предпочитают иметь дело с длиной волны, тогда как теоретики при расчетах предпочитают более удобную в данном случае циклическую частоту. Спектральная плотность лучистой энергии является также и функцией температуры. Рассчитаем поток лучистой энергии  $d\Phi$ , испус-

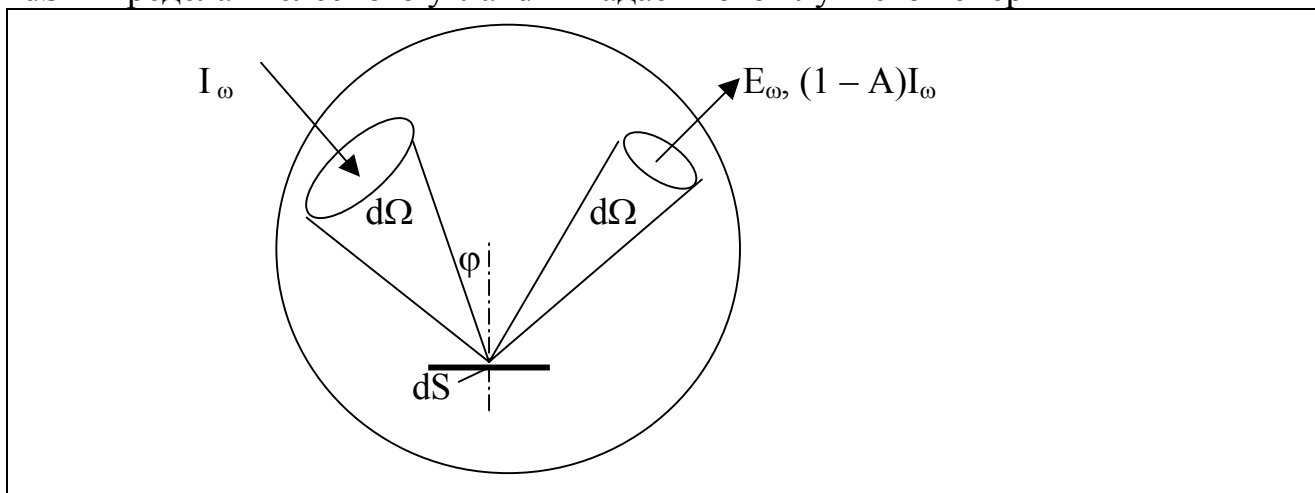
каемый за время  $dt$  с площадки  $dS$  внутри телесного угла  $d\Omega$  и излучаемый с частотами в промежутке от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .



$$d\Phi = E_\omega dS \cos \varphi d\Omega d\omega dt \Rightarrow$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int E_\omega dS \cos \varphi d\Omega d\omega dt.$$

Здесь  $E_\omega$  - излучательная способность (излучательность). Заметим, что полный поток можно получить интегрируя по всем возможным частотам и по полному телесному углу  $\Omega$  при заданных параметрах: промежутке времени и величине площадки. Прежде, чем сформулировать закон Кирхгофа воспользуемся законом сохранения лучистой энергии, приравняв падающую энергию энергии поглощенной и отраженной. Пусть внутри изолированной полости на площадку  $dS$  в пределах телесного угла  $d\Omega$  падает поток лучистой энергии



тогда справедливо равенство

$$d\Phi_I = d\Phi_{I,A} + d\Phi_E.$$

$\Phi_I$  – падающий поток лучистой энергии,

$\Phi_{I, A}$  – отраженный поток лучистой энергии (отсчитываемый как доля падающего),

$\Phi_E$  – собственный поток лучистой энергии (тот поток, который излучается будучи порожден самим телом).

Рассчитаем все эти потоки.

а. Падающий поток

$$d\Phi_I = I_\omega dS \cos \varphi d\Omega d\omega dt.$$

Здесь  $I_\omega$  - поглощательная способность тела (весь внешний поток, который падает на данное тело).

б. Отраженный поток

$$d\Phi_{I, A} = (1 - A_\omega) I_\omega dS \cos \varphi d\Omega d\omega dt.$$

Здесь  $A_\omega$  - доля поглощенного потока от падающего, тогда  $(1 - A_\omega)$  – доля отраженного потока от падающего.

в. Поток собственного излучения

$$d\Phi = E_\omega dS \cos \varphi d\Omega d\omega dt.$$

Исходя из условия равновесия (закона сохранения энергии), приравняв соответствующие части и учитывая, что площадка, телесный угол и время одни и те же, имеем

$$I_\omega = (1 - A_\omega)I_\omega + E_\omega \Rightarrow A_\omega I_\omega = E_\omega.$$

Здесь  $A_\omega$  характеризует поглощательную способность,  $E_\omega$  - излучательную, а  $I_\omega$  - падающее излучение получим

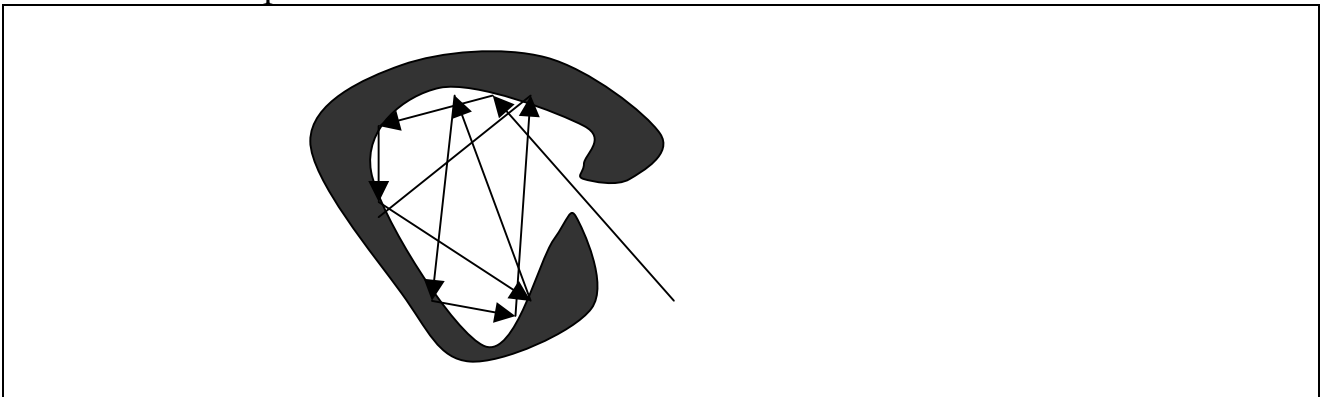
$$\underline{A_\omega = E_\omega / I_\omega}$$

закон Кирхгофа (Густав Роберт, немецкий физик, 1859 г). Определение. Отношение лучеиспускательной способности к его поглощательной способности

одинаково для всех тел и является функцией частоты и температуры. Отметим размерности вновь введенных физических величин

$$[E_\omega] = [I_\omega] = \text{Вт} / \text{м}^2 \text{стерад. (рад/с)} \text{с} = \text{Вт} / \text{м}^2 \text{с} = \text{Дж} / \text{м}^2.$$

Очевидно, что  $A_\omega$  безразмерно. Определение абсолютно черного тела. Тело, поглощательная способность которого равна 1, то есть которое поглощает целиком всю энергию падающего на него излучения называется абсолютно черным телом. При этом излучается абсолютно черным телом при его нагреве весь спектр частот, то есть все то, что и поглощается. Модель абсолютно черного тела часто изображают так



## § 2 Закон Стефана-Больцмана. Закон Вина и формула Вина

Стефаном (Чехия, 1879г) экспериментально установлен закон. Для черных тел излучательная способность пропорциональна четвертой степени температуры.

$$E_\omega \sim T^4, E_\omega = \sigma T^4, \sigma = 5,64 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / \text{м}^2 \text{К}^4.$$

О законе Вина. Вин показал, что спектральное распределение (то есть зависимость от частоты) плотности энергии подчиняется уравнению вида

$$w_\nu = \nu^3 F(\nu/T),$$

то есть ее можно представить в виде произведения куба частоты на некоторую функцию, которая, что существенно, зависит от отношения частоты к темпера-

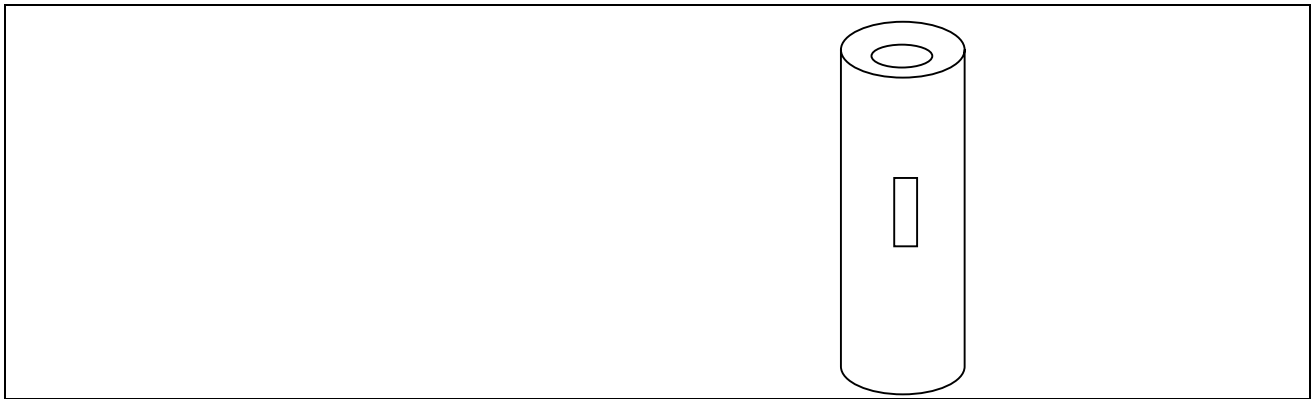
туре. Если вычислить плотность энергии, просуммировав по всем частотам. получим

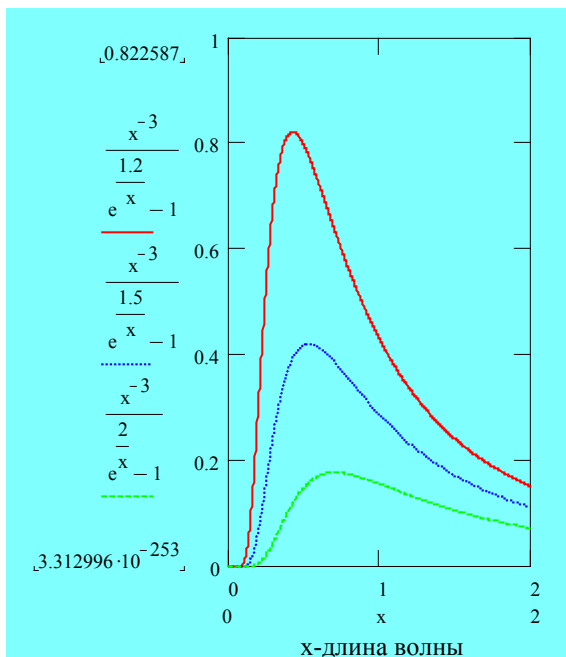
$$w = \int_0^{\infty} w_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} \nu^3 F(\nu/T) d\nu = (x = \nu/T, \nu = x T, d\nu = T dx) =$$

$$= T^4 \int_0^{\infty} x^3 F(x) dx = \sigma T^4$$

закон Стефана-Больцмана (Б. Людвиг, 1844-1906, известный австрийский физик-теоретик).

Известна экспериментальная зависимость энергии излучения от длины волны тела, близкого к абсолютно черному телу (угольный стержень, просверленный внутри, с окошком, излучающий от внутренней стенки).





Как это следует из графика, зависимость плотности энергии от длины волны излучения представляет собой кривую с максимумом. При увеличении температуры абсолютная величина энергии растет, а длина волны, соответствующая точке максимума энергии сдвигается в сторону уменьшения (что соответствует росту частоты или энергии квантов излучения). Ввиду специфики экспериментальных результатов целесообразно функцию Вина исследовать на экстремум. В законе Вина перейдем предварительно к длине волны как аргументу вместо частоты.

$$w_v dv = w_\lambda d\lambda \Rightarrow w_\lambda = w_v dv/d\lambda, v = c/\lambda \Rightarrow -c d\lambda/\lambda^2, \lambda \uparrow v \downarrow \Rightarrow$$

$$dv = cd\lambda/\lambda^2 \Rightarrow w_\lambda = v^3 F(v/T) dv/d\lambda = c^4 F(c/\lambda T) / \lambda^5.$$

Чтобы найти максимум функции необходимо продифференцировать ее по аргументу, затем приравнять к 0 и вычислить значение аргумента, которое придает максимальное значение функции.

$$- 5 c^4 F(c/\lambda T) - c^5 F'_\lambda(c/\lambda T) / \lambda^7 T = 0 \Rightarrow$$

$$5 F(c/\lambda T) = - F'_\lambda(c/\lambda T) c / \lambda T. (*)$$

Получилось трансцендентное уравнение. Обратить его в тождество можно либо подбирая аргумент численно, либо графически и таким образом найти то зна-



чение аргумента, при котором выражение (\*) обратиться в тождество. Пусть такое значение найдено и

$$c / \lambda_m T = cst' \Rightarrow \underline{\lambda_m T = cst = b}.$$

Заметим, что  $b$  определяется экспериментально (с как можно более высокой степенью точности). Оно равно

$$b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м К}.$$

Формулу  $\lambda_m T = b$  называют также законом смещения Вина. Если  $T \uparrow$ , то  $\lambda \downarrow$ , и наоборот, если  $\lambda \uparrow$ , то  $T \downarrow$ .

### § 3 Формула Планка

#### 3.1 Формула Релея-Джинса, классические представления

Итак нам неизвестен явный вид функции Вина. Релей и Джинс, исходя из классических представлений рассчитали вид этой функции. Не приводя расчетов запишем вид этой функции.

$$w_\nu = 8\pi \nu^2 kT / c^3 \text{ или } w_\omega = \omega^2 kT / g^2 c^3 \text{ или } w_\lambda = 8\pi kT / \lambda^4.$$

Так как  $kT$  приблизительно соответствует средней энергии частицы при данной температуре, то иначе можно записать

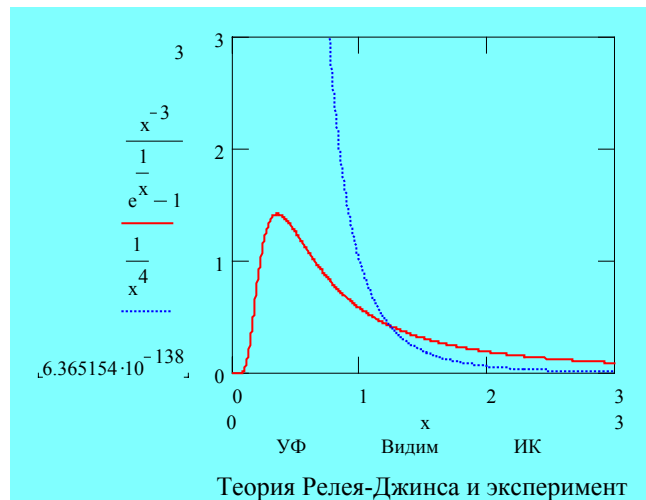
$$w_\nu = 8\pi \nu^2 \langle \epsilon \rangle / c^3, \langle \epsilon \rangle = kT.$$

С другой стороны такая запись удовлетворяет виду функции Вина

$$w_\nu = (8\pi \nu^3 k/c^3)(T/\nu) = 8\pi \nu^3 k F(\nu/T) / c^3.$$

Однако при сравнении с экспериментально полученной зависимостью, очевидно, возникает несоответствие

$$w = \int_0^\infty w_\lambda d\lambda = 8\pi kT \int_0^\infty d\lambda / \lambda^4 = 8\pi kT \left( -1/\lambda^3 \right) \Big|_0^\infty \rightarrow \infty.$$



Формула Релея-Джинса хорошо описывает правую от максимума часть графика (в данном случае  $x$  выполняет роль длины волны излучения). Но с точностью до «наоборот» – левую часть, то есть со стороны коротких волн (больших частот). Необходимо отметить, что исходя из классических представлений вывод по тем временам считался безукоризненным. Физик П. С. Эренфест “окрестил” возникшую ситуацию ультрафиолетовой катастрофой. Таким образом, классическая статистическая механика (наша статистическая физика), основным постулатом которой является теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы не применима к системам с бесконечным числом степеней свободы.

Макс Планк провел рассуждение не относительно излучения как это сделали Релей и Джинс, а по отношению к одномерному гармоническому осциллятору. Согласно модели Макса Планка вещество можно представить себе состоящим из гармонических осцилляторов, роль которых выполняют колеблющиеся атомы. Напомним, что средняя энергия частиц согласно классической статистике распределена между нулем и бесконечностью, а точнее говоря неким максимальным значением энергии, определяемым, к примеру, релятивистскими эффектами, непрерывным образом. То есть энергия в этой модели имеет бесконечное число состояний. Приведем расчет средней энергии. Функция плотности распределения Гиббса определяет вероятность части системы находиться в состоянии с определенной (заданной) энергией,  $\varepsilon$

$$\rho_\varepsilon = \exp(-\beta\varepsilon), \beta = 1/kT \Rightarrow$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^\infty \varepsilon \exp(-\beta\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty \exp(-\beta\varepsilon) d\varepsilon} = - \frac{d}{d\beta} \left[ \ln \int_0^\infty \exp(-\beta\varepsilon) d\varepsilon \right] =$$

$$= -d \left[ \ln \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta} \exp(\beta \varepsilon_n) \right) \right] / d\beta = -d[\ln(1/\beta)]d\beta = 1/\beta = kT$$

Проведенные математические операции легко проверить непосредственным вычислением.

### 3.2 Гипотеза и формула Планка

Планк использовал функцию плотности распределения Гиббса, но предположил, что энергия частиц распределена в интервале  $0 - \infty$  дискретно, а не непрерывно  $\varepsilon = \varepsilon_0 n$ , то есть порциями кратными некоторой минимальной порции энергии. Тогда при расчете средней энергии осциллятора необходимо перейти от интегрирования к суммированию. Найдем среднюю энергию осциллятора при этих предположениях.

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \sum n \varepsilon_0 \exp(-\beta n \varepsilon_0) / \sum \exp(-\beta n \varepsilon_0) = -d[\ln \sum \exp(-\beta n \varepsilon_0)] / d\beta = \\ &= d[\ln(1 - \exp(-\beta \varepsilon_0))] = \varepsilon_0 / [\exp(\beta \varepsilon_0) - 1]. \quad \langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_0 / [\exp(\varepsilon_0/kT) - 1]. \end{aligned}$$

В расчете использована сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии по  $n$  от  $0$  до  $\infty$

$$\sum \exp(-\beta n \varepsilon_0) = 1 + \exp(-\beta \varepsilon_0) + \exp(-2\beta \varepsilon_0) + \dots = 1 / [1 - \exp(-\beta \varepsilon_0)]$$

со знаменателем  $\exp(-\beta \varepsilon_0)$ .

Далее воспользуемся формулой Релея-Джинса. В ней среднюю энергию заменим на ту, которую получили данным способом.

$$w_v = 8\pi v^2 \langle \varepsilon \rangle / c^3 = (8\pi v^2 / c^3) [\varepsilon_0 / \exp(\varepsilon_0/kT) - 1].$$

Чтобы удовлетворить в полученной формуле для спектральной плотности энергии виду  $\sim v^3 F(T/v)$ , Планк представил минимальную порцию энергии осциллятора  $\varepsilon_0$  пропорциональной частоте с коэффициентом пропорциональности  $h$ .

$$\varepsilon_0 = h v, [h] = \text{Дж} \cdot \text{с}.$$

Константу  $h$  Планк назвал квантом действия, а в дальнейшем она получила нарицательное название постоянной Планка, это универсальная постоянная равна

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с.}$$

Таким образом, формула Планка принимает вид

$$w_\varepsilon = 8\pi h \nu^3 / c^3 [\exp(h\nu/kT) - 1].$$

Формулу Планка также можно выразить через циклическую частоту или длину волны.

### 3.3 Анализ формулы Планка

1. Пусть  $h\nu/kT \ll 1$ , тогда разложим в ряд экспоненту

$$\exp(h\nu/kT) - 1 \cong 1 + h\nu/kT + \dots - 1 = h\nu/kT \Rightarrow w_\nu = 8\pi \nu^2 kT / c^3.$$

Получилась формула Релея-Джинса. Здесь реализуется режим малых частот (малых энергий) или больших длин волн

2. Пусть  $h\nu/kT \gg 1$ , тогда можно пренебречь единицей по сравнению с экспонентой в знаменателе

$$w_\nu = 8\pi h \nu^3 \exp(-h\nu/kT) / c^3.$$

Режим больших частот (больших энергий осцилляторов) или малых длин волн.

3. Найдем максимум функции Планка

$$w_\nu' = [8\pi h \nu^3 / c^3 (\exp(h\nu/kT) - 1)] = (8\pi h / c^3) [3\nu^2 / (\exp(h\nu/kT) - 1)] = 0$$

$$3(\exp(h\nu/kT) - 1) = h\nu \exp(h\nu/kT) / kT.$$

Пусть  $h\nu/kT = x$ . Получили трансцендентное уравнение вида

$$3(e^x - 1) = x e^x.$$

Если его решить графически или численно, то можно получить решение в виде числа

$$x_m = h\nu_m/kT = \text{cst} = 4,965.$$

Однако используют обычно другую постоянную, а именно

$$h\nu_m/kT = h c/\lambda_m kT \Rightarrow \lambda_m kT / h c = C = 0,2014 \Rightarrow$$

$$\lambda_m T = h c C/k \text{ (} c \text{ – скорость света в пустоте)}.$$

Из экспериментов:  $\lambda_m$  для Солнца (наше идеальное черное тело)  $\lambda_m = 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , температура Солнца (его наружных слоев)  $T = 6000 \text{ К}$ . Зная, кроме того, постоянную Больцмана и скорость света в вакууме  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / К}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  можно оценить значение константы  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с}$ . Пользуются также значение постоянной Планка, приведенной к одному радиану

$$h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с / рад.}$$

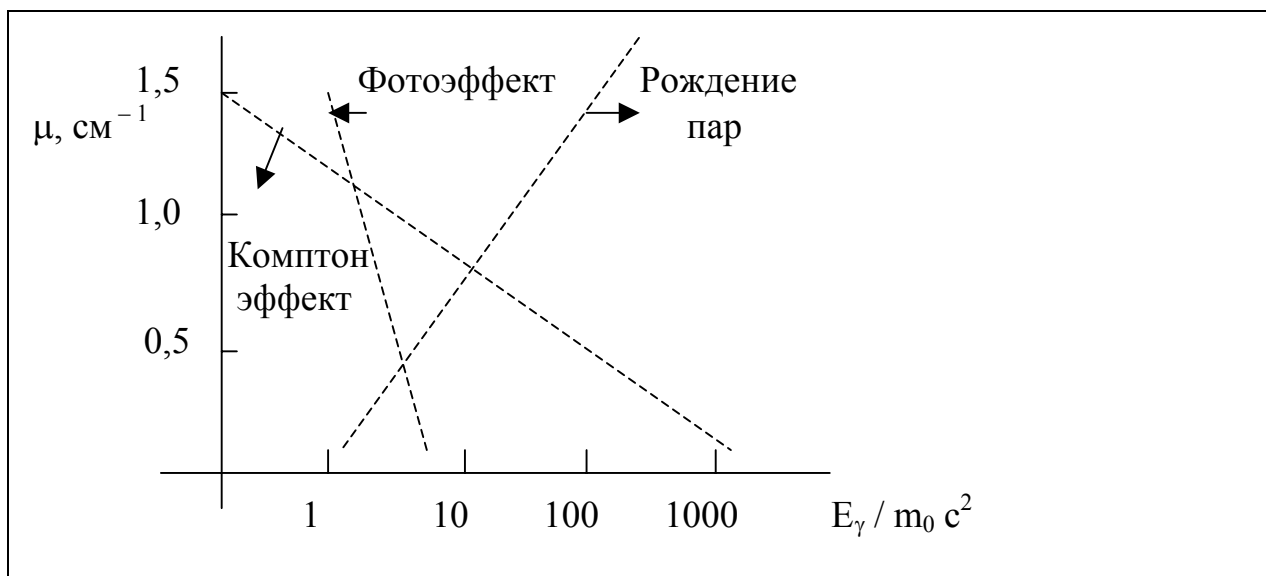
Так идея квантов обрела право на жизнь в процессе исследования теплового излучения как экспериментального, так и теоретического.

#### § 4 О фотонах

Пучек фотонов при проникновении в вещество и прохождении через него претерпевает изменения в результате взаимодействия с веществом. Помним, что пучок фотонов можно рассматривать как электромагнитное излучение и как поток частиц, а нам удобнее видеть в нем новое единство. Известны эффекты, определяющие различный характер взаимодействия фотонов и вещества.

