

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико - математический факультет  
кафедра общей математики

“Утверждаю”

Декан ММФ

Щербаков Н.Р.

“25” 04 2003 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ  
ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Методическая разработка

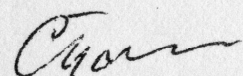
Составители:

доцент Путятин Е.Н.,

доцент Устинова И.Г.

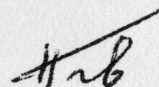
Томск 2003

Одобрено кафедрой общей математики  
Зав. кафедрой профессор С.В. Панько



8. 0.

Рассмотрено и утверждено методической комиссией ММФ  
Протокол №1 от 24.10 2003 г.  
Председатель комиссии Г.Г. Пестов.



В методической разработке изложена теоретическая часть занятия по теме “исследование и построение графиков функций ” и предложены разнообразные задачи.

Методические указания разработаны для студентов физического факультета, физико-технического факультета, радио-физического факультета дневной формы обучения.



## Построение графиков функций

Методы математического анализа дают возможность подробно исследовать заданную функцию и, выявив её характерные особенности, построить достаточно точный график функции.

При изучении свойств функции и построении её графика целесообразно следовать следующей схеме:

1. Найти область определения функции. Исследовать вопрос о чётности или нечётности, периодичности функции.
2. Определить точки пересечения графика с осями координат и интервалы её знакопостоянства.
3. Найти асимптоты. Вычислить односторонние пределы функции в граничных точках области определения и в точках разрыва.
4. Найти первую производную функции, исследовать функцию на экстремум, определить промежутки возрастания и убывания.
5. Вычислить вторую производную функции, найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх или вниз.
6. Построить таблицу и нарисовать график функции.

При построении конкретного графика отдельные этапы приведённой схемы могут оказаться излишними или невыполнимыми, другие же этапы могут быть расширены. Иногда для уточнения поведения функции в окрестностях точек разрыва, граничных точек области определения удобно использовать метод выделения главной части. Мощным средством в этом случае является разложение функции по формуле Тейлора.

Рассмотрим применение описанной схемы на примерах.

Пример 1. Построить график функции  $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x-1)^2}$ .

Область определения функции:  $x \neq 1$ , при этом  $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} y(x) = -\infty$ .

Ищем асимптоты:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{x(x-1)^2} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x-1)^2} - x \right) = -1. \end{aligned}$$

Наклонная асимптота  $y = x - 1$ .

Вычисляем первую производную:  $y' = \frac{(x-2)(x+2)(x-3)}{(x-1)^3}$ ,

стационарные точки  $x = -2; x = 2; x = 3$ . На интервалах  $(-\infty, -2)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(3, +\infty)$  функция возрастает, на интервалах  $(-2, 1)$ ,  $(2, 3)$  функция убывает, в точках  $x = -2$  и  $x = 2$  реализуются максимумы, в точке  $x = 3$  - минимум.

Найдём вторую производную:  $y'' = \frac{14x-32}{(x-1)^4}$ , точка перегиба

$(\frac{16}{7}, \frac{929}{189})$  отделяет интервал, на котором функция выпукла вверх, от интервала, где функция выпукла вниз.

Для более точного изображения функции построим таблицу.

x	-7	-5	-4	-2	-1	-0.5	0
y	-8.92	-7.25	-6.52	-5.66	-6.25	-7.5	-11
x	1.5	2	2.5	3	4	6	8
y	2.5	5	4.83	4.75	5	6.28	7.94

График изображён на рис.1.