1. Комптон эффект – упругое столкновение фотона с электроном вещества. Часть энергии фотона передается электрону. При этом пучок фотонов частично ослабляется.
2. Рождение электрон-позитронной пары ( $e^- - e^+$ ) в результате аннигиляции фотонов высоких энергий  $\gamma \rightarrow e^- - e^+$ .
3. Фотоэффект – фотон полностью поглощается электроном атомной оболочки. Ситуация, при которой электрон в состоянии взять на себя всю энергию фотона имеет место для фотонов низких энергий начиная от видимого света и менее высокочастотное. В этом участвует и весь атом, что обеспечивает сохранение импульса взаимодействующей системы в целом.

Графически ситуация хорошо иллюстрируется по зависимости коэффициента поглощения  $\mu$  от относительной энергии фотонов  $E_\gamma / m_0 c^2$ , где  $m_0 c^2$  – энергия покоя электрона равная  $8 \cdot 10^{-14}$  Дж =  $5 \cdot 10^5$  эВ

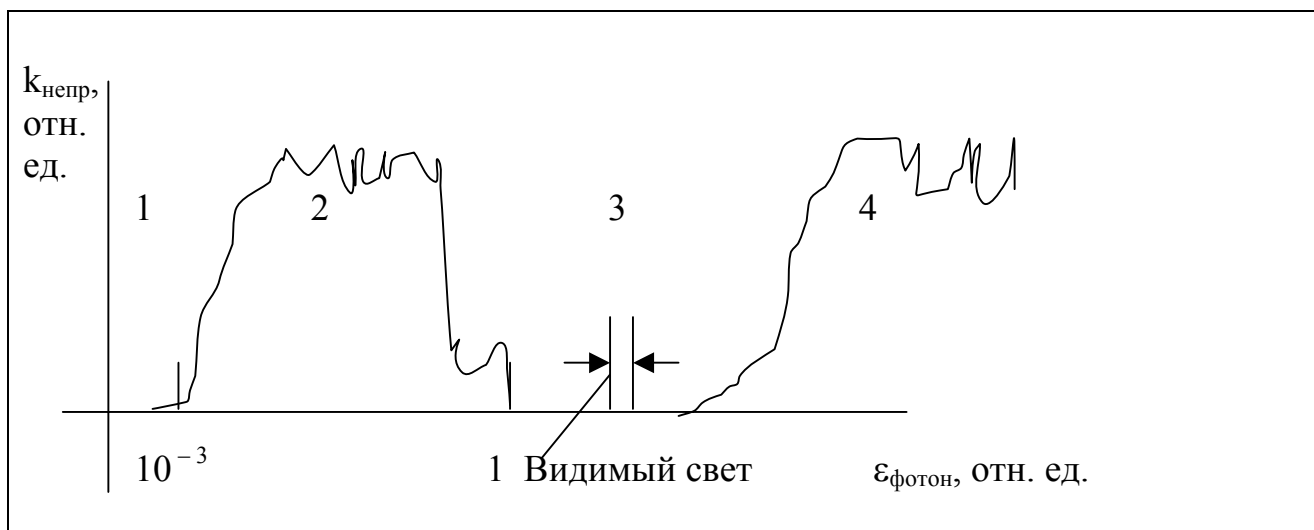


Напомним, что энергия фотонов соответствует у ИК света  $\leq 1$  эВ, красный – 1,6 эВ, зеленый – 2 эВ, фиолетовый – 3,1 эВ, а для жесткого излучения -  $\leq 10^4$  эВ.

#### 4.1 Фотоэффект

Согласно ранним экспериментальным исследованиям.

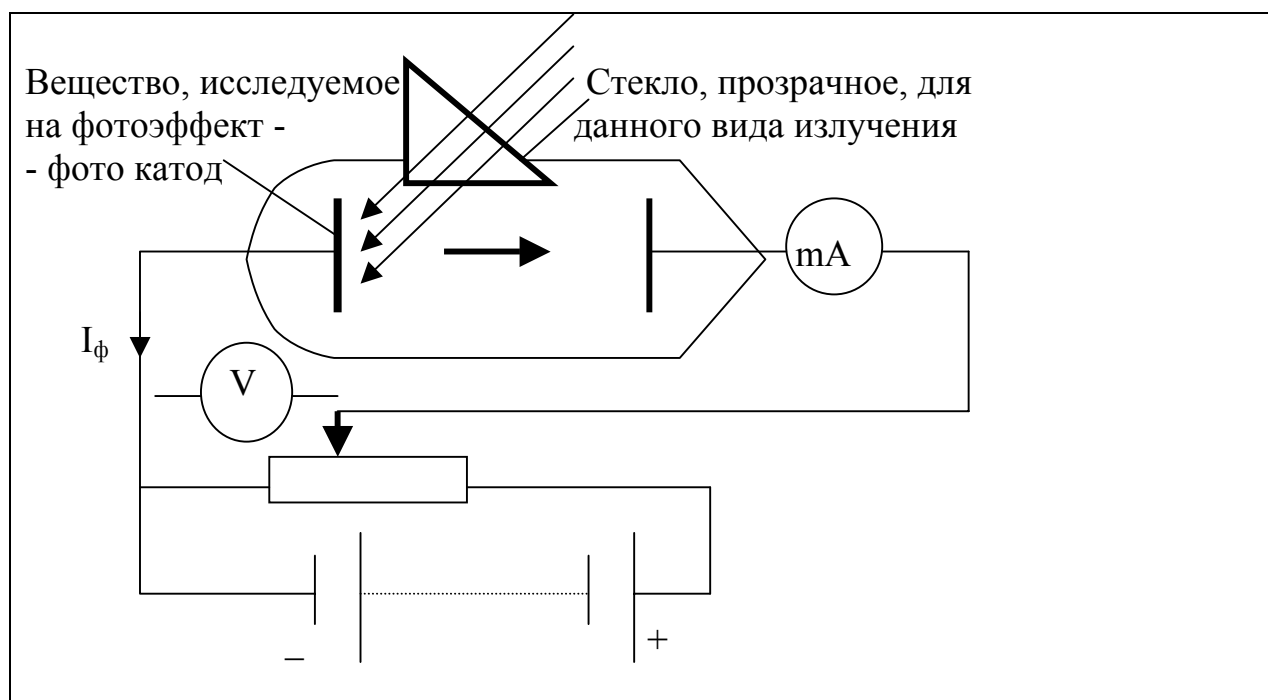
1. Генрих Герц (1887) обнаружил, что освещение УФ светом отрицательного электрода в области искрового промежутка облегчает проскакивание искры.
2. Хальвакс, Риги, Столетов (годы жизни Столетова – 1839-1896) обнаружили, что при освещении УФ лучами тело теряет отрицательный заряд, поэтому фотоэффект определяют как явление вырывания электронов из вещества при освещении его светом. Рассмотрим типичную зависимость коэффициента непрозрачности  $k_{\text{непр}}$  газа, состоящего из двухатомных молекул, от энергии фотонов  $\varepsilon_{\text{фотон}}$ .



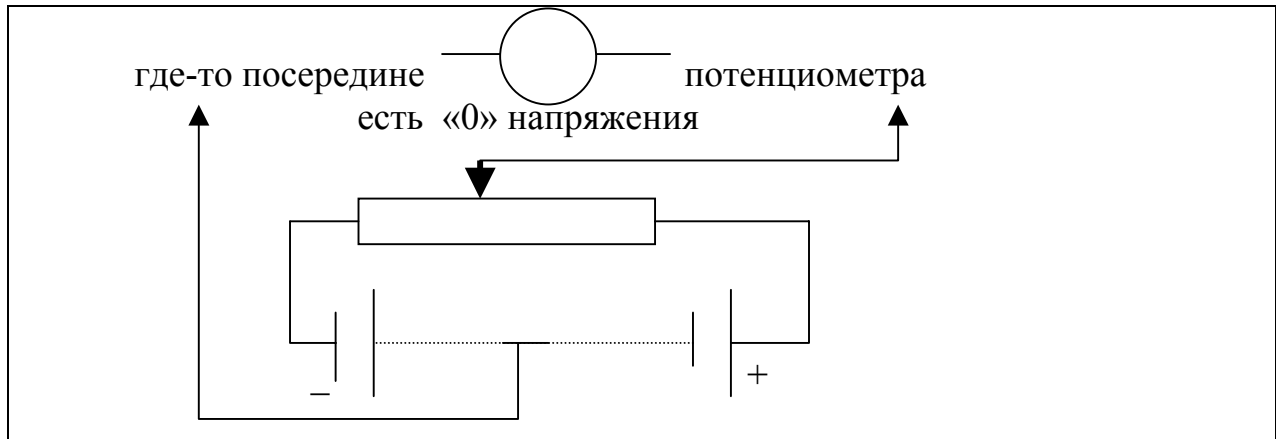
На графике можно отметить характерные участки

1. Здесь энергия фотонов ничтожно мала для возбуждения элементов среды, а следовательно фотоны не поглощаются.
2. Здесь поглощение связано с колебательными и вращательными энергиями возбуждения молекул.
3. В «окне прозрачности» поглощение отсутствует
4. В области непрозрачности, простирающейся в сторону возрастания энергии фотонов добавляется фотоэффект (к вращательным и колебательным способам возбуждения электронов) – возбуждение фотонами электронов атомных оболочек.

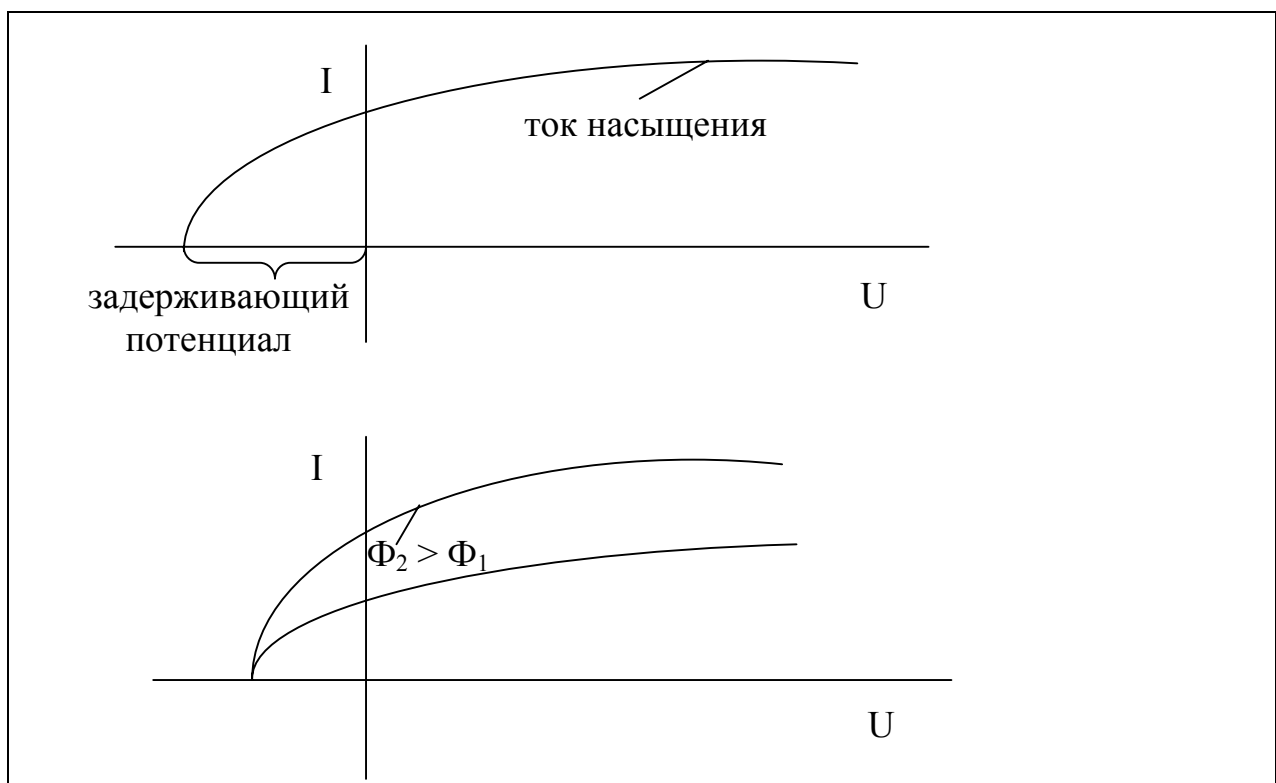
Установка для исследования фотоэффекта как правило имеет вид:



Если подключить вольтметр согласно схеме, то появляется возможность измерять вольтамперную характеристику при наличии светового потока различной мощности и частоты излучения. Приведем вариант схемы, позволяющий менять знак потенциала, прикладываемого к трубке.



Вольтамперная характеристика (ВАХ) для фиксированных потока  $\Phi$  и частоты  $\nu$  имеет вид





Если изменить поток при наличии фотоэффекта получим две разных вольтамперных характеристики. Следует заметить такой экспериментально наблюдаемый факт, что для каждого вещества существует частота, ниже которой фотоэффект отсутствует при любых интенсивностях светового потока. Согласно классической (не квантовой) модели в электромагнитном поле световой волны электрон приходит в колебание, колеблется “раскачиваемый” волной вбирая при этом в себя все больше и больше энергии. Рассмотрим два фактора.

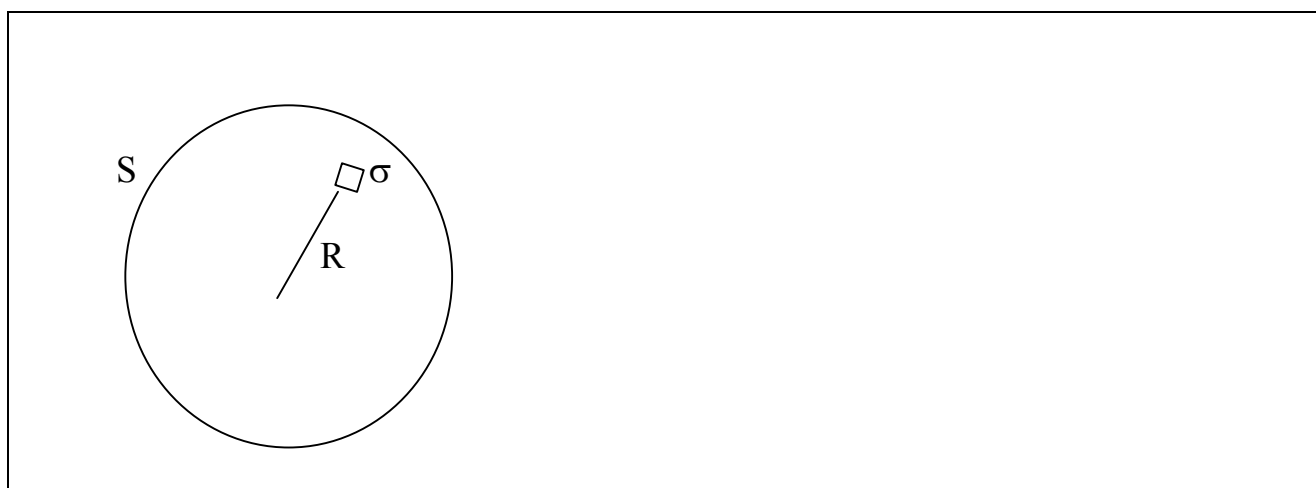
1. Чем больше интенсивность света, тем больше должна быть максимальная скорость вылета электронов при отрыве от вещества.
2. Необходимое время накачки в электрон энергии должно определяться мощностью световой волны и энергией связи электрона с атомом. Оценим это время. Его можно найти как отношение работы выхода электрона из вещества (например, из металла) к мощности падающего на электрон света

$$t = A_{\text{вых}} / P.$$

Обратимся к таблице работ выхода электронов из металлов.

Элемент	Na	Cu	Fe	W	Zn	Cs
$A_{\text{вых}}, \text{эВ}$	2,35	4,4	4,31	<u>4,5 – max</u>	3,74	<u>1,81 – min</u>

Пусть мощность источника  $n = 100 \text{ Вт}$ . Оценим мощность, приходящуюся на один атом, имея в виду, что источник точечный, а атом находится на сфере радиуса  $R = 10 \text{ см}$  и имеет поперечное сечение  $\sigma \sim 10^{-16} \text{ см}^2$  (то есть радиус  $\sim 10^{-8} \text{ см}$ ).



Доля мощности будет пропорциональна отношению  $\sigma / S = (r/R)^2$ , а чтобы найти энергию, полученное значение мощности необходимо умножить на искомое время

$$P_{\text{ат}} = P (r/R)^2 \Rightarrow A_{\text{вых}} = P_{\text{ат}} t = P (r/R)^2 t.$$

Для расчета используем самое маленькое значение работы выхода

$$2 \text{ эВ} = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.} \Rightarrow t = 3 \cdot 10^{-3} \text{ секунды.}$$

Более детальные экспериментальные исследования позволили установить следующие положения (иногда их называют законами фотоэффекта).

1. Ток насыщения ВАХ пропорционален потоку падающего излучения при постоянной частоте излучения.
2. Максимальная скорость электронов, вырываемых при фотоэффекте прямо пропорциональна частоте поглощаемого излучения.
3. У данного вещества фотоэффект наблюдается для излучения с частотой больше некоторой критической частоты фотоэффекта  $\nu_{\text{кр}}$ , которая называется красной границей.  $\nu > \nu_{\text{кр}} \Rightarrow \lambda < \lambda_{\text{кр}}$ .
4. Испускание электронов происходит практически мгновенно, а точнее определяется скоростью излучения  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

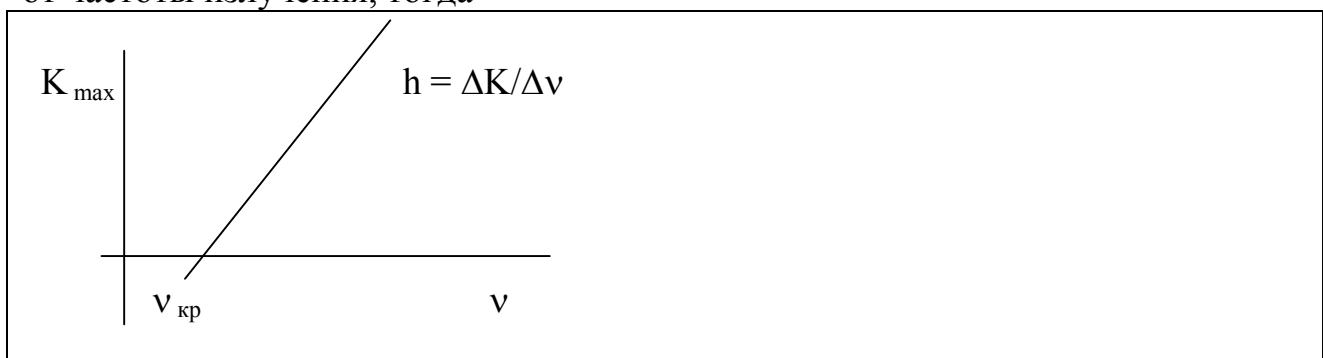
$$t = R / c \sim 10^{-10} \text{ секунды.}$$

Такие экспериментальные данные входят в противоречие с классическими представлениями и удовлетворяют квантовому характеру взаимодействия излучения с электронами вещества.

Согласно формуле Планка энергия фотона – кванта электромагнитного поля, вычисляется по формуле

$$h\nu - A_{\text{вых}} = K_{\text{max}} = mv_{\text{max}}^2 / 2.$$

Мы получили так называемую формулу Эйнштейна для фотоэффекта. Из этой формулы следует, что максимальная энергия фотоэлектронов линейно зависит от частоты излучения, тогда



В не релятивистском случае можно говорить и о линейной зависимости скорости от частоты.

Пусть  $K_{\max} = 0 \Rightarrow h\nu = A_{\text{вых}} = e U_{\text{зап}}$ , где  $e$  – заряд электрона, а  $U_{\text{зап}}$  – напряжение, запирающее фототок до нуля. При этом

$$h = e U_{\text{зап}} / \nu_{\text{кр}} \quad (\text{а точнее } \Delta U / \Delta \nu).$$

С другой стороны, зная работу выхода можно найти критическое значение частоты – красную границу. Пример: Na

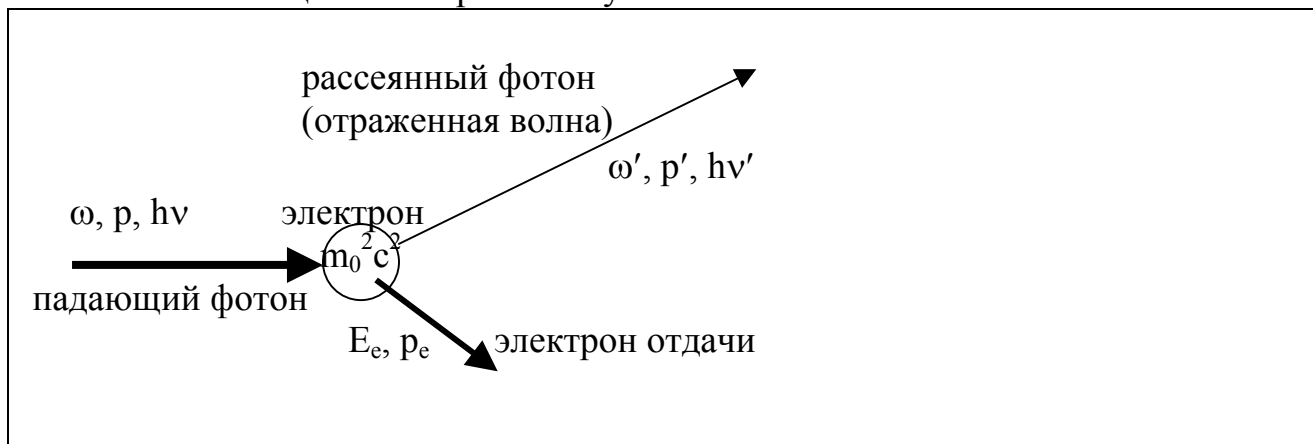
$$A_{\text{вых}} = 2,35 \text{ эВ} = 2,35 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \Rightarrow \nu_{\text{кр}} = A_{\text{вых}} / h = 5,6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

Заметим в заключение, что работая экспериментально с данными электрическими схемами очень важно не иметь контактных разностей потенциалов в местах электрических соединений, которые могут существенно исказить картину измерений.

Кроме внешнего фотоэффекта, о котором шла до сих пор речь, необходимо также отметить очень важный случай внутреннего фотоэффекта. Если при внешнем фотоэффекте электроны оказываются вне пределов исследуемого вещества, то при внутреннем фотоэффекте электроны атомных оболочек разрывают связь с атомом (например, при поглощении веществом электромагнитного излучения) и становятся квазисвободными, электронами проводимости, оставаясь при этом все время внутри данного вещества, не покидая его. Эти электроны могут участвовать в переносе заряда, то есть увеличить электропроводность вещества.

#### 4.2 Эффект Комптона (К. Артур Холли – американский физик, 1927)

Комптон обнаружил и наблюдал впервые энергию и импульс фотонов как квантовых частиц. Рассмотрим схему



Взаимодействие происходит в одной плоскости в силу законов сохранения. Слева на электрон (вообще говоря, атомной оболочки) падает фотон (электромагнитная волна). Надо ожидать, что волна отразится от электрона и у отраженной волны будет такая же частота как и у падающей (как это «происходит» в классике, только измениться фаза при известных обстоятельствах (в зеркале мы видим наше нормальное изображение)).

Распишем законы сохранения данного взаимодействия для импульса и энергии и посмотрим чему равна разность  $\omega - \omega'$  или  $\lambda' - \lambda$ .

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$$

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + c(p_e^2 + m_0^2c^2)^{1/2}.$$

Здесь  $m_0c^2$  – энергия покоя электрона, а  $c(p_e^2 + m_0^2c^2)^{1/2}$  – кинетическая энергия электрона отдачи с учетом его энергии покоя. Разделим второе уравнение на  $c$  и учтем, что  $h\nu/c = E/c = p$  – суть выражение для импульса электромагнитной волны.

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$$

$$p + mc = p' + (p_e^2 + m^2c^2)^{1/2}.$$

Преобразуем так, чтобы изолировать  $p - p'$

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$$

$$(p_e^2 + m^2c^2)^{1/2} = (p - p') + mc.$$

Возведем в квадрат оба уравнения по частям

$$p_e^2 = p^2 - 2pp' \cos \theta + p'^2 \quad (\theta = \mathbf{p} \wedge \mathbf{p}')$$

$$p_e^2 + \cancel{m^2c^2} = p^2 - 2pp' + p'^2 + 2mc(p - p') + \cancel{m^2c^2}.$$

Приравняем правые части

$$p - p' = pp' (1 - \cos \theta) / mc, \quad (p - p') / pp' = 1/p' - 1/p = (1 - \cos \theta) / mc.$$

$$p = E/c = h\nu/c = h/\lambda \Rightarrow \lambda' - \lambda = h(1 - \cos \theta) / mc.$$

При  $\theta = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda'$ . При  $\theta = \pi/2$  отличие  $\lambda$  от  $\lambda'$  определяется массой частицы-мишени. Рассмотрим свободный электрон, не связанный с атомной оболочкой (атомная оболочка является той основой, о которую «опирается» и эффективно его масса становится много больше), то есть рассмотрим свободный, покоящийся электрон.  $h/m_e c = 2,2 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2,2 \text{ пм} = 0,02 \text{ \AA}$ . Тот же расчет для ядра атома водорода (протона).  $h/m_H c = 10^{-15} \text{ м} = 1 \text{ ф} = 10^{-3} \text{ пм}$  ( $m_H = 1836 m_e$ ).

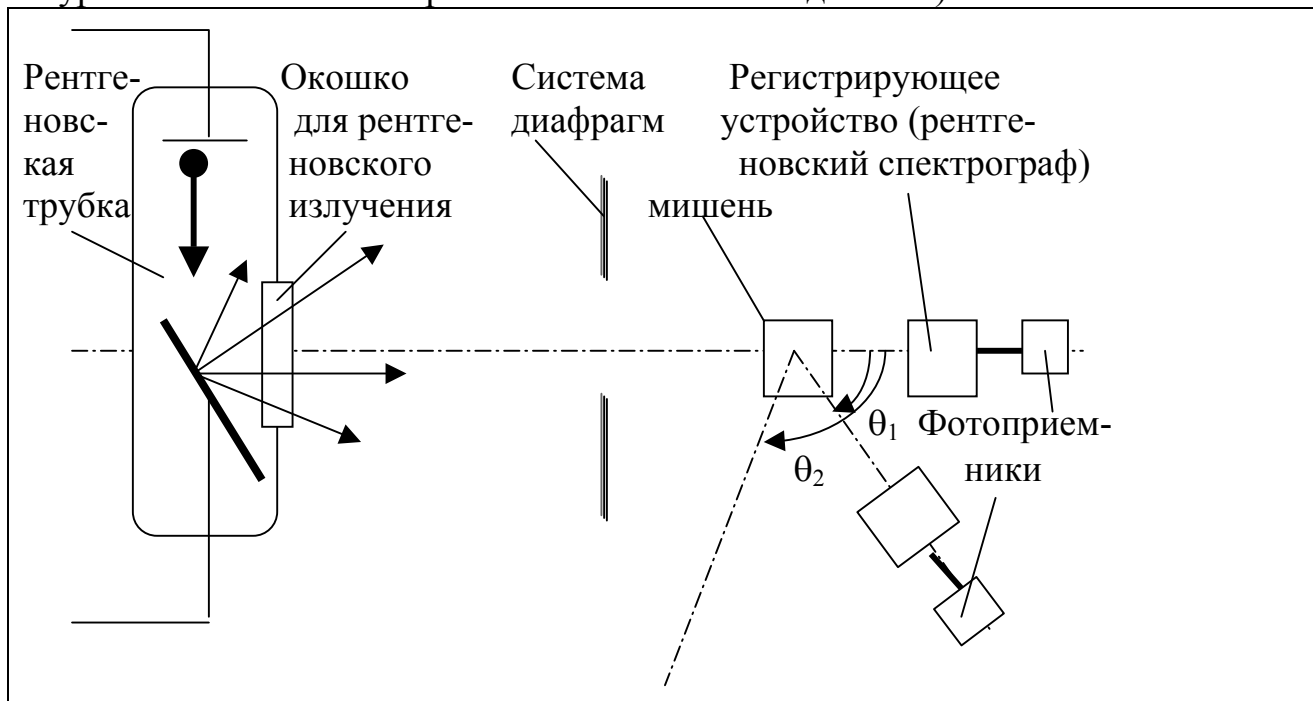
Типичной ситуацией является отличие длины рассеянной волны от длины падающей

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + h(1 - \cos \theta)/mc.$$

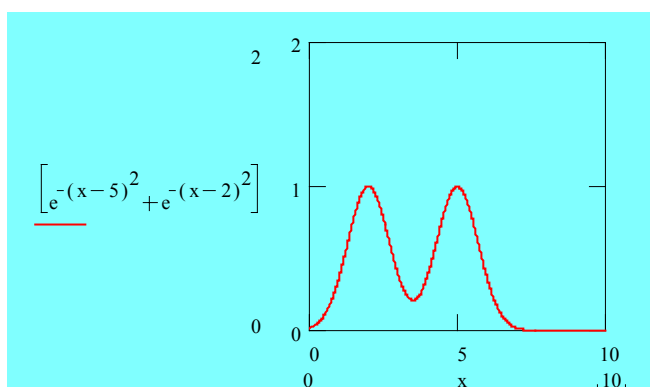
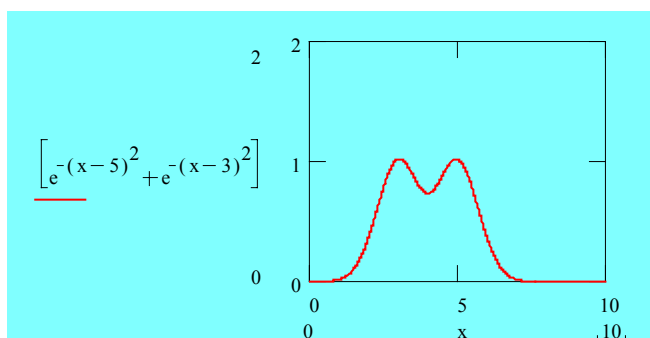
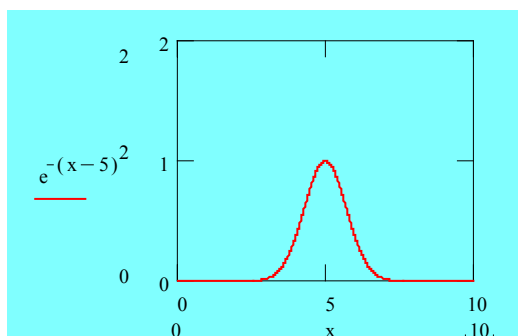
$\lambda_C = h/m_e c$  называют комптоновской длиной волны для электрона, а явление увеличения длины рассеянной волны по отношению к падающей – эффектом Комптона.

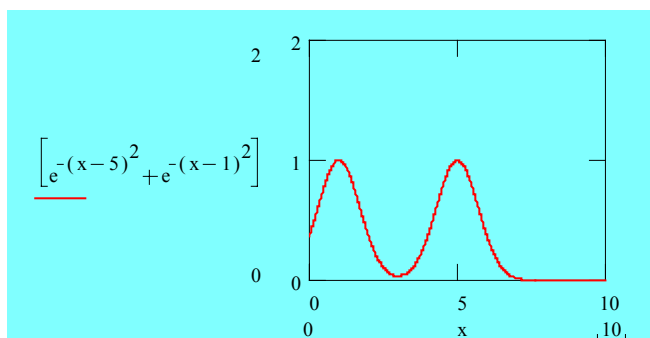
Об условиях наблюдения комптоновской длины волны в опытах.

(Комптон в 1922 году наблюдал эффект экспериментально, а в 1927 году стал лауреатом нобелевской премии за эти свои исследования)



В качестве мишени был выбран графит, имеющий  $2p^2$  – электрон, слабо связанный с ядром атома. С увеличением угла  $\theta$  все более отчетливо проявляется сигнал (правый на рисунке), связанный с комптоновским рассеянием.





Левый пик соответствует длине волны падающего фотона (в данном случае так называемая  $K_{\alpha}$  - линия молибдена,  $\lambda = 0,71 \text{ \AA}$ ). Это те фотоны, которые без изменения рассеиваются на электронах внутренних оболочек. На первом графике комптоновское рассеяние отсутствует,  $\theta = 0^\circ$ . На втором появляется небольшой пик, связанный с комптоновским рассеянием,  $\theta = 45^\circ$ . Далее, с ростом угла рассеяния  $\theta = 90^\circ$  и  $\theta = 135^\circ$  пик сдвигается по горизонтальной оси пропорционально увеличению длины волны (согласно формуле), что соответствует его лучшей разрешимости.

Очевидно, что для наблюдения эффекта необходимо выполнение двух условий

1. Длина волны рассеиваемого излучения должна быть сравнима с комптоновским сдвигом (у нас  $\lambda = 0,71 \text{ \AA}$ , а  $\Delta\lambda = 0,02 \text{ \AA}$ ). Этому условию удовлетворяет излучение рентгеновского диапазона
2. Рассеяние должно происходить на электронах минимально связанных с ядрами атомов мишени, то есть на максимально удаленных от ядра атомов электронах. Для исследования этого условия экспериментаторами выбирались характерные вещества-мишени

Элемент	Заполнение электронных оболочек	Общее количество электронов	Характер связи электрона с ядром
Li	K $2s^1$	3	почти свободный электрон
B	K $2s^1 2s^2 2p^1$	5	
Al	K L $3s^1 3s^2 3p^1$	13	
Ca	K L M $4s^1 4s^2$	20	
Cu	KLM $3d^{1-9} 4s^1 4s^2$	29	сильно связанный электрон

Наименее связанные с ядром электроны выделены. У меди  $3d$  – электроны предшествуют  $4s$  – электронам. При этом, чем больше электронных оболочек экранируют последний электрон – тем слабее эффект Комптона. Точнее можно говорить о том, в большей или меньшей мере электроны почти свободны или сильно связаны с ядром атома.

Таким образом, экспериментально подтверждается квантовый характер поведения электромагнитного излучения (в данном случае на примере рентгеновской части его спектра), как актов единичного взаимодействия квантов (фотонов) электромагнитного излучения с веществом.

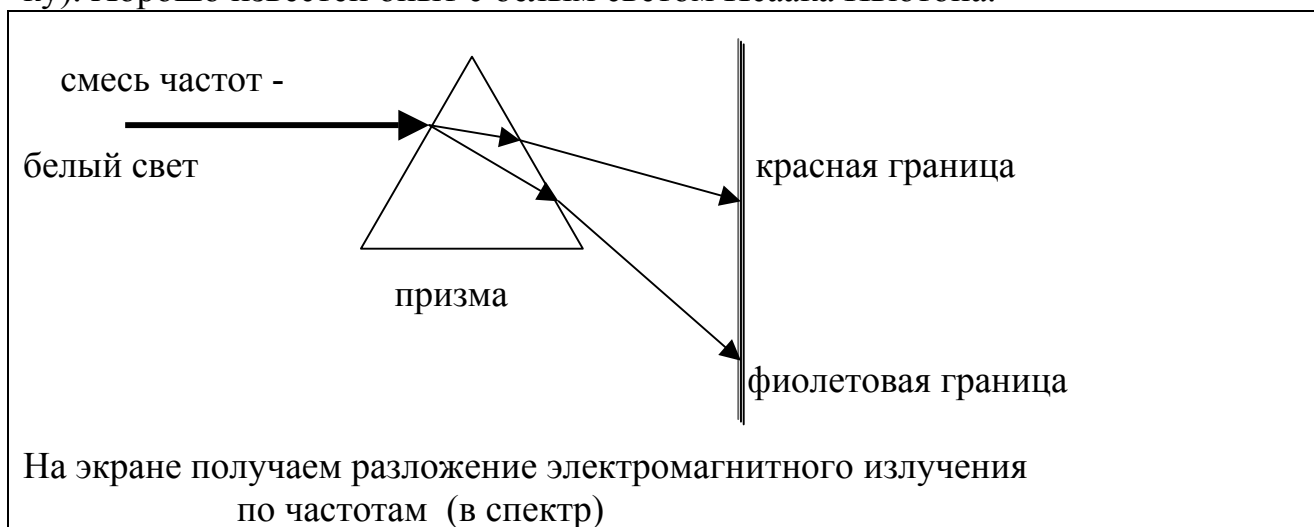


## Глава 3 Атомная физика

### § 1 Закономерности в атомных спектрах. Постулаты Бора

#### 1.1 Дисперсия электромагнитного излучения. Виды спектров

Здесь речь пойдет о характере спектров нагретых тел, а точнее говоря раскаленных или сжигаемых в электрической дуге, свет от которых пропускается через призму, а затем проецируется на экран (фотопленку, фотопластинку). Хорошо известен опыт с белым светом Исаака Ньютона.



Ранее нами были рассмотрены явления поляризации, интерференции, дифракции показан квантовый характер электромагнитного излучения. Дополним список свойств электромагнитного излучения свойством дисперсии. Дисперсией называется взаимозависимость показателя преломления вещества и частоты электромагнитного излучения в том смысле, что электромагнитное излучение разной частоты по-разному взаимодействует с данным веществом.

$$n = n(\omega), \text{ а так как } n = \sqrt{\epsilon\mu} \Rightarrow n \sim \sqrt{\epsilon} \Rightarrow \epsilon = \epsilon(\omega).$$

Атомы и молекулы тел как цельные объекты обладают собственными частотами колебаний, так что амплитуды и фазы вынужденных колебаний электронов и ядер атомов при взаимодействии вынуждающего их колебаться внешнего поля зависят от частоты колебаний этого поля – отсюда и зависимость для  $\epsilon(\omega)$  и  $n(\omega)$ . Покажем это аналитически с помощью расчета. При прохождении электромагнитных волн через вещество каждый электрон вещества оказывается под воздействием силы

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{E}.$$

Здесь опущен магнитный член в силу его малости. С учетом волнового характера имеем.

$$F = -e E_0 \cos(\omega t - \alpha).$$

Запишем уравнение вынужденных колебаний, где в правую часть подставим периодическую силу, используя одномерный случай

$$m d^2x/dt^2 + kx = F.$$

Подставим силу и запишем в комплексном виде

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = - (e/m) E_0^{(k)} e^{i\omega t}, \quad E_0^{(k)} = E_0 e^{i\alpha}.$$

Решение этого уравнения как известно можно искать в виде

$$x^{(k)} = x_0^{(k)} e^{i\omega t}.$$

Подставим его в уравнение, имеем

$$-\omega^2 \underbrace{x_0^{(k)} e^{i\omega t}}_{x(t)} + \omega_0^2 \underbrace{x_0^{(k)} e^{i\omega t}}_{x(t)} = \underbrace{(-e/m) E_0^{(k)}}_{E(t)} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow x(t) = (-e/m) E(t) / (\omega_0^2 - \omega^2).$$

Если взять вещественную часть от полученного решения, то вид решения не изменится.  $E(t)$  достаточно рассматривать либо вещественным, либо комплексным. Запишем дипольный момент для электрона, где роль расстояния выполняет амплитуда колебания электрона в переменном поле.

$$p(t) = \sum e_k x_k(t) = (e_k = -e) = -e \sum x_k(t) = (e^2/m) \sum E(t) / (\omega_{0k}^2 - \omega^2).$$

Поляризованность в свою очередь будет равна  $P(t) = n p(t)$ ,  $n$  – число частиц в единичном объеме. С другой стороны

$$P(t) = \kappa \epsilon_0 E(t), \kappa = P/E\epsilon_0 = n p / \epsilon_0 E(t) \Rightarrow \epsilon = n^2 = 1 + \kappa = \\ = 1 + (e^2 / \epsilon_0 m) \sum n_k / (\omega_{0k}^2 - \omega^2).$$

Бесконечность в знаменателе при совпадении собственной и вынуждающей частот обусловлена исключением из рассмотрения сил трения, которые обязательно присутствуют в том или ином виде.

## 1.2 О спектрах. Термы. Серии. Постулаты Бора

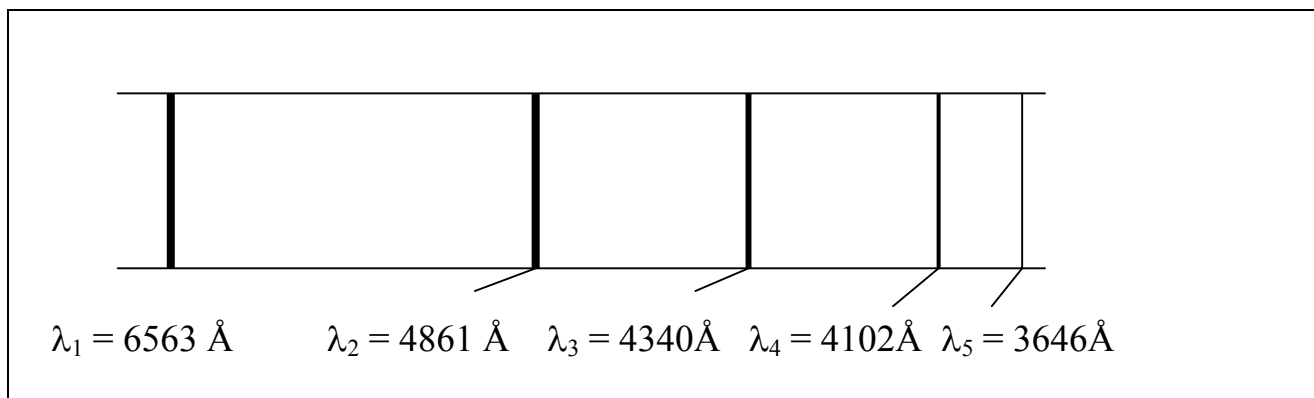
Каждый элемент обладает характеристическим спектром (то есть присущим именно ему, обладающим характеристическими чертами). Такой спектр складывается из переходов частиц из одних состояний в другие на уровне ядер, атомов, молекул с испусканием или поглощением электромагнитного излучения совершенно определенных частот в диапазоне от радиочастот до рентгеновского и гамма (для ядер атомов) диапазона. Заметим, что наличие многих линий в спектре атома указывает на сложность атомной структуры. Спектры по их виду делят на:

а. Сплошные спектры – из-за перекрытия отдельных линий. Реализуются в твердых телах.

б. Линейчатые спектры – как правило накладываются на сплошные. Реализуются в газах.

в. Полосатые – за счет вращения молекул. Как правило сосуществуют со сплошными спектрами и линейчатыми.

Очень многие свойства атомных спектров стали известны задолго до появления атома. Экспериментальные исследования и анализ получаемых результатов послужили толчком к пониманию строения атомов. Один из наиболее известных спектров – линейчатый спектр атома водорода, так называемая серия Бальмера.



Отметим одну решающую особенность линейчатых спектров – разности или суммы спектральных термов могут быть равны другим спектральным термам данного спектра. Спектральный терм – линия спектра, численно выраженная в длинах волн, частотах или спектроскопических волновых числах  $\nu^* = 1/\lambda$ . Пример: имеем набор спектральных волновых чисел некоторого спектра. Составим суммы и разности.

$\nu^*, \text{ см}^{-1}$ . Пусть $\nu^* \equiv T$ , где $T$ – обозначение терма		
82258,27 <sub>1</sub>	97491,28 <sub>2</sub>	102822,84 <sub>3</sub>
105290,58 <sub>4</sub>	15232,97 <sub>5</sub>	20564,57 <sub>6</sub>
23032,31 <sub>7</sub>	5331,52 <sub>8</sub>	7799,30 <sub>9</sub>

Составим суммы и разности некоторых термов

$$T_2 - T_1 = 15233,01 = T_5, \quad T_2 + T_8 = 102822,80 = T_3,$$

$$T_6 - T_5 = 5331,60 = T_8$$

Как следует из процедуры, совпадение экспериментально найденных термов и результатов вычислений очень хорошее. Таким образом был открыт общий принцип, так называемый принцип Ритца. Все многообразие спектральных линий данного атома может быть получено путем парных комбинаций в виде сумм и разностей небольшого числа спектральных термов (согласно Ритцу по 5-ти термам).

Можно показать, что разность термов представима в виде

$$T_i = T_k - T_m = T_0 (k^2 - n^2),$$

а так как  $T = \nu^* = 1/\lambda$ , то

$$1/\lambda_i = 1/\lambda_k - 1/\lambda_n = 1/\lambda_0 (1/k^2 - 1/n^2) \text{ или } 1/\lambda = R_H (1/k^2 - 1/n^2).$$

Экспериментально были исследованы и аналитически выражены серии спектров для атома водорода.

$k = 1, n=2,3,4,\dots$  - серия Лаймана (1916г.)

$$1/\lambda = R_H (1 - 1/n^2) -$$

это ультрафиолетовая серия.

$k = 2, n = 3,4,5,\dots$  - серия Бальмера (исследована первой среди данных серий в 1885г.)

$$1/\lambda = R_H (1/2^2 - 1/n^2) -$$

это видимая серия.

$k = 3, n = 4,5,6,\dots$  - серия Пашена  
(предсказана Ритцем в 1908г.)

$$1/\lambda = R_H (1/3^2 - 1/n^2) -$$

это инфракрасная серия.

$k = 4, n = 5,6,7,\dots$  - серия Брэкетта (1922)

$$1/\lambda = R_H (1/4^2 - 1/n^2) -$$

также инфракрасная серия.

$k = 5, n = 6,7,8,\dots$  - серия Пфунда (1924г.) –

также инфракрасная серия. И так далее. Все последующие серии являются инфракрасными. Коэффициент  $R_H$  получил наименование постоянной Ридберга для атома водорода. Заметим, что полученные формулы приближенно справедливы и для водородоподобных атомов таких как литий, натрий, калий, рубидий, цезий и франций, имеющих на последней оболочке один электрон.

Так как

$$E = h\nu = h c / \lambda = h c \nu^* \Rightarrow E_{mn} = h c (\nu_m^* - \nu_n^*) = \\ = h c (1/\lambda_m - 1/\lambda_n) = E_m - E_n,$$

то энергия квантов электромагнитного излучения может быть выражена через термы, то есть таблицы термов суть таблицы энергий. Вывод: наличие спектральных линий прямо указывает на то, что процессам обмена энергий внутри атомов свойственна определенная прерывистость, дискретность. Бор (Нильс Бор, датский физик, 1913) на основе изучения спектров и используя квантовую гипотезу Планка сформулировал свои постулаты.

1. Атом может существовать в определенных состояниях своего внутреннего движения – стационарных состояниях и при этом электрон в атоме находится на определенной «стационарной орбите».
2. Атом может переходить из одного стационарного состояния в другое. При переходе из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией, атом испускает фотон (точнее электрон испускает фотон или, иначе, электромагнитную волну) с энергией равной:

$$h\nu = \hbar \omega = E_1 - E_2.$$

Обратный переход происходит при захвате атомом (а точнее электроном) фотона.

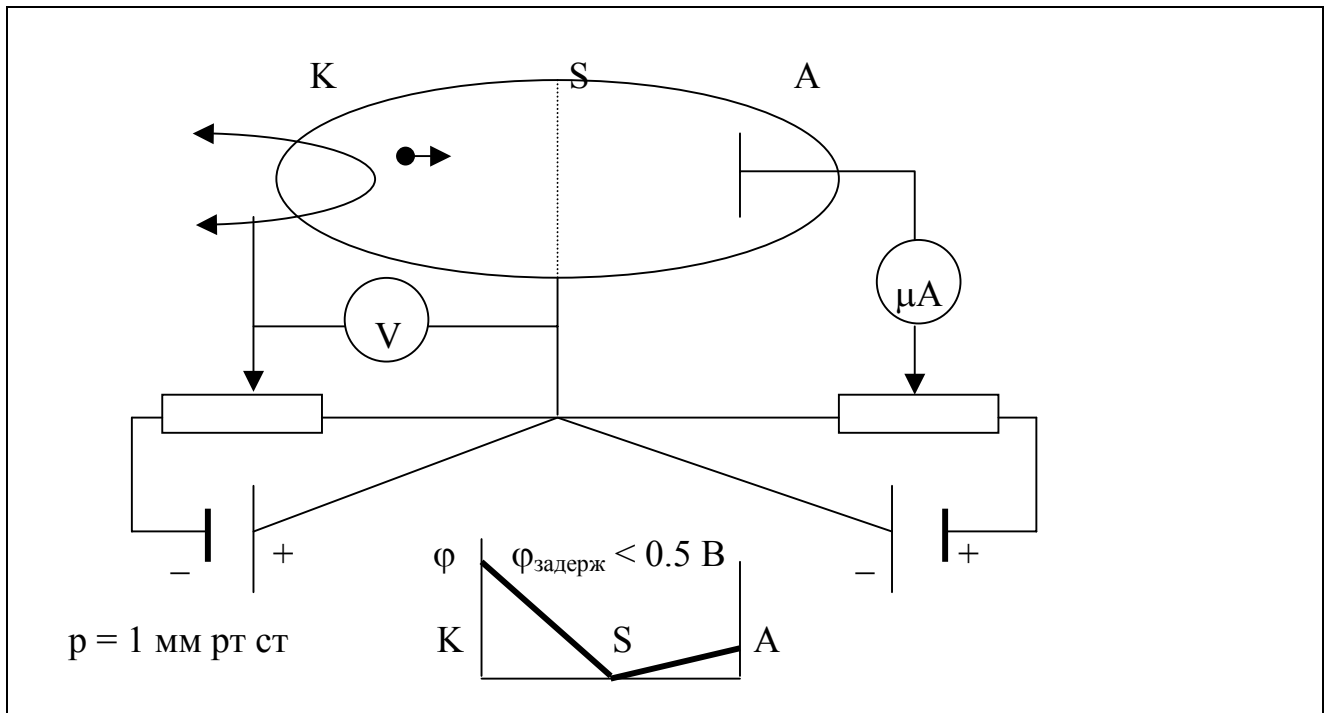
Вообще говоря стационарные состояния – нонсенс ( в данном случае удобная и очень наглядная модельная интерпретация), так как движущийся с ускорением электрон должен обмениваться энергией с окружающей средой ( например, поглощать или излучать фотоны). Заметим также, что у Бора нет ответа на вопрос о том, как происходит переход электрона с орбиты на орбиту.