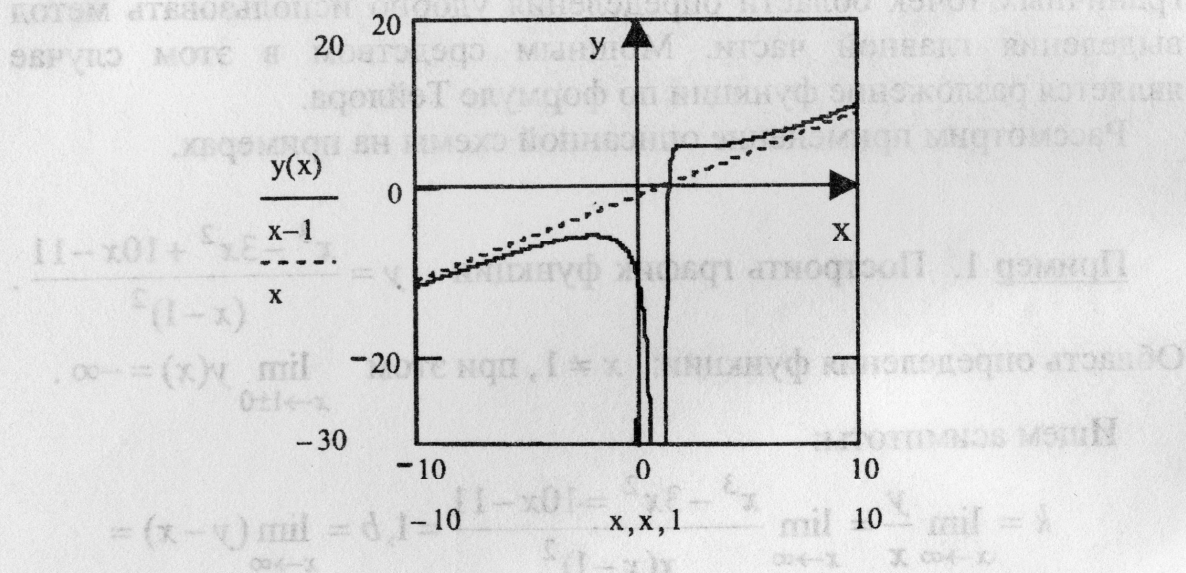


Рис.1.

**Пример 2.** Построить график функции  $y = \frac{\sqrt{|x|-1}}{x-2}$ .



Область определения функции:  $|x| \geq 1, x \neq 2$ . Точки пересечения с осями координат:  $(-1,0), (1,0)$ .

Асимптоты:  $x = 2, y = 0$ , при этом  $\lim_{x \rightarrow 2 \mp 0} y = \mp \infty, \lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \pm 0$ .

Вычисляем первую производную:  $y' = \frac{(x-2)\operatorname{sgn} x - 2(|x|-1)}{2\sqrt{|x|-1} \cdot (x-2)^2}$ ,

откуда для  $x < -1$  получаем  $y' = \frac{4+x}{2\sqrt{-x-1} \cdot (x-2)^2}$ , а для  $x > 1$

будем иметь:  $y' = \frac{-x}{2\sqrt{x-1} \cdot (x-2)^2}$ . В точке  $x = -4$  реализуется

минимум  $y(-4) = \frac{\sqrt{3}}{-6}$ , на интервалах  $(-\infty, -4), (1, +\infty)$  функция убывает, а на интервале  $(-4, -1)$  возрастает.

Находим вторую производную:

$$y'' = \frac{3x^2 + 24x + 12}{4(-x-1)^{\frac{3}{2}}(x-2)^3} \text{ при } x < -1, \quad y'' = \frac{3x^2 - 4}{4(x-1)^{\frac{3}{2}}(x-2)^3} \text{ при } x > 1.$$

Функция имеет две точки перегиба:  $x = -4 - 2\sqrt{3}$  и  $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . На

интервалах  $(-\infty, -4 - 2\sqrt{3}), (\frac{2}{\sqrt{3}}, 2)$  функция выпукла вверх, а на

интервалах  $(-4 - 2\sqrt{3}, -1), (1, \frac{2}{\sqrt{3}}), (2, +\infty)$  функция выпукла вниз.

Таблица значений функции:

x	-10	-7.464	-5	-4	-3	-2	-1
y	-0.25	-0.269	-0.286	-0.289	-0.283	-0.25	0
x	1	1.155	1.5	1.9	2.3	3	5
y	0	-0.465	-1.41	-9.49	3.8	1.41	0.666

График изображён на рис.2.