Итак, существует совокупность значений энергий электрона в атоме (или как говорят самого атома) меняющихся дискретно, скачком.

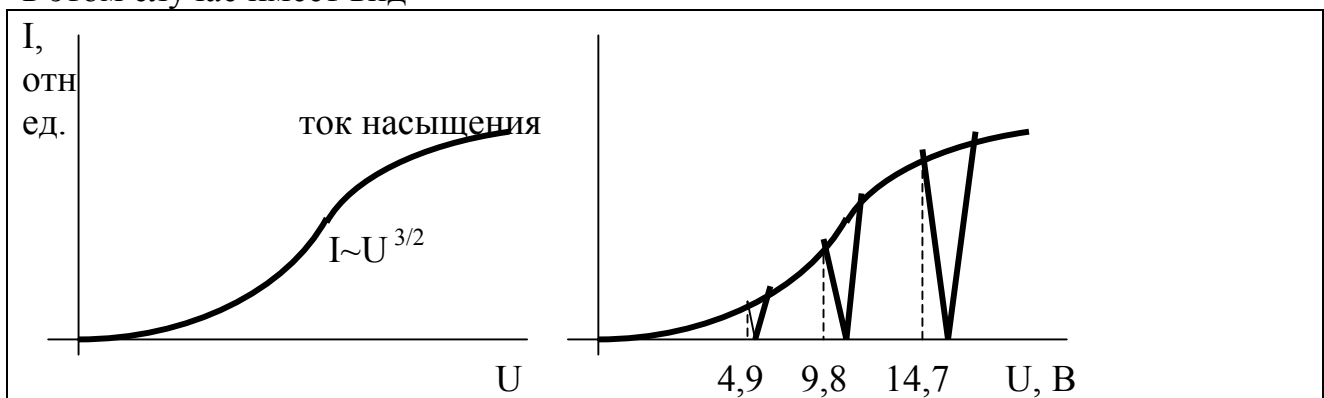
## § 2 Опыт Франка-Герца

Приведем экспериментальные факты, подтверждающие положения Бора. Имеется в виду исследование возбуждения атомов – нахождение экспериментально потенциалов ионизации атомов, энергии, необходимой для отрыва электронов от атомов.

В опытах Фрака и Герца через исследуемое вещество – газ, пропускались электроны, ускоренные до различных энергий. Идея состояла в том, что если эти электроны будут возбуждать атомы при дискретных значениях своих энергий, то это и будет означать, что атомы (а точнее электроны связанные на атомах) действительно обладают стационарными состояниями. Условие эксперимента: отсутствие электронного сродства, склонности атомов к захвату электронов. Для таких исследований годны инертные газы и пары металлов. Приведем схему эксперимента.

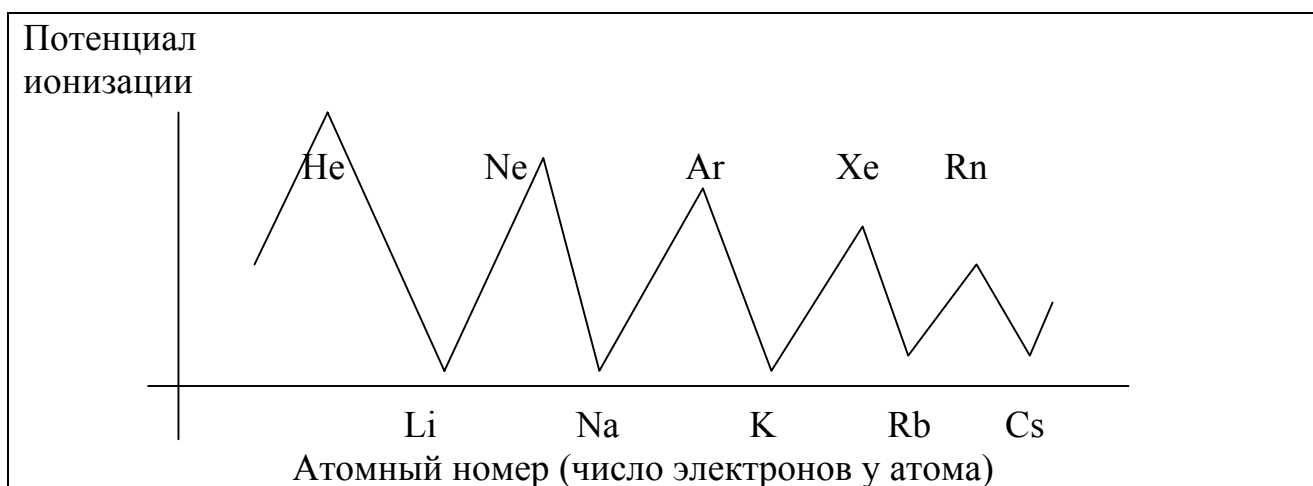


В откачанном сосуда (электронной лампе) с катода К эмитируются электроны, проходят через пространство KS и SA, где S – сетка лампы, А – анод, попадают на анод и проходят дальше по замкнутой цепи. Между SA при этом выставляется задерживающий потенциал  $\phi_{\text{задерж}}$ . Вольтамперная характеристика в этом случае имеет вид



Если заполнить лампу парами какого-либо (парами ртути, например, как это было у Франка и Герца или аргонном). На гладкой кривой появятся провалы. Наличие провалов на вольтамперной характеристике, объясняется тем, что при энергиях, соответствующих минимумам происходит неупругое взаимодействие электронов с атомами, сопровождающееся возбуждением атомов. В этом случае электрон останавливается (в том и только в том случае, если он передает всю свою энергию атому без остатка) и ток в цепи резко падает. Заметим, что возбужденная ртуть при этом "светиться" в ультрафиолетовой области спектра  $\lambda = 253,7 \text{ нм}$ . Сдвиг и наличие ширины у минимумов объясняются наличием проекций скоростей электронов (а следовательно и для энергий) на преимущественное направление от катода к аноду.

Понятно, что атомы с одним электроном на внешней оболочке ионизовать (то есть оторвать у них этот электрон) легче, чем, например у инертных газов, поэтому график зависимости потенциалов ионизации имеет характерный вид.

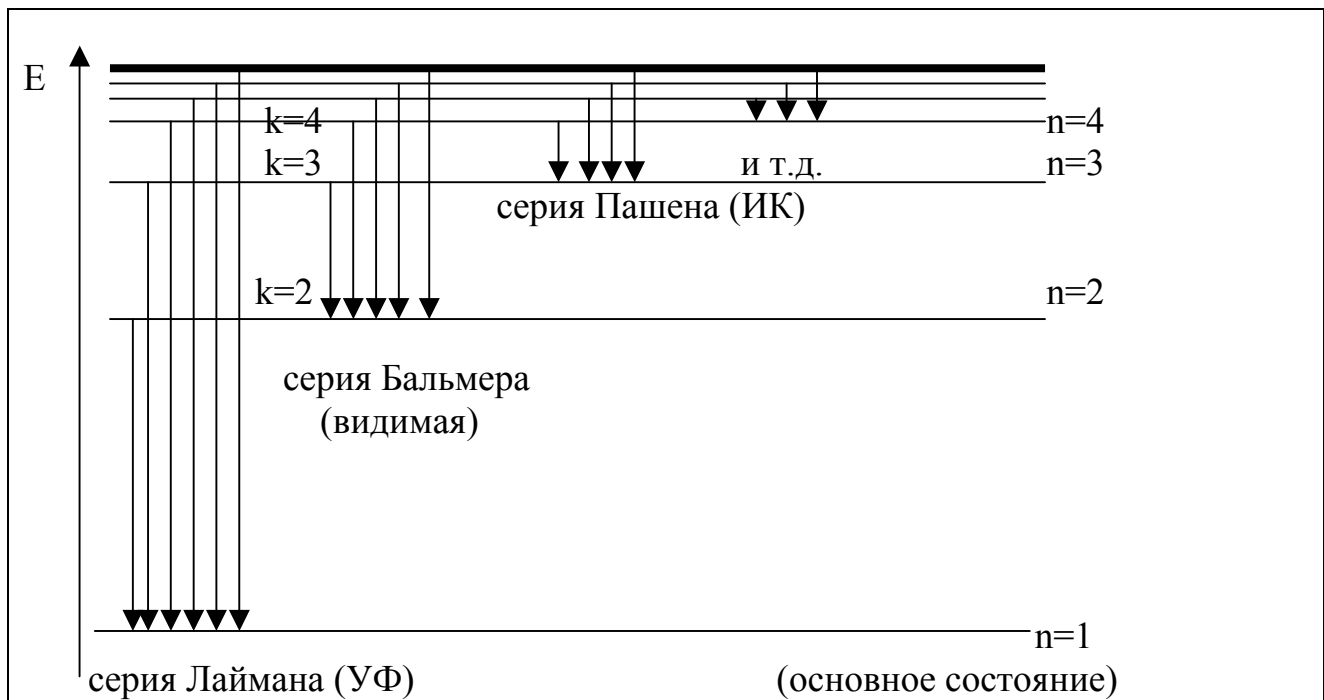


Таким образом опыт доказывает, что стационарные состояния обусловлены переходами электронов с одних орбит на другие.

( Различие потенциала ионизации и энергии возбуждения состоит в том, что в первом случае происходит полный отрыв электрона от атома, а во втором электроны внутри атома переходят на более удаленную орбиту).

Тогда схематически энергетическую структуру атома можно представить в виде:





На уровне основного состояния ( $n=1$ ) электрона обладает минимальной потенциальной энергией по отношению к положительно заряженному ядру.

Иногда схему представляют в виде концентрических окружностей увеличивающегося радиуса, символизирующих орбиты электрона, между которыми осуществляются электронные переходы, чтобы подчеркнуть сферическую симметрию атома.

Можно резюмировать, что таким образом была получена феноменологическая теория, то есть теория логическим образом объясняющая явления, происходящие с объектами природы. В данном случае с атомами вещества, а следовательно и с веществом в целом. Квантовый характер природы – явление всеобщее, что доказывают опыты и к чему приводят логические умозаключения.

### § 3 Квантование по Бору

#### 3.1 Квантование момента импульса

Согласно гипотезе Планка энергия квантуется

$$E_n = n \hbar \omega = n \hbar \nu.$$

Если рассматривать атом как гармонический осциллятор – систему, в которой совершается периодическое движение заряженных частиц, то его полную энергию можно выразить в виде

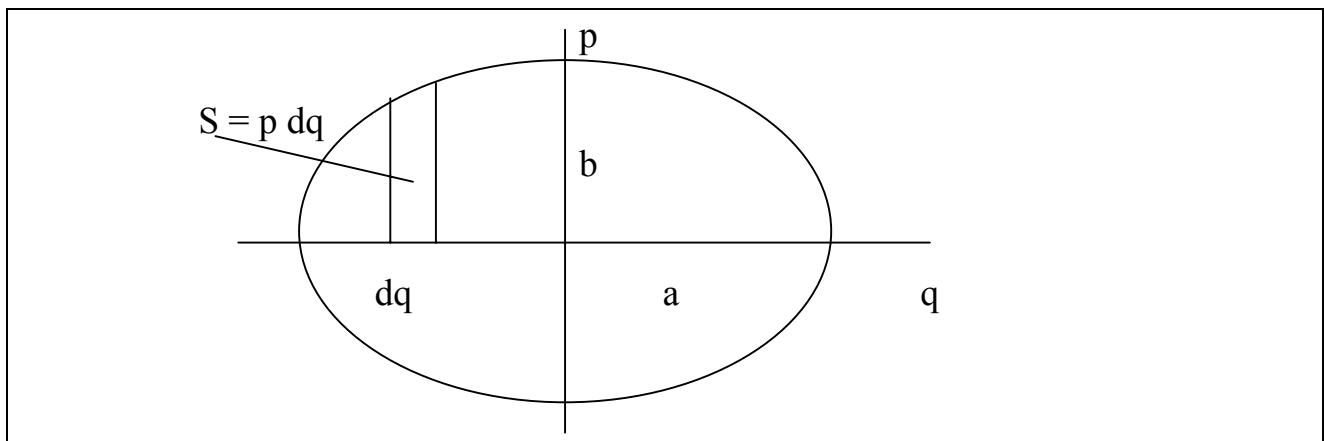
$$E_n = p^2 / 2m + m(\omega q)^2 / 2 = n \hbar \omega.$$

Здесь  $p$  – импульс,  $q$  – координата,  $\omega$  – частота. Разделим равенство на правую часть.

$$p^2 / 2m\hbar\omega + m\omega q^2 / 2\hbar = 1.$$

В координатах  $p$  и  $q$  получили уравнение эллипса с полуосями

$$a^2 = 2\hbar / m\omega, b^2 = 2m\hbar\omega$$



Отступление. Вычислим площадь эллипса как удвоенную площадь криволинейной трапеции.

$$\begin{aligned} x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 &\Rightarrow y^2 = b^2(1 - x^2/a^2), \quad S = \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^a [b^2(1 - \\ &- x^2/a^2)]^{1/2} dx = 2b/a \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^{1/2} dx = b/a [x(a^2 - x^2)^{1/2} + a^2 \sin^{-1} x/a]_{-a}^a = \\ &= 2ba (\sin^{-1} 1 + \sin^{-1}(-1)) = 2ba \sin^{-1} 1 = \pi a b. \end{aligned}$$

Вычислим площадь эллипса в обобщенных координатах  $p$  и  $q$ .

$$S_n = \pi a b = 2\pi \hbar n.$$

Получилось, что площадь такого эллипса квантуется, то есть прямо пропорциональна натуральному числу  $n$ . Чтобы распространить это правило на другие физические величины проведем вслед за Бором сравнение.

Обобщенные координаты (поступательное движение)	Угловые координаты (вращательное движение)
$p$ : ( $p = m \, dq/dt$ ) – обобщенный импульс	$M$ ( $M = r \times p$ ) – момент импульса ( $M = m r^2 \dot{\varphi} = I \dot{\varphi}$ )
$q$ – обобщенная координата	$\varphi$ - угловая координата
	$r$ – линейная координата
	$p$ – обычный импульс ( $p = m r \dot{\varphi}$ )

Заметим, что площадь эллипса можно получить, если проинтегрировать по эллипсу как по замкнутому контуру (как это сделал Бор). Результат при этом будет тот же самый.

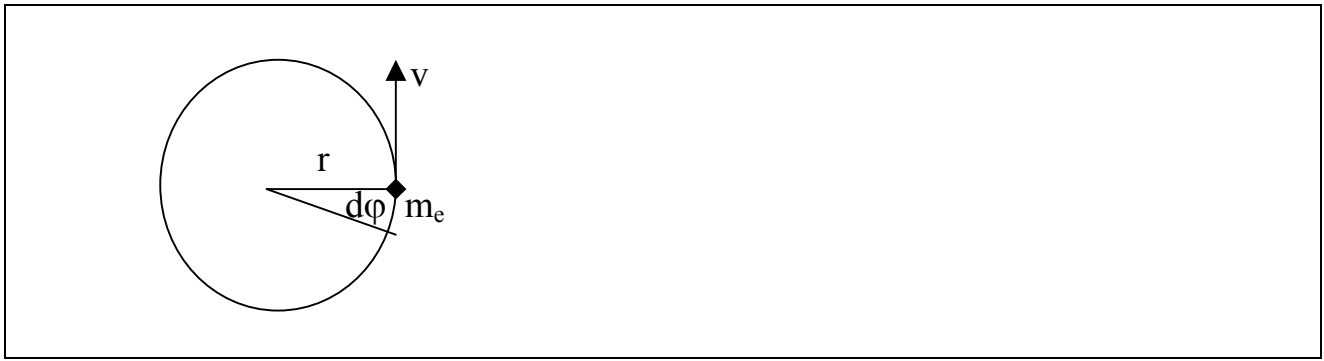
$$S_n = \oint p \, dq = 2\pi \hbar n.$$

Для электрона, движущегося по эллиптической орбите, в одном из фокусов которого находится ядро атома (или по окружности), сила, с которой ядро действует на электрон, является центральной. Следовательно, для этого электрона выполняется закон сохранения момента импульса, а  $M = \text{const}$ , тогда

$$\oint p \, dq = \oint M \, d\varphi = M \, 2\pi \Rightarrow 2\pi M = 2\pi \hbar n \Rightarrow M = n \hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

То есть момент импульса квантуется.

$$M = m_e v r = n \hbar \Rightarrow v = n \hbar / m_e r \quad (*)$$



### 3.2 Боровский радиус и квантование внутренней энергии

Вычислим радиус, с которым электрон обращается вокруг атома, исходя из классических представлений и выражения (\*).

$$mv^2/r = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2 \Rightarrow (nh/m)^2 m/r = e^2/4\pi\epsilon_0 \Rightarrow r = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2 / e^2 m.$$

Вычислим радиус самой маленькой орбиты  $n = 1$  (основное состояние)  $r_1 = 5 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 0,5 \text{ Å}$ . Его называют Боровским радиусом и обычно при расчетах используют значение

$$r_B = 0,529 \text{ Å}.$$

Внутренняя энергия атома водорода складывается из кинетической и потенциальной энергии электрона. Последняя берется с отрицательным знаком, ее отсчет ведется таким образом, что на бесконечности она равна 0.

$$E_{\text{вн}} = E_{\text{кин}} - E_{\text{пот}} = mv^2/2 - e^2/4\pi\epsilon_0 r.$$

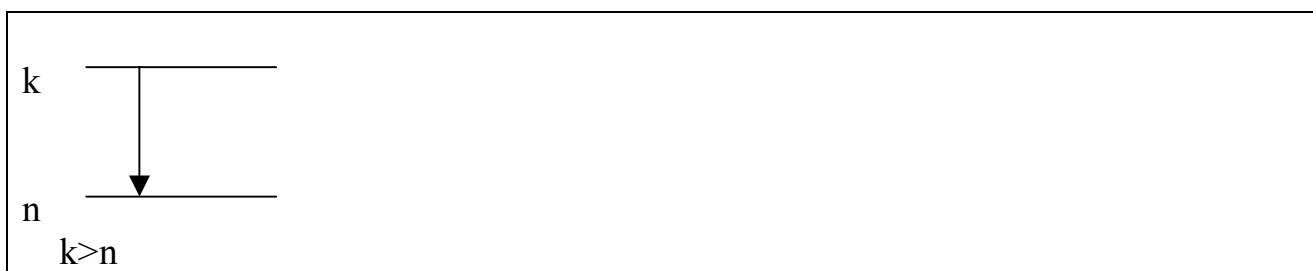
Преобразуем используя классические выражения для сил и Боровского радиуса с учетом его квантуемости.

$$mv^2/r = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2 \Rightarrow mv^2/2 = e^2/8\pi\epsilon_0 r, \quad E_{\text{вн}} = e^2/8\pi\epsilon_0 r_n - e^2/4\pi\epsilon_0 r_n =$$

$$= -m e^4 / 2 (4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2 = R^*_H (-1/n).$$

Пусть совершается переход из состояния с квантовым числом  $n$  в состояние с квантовым числом  $k$

$$E_k - E_n = R^*_H (1/n^2 - 1/k^2) = \hbar\omega = h\nu = hc/\lambda$$



$$1/\lambda = m e^4 (1/n^2 - 1/k^2) / 2 (4\pi\epsilon_0)^2 2\pi\hbar^3 = R_H (1/n^2 - 1/k^2).$$

$R_H = 10^7 \text{ м}^{-1} = 10^5 \text{ см}^{-1}$  называют постоянной Ридберга.

Таким образом, замечательным является тот факт, что элементарная теория атома Бора приводит к той же формуле, что и экспериментально измеренные спектры. Численное значение постоянной Ридберга:  $R = 109678 \text{ см}^{-1}$ .

## § 4 Волновое уравнение Шредингера

### 4.1 Электрон-волна

Для наглядного толкования "таинственного" правила квантования Бора — де Бройль (Луи де Б., французский физик 1923-1924) предложил такой способ: на орбите электрона как волнового объекта укладывается целое число волн —  $n$ , и такая электрон-волна, возвращаясь в исходную точку, будет иметь ту же фазу и амплитуду, что и первоначально. Такая орбита и является стационарной орбитой в смысле Бора. С нее электрон не излучает, а волна обязана быть стоячей.

$$2\pi R / \lambda = n \quad (*)$$

При этом де Бройлю пришлось предположить, что все частицы (из числа элементарных) обладают волновыми свойствами (сами являются волнами), а следовательно им можно приписать длину волны. Реализуем связь длины волны с импульсом частицы через волновое число.

$$p = E/c = h\nu / c = h/\lambda = \hbar k, \quad 2\pi R/\lambda = k R = n.$$

Умножим обе части равенства  $k R = n$  на  $\hbar$

$$\hbar k R = \hbar n \Rightarrow p R = \hbar n \Rightarrow M = \hbar n.$$

Таким образом в этом месте смыкаются волновые и квантовые свойства и можно говорить о волнах-частицах.

Найдем длину волны электрона в этой модели и сравним ее с Боровским радиусом.

$$\lambda_e = h/p = h / mv \geq 2 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 0,02 \text{ \AA}, \quad r_B / \lambda_e = 0,53 / 0,02 \sim 26.$$

Боровский радиус в 26 раз больше, следовательно предположения вполне разумны, то есть длина волны электрона может укладываться в Боровский радиус много раз.

Если говорить об экспериментальном подтверждении волновых свойств электрона, то они мало принципиально отличаются от опытов по интерференции и дифракции света, хотя с другой стороны они чрезвычайно трудоемки технически, так как потребовали высокой степени точности и изобретательности. Отметим одно: размеры регулярных препятствий должны были составлять  $\sim 0,02 \text{ \AA}$ . Описание самих опытов мы опускаем. Характерные дифракционные картины для электронов экспериментально были получены К. Дж. Дэвиссоном и Дж. П. Томсоном в 1927-1928 годах.

Итак электрон можно описывать волной, то есть электрон подчиняется волновому уравнению. Свободный электрон можно описать с помощью решения уравнения плоской волны. Так как данное решение содержит косинус фазы, то обобщив косинус до экспоненты можно считать интенсивность такого волнового процесса пропорциональной этой экспоненте

$$\sim e^{i(kr - \omega t)}.$$

Заметим, что для обозначения электрона-волны (и других частиц) используются термины: фазовые волны, либо – волны вещества, либо – волны де Бройля. Об электрон волне можно сказать, что это специальное волновое образование, соответствующее свободному равномерному движению частицы в определенном направлении с определенным импульсом

$$p = \hbar k.$$

Однако, как правило, частицы не свободны, но находятся в условиях воздействия на них различных полей. Для начала разберем случай свободного электрона.

## 4.2 Уравнение Шредингера

При конструировании волнового уравнения Шредингера (Австрия, 1926г.) воспользуемся тем, что одним из множества его решений реализуется решение вида волны де Бройля

$$\psi = C e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \partial\psi/\partial x = C i k_x e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} = i k_x \psi, (\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z)$$

$$\partial^2\psi/\partial x^2 = -k_x^2 \psi, \partial^2\psi/\partial y^2 = -k_y^2 \psi, \partial^2\psi/\partial z^2 = -k_z^2 \psi \Rightarrow$$

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)\psi = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \psi \Rightarrow \nabla^2\psi = -k^2\psi.$$

$$p = \hbar k \Rightarrow k = p/\hbar \Rightarrow \nabla^2\psi = -p^2\psi / \hbar^2 \quad (*).$$

$$\partial\psi/\partial t = -i\omega\psi, \varepsilon = \hbar\omega \Rightarrow \omega = \varepsilon / \hbar \Rightarrow \partial\psi/\partial t = -i\varepsilon\psi / \hbar \quad (**),$$

поделим почленно (\*) на (\*\*)

$$\nabla^2\psi / (\partial\psi/\partial t) = p^2 / i \hbar \varepsilon \Rightarrow \nabla^2\psi = (p^2 / i \hbar \varepsilon) \partial\psi/\partial t.$$

Так как полученное уравнение предполагает наличие корпускулярно-волнового дуализма, а кинетическая энергия свободного электрона вычисляется по формуле  $\varepsilon = p^2/2m$ , то при замене имеем

$$\nabla^2\psi = (2m / i \hbar) \partial\psi/\partial t \quad | \quad \times i \hbar \Rightarrow \underline{(-\hbar^2/2m)\nabla^2\psi = i\hbar \partial\psi/\partial t}.$$

В полученном выражении импульс или энергия как параметры отсутствуют. В определенном смысле оно утратило индивидуальные черты (записано не для конкретных импульса или энергии). Полученное уравнение есть уравнение Шредингера для свободной частицы.

С целью учесть потенциальную энергию взаимодействия электрона с внешней средой, проанализируем размерность полученного выражения.

$$[\hbar^2\partial^2/m \partial x^2] = \text{Дж}.$$

С учетом размерности приплюсуем к полученному уравнению функцию радиус-вектора в виде потенциальной энергии (и как оператор), определяющую классическое потенциальное силовое поле

$$\underline{i\hbar \partial\psi/\partial t = (-\hbar^2\nabla^2 / 2m + U(\mathbf{r})) \psi}.$$

Здесь  $\hbar$  так же как и  $S$  некая обобщенная координата (подобно использованной нами ранее  $\xi$ ), о физическом смысле которой необходимо в дальнейшем поговорить.

Разделив время и координату способом

$$\psi(r, t) = \varphi(r) e^{-i\omega t}.$$

Получим стационарное (не зависящее от времени) уравнение Шредингера

$$i\hbar (-i\omega) \varphi(r) = (-\hbar^2 \nabla^2 / 2m + U(\mathbf{r})) \varphi(r) \Rightarrow (\varepsilon = \hbar\omega) \Rightarrow$$

$$\varepsilon \varphi(r) = (-\hbar^2 \nabla^2 / 2m + U(\mathbf{r})).$$

Таким образом, имеем уравнение Шредингера для электрона в зависимости от времени и координат, учитывающее корпускулярно-волновой дуализм электрона и с учетом внешнего потенциального силового поля произвольного вида

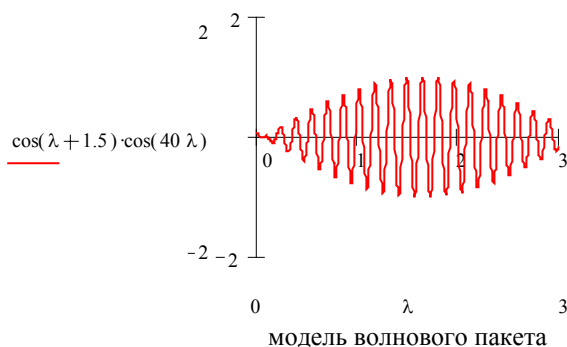
$$-\hbar^2 \nabla^2 \psi / 2m + U(\mathbf{r})\psi = i\hbar \partial \psi / \partial t.$$

Если отбросить зависимость от времени у  $\psi$  - функции относительно которого записано уравнение – получится стационарное уравнение Шредингера

$$-\hbar^2 \nabla^2 \varphi / 2m + U(\mathbf{r})\varphi = \varepsilon \varphi.$$

#### 4.3 Конструирование уравнения Шредингера способом Энрико Ферми

Заметим, что электрон (или вообще частицу с корпускулярно-волновыми свойствами) часто представляют в виде волнового пакета.





Было так, что Шредингер некоторое время полагал, что никакого дуализма волн и частиц нет. Существуют только волны. Частицы же представляют собой суперпозицию этих волн. Из волн (монохроматических) всегда можно составить волновой пакет – такое волновое, что при наложении в определенный момент времени волны будут усиливать друг друга в какой-то малой области пространства. Вне этой области произойдет их практически полное гашение.

Согласно теореме Фурье (1768-1730 – математики давным-давно предоставили аппарат для этого случая) если задан интервал разложения  $-\pi < t < \pi$ , то ряд Фурье, порожденный действительной функцией  $f(t)$ , для которой существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$$

есть бесконечный тригонометрический ряд вида

$$F(t) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikt}.$$

То есть такую функцию  $f(t)$  можно разложить по тригонометрическим функциям. Коэффициенты определяются согласно формулам Эйлера-Фурье.

$$a_k = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_k = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt,$$

$$C_k = (a_k - i b_k)/2 = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

Если  $t$  здесь время, то  $k$  выполняет в разложении роль частоты.

Наш волновой пакет, гармоники которого укладываются в малом интервале частот, можно представить в виде (с заменой  $k$  на  $\nu$ ).

$$\sum a_{\nu} \cos[2\pi\nu(t - x/v(\nu))].$$

Пусть  $a_v > 0$ , тогда в точке  $x = 0$  и при  $t = 0$  должна иметь место положительная интерференция всех гармоник (главный максимум). Возьмем производную от фазы по частоте и приравняем к 0, чтобы найти групповую скорость.

$$d[2\pi v(t - x/v)] / dv = 0 \Rightarrow t - x d(v/v) / dv = 0 \Rightarrow t = x d(v/v) / dv \Rightarrow$$

$$1/v_{гр} = d(v/v) / dv, \quad (t = x / v_{гр}).$$

Используя утверждение об эквивалентности групповой скорости волнового пакета и скорости материальной точки, имеем

$$W_k = E - U = mv^2/2 \Rightarrow 1/v = [m/2(E - U)]^{1/2}.$$

Приравняем выражения правых частей, представив предварительно энергию в виде  $E = h\nu$ .

$$d(v/v) / dv = [m/2(h\nu - U)]^{1/2}.$$

проинтегрируем и обнулим константу интегрирования выбором начала координат

$$v/v = (v/2)^{1/2} 2/h (\hbar\nu - U)^{1/2}, \quad v = \hbar\nu / [2m(\hbar\nu - U)]^{1/2} = \\ = \hbar\omega / [2m(\hbar\omega - U)]^{1/2}.$$

Монохроматическая волна удовлетворяет волновому уравнению. В частности, одним из его решений является решение вида

$$\psi = \varphi e^{-i\omega t} = \varphi e^{-iEt/\hbar}.$$

Для стационарного случая после подстановки имеем

$$\nabla^2 \varphi + \omega^2 \varphi / v^2 = 0.$$

$\varphi$  здесь зависит только от координат. Подставим в уравнение полученное значение скорости

$$\nabla^2 \varphi + 2m(\hbar\omega - U)\varphi / \hbar^2 = 0.$$

Введем зависимость от времени умножением на экспоненту  $e^{-i\omega t}$ , тогда  $\psi e^{-i\omega t} = \psi$ ,  $\partial\psi/\partial t = -i\omega \psi \Rightarrow \omega\psi = -\partial\psi/\partial t$ . Произведем замену.

$$\nabla^2\psi + (2m/\hbar)(-\partial\psi/\partial t) - 2mU\psi/\hbar^2 = 0 \Rightarrow$$

$$i\hbar \partial\psi/\partial t = -\hbar^2 \nabla^2\psi / 2m + U\psi.$$

Данное уравнение аналогично уравнению, полученному формальным прибавлением потенциальной энергии.

Таким образом, решением данного уравнения Шредингера является комплексная функция (пси-функция) времени и координат. Забегая вперед скажем, что согласно интерпретации  $\psi$ -функции частица не локализована точно в пространстве, но она с определенной степенью вероятности "размазана" в некоторой области пространства.

## § 5 Атом водорода

Имеем уравнение Шредингера

$$i\hbar \partial\psi/\partial t = -\hbar^2 \nabla^2\psi / 2m + U(\mathbf{r}) \psi.$$

Используется обозначение

$$\hat{H} = -\hbar^2 \nabla^2 / 2m + U(\mathbf{r}),$$

где под  $\hat{H}$  подразумевается оператор, называемый оператором Гамильтона, тогда

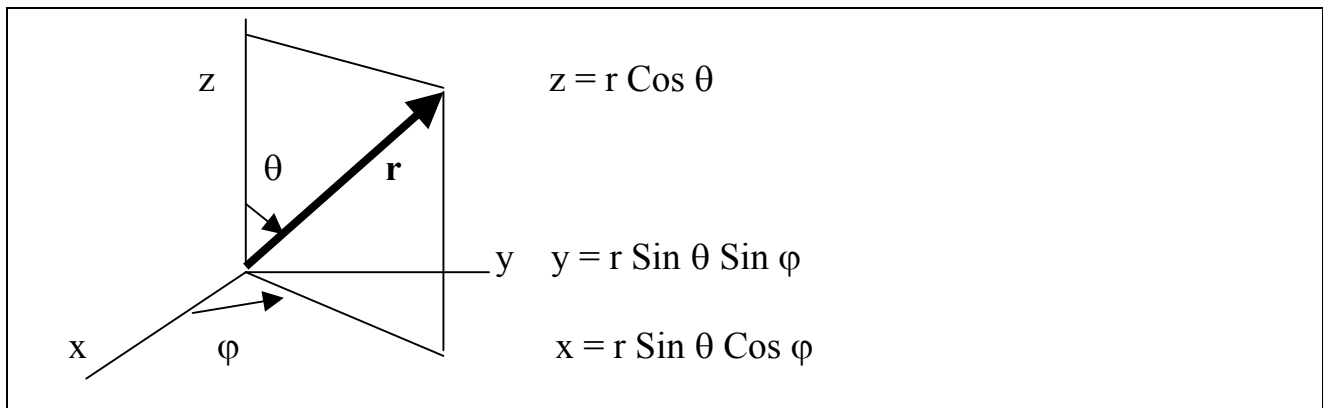
$$i\hbar \partial\psi/\partial t = \hat{H} \psi.$$

Для атома водорода электрон можно рассматривать находящимся в потенциальном поле кулоновского вида

$$U(\mathbf{r}) = -q_e^2 / 4\pi\epsilon_0 r.$$

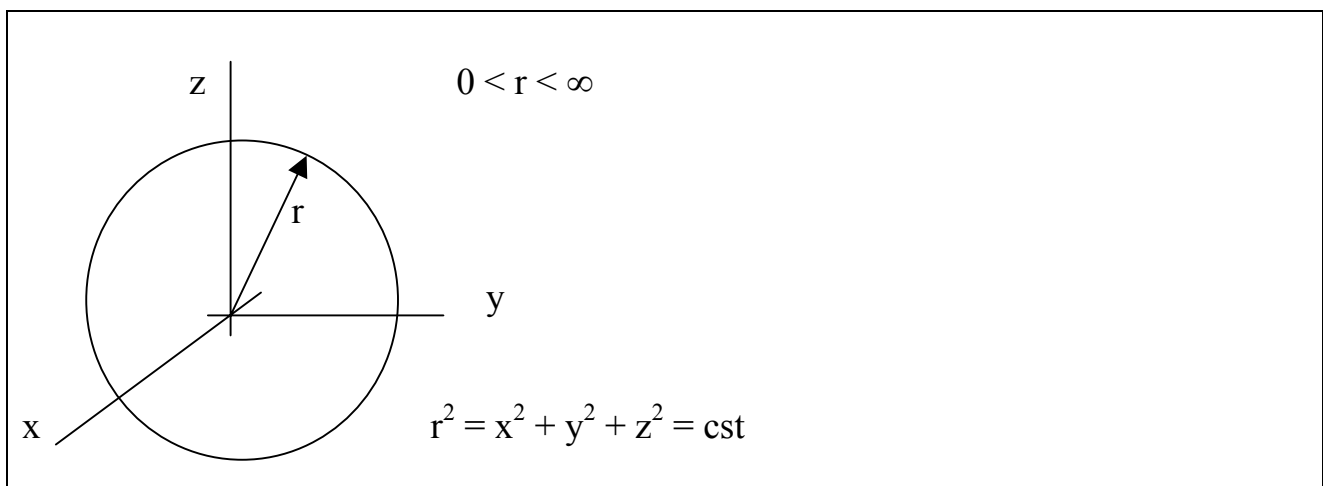
Решать уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода целесообразно в сферических координатах, учитывая хорошее сферическое приближение для системы протон-электрон, хотя, вообще говоря, электрон в атоме водорода не обязательно имеет круговую орбиту (а с учетом релятивистских эффектов это и вовсе не обязательно). В данном случае целесообразно ограничиться приближением сферической симметрии, так как это не должно исказить общий характер решений. Кроме того приходится пренебречь наличием спина у электрона. С учетом сказанного запишем уравнение Шредингера в сферической системе координат.

### 5.1 Лапласиан в сферической системе координат

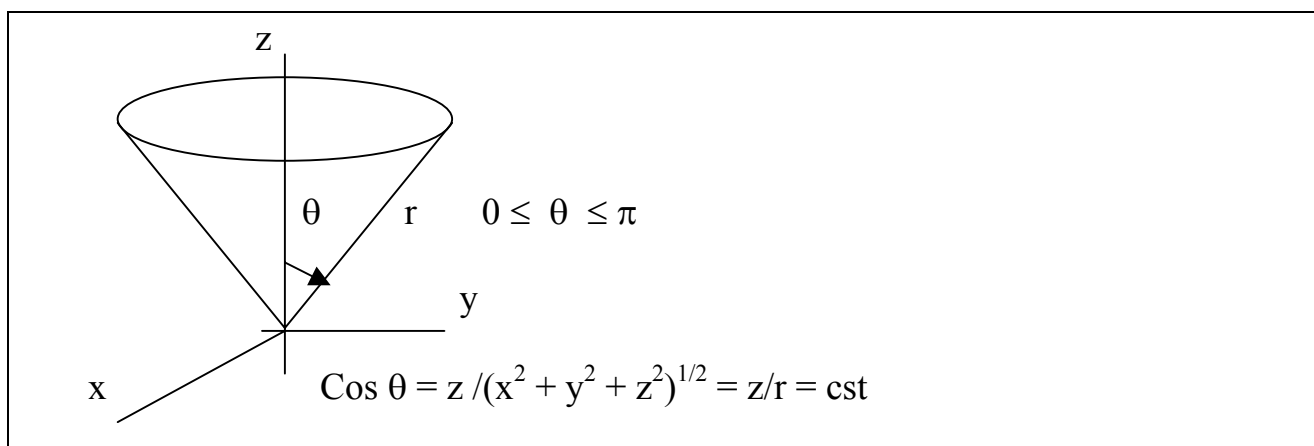


Положение любой точки в пространстве можно задать пересечением трех плоскостей (в прямоугольной декартовой системе координат) или, вообще, трех произвольных поверхностей. Для сферических координат это:

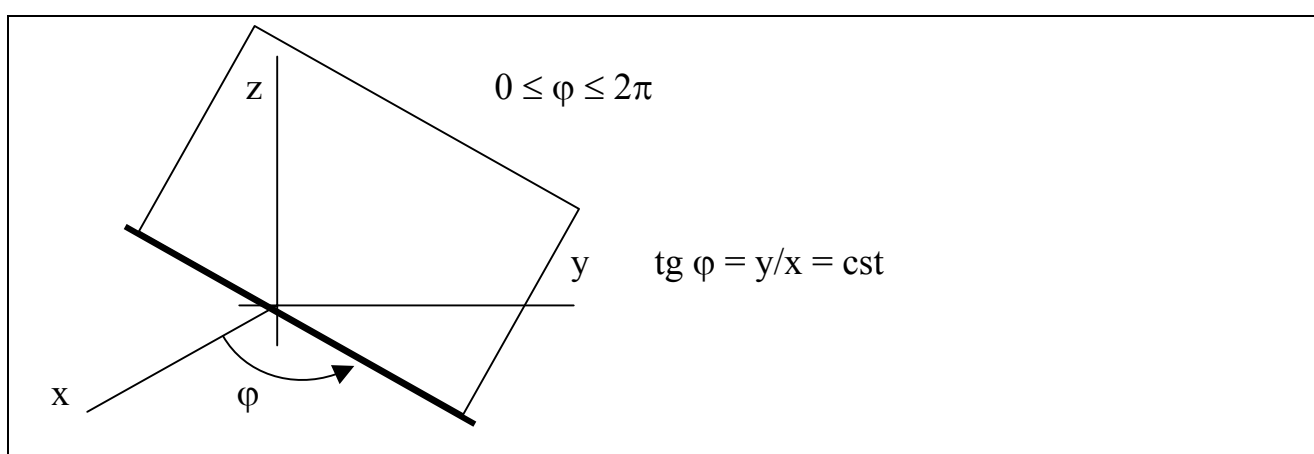
1. Сферы с центром в начале координат



2. Концентрические поверхности прямых круговых конусов с полярной осью  $z$  и вершиной в начале координат



### 3. Полуплоскости, проходящие через ось $z$



В общем виде связь между декартовой и произвольной криволинейной системой координат (например, как в нашем случае сферической) запишется в виде

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3), \quad (*)$$

( $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ ). Запишем квадрат расстояния между двумя точками пространства. Он будет одинаков для любой произвольной криволинейной системы координат.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i,j} h_{ij}^2 dq_i dq_j \quad (*)$$

$h_{ij}$  называют коэффициентами Ламе, их совокупность определяет метрику системы координат. Продифференцируем выражения (\*), чтобы найти коэффициенты Ламе перехода от декартовой к сферической системе координат.

$$dx = \partial x dq_1 / \partial q_1 + \partial x dq_2 / \partial q_2 + \partial x dq_3 / \partial q_3, \quad dy = \dots, \quad dz = \dots$$

Подставим в равенство (\*\*), учитывая при этом, что в обоих случаях мы остаемся в пространстве ортогональных систем координат (для которых касательные к поверхностям в точке пересечения взаимно перпендикулярны), то есть пусть  $h_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

$$(\partial x dq_1 / \partial q_1 + \dots)^2 + (\partial y dq_1 / \partial q_1 + \dots)^2 + (\partial z dq_1 / \partial q_1 + \dots)^2 = [(\partial x / \partial q_1)^2 + (\partial y / \partial q_1)^2 + (\partial z / \partial q_1)^2] d^2 q_1 + \dots = h_1^2 d^2 q_1 + h_2^2 d^2 q_2 + h_3^2 d^2 q_3.$$

$$h_1^2 = h_r^2 = [\partial(r \sin \theta \cos \varphi) / \partial r]^2 + [\partial(r \sin \theta \sin \varphi) / \partial r]^2 + [\partial(r \cos \theta) / \partial r]^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1.$$

$$h_2^2 = h_\theta^2 = (\partial x / \partial \theta)^2 + (\partial y / \partial \theta)^2 + (\partial z / \partial \theta)^2 = r^2 \Rightarrow h_\theta = r$$

$$h_3 = h_\varphi^2 = r^2 \sin^2 \theta \Rightarrow h_\varphi = r \sin \theta.$$

Для одной обобщенной координаты изменение длины составит

$$ds = h_i dq_i.$$

Элемент площади в этих криволинейных координатах (площадь криволинейной фигуры) будет равен

$$d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j.$$

Элемент объема равен

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Градиент скалярной функции определяется как сумма производных по направлениям

$$\nabla \psi = \mathbf{a}_1 \partial \psi / \partial s_1 + \mathbf{a}_2 \partial \psi / \partial s_2 + \mathbf{a}_3 \partial \psi / \partial s_3 = \mathbf{a}_i \partial \psi / \partial s_i,$$

где  $\mathbf{a}_i$  – единичные вектора, нормальные к поверхностям  $q_i = \text{cst}$ ,  $ds_i = h_i dq_i$  (сфера, конус и полуплоскость). Аналогично можно определить и дивергенцию вектора в произвольных криволинейных координатах, и лапласиан, который

нам в данном случае необходим. Лапласиан в сферических координатах получится подстановкой коэффициентов Ламе в формулу для произвольных криволинейных координат

$$\Delta\psi = [\partial (h_2 h_3 \partial\psi / h_1 \partial q_1) / \partial q_1 + \partial (h_3 h_1 \partial\psi / h_2 \partial q_2) / \partial q_2 + \\ + \partial (h_1 h_2 \partial\psi / h_3 \partial q_3) / \partial q_3].$$

Трудоемкая процедура подстановки опущена, имеем

$$\Delta_{\text{сф}}\psi = \partial (r^2 \partial\psi / \partial r) / r^2 \partial r + \partial (\text{Sin}\theta \partial\psi / \partial\theta) / r^2 \text{Sin}\theta \cdot \partial\theta + \\ + \partial^2\psi / r^2 \text{Sin}^2 \theta \partial\varphi^2.$$

## 5.2 Решение уравнения Шредингера в сферической системе координат

Приближение сферической симметрии позволяет избавиться от зависимостей по углам  $\theta$  и  $\varphi$ .

$$\psi = \psi(r, t) \underbrace{\Theta(\theta) \Phi(\varphi)}_{\text{cst}}$$

$$\Delta_{\text{сф}}(r, t) = \partial (r^2 \partial\psi / \partial r) / r^2 \partial r.$$

Будем рассматривать также стационарный случай и опустим зависимость от времени, используя подстановку

$$\psi = \varphi(r) \exp(-i Et/\hbar) \Rightarrow$$

$$2m(E + q_e^2 / 4\pi\epsilon_0 r) \varphi / \hbar^2 = - \partial (r^2 \partial\varphi / \partial r) / r^2 \partial r.$$

Можно показать эквивалентность

$$\partial (r^2 \partial\varphi / \partial r) / r^2 \partial r = (r \partial\varphi / \partial r + r^2 \partial^2\varphi / \partial r^2) / r^2 = \partial r \partial\varphi / r \partial r \partial\varphi + \\ + r \partial(\partial\varphi / \partial r) / \partial r = \partial^2(r\varphi) / r \partial r^2.$$

Получим уравнение в виде

$$d^2(r\varphi)/r dr^2 = -2m(E + q_e^2/4\pi\epsilon_0 r)\varphi/\hbar^2.$$

Пере обозначим

$$e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0, r = \hbar^2\rho/me^2 = r_B\rho, E = me^4\epsilon/2\hbar^2 = E_R\epsilon.$$

Здесь  $r_B$  – Боровский радиус,  $E_R$  – энергия Ридберга. После подстановки получим

$$me^2 d^2(\hbar^2\rho\varphi/me^2)/\hbar^2\rho d(\hbar^2\rho/me^2) = (-2m/\hbar^2)(me^4\epsilon/2\hbar^2 + e^2 m e^2/\hbar^2\rho)\varphi.$$

Сокращение дает

$$d^2(\rho\varphi)/d\rho^2 = -(\epsilon + 2/\rho)\varphi\rho.$$

Пусть также  $\rho\varphi = f$ . Получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка.

$$d^2f/d\rho^2 = -(\epsilon + 2/\rho)f.$$

Проведем подстановку вида  $f(\rho) = e^{-\alpha\rho}g(\rho)$ :

$$d^2f/d\rho^2 = d(d(e^{-\alpha\rho}g(\rho))/d\rho)/d\rho = e^{-\alpha\rho}(d^2g/d\rho^2 - 2\alpha dg/d\rho + \alpha^2g) \Rightarrow$$

$$d^2g/d\rho^2 - 2\alpha dg/d\rho + (2/\rho + \epsilon + \alpha^2)g = 0.$$

Заданный нами параметр  $\alpha$  можно выбрать произвольно. Пусть  $\alpha^2 = -\epsilon$ , тогда

$$d^2g/d\rho^2 - 2\alpha dg/d\rho + 2g/\rho = 0. \quad (*)$$

Решение представим в виде ряда

$$g(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^k \Rightarrow dg/d\rho = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \rho^{k-1},$$

$$d^2g/d\rho^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) a_k \rho^{k-2}.$$



Проведем подстановку в уравнение (\*). Пере обозначим предварительно  $k \rightarrow k+1$  в последней сумме. От такого пере обозначения сумма не изменится с большой точностью

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_{k+1} \rho^{k-1} - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \rho^{k-1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \rho^{k-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [k(k+1) a_{k+1} - 2\alpha k a_k + 2a_k] \rho^{k-1} = 0$$

Ряд обратиться в 0, если выражение в квадратных скобках будет равно нулю,  $k > 1$ . Получим рекуррентное соотношение.

$$a_{k+1} = 2(\alpha k - 1) a_k / k(k+1).$$

### 5.3 Квантовый характер решений уравнения Шредингера

Выбирая  $a_1$ , можно получить все члены ряда, удовлетворяющие уравнению (\*), а с его помощью выписать и  $\phi$ -решения уравнения Шредингера. При этом наиболее важно то, что решения будут удовлетворяться при дискретных значениях  $k$ . Имеем из рекуррентного соотношения

$$\alpha = [k(k+1) a_{k+1} - 2 a_k] / 2 k a_k \Rightarrow$$

$$\varepsilon = -\alpha^2 = \{[k(k+1) a_{k+1} - 2 a_k] / 2 k a_k\}^2.$$

То есть  $\varepsilon$  выражается через дискретные значения  $k$ . Если брать большие значения  $k$ , то определяться значения  $g(\rho)$  при достаточно больших расстояниях  $\rho$  электрона от ядра атома водорода (то есть протона). Пусть  $k \gg 1$

$$a_{k+1} \cong 2\alpha a_k / k \Rightarrow \alpha = k a_{k+1} / 2 a_k \Rightarrow \varepsilon = -\alpha^2 = -(a_{k+1} / 2 a_k)^2 k^2.$$

Более того, если выбрать  $\alpha = 1/n$  (то есть дискретной, раз есть дискретный характер зависимости от энергии), то при  $k=n$  ряд оборвется, так как в рекуррентном соотношении обратиться в 0  $n$ -й член. Это означает, что мы получим заведомо конечные решения для функции

$$f(g) = e^{-\alpha \rho} g(\rho) = e^{-\alpha \rho} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^k,$$

то есть для всего пространства от 0 до  $\infty$ . Тогда, так как  $\alpha = 1/n \Rightarrow$

$$- \varepsilon = 1/n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно и

$$E = E_R \varepsilon = - E_R / n^2 = - me^4 / 2\hbar^2 n^2.$$

Таким образом, волновая теория Шредингера позволила воспроизвести результат Бора прямо из основного уравнения Шредингера движения электрона. Имеем далее с учетом  $\alpha = 1/n$

$$\varphi_n = f_n(\rho) / \rho_n = e^{-\rho/n} g_n(\rho) / \rho = \frac{e^{-\rho/n} \sum_{k=1}^n a_k \rho^k}{\rho}, \quad (g_n(\rho) = \sum_{k=1}^n a_k \rho^k).$$

1. Пусть  $n = 1$  (основное состояние)

$$g_1 = a_1 \rho, \quad \varphi_1 = a_1 e^{-\rho}, \quad a_1 = 1 \Rightarrow \varphi_1 = e^{-\rho}.$$

Если  $\varphi$  трактуется как вероятность (в данном случае не нормированная, например, к единице), то максимальной является вероятность найти электрон ближе к протону (в самом протоне она не определена), и она экспоненциально спадает при удалении от протона.