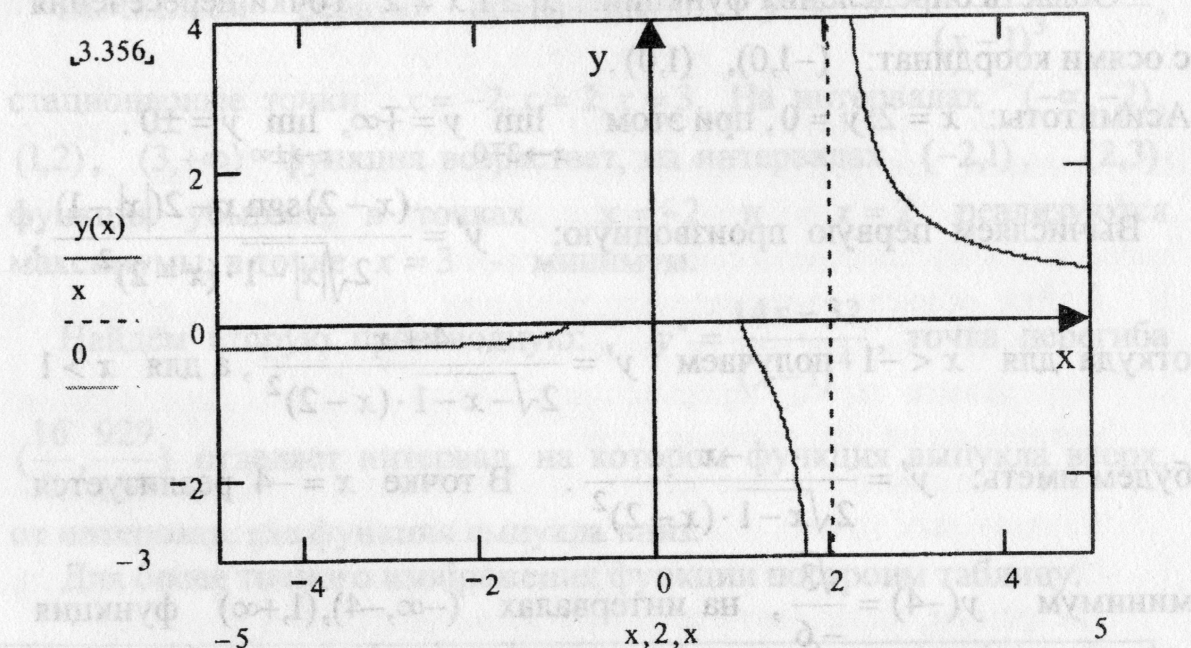


Рис. 2.

**Пример 3.** Построить график функции  $y = |x-1| \cdot e^{\frac{1}{x+1}}$ .

Область определения функции:  $x \neq -1$ , при этом  
 $\lim_{x \rightarrow -1+0} y = 0, \lim_{x \rightarrow -1-0} y = +\infty$ . Отметим:  $y \geq 0$  для  $\forall x \neq -1$ .

Единственный нуль функции  $x = 1$ .

Найдём параметры наклонной асимптоты:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x} e^{\frac{1}{x+1}} = -1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((1-x)e^{\frac{1}{x+1}} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( (1-x) \cdot \left( 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \right) + x \right) = 2,$$

аналогично

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1, \quad b_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x-1)e^{\frac{1}{x+1}} - x \right) = -2.$$

Итак, имеем две наклонные асимптоты:  $y = -x + 2, y = x - 2$ .

Найдём производную:



$$y' = -\frac{x^2 + 3x}{(x+1)^2} \cdot e^{-\frac{1}{x+1}}, x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1),$$

$$y' = \frac{x^2 + 3x}{(x+1)^2} \cdot e^{-\frac{1}{x+1}}, x \in (1, +\infty),$$

$y' = 0$ , если  $x = -3, x = 0$ ,  $y'$  не существует, если  $x = 1$ . При

этом  $y'(1-0) = -e^{-\frac{1}{2}}, y'(1+0) = e^{-\frac{1}{2}}$ .

Таким образом, в точках  $x = -3$  и  $x = 1$  реализуется минимум, а в точке  $x = 0$  - максимум. На интервалах  $(-\infty, -3), (0, 1)$  функция убывает, на интервалах  $(-3, -1), (-1, 0), (1, +\infty)$  функция возрастает.

Вычисляем вторую производную:

$$y'' = -\frac{5x+3}{(x+1)^4} \cdot e^{-\frac{1}{x+1}}, x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1),$$

$$y'' = \frac{5x+3}{(x+1)^4} \cdot e^{-\frac{1}{x+1}}, x \in (1, +\infty),$$

$y'' = 0$  в точке  $x = -0.6$ . На интервалах  $(-\infty, -1), (-1, -0.6), (1, +\infty)$  функция выпукла вниз, а на интервале  $(-0.6, 1)$  функция выпукла вверх.

При построении будем использовать следующую таблицу:

$x$	-4	-3	-2	-1.5	-0.6	0	2	4
$y$	$5\sqrt[3]{e}$	$4\sqrt{e}$	$3e$	$2.5e^2$	$1.6e^{-2.5}$	$e^{-1}$	$e^{-\frac{1}{3}}$	$3e^{-\frac{1}{5}}$

График изображён на рис.3.