2. Пусть  $n = 2$

$$g_2 = a_1 \rho + a_2 \rho^2 = \rho - \rho^2/2. \quad [a_2 = 2(k/2 - 1) / k(k+1) = (k=1) = -1/2].$$

$$\varphi_2 = (1 - \rho/2) e^{-\rho/2}.$$

3.  $n = 3$

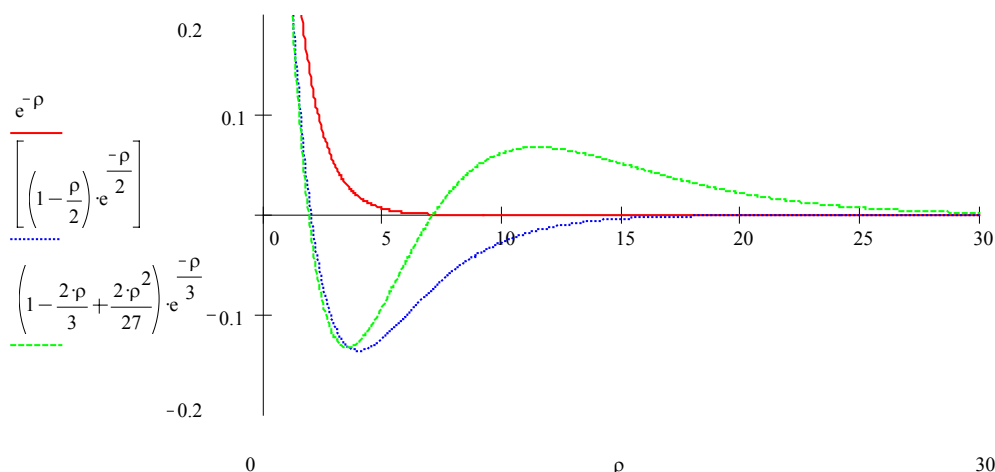
$$a_2 = 2(k/3 - 1) / k(k+1) = (k=1) = -2/3,$$

$$a_3 = 2(k/3 - 1)(-2/3) / k(k+1) = 2/27,$$

$$g = a_1 \rho + a_2 \rho^2 + a_3 \rho^3 = \rho - 2 \rho^2 / 3 + 2 \rho^3 / 27,$$

$$\varphi = (1 - 2\rho/3 + 2 \rho^2/27) e^{-\rho/3}.$$

График зависимости  $\varphi_n(\rho)$  имеет вид для трех значений  $n = 1, 2, 3$  такой, что с



ростом  $\rho$  возрастает количество корней и экстремумов

Напомним, что при  $\rho = 1$  расстояние соответствует Боровскому радиусу.

## § 6 Смысл $\psi$ - функции и соотношение неопределенностей

### 6.1 О смысле $\psi$ - функции

Итак, электрон в атоме частица-волна. Опыты по интерференции Дэвиссона и Джермера (1927) показали, что даже при пропускании по одному электрону при достаточной экспозиции (а не только сколько-нибудь существенного пучка) через кристалл никеля возникала интерференционная (или дифракционная) картина. Это доказывает, что и отдельные частицы обладают волновыми свойствами.

При прохождении соответствующей электронной волны через кристалл, она разбивается на несколько дифракционных пучков. Трудно допустить, что в каждом из пучков находится какая-то доля электрона. При этом счетчик электронов срабатывает по предположению при попадании в него целого электрона.

Несостоятельность модели частицы как волнового пакета во-первых состоит в том, что он сравнительно быстро "расплывается" со временем вследствие дисперсии фазовых скоростей. Во-вторых взаимодействие двух электронов как волновых пакетов в трехмерном пространстве и вовсе трудно объяснить.

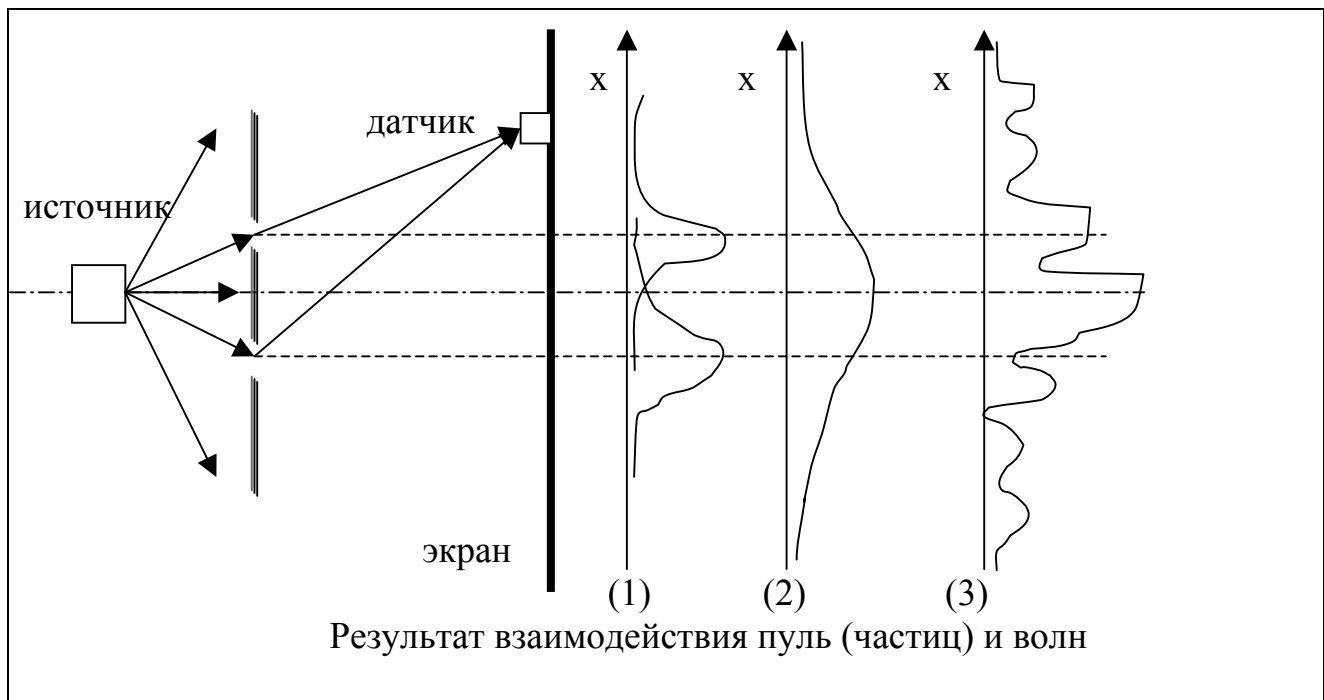
Существует еще одно наблюдаемое в природе волновое образование, довольно быстро распространяющееся без изменения размеров и формы – солитоны. Приведем описание солитонов, записанное двумя разными людьми. Шотландия, 1834 год, инженер: "Я следил за движением баржи, которую быстро тянула по каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась; но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась. Вместо этого она собралась около носа судна в состоянии бешеного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с бешеной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, то есть округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, несколько не снижая своей скорости ... после одной или двух миль погони верхом ... я потерял его в изгибах канала. ... С тех пор я обнаружил, что такие волны играют важную роль почти во всех случаях, когда жидкость оказывает сопротивление движению, ... ." Италия, 1908 год, Максим Горький: "Поднялась к небу волна высоты неизмеримой (во время землетрясения, С.М.), закрыла грудью половину неба и, качая белым хребтом, согнулась, переломилась, упала на берег и страшной тяжестью своею ... смыла весь берег". Японское слово "Цунами" означает "Большая волна в гавани". Максим Горький наблюдал в данном случае цунами, которые в океане образуются как солитон и выбрасываются на берег, вызывая разрушения. Большинство цунами солитонного происхождения.

Подразумевая волну-частицу, заметим, предварительно, что имея дело с решениями классического волнового уравнения мы определили интенсивность  $I$  излучения как среднее по времени от квадрата амплитуды волны ( $\xi_0$  – амплитуда обобщенной координаты конкретно воплощается в амплитуды расстояния, напряженности электрического и магнитного полей, и т.д. и т.п.) и применяли комплексные числа как математический прием, облегчающий расчеты. Решением уравнения Шредингера, также волнового, служит величина

$$\psi = C \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)],$$

являющаяся комплексной. Рассматривая только его вещественную часть при анализе решения, можно потерять часть решения, поэтому необходимо быть осторожным в этом смысле.

Представим опыт



Пусть из источника вначале стреляют пулями (1) и (2), а затем, по мере необходимости источник можно заменить на источник волн (или электронов, так как экспериментально доказаны их волновые свойства). График (1) – результат очередного открывания щелей. Он одинаков для пуля, волн и электронов. График (2) описывает поведение интенсивности на экране, если открыть обе щели. Для пуля интенсивности просто сложатся. График (3) иллюстрирует поведение результирующей интенсивности. Если открыть обе щели для волн (и электронов) получится интерференционная картина. (Заметим, забегая вперед, что суть противоречивости явления описываемого соотношениями неопределенностей Гейзенберга (о невозможности одновременно точного знания координаты и импульса объекта) скрыты именно в этом противоречии поведения волн и пуля).

Для волн мы имели

$$I_1 \sim E_1^2, I_2 \sim E_2^2, E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \delta, I = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1I_2} \cos \delta.$$

тогда

$$I \sim |\psi|^2 \sim \psi\psi^*, \text{ действительно } |\psi|^2 = |e^{i\omega t + \alpha}|^2 = |e^{i\omega t}|^2 e^{2\alpha} = e^{2\alpha}.$$

$$\psi\psi^* = e^{i\omega t + \alpha} e^{-i\omega t + \alpha} = e^{2\alpha}.$$

Дифракционная (так же как и интерференционная) картина для микро-частиц является проявлением статистической (вероятностной) закономерности,

согласно которой частицы оказываются в тех местах пространства, где интенсивность волн де Бройля наибольшая.

Так как вероятность обнаружить частицу не может быть отрицательной, то Макс Борн (1926г.) предложил модель, согласно которой волновому закону подчиняется  $\psi(x, y, z, t)$  – амплитуда вероятности (волновая функция,  $\psi$  – функция) и она может быть комплексной, а выражение  $|\psi|^2 \equiv \psi\psi^*$  назвал плотностью вероятности. Тогда сама вероятность обнаружить в момент  $t$  частицу в части пространства  $x, x + dx; y, y + dy; z, z + dz$  равна

$$P = |\psi|^2 dx dy dz = |\psi|^2 dV.$$

Здесь  $dV$  – элементарный объем. Так как вероятность нормируется обычно на единицу (вероятность обнаружить во всем возможном пространстве = 1), то

$$\int |\psi|^2 dV = 1.$$

(по всему пространству)

Заметим, что средние значения физических величин можно определить по формулам

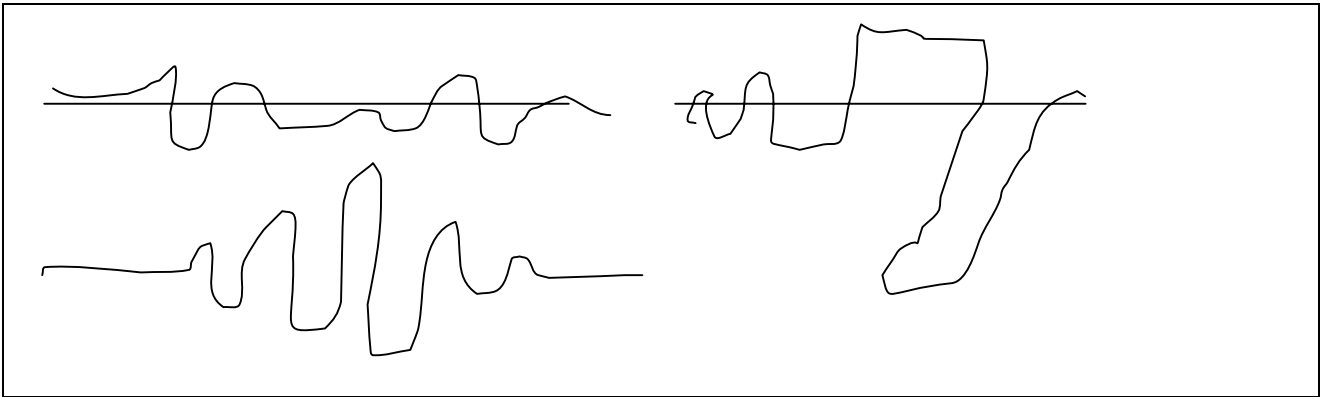
$$\langle x \rangle = \int |\psi|^2 x dV / \int |\psi|^2 dV, \text{ либо } \langle x \rangle = \sum |\psi|^2 x_n / \sum |\psi|^2.$$

## 6.2 О соотношениях неопределенностей Гейзенберга

Итак, зависимость от координат и времени теперь (здесь) определяется через волновую функцию  $\psi(\mathbf{r}, t)$  и амплитуда должна быть истолкована в понятиях вероятности. Это значит, что частицу вероятнее всего можно обнаружить там, где амплитуда волновой функции максимальна. Более точно: квадрат модуля волновой функции в данной точке является мерой вероятности обнаружить частицу (например, с помощью небольшого прибора) вблизи этой точки. Рассмотрим  $\psi(\mathbf{r}, 0)$ .

1. Если начальная волновая функция такова, что ее амплитуда равна 0 всюду за пределами малой области, то можно утверждать что (в момент  $t = 0$ ) частица находится в пределах этой области и ее положение известно довольно точно.
2. Если начальная волновая функция такова, что распространяется на большую область, в пределах которой ее амплитуда мало меняется, то частице нельзя приписать определенное положение в момент времени  $t = 0$ .

Примеры вещественных частей волновых функций (в общем виде комплексных)



Среди примеров есть волновой цуг, для которого и вовсе отсутствует понятие волны. Для простоты рассмотрим гармоническую волну (она также может быть вещественной частью волновой функции).

$$p = \hbar k = h / \lambda$$



Согласно рисункам

1. Сколько-нибудь точно определенное положение частицы требует максимально короткого цуга волн.
2. Точно известный импульс требует достаточно протяженного цуга волн (в пределе монохроматическую волну, чтобы иметь точное значение  $\lambda$ ).

Вывод: эти требования взаимно исключают друг друга, так как нельзя описать точно

$$\Delta p' = h / \lambda \Rightarrow \text{его приходится заменить на } \Delta p' \sim h / \Delta x,$$

$$\text{либо на } \Delta p' = h / \Delta \lambda !!! \Rightarrow \Rightarrow \Delta p' \Delta \lambda \sim h \Rightarrow \Delta p' \Delta x \sim h.$$

Такое соотношение справедливо для монохроматической волны длинной или короткой. Если рассматривать волны-пакеты, то у таких волн с такими цугами неопределенность в импульсе  $\Delta p$  больше, чем  $\Delta p'$  у монохроматической волны, тогда

$$\Delta p \Delta x \geq h . (*)$$

Получили соотношение неопределенностей Гейзенберга  
Получим второе соотношение неопределенностей

$$\Delta p = \Delta E / c = h \Delta \nu / c .$$

Подставим в (\*)

$$h \Delta \nu \Delta x / c \geq h \Rightarrow \Delta \nu \Delta t \geq 1 \Rightarrow \underline{\Delta \omega \Delta t \geq 1} .$$

Как можно видеть, соотношение является принципиально-существенным применительно к миру атомов, (по сравнению с миром привычных в обычной жизни человека размеров) и устанавливает пределы, за которыми принципы классической физики становятся не приемлемыми. Это естественно: "Классическая физическая система (с классическими импульсом и координатой), описываемая классическими динамическими переменными, которые якобы могут быть известны с произвольной точностью, является, конечно же, плодом абстракции и существует лишь в нашем воображении. В реальном мире таких систем нет. Это подтверждают эксперименты в мире атомов. Описывая реальную систему классическими атомами, мы допускаем приближение, а соотношение неопределенностей показывает степень его справедливости".



## Глава 4 Атомная физика твердых тел

### § 1 Типы связей атомов в твердых телах

Рассмотрим процессы объединения отдельных атомов в твердые тела, когда в один  $\text{см}^3$ , например, объединяются несметные количества атомов. Рост кристаллов как известно возможен из растворов и расплавов веществ. Отвердевание расплава происходит при его охлаждении. При этом от расплава отбираются, откачиваются горячие молекулы. Проследим процесс объединения атомов с энергетической точки зрения.

1. Атомы разведены достаточно далеко. Они свободны

$$E_{\text{своб}} = \sum E_{i \text{ свобод}}.$$

Их суммарная энергия складывается из энергии каждого атома.

2. Атомы сведены в твердое тело. Это им оказывается энергетически более выгодно и тогда

$$E_{\text{связ}} < E_{\text{своб}}.$$

Сравнительно не плотно упакованы атомы цезия в твердом теле  $n = 0,91 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ . Довольно плотно упакованы атомы бериллия  $n = 24,7 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ . Что удерживает атомы вместе? Эти силы – электрические. Перечислим типы связей атомов в твердых телах.

1. Ионная связь (гетерополярная) – притяжение положительных и отрицательных ионов друг к другу. NaCl, Li F, K J и др. Энергию связи называют еще когезионной энергией.

Таблица когезионных энергий ионных кристаллов

$E_c, 10^{-18}$ Дж/молекулу	Li	Na	k	Rb	Cs
F	<u>1,68</u>	1,49	1,32	1,26	1,20
Cl	1,38	<u>1,27</u>	1,15	1,11	
Br	1,32	1,21	1,10	1,06	
I	1,23	1,13	1,04		

Рассчитаем когезионную энергию, приходящуюся на 1 моль NaCl:

$$E = E_c N_A = 1,27 \cdot 10^{-18} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 750 \text{ кДж}.$$

2. Ковалентная или атомная связь (гомеополярная) – строение решетки, при котором число атомов ближайших к рассматриваемому атому равно валентности элемента. Валентные электроны атомов обобществлены (происходит насыщение валентности). Когезионная энергия составляет 700-1200 кДж/моль.
3. Молекулярная связь (связь сцепления – слабая связь без насыщения валентности) – обусловлена силами Ван-дер-Ваальса. Почти все органические кристаллы, кристаллы из инертных газов, например Hg<sub>2</sub>, Ar, CH<sub>4</sub> . Когезионная энергия – 8 кДж/моль.
4. Металлическая связь – обобществлены 1-2 внешних электрона нестроенных оболочек. Эти электроны слабо связаны со своим элементом, обобществлены и ведут себя в кристалле подобно электронному газу. Между положительными ионами действуют силы отталкивания, а электроны уравнивают эти силы и удерживают ионы в равновесии. Эти подвижные электроны обуславливают очень высокую электро- и теплопроводность металлов. (За-

метим, что сжиженные инертные газы также образуют металлическую связь и при сверхнизких температурах становятся металлоподобными. Так как они сферически высоко симметричны, то пришлось предположить при  $T=0^\circ\text{K}$  наличие так называемых нулевых колебаний (чтобы объяснить их способность объединяться в металлоподобную молекулу)).

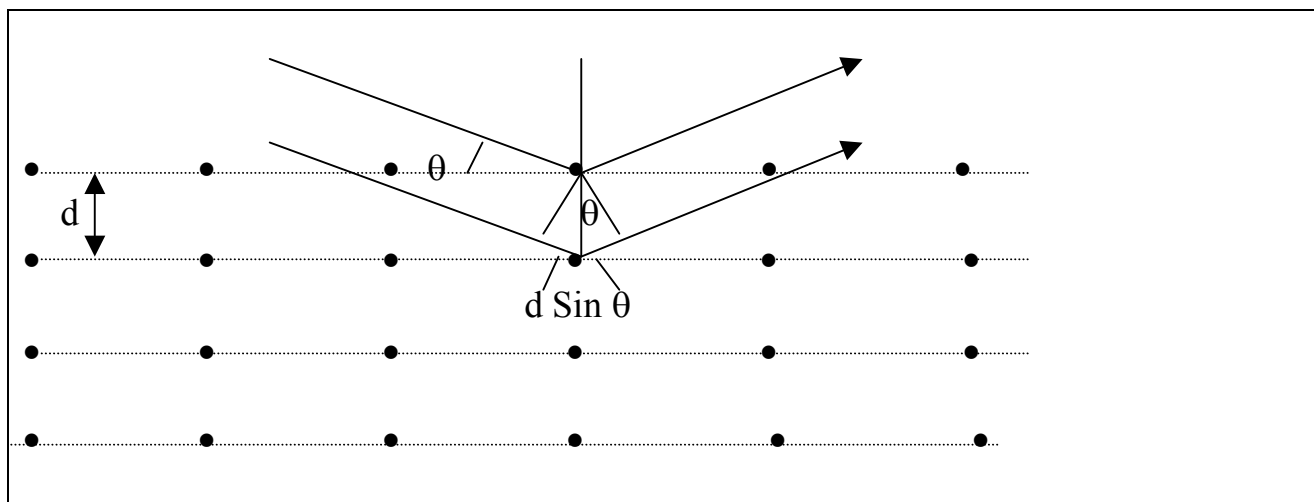
5. Отметим отдельно водородную связь. Устройство атома водорода сходно с устройством атомов металлов, но имеет следующие особенности:

- Ионный остаток H – голый протон размером  $10^{-13}$  см (1 F), в  $10^5$  раз меньше любого ионного остатка
- Водороду не хватает одного электрона для заполнения до устойчивой двух электронной оболочки (как у He)
- Первый потенциал ионизации относительно очень высок:  $13,59 \text{ эВ} \approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} / \text{атом} = 1200 \text{ кДж/моль}$ . Связь в  $\text{H}_2$  похожа на ковалентную, но образует лишь одну ковалентную связь.

## § 2 Дифракция рентгеновских лучей

По Брэггам У.Г. и У.Л. (1913г.) – кристаллы дают характерную картину рентгеновского излучения: для некоторых длин волн и направлений падения лучей наблюдаются интенсивные максимумы рассеянного излучения.

Представим себе кристалл, состоящим из симметрично расположенных образований (атомов)



Подсчет разности хода для двух разных лучей, отраженных от смежных плоскостей дает  $2 d \sin \theta$ , тогда условие максимума интерференции запишется в виде

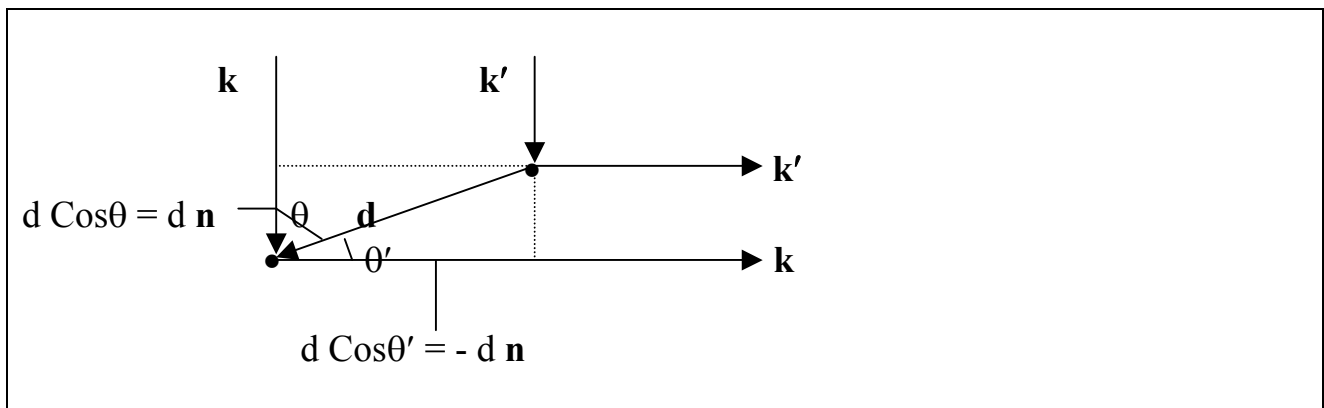
$$2d \sin\theta = n \lambda.$$

Это равенство называется формулой Вульфа - Брэггов.