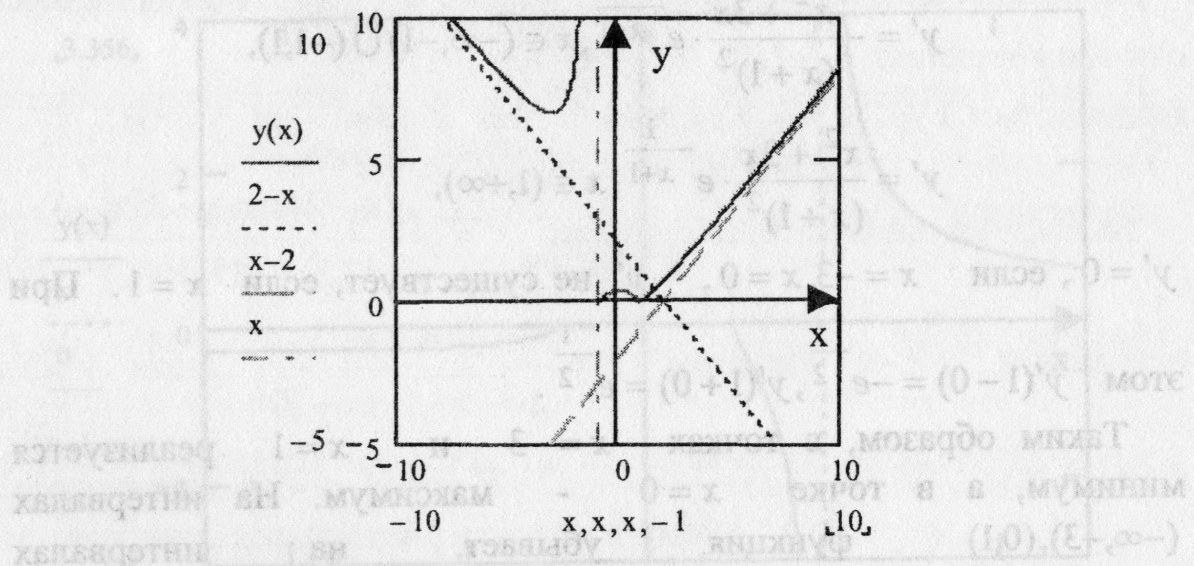


Рис. 3.

**Пример 4.** Построить график функции  $y = (7 + 2 \cos x) \sin x$ .

Область определения – вся вещественная ось. Функция периодическая, с периодом  $2\pi$ , нечётная, поэтому достаточно построить её на промежутке  $(0, \pi)$ , где она положительна, на интервале  $(-\pi, 0)$  воспользоваться нечётностью и затем продолжить её периодически на всю вещественную ось. Нули функции:  $x = \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ . Асимптот не имеет.

Находим первую производную:

$$y' = 4 \cos^2 x + 7 \cos x - 2,$$

$$y' = 0, \text{ если } \cos x = 0.25, \text{ т.е. } x = \pm \arccos 0.25. \text{ В точке}$$

$$x = \arccos 0.25 = 0.42\pi \text{ реализуется максимум } y = \frac{15}{8} \sqrt{15} \approx 7.3, \text{ в}$$

точке  $x = -\arccos 0.25 = -0.42\pi$  – минимум  $y \approx -7.3$ , на промежутке  $(0, \arccos 0.25)$  функция возрастает, на промежутке  $(\arccos 0.25, \pi)$  – убывает.

Вторая производная равна:

$$y'' = -\sin x (7 + 8 \cos x).$$

На промежутке  $(0, \pi)$  функция имеет одну точку перегиба  $x = \arccos(-0.875) \approx 0.84\pi$ . Учитывая нечётность функции, для основного периода  $[-\pi, \pi]$  получим, что на интервалах  $(-\pi, -\arccos(-0.875))$ ,  $(0, \arccos(-0.875))$  имеет место выпуклость



вверх, а на интервалах  $(-\arccos(-0.875), 0), (\arccos(0.875), \pi)$  - выпуклость вниз.

Таблица значений функции:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$0.42\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$y$	0	$\frac{7+\sqrt{3}}{2}$	$4\sqrt{3}$	$\approx 7.3$	0	$3\sqrt{3}$	0

График изображён на рис.4.