По Лауэ кристалл состоит из тождественных объектов (атомов, групп атомов), размещенных в узлах решетки и каждый объект может рассеивать падающее на него излучение. Надо искать точки, в которых ощутим результат интерференции. Для удобства описания кристаллических структур были введены понятия прямой и обратной решетки, решетки Бравэ. Можно также говорить о примитивной решетке – ячейке Вигнера-Зейтца. Эти понятия справедливы как в обычном трехмерном пространстве, так и в пространстве обратном линейному трехмерному. Элементарную ячейку Вигнера-Зейтца для обратной решетки называют зоной Бриллюэна. Пусть  $\mathbf{G}$  – вектор трансляции обратной решетки

$$\mathbf{G} = k_1 \mathbf{b}_1 + k_2 \mathbf{b}_2 + k_3 \mathbf{b}_3.$$

Согласно Лауэ расчеты интерференции максимумов производятся в  $\mathbf{k}$  – пространстве (пространстве волновых векторов)



Для конструктивной интерференции (образования максимума) необходимо, чтобы изменение волнового вектора  $\mathbf{K} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  было равно одному из векторов обратной решетки. Разность хода двух лучей, смещенных друг относительно друга на постоянную решетки, равна

$$d \cos\theta + d \cos\theta' = d (\mathbf{n} - \mathbf{n}').$$

$\mathbf{n}, \mathbf{n}'$  - орты волновых векторов  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ . Тогда условие конструктивной интерференции в прямом пространстве имеет вид

$$d(\mathbf{n} - \mathbf{n}') = m\lambda.$$

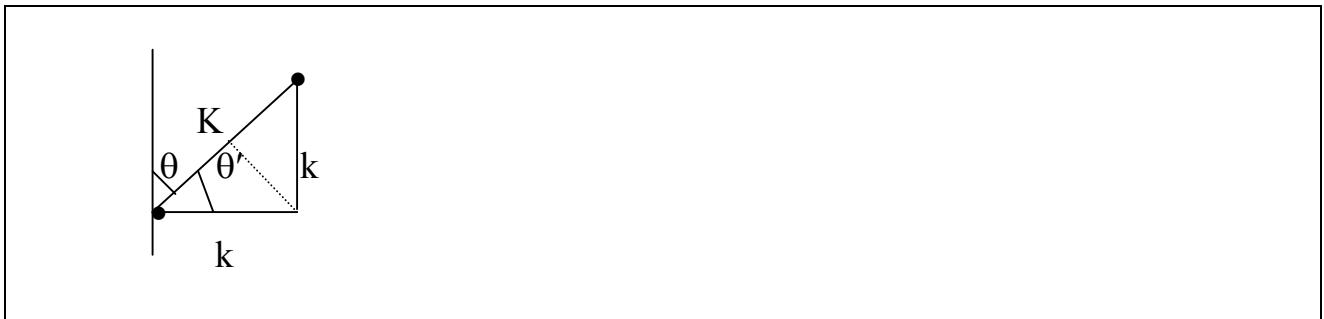
Умножая обе части равенства на  $2\pi / \lambda$  получаем аналогичное условие для волновых векторов

$$\mathbf{dK} = \mathbf{d}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = m 2\pi ,$$

а так как узлы решетки смещены в кристалле на вектор трансляции, то следовательно  $\mathbf{d} = \mathbf{R}$  и

$$\mathbf{R}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 2\pi m \Rightarrow \exp [i (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{R}] = 1.$$

Так как длина волны после рассеяния предполагается не меняющейся, то модули волновых векторов равны  $k = k' = k$



$$K/2 = k \cos \theta' = k \sin \theta \Rightarrow K = 2 k \sin \theta$$

$$d 2k \sin \theta = 2\pi m \Rightarrow \underline{2d \sin \theta = m\lambda}.$$

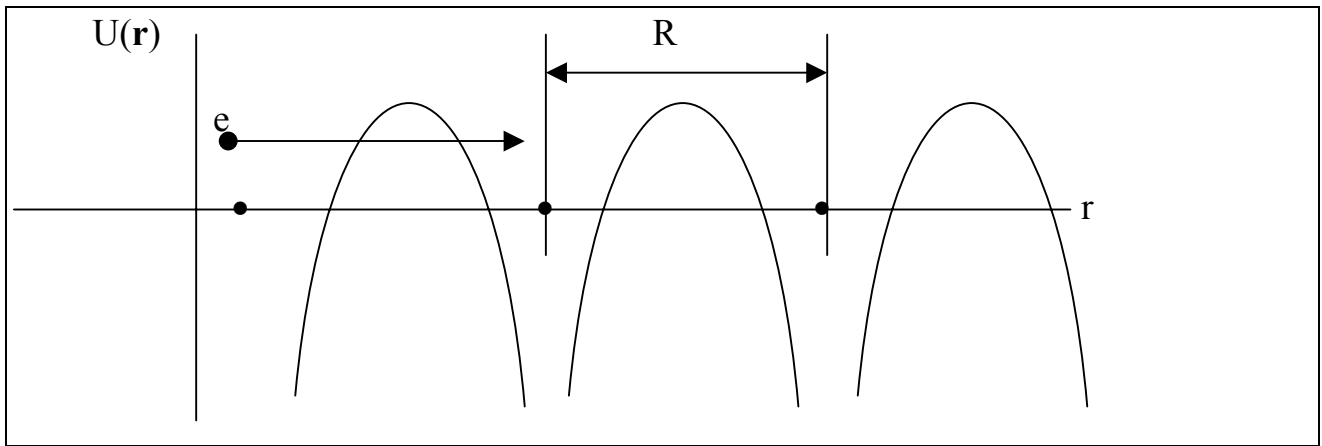
Получился тот же результат, что и у Брэггов.

### § 3 Образование энергетических зон в твердых телах

Итак, ионные остатки в твердых телах образуют периодическую решетку, потенциал (потенциальная функция, потенциальная энергия электрона) в которой меняется в зависимости от расстояния периодически

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r} + \mathbf{R}).$$

Период решетки (характерный период) составляет размер порядка  $10^{-8}$  см.



Тогда уравнение Шредингера для электрона в стационарном случае имеет вид

$$-\hbar^2 \nabla^2 \psi / 2m + U(\mathbf{r}) \psi = E \psi.$$

По теореме Блоха (без доказательства) решением такого уравнения является решение вида

$$\psi_{nk}(\mathbf{r}) = U_{nk}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Экспонента отражает факт присутствия в решении плоской волны, а коэффициентом при экспоненте служит функция с периодичностью решетки Бравэ

$$U_{nk}(\mathbf{r}) = U_{nk}(\mathbf{r} + \mathbf{R}).$$

Вернемся к уравнению Шредингера для свободного электрона и возьмем от него одно измерение

$$-\hbar^2 \partial^2 \psi / 2m \partial x^2 = E \psi(\mathbf{r}).$$

Проверим дифференцированием решение вида

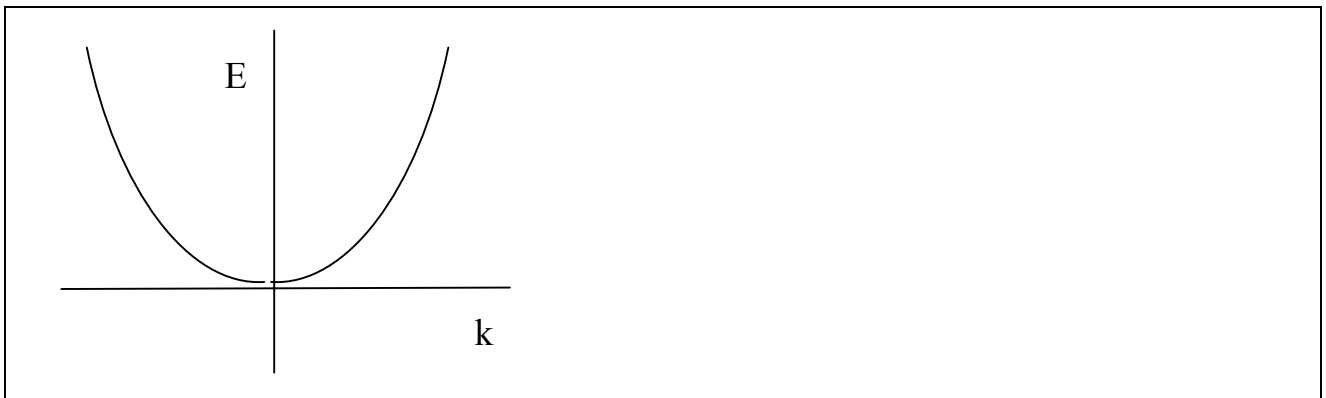
$$\psi = \exp(i k x) / \sqrt{V}$$

$$-\hbar^2 (i k)^2 / 2m = E \Rightarrow \hbar^2 k^2 / 2m = p^2 / 2m.$$

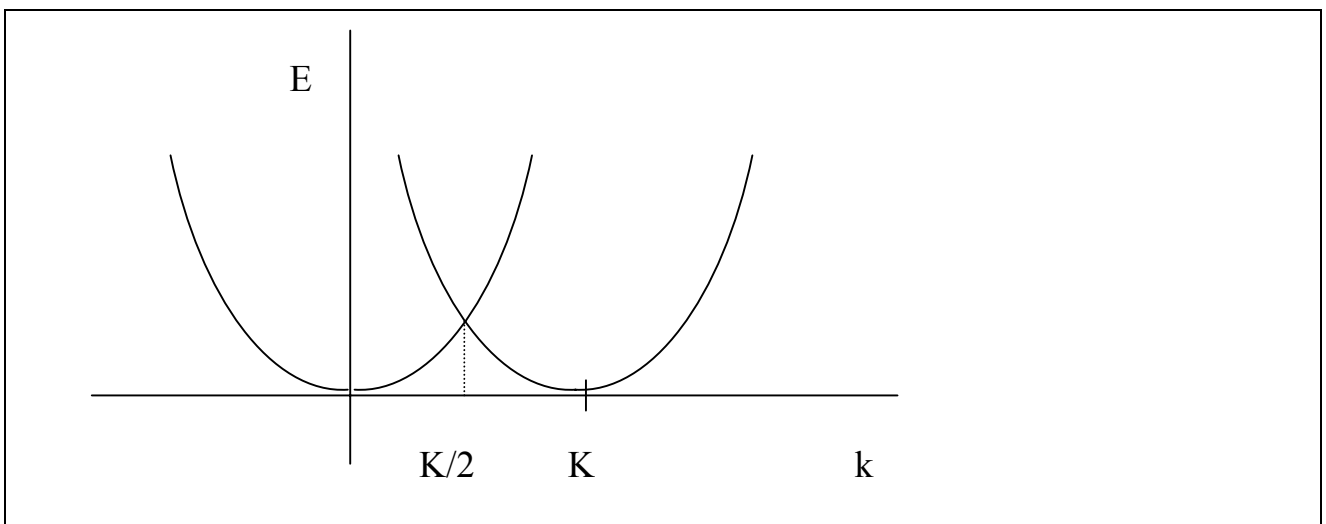
В твердом теле для электронов Блоха, то есть квази свободных электронов, перемещающихся внутри твердого тела после соответствующей подстановки можно получить похожее выражение

$$E = \hbar^2 k'^2 / 2m = p'^2 / 2m.$$

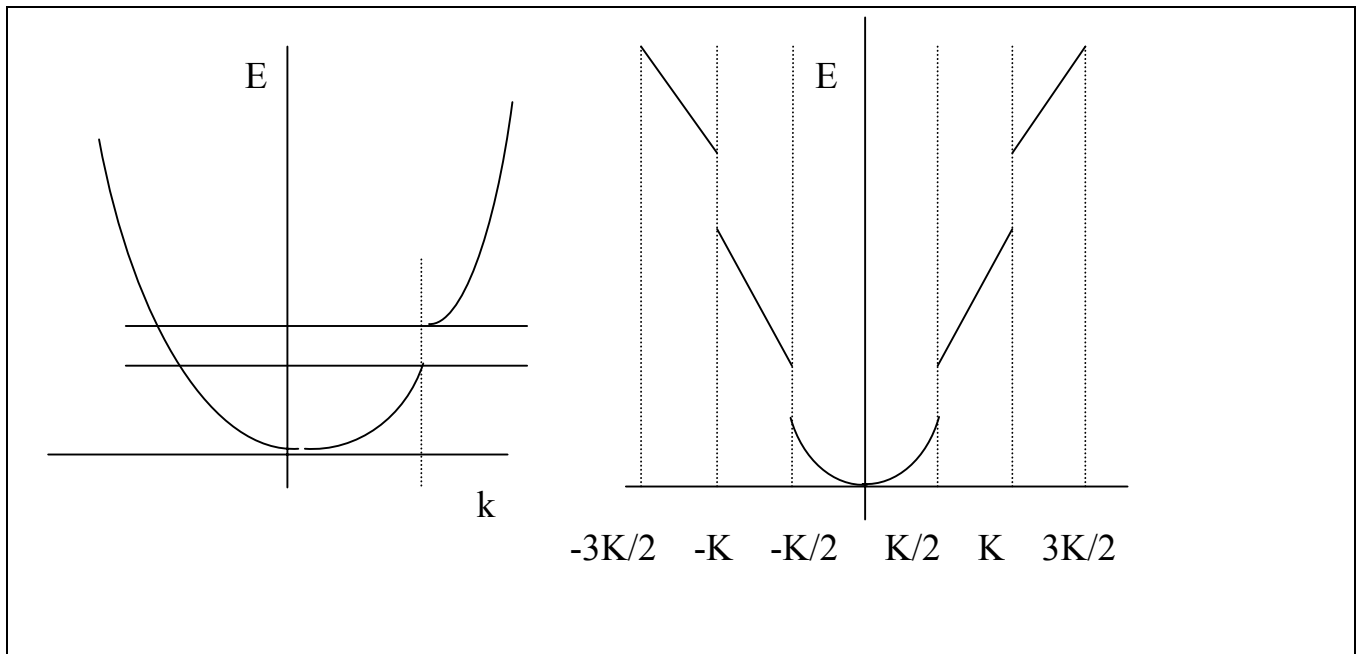
$p'$  называют квазиимпульсом. Вид зависимости  $E(k)$  как для свободного так и для "блоховского" электрона по виду одинаковый – парабола. Свободный электрон-волна обладает определенным волновым числом. Для него разрешены все энергии непрерывного спектра, причем график характеризует собственно электрон



Однако в твердом теле на электрон накладывается периодическое поле, составляющих твердое тело атомов. Этот факт приводит к изменению вида зависимости  $E(k)$ . В точках  $k = K$  зависимость для энергии должна быть параболической.



В точках пересечения парабол (например при  $k=K/2$  как это показано для одномерного случая на рисунке) возникает так называемое вырождение (два одинаковых значения энергии для одного и того же значения  $k$ ). Можно показать, что это вырождение можно снять, но при этом, но при этом в данной точке возникает расщепление и обе кривые имеют наклон равный нулю (касательной к ним обеим является горизонталь. При учете всех брэгговских плоскостей в кристалле получается целая совокупность кривых (искаженных частей парабол)



Представленные рассуждения хотя и чрезвычайно "грубы", но, однако, ясно иллюстрируют факт появления в твердых телах зон запрещенных энергий для электронов, которые однозначно следуют из экспериментов с твердыми телами.

Заметим, что при наличии в кристалле различного рода несовершенств (например, инородных примесей или смещений собственных атомов) внутри запрещенных зон могут образовываться локальные уровни энергии для электронов или их дискретные наборы, что учитывается и широко используется при производстве оптоэлектронной техники.



## **Глава 5    Некоторые сведения по физике атомного ядра**

### **§ 1 Радиоактивность. Закон радиоактивного распада**

#### **1.1 Виды радиоактивности**

Самопроизвольное изменение состава атомного ядра, происходящее за время существенно большее характерного ядерного времени  $10^{-22}$  секунды (время, в течение которого  $\alpha$ -частица пролетает диаметр ядра) называют радиоактивностью . Различают

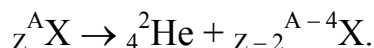
1.  $\alpha$  - распад
2.  $\beta$  - распад
3. Спонтанное деление атомных ядер
4. Протонный распад и др. ...

Элементарных частиц известно более 200 штук. Остановимся более подробно на первых трех видах радиоактивности

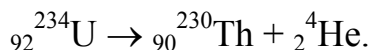
$\alpha$  - распад - самопроизвольный процесс испускания  $\alpha$ -частиц, в результате которого массовое число ядра уменьшается на единицу, а зарядовое на две единицы заряда.

$$A = N + Z.$$

$A$  – массовое число,  $N$  – число нейтронов в ядре,  $Z$  – число протонов в ядре.  
Схема реакции



${}_2^4\text{He}$  – дважды ионизованный атом гелия. Пример

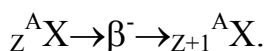


Известно более двухсот  $\alpha$ -распадающихся ядер. В данной реакции участвуют изотопы (элементы постоянного заряда, но с разными массовыми числами) элементов  ${}^{238}\text{U}$  и  ${}^{232}\text{Th}$ .

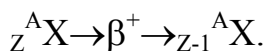
$\alpha$ -частицы, вылетающие при распаде из ядер имеют энергии в узких пределах 4 – 9 МэВ для тяжелых ядер (наш пример).

$\beta$  - распад – самопроизвольный процесс, в котором нестабильное ядро превращается в ядро изобар ( $A$  – const) – меняет заряд в результате превращения нейтрона в протон или наоборот протона в нейтрон). Различают

i. Электронный  $\beta^-$  распад – ядро испускает электрон

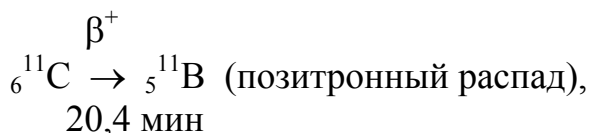
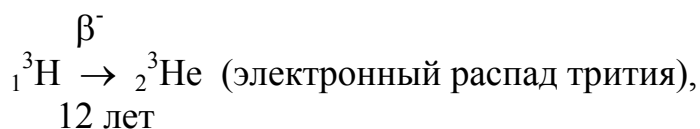


ii. Позитронный  $\beta^+$  распад – ядро испускает позитрон



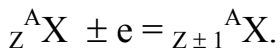
iii. Электронный захват или так называемый К-захват – ядро поглощает электроны оболочки своего атома (обычно у тяжелых ядер К-слоя, отсюда – К-захват). Заметим, что  $\beta$  – распады – явление даже не внутриядерное, а между нуклонное.

Примеры:



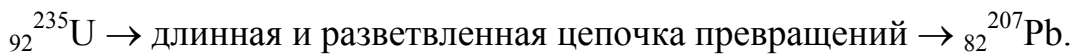
К-захват  
 ${}_4^7\text{Be} \rightarrow {}_3^7\text{Li}$   
 53,6 дней.

Изотопы –  $Z = \text{cst}$ , изобары –  $A = \text{cst}$ , изотоны –  $N = \text{cst}$ . Итак, при  $\beta$  - распаде ядро превращается в соседний с ним изобар.  $Z$  меняется на  $\pm 1$ .

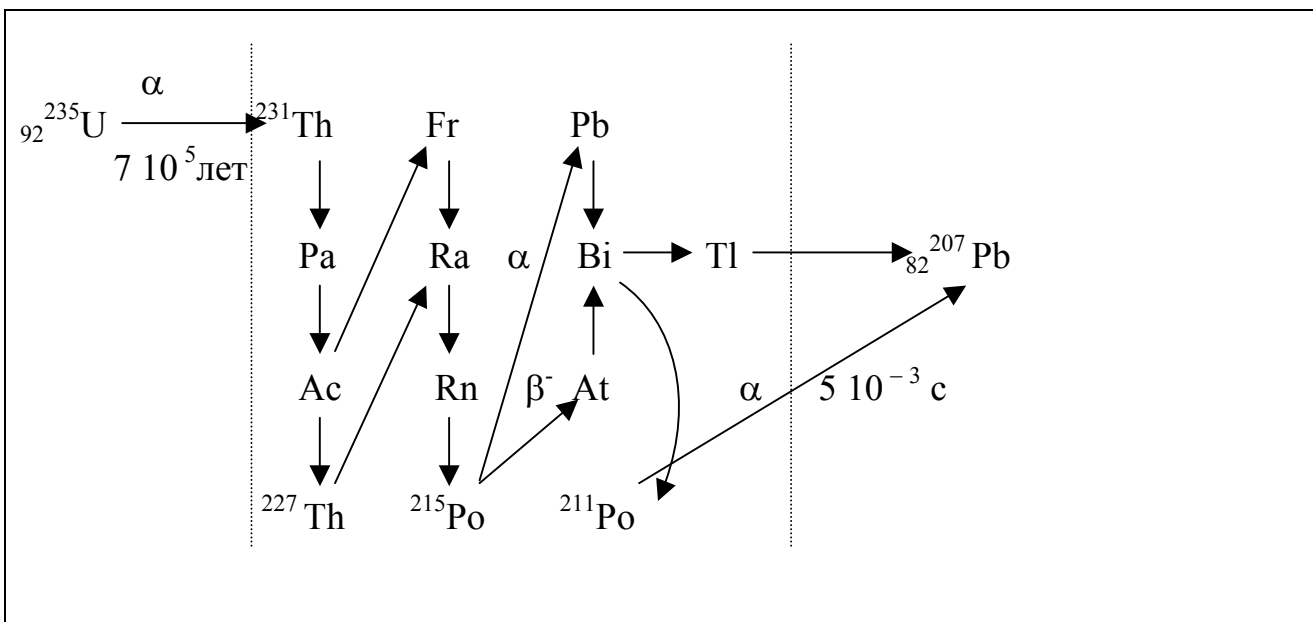


Здесь же упомянем и о  $\gamma$ -излучении ядер. Ядро может быть возбуждено. При этом говорят о более или менее высоких или низких энергетических состояниях ядер. При этом  $A, Z, N = \text{cst}$ .

Спонтанное деление ядер (распад ядер). Рассмотрим пример



$\Delta A = 237 - 207 = 28$  ед. массы,  $\Delta Z = 92 - 82 = 10$  ед. заряда. Всего в такой цепочке участвуют 13 промежуточных радиоактивных ядер. Часто такие ряды заканчиваются на  ${}^{207,206,208}\text{Pb}$ , но не обязательно. Времена распадов бывают самые разные от  $5 \cdot 10^{-3}$  с (с, мин, час, дни, годы) до  $7 \cdot 10^5$  лет в данном примере. Вообще, если время жизни ядра больше  $10^{-12}$  с, то о нем принято говорить как о стабильном ядре, а если меньше, то – не стабильном.



О единицах радиоактивного распада. Естественной единицей радиационной активности является 1 распад в секунду = 1 Бк (Беккерель) – принята в системе единиц СИ.

1 Ки (Кюри) =  $3,7 \cdot 10^{10}$  Бк, 1 Рд (Резерфорд) =  $10^6$  Бк.

## 1.2 Основной закон радиоактивного распада

Пусть  $N$  – произвольное число радиоактивных ядер (не путать с числом нейтронов). Оно со временем по мере распада ядер уменьшается. Если начать отсчет времени в момент  $t$ , то в этот момент исходное количество ядер равно  $N$

$$t - N$$

$$t + \Delta t - N - \Delta N \Rightarrow -\Delta N \sim N \Delta t, N \ll \Delta N.$$

Получили, что убыль радиоактивных ядер,  $-\Delta N$ , пропорциональна исходному их числу и промежутку времени, в течение которого наблюдается излучение. Вводим коэффициент с целью уравнивать обе части полученного выражения и используем предельный переход

$$dN = -\lambda N dt \quad | \int$$

$$\ln N = -\lambda t + \ln N_0 \Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

$N$  – число ядер, не распавшихся к данному моменту времени,  $t$ ,  $\lambda$  – постоянная распада  $[\lambda] = \text{с}^{-1}$ .

Характерное время распада можно получить, например, так. Пусть

$$N = N_0 / e \Rightarrow e^{-1} = e^{-\lambda t} \Rightarrow t = 1 / \lambda = \tau.$$

$\tau$  – характерное время распада, время, за которое распадается  $1/e$  – ая часть исходного количества ядер.

Также пользуются понятием периода полураспада. Получим его.

$$N = N_0/2 \Rightarrow 2^{-1} = e^{-\lambda t} \Rightarrow t = T = \ln 2 / \lambda.$$

$T$  – время, за которое распадается половина всех радиоактивных ядер.

## § 2 Энергия связи ядер

Энергия связи ядра есть та минимальная работа, которую надо произвести, чтобы полностью расщепить ядро на составляющие его нуклоны.

Так энергия связи одного протона с одним нейтроном в ядре рассчитывается следующим образом

$$E_{\text{св. p}} = E_{\text{св.}}(Z, A) - E_{\text{св.}}(Z - 1, A - 1)$$

$$E_{\text{св. n}} = E_{\text{св.}}(Z, A) - E_{\text{св.}}(Z, A - 1).$$

То есть энергия связи нуклона равна энергии связи ядра с нуклоном минус энергия связи ядра без этого нуклона. Энергию связи ядра можно записать в виде

$E_{\text{св.}}(Z, A) = \underbrace{Z M_p + N M_n}_{\text{суммарная энергия свободных нуклонов}} - \underbrace{M(Z, A)}_{\text{энергия ядра с нуклонами}} \quad (*)$
--

Здесь  $M \equiv E = mc^2$  – полная энергия частицы, энергия массы покоя ее, включая (или исключая) энергию связи в зависимости от того свободна частица или связана в ядре. Массы частиц измеряются экспериментально спектрографическим методом.

Определим понятие дефекта массы ядра,  $\Delta_{\text{яд.}}(Z, A)$  как разность между собственно массой рассматриваемого ядра  $M_{\text{яд.}}$  (обычно выражаемой в единицах массы) и соответствующим массовым числом,  $A$ . (Массовое число определено как сумма масс отдельных частиц, составляющих ядро – целое число)

$$\Delta_{\text{яд.}}(Z, A) = M_{\text{яд.}}(Z, A) - A_{\text{яд.}}, \quad M_{\text{яд.}} = \Delta_{\text{яд.}} + A \text{ то есть } M_{\text{яд.}} > A \quad (1)$$

$$M_p = \Delta_p + 1, \quad M_n = \Delta_n + 1. \quad (2,3)$$

Найдем связь между энергией связи ядра и дефектом массы. Подставим (1,2 и 3) в (\*)

$\begin{aligned} E_{\text{св. яд}} &= Z(\Delta_p + 1) + N(\Delta_n + 1) - (\Delta_{\text{яд.}} + A) = & (*) \\ &= Z\Delta_p + \underline{Z} + N\Delta_n + \underline{N} - \Delta_{\text{яд.}} - \underline{A} = Z\Delta_p + N\Delta_n - \Delta_{\text{яд.}} = \underline{\Sigma \Delta_{\text{нукл.}}} - \underline{\Delta_{\text{яд.}}} \end{aligned}$
---

Здесь  $\Delta_{p, n, \text{нукл.}, \text{яд.}}$  – дефекты масс протона, нейтрона, нуклонов, ядра.

Наличие энергии связи (а также дефекта масс) – факт природы. К нему надо относиться также, как к энергии, выделяющейся при сгорании горючих веществ. Во всех случаях происходит выделение (освобождение) имеющейся (как-то накопленной) в них внутренней энергии в виде энергии различных связей. Надо уметь эту энергию высвободить. В одних случаях достаточно поднести горящую спичку... .

Пример. Расчет энергии связи ядра атома  ${}^4_2\text{He}$ . Запишем массы протона, нейтрона и  $\alpha$ -частицы (ядра атома гелия)

$$M_p = 938,2796 \text{ МэВ} = 1,00722764 \text{ а.е.м.}$$

$$M_n = 939,5731 \text{ МэВ} = 1,008655 \text{ а.е.м.}$$

$$M_\alpha = 4,001506 \text{ а.е.м.}$$

Их массовые числа равны

$$A_p = 1, A_n = 1, A_{\text{He}} = 4 \text{ а.е.м.}$$

Энергию связи находим по формуле для дефекта массы (\*\*). Округлим числа до предпоследнего отличающегося разряда.

$$\Delta p = 1,0073 - 1 = 0,0073, \Delta_n = 1,0087, \Delta_\alpha = 0,0015 \text{ а.е.м.}$$

$$E_{\text{св. He}} = (2 \cdot 0,0073 + 2 \cdot 0,0087) - 0,0015 = 0,0305 \text{ а.е.м.}$$

$$1 \text{ а.е.м.} = \begin{cases} 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ 931,4 \text{ МэВ} \approx 10^3 \text{ МэВ} \Rightarrow E_{\text{св. He}} \approx 30 \text{ МэВ.} \end{cases}$$

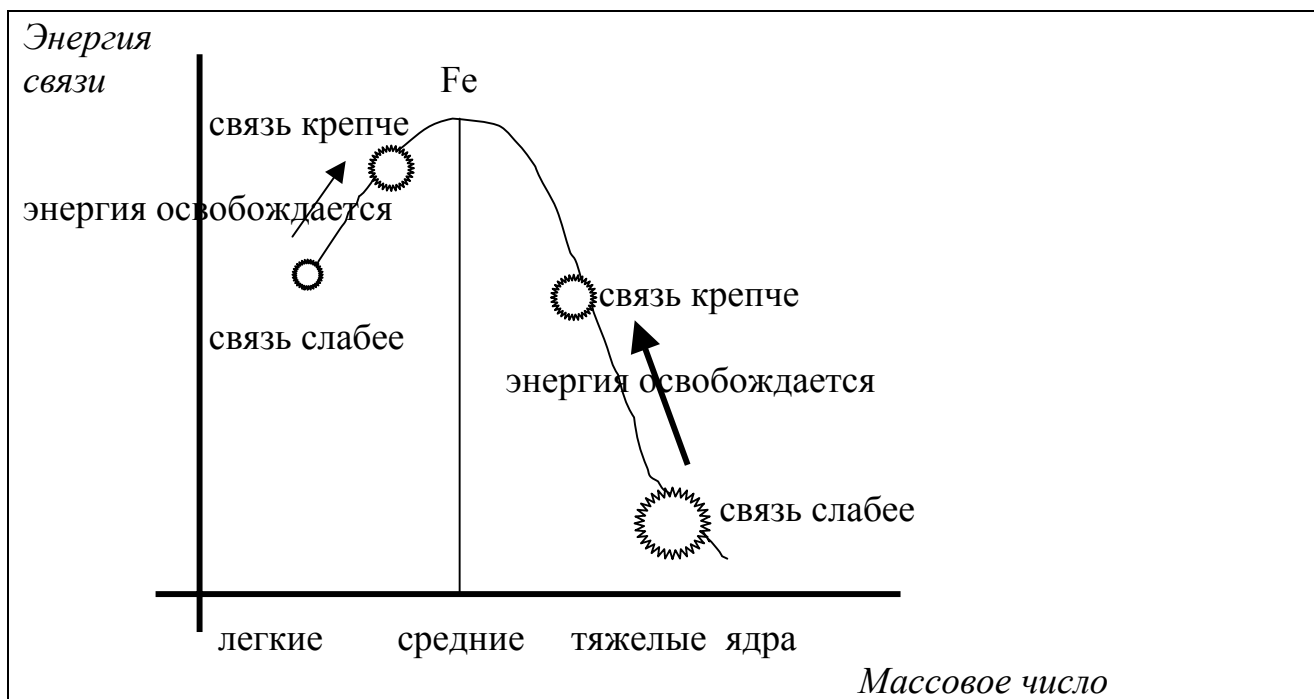


Рисунок иллюстрирует высвобождение энергии связи за счет избытка дефекта масс при синтезе (объединении) легких ядер и при распаде тяжелых ядер.

Запишем формулу массы атома (согласно таблице Менделеева)

$$M_{\text{ат.}} = M_{\text{яд.}} + Z m_e + E_{\text{кин}} / c^2.$$

Последнее слагаемое – кинетическая энергия частиц, составляющих атом, всегда слишком мало - им можно пренебречь.  $m_e$  – масса электрона. Энергия, соответствующая дефекту массы (разностью между суммой масс составляющих атом частиц и массой исходного атома) -  $\Delta \cdot c^2$  и есть полная энергия связи атома. Силы взаимодействия электронов с ядром приводят к мизерному дефекту масс, что обусловлено слабым электромагнитным взаимодействием. Ядерные же силы (в ядре атома) приводят к значительному дефекту масс. В таблице представлены энергии связи ядер атомов, приведенные к их массовым числам (на один нуклон)

ядро атома	${}^4_2\text{He}$	${}^7_3\text{Li}$	${}^{12}_6\text{C}$	${}^{39}_{19}\text{K}$	${}^{56}_{26}\text{Fe}$	${}^{138}_{56}\text{Ba}$	${}^{235}_{92}\text{U}$	${}^{239}_{94}\text{Pu}$
$E_{\text{св.}} / A, \text{ МэВ}$	7.07	5.61	7.68	8.56	8.79	8.39	7.59	7.55

О размерах ядер. Если считать ядро сферическим, то  $R \sim A^{1/3}$ ,  $R = r_0 A^{1/3}$ ,  $r_0 = (1,2 - 1,5) \cdot 10^{-13}$  см.  $R_H = (1,2 - 1,5) F$ ,  $R_U = 1,5 \cdot 238^{1/3} = 9 F$ .

## § 3 Получение ядерной энергии

### 3.1 Деление ядер

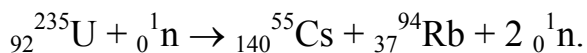
Все началось с нейтронов. В 1938 году О. Ган и Ф. Штрассман обнаружили, что при облучении урана нейтронами образуются элементы из середины периодической системы Ва и La (барий и лантан). Было предположено (О.Фриш и Лизе Мейтнер), что захватившее нейтрон ядро урана разделилось на два осколка деления.

Таблица: выбор горючего для реактора

№ п/п	Природные элементы	Искусственные элементы	Энерговыделение при захвате нейтрона, МэВ	Деление тепловыми нейтронами
1.		$^{231}\text{Pa}$ -протактиний	5,4	Да
2.		$^{232}\text{Th}$ -торий	5,1	Нет
3.		$^{233}\text{U}$ -уран	6,6	Да
4.	$^{235}\text{U}$		6,4	Да
5.		$^{237}\text{Np}$ -нептуний	5,0	Да
6.	$^{238}\text{U}$		4,9	Нет, только быстрыми
7.		$^{239}\text{Pu}$	6,4	Да



Рассмотрим реакцию

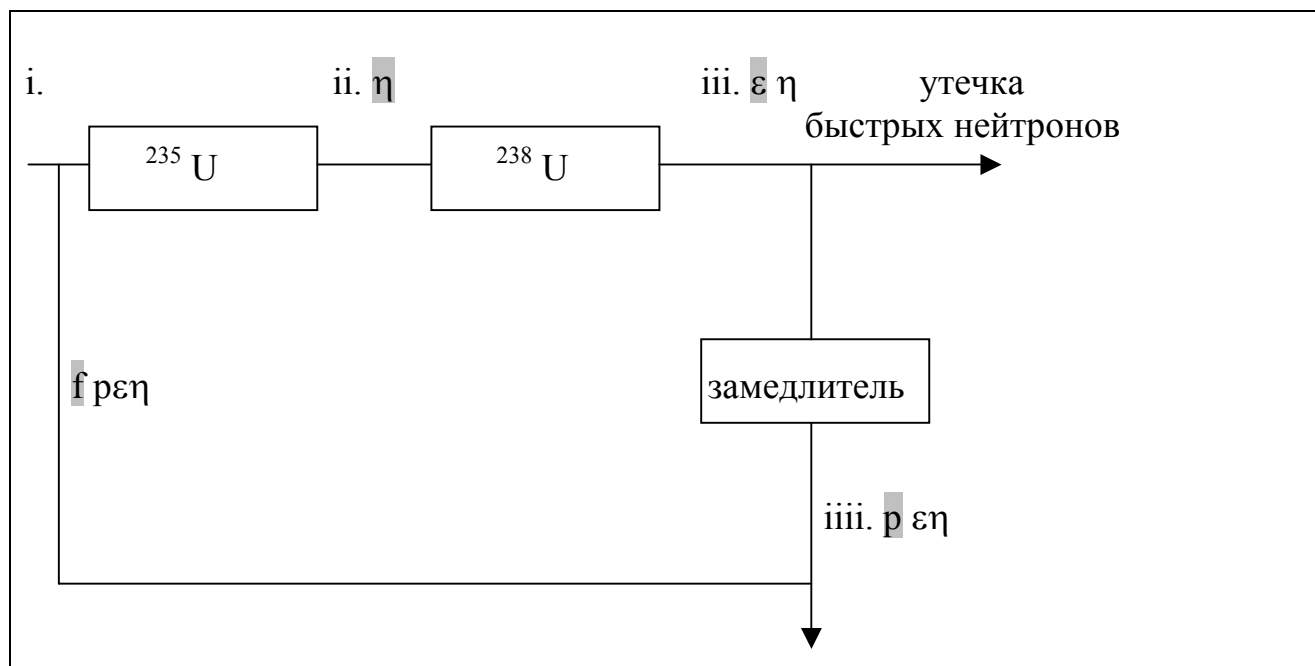


Нейтроны, образующиеся в результате реакции можно было бы включить в реакцию дальше, но они быстрые. Вероятность же деления  ${}^{235}\text{U}$  растет с уменьшением кинетической энергии нейтронов. В термодинамическом равновесии со средой они должны иметь энергию среды.  $E_{\text{среды}} = 3kT/2 = 0,04$  эВ, а на самом деле для нейтронов -  $0,02 \div 0,03$  эВ. Вычислим температуру нейтронов. Быстро:  $E = 1$  МэВ,  $T = 2E/3k = 8 \cdot 10^9$  К. Медленного:  $E = 0,02$  эВ,  $T \sim 2 \cdot 10^2$  К.

Как замедлять нейтроны до  $0,02$  эВ? Необходимо присутствие вещества, сталкиваясь с атомами которого нейтроны теряли бы свою энергию в результате упругого взаимодействия, но не захватывались бы ими. Идеален в этом смысле водород, как элемент почти идентичный по массе с нейтроном, но водород поглощает нейтроны и образует дейтерий  ${}_1^2\text{H}$ . Тяжелый элемент при соударении с нейтроном останется на месте, практически не изменив своего импульса, нейтрон же упруго отскочит от него не изменив величины скорости. При взаимодействии с элементами средней тяжести необходимо несколько соударений, что потребует определенного времени для замедления нейтронов

### 3.2 Работа ядерного реактора

Схема нейтронного цикла



$\eta$  - практическое число нейтронов деления (не все из них вызовут деление, расчетное число обозначают -  $\nu$ ),  $\epsilon$  - коэффициент размножения на быстрых нейтронах  $\epsilon \cong 1,1$  ( в смеси всегда присутствует  $^{238}\text{U}$  ),  $p$  – вероятность того, что нейтрон избежит поглощения в замедлителе в процессе замедления,  $f$  – вероятность того, что нейтрон избежит поглощения после окончания цикла замедления, но до начала следующего цикла, куда посылаются нейтроны вновь.  $p$  и  $f$  зависят от свойств материалов реактора.

Если пренебречь утечками нейтронов (утечкам препятствует большой размер реактора), то коэффициент размножения (стационарный, установившийся через бесконечное время) равен

$$k_{\infty} = \eta \epsilon p f.$$

Если для определенности начинать с одного нейтрона, то при  $k_{\infty} \geq 1$  установится самоподдерживающаяся реакция. Если  $k_{\infty} < 1$  – реакция затухнет. В случае же, если  $k_{\infty} = 1$ , то говорят о критическом реакторе, при  $k > 1$  – о надкритическом. Коэффициент размножения  $k$  показывает каково отношение общего числа нейтронов в конце цикла к породившему их начальному числу нейтронов. Критичность нужно регулировать.

Замедлители	$^{12}\text{C}$	$^{18(1)}\text{H}_2\text{O}$	$^{(2)}\text{D}_2\text{O}$	$^9\text{Be}$	$^{112}\text{Cd}$	$^{10}\text{B}$	$^{56}\text{Fe}$	$^{207}\text{Pb}$
Среднее число столкновений до замедления	114	19	35	86	поглотители			
	широко применяемые замедлители							

Чрезвычайно важен вопрос о скорости замедления. Пока будем замедлять – реакция затухнет. На быстрых нейтронах время цикла составляет  $10^{-7}$  секунд. Расчеты показывают, что если за 10 секунд число нейтронов увеличивается в  $e$  раз (эти нейтроны мгновенные), то  $k$  при этом меняется от 1 до 1,00000001 (на одну стомиллионную долю единицы). Такая точность регулирования коэффициента размножения  $k$  невозможна практически. То есть кажется, что вообще нельзя создать безопасный реактор.

Ситуацию спасает то, что существуют так называемые запаздывающие нейтроны. В процессе деления урана образуется целая цепочка распадов, протяженная во времени. Следовательно, можно ввести запаздывающий коэффициент размножения. Запаздывающие нейтроны испускаются в циклах в течение промежутка времени в среднем 0,1 секунды, а период полураспада осколков

составляет в среднем  $\cong 9$  секунд (то есть эти 9 секунд распределяются между многими циклами).

За время одного акта деления выделяется энергия  $200 \text{ МэВ} = 3,2 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}$ , тогда мощности в 1 МВт соответствует  $10^6 / 3,2 \cdot 10^{-11} = 3 \cdot 10^{15}$  распадов в секунду.

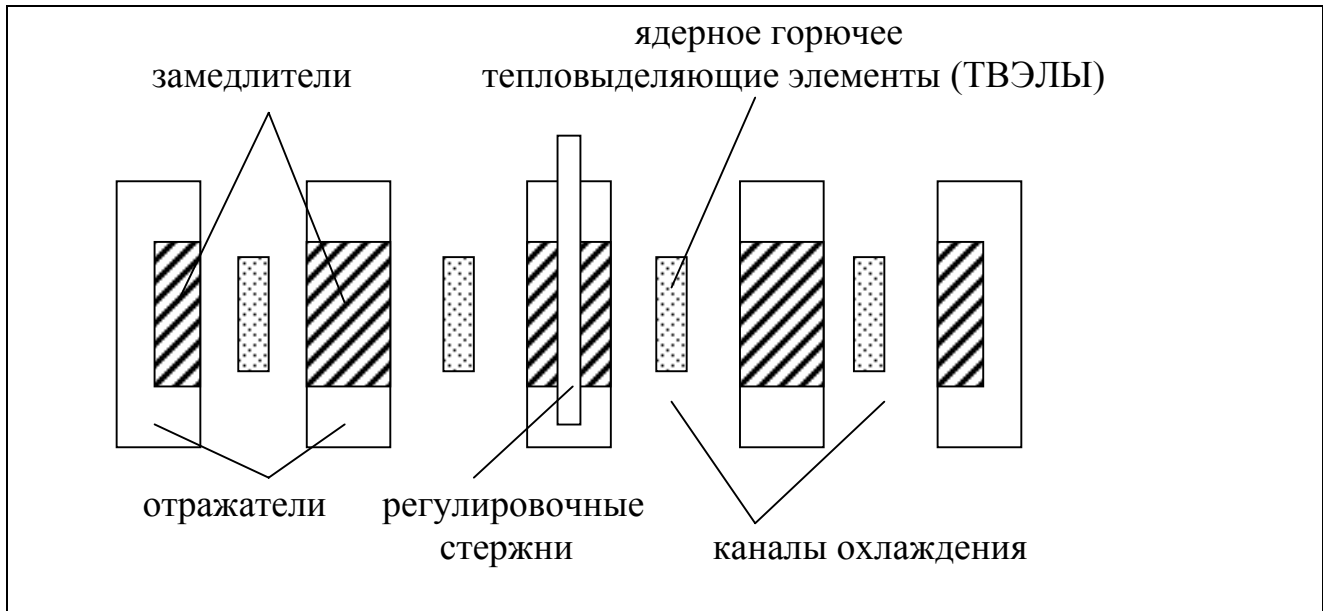
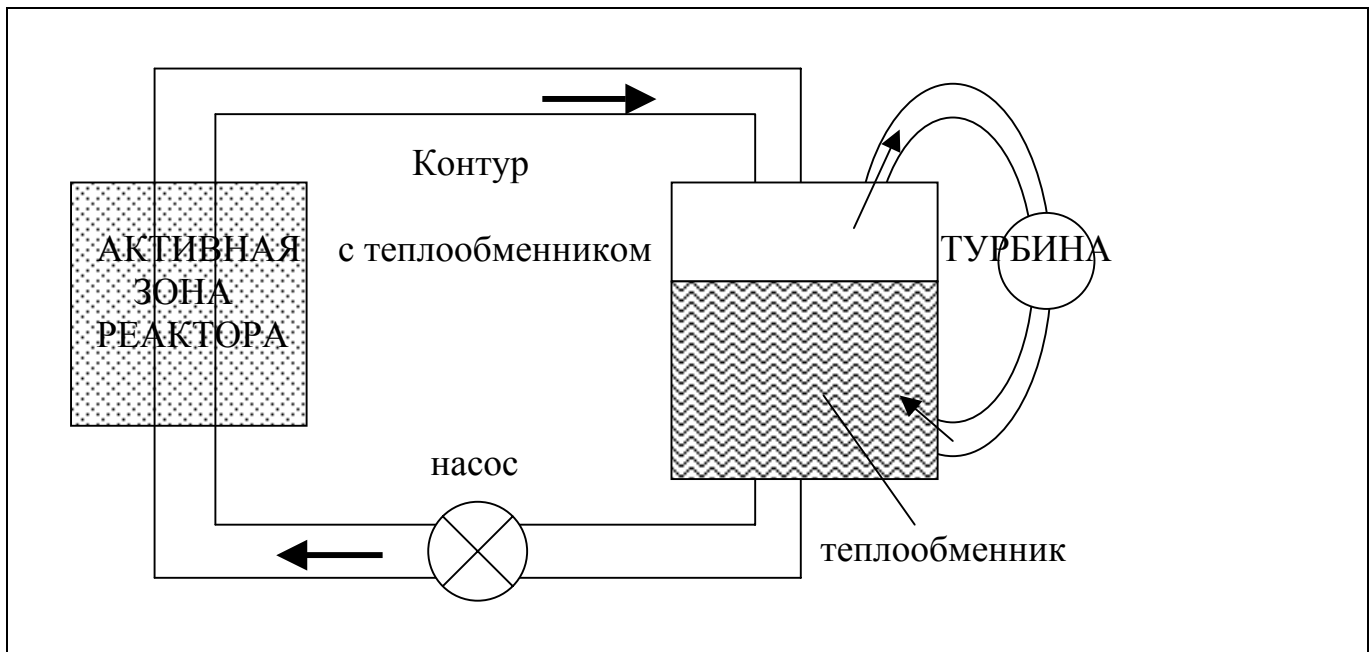


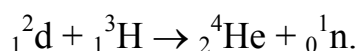
Схема активной зоны реактора



Энергия, выделяемая в активной зоне снимается теплоносителем водой или щелочными металлами (температура плавления натрия составляет 98 °С). В России впервые реактор с паровой турбиной был создан Курчатовым в 1954 году.

### 3.3 Термоядерные реакции

Термоядерные реакции реализуются при объединении (синтезе) легких ядер в более тяжелые и более устойчивые. При таком синтезе в области действия реакции развивается температура  $\approx 10^8$  К. Пример



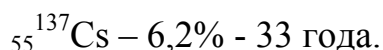
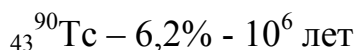
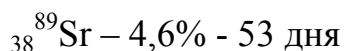
Часть полученной при синтезе энергии уносят нейтроны и ее нельзя использовать.

Чтобы заставить легкие ядра проникнуть друг в друга (слиться друг с другом), то есть для их объединения необходимы высокие температуры. Требуются первоначально большие затраты энергии, так как ядра имеют положительный заряд, сконцентрированный в небольшой области пространства. Приведем два метода

1. Удержание и разогрев плазмы. Плазма при этом сжимается магнитным полем на оси тороида
2. Взрывной нагрев плазмы с применением большого количества лазерных пучков

В качестве реагентов годятся, например, дейтерий и тритий, у которых зарядовые числа минимальны (+1).

Главнейшее преимущество синтеза по сравнению с делением – отсутствие радиоактивных остатков. Пример: при распаде урана образуются не используемые далее радиоактивные элементы



Однако, управляемый термоядерный синтез пока не нашел своего практического применения. Энергия же на один нуклон при синтезе примерно такая же как и при распаде.

### 3.4 Природный ядерный реактор в Окло

В дельте древней реки (государство Габон в Африке, близ города Франсвилля на реке Огове) образовался осадочный слой богатого ураном песчаника толщиной 4-10 метров и шириной 600-900 метров. Урановая жила растрескалась в нее проникли грунтовые воды. В руде со средним содержанием урана 0,5% были обнаружены шесть глинистых линз размерами 10-20 метров при толщине 1 метр и с концентрацией урана 20-40 % и более. Роль замедлителя выполняют грунтовые воды. Предположено, что образование такого природного ядерного реактора произошло 0,6-0,8 лет тому назад. Возможно, что в далекие времена там произошел и ядерный взрыв. Общее количество вырабатываемой энергии оценивается таким же какое вырабатывает ЛАЭС за 2,3 года. реакция тлеет при температуре 300-600 °С. Вода проникает в трещины – идет реакция, вода испаряется под действием температуры – реакция прекращается. Многие остаются неясным.