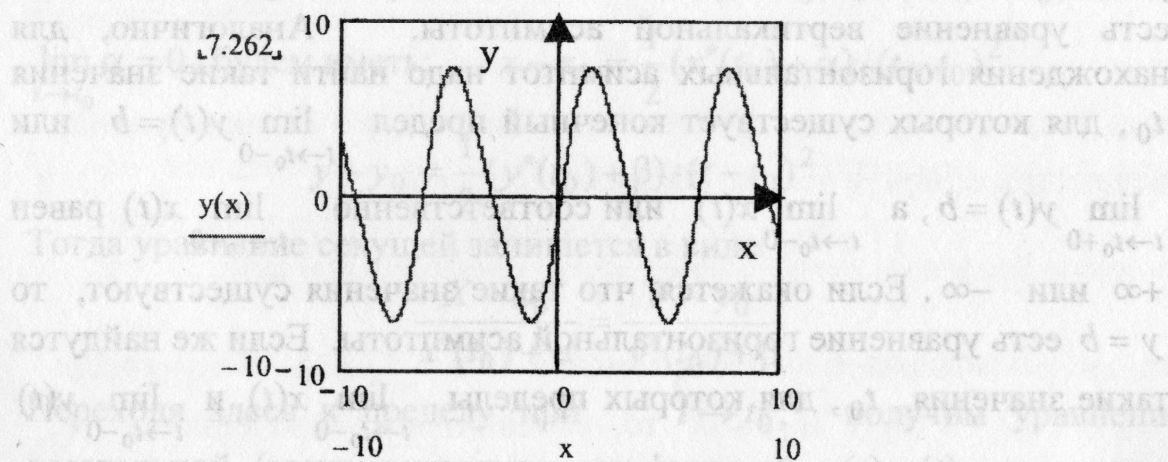


Рис. 4.

Перейдём к рассмотрению параметрически заданных функций.

**Определение.** Пусть функции  $x(t), y(t)$  определены в некоторой окрестности точки  $t_0$  и одна из этих функций, например,  $x(t)$ , непрерывна и строго монотонна в указанной окрестности. Тогда в этой окрестности для функции  $x(t)$  существует обратная функция  $t = t(x)$ , а в некоторой окрестности точки  $x_0 = x(t_0)$  имеет место суперпозиция  $y(x) = y(t(x))$ , называемая параметрически заданной функцией.

Построение графиков параметрически заданных функций имеет свои особенности. Укажем на основные.

1. Точки самопересечения. Отметим, что хотя каждому значению  $t$  соответствует одна, вполне определённая точка кривой, одной и той же точке кривой при параметрическом задании могут соответствовать разные значения параметра  $t$ . Если для некоторых

$t_1$  и  $t_2$  имеют место равенства:  $x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2)$ , то такая точка называется точкой самопересечения графика функции  $x = x(t), y = y(t)$ .

2. Асимптоты. Для нахождения асимптот функции  $y(t(x))$ , параллельных оси  $OY$ , необходимо найти такие значения  $t_0$  (здесь и далее  $t_0$  - число или один из символов  $+\infty, -\infty$ ), для которых существует конечный предел  $\lim_{t \rightarrow t_0-0} x(t) = a$  или

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} x(t) = a, \text{ но } \lim_{t \rightarrow t_0-0} y(t) \text{ или соответственно } \lim_{t \rightarrow t_0+0} y(t)$$

равен  $+\infty$  или  $-\infty$ . Если такие значения существуют, то  $x = a$  есть уравнение вертикальной асимптоты. Аналогично, для

нахождения горизонтальных асимптот надо найти такие значения  $t_0$ , для которых существует конечный предел  $\lim_{t \rightarrow t_0-0} y(t) = b$  или

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} y(t) = b, \text{ а } \lim_{t \rightarrow t_0-0} x(t) \text{ или соответственно } \lim_{t \rightarrow t_0+0} x(t) \text{ равен}$$

$+\infty$  или  $-\infty$ . Если окажется, что такие значения существуют, то  $y = b$  есть уравнение горизонтальной асимптоты. Если же найдутся

такие значения  $t_0$ , для которых пределы  $\lim_{t \rightarrow t_0-0} x(t)$  и  $\lim_{t \rightarrow t_0-0} y(t)$  (или пределы  $\lim_{t \rightarrow t_0+0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0+0} y(t)$ ) равны  $+\infty$  или  $-\infty$  и

существует конечный предел  $\lim_{t \rightarrow t_0-0} \frac{y(t)}{x(t)} = k \neq 0$  (или

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} \frac{y(t)}{x(t)} = k), \text{ а кроме этого, существует конечный предел}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0-0} (y(t) - kx(t)) = b \quad (\text{соответственно } \lim_{t \rightarrow t_0+0} (y(t) - kx(t)), \text{ то}$$

прямая  $y = kx + b$  является наклонной асимптотой рассматриваемой функции.

3. Особые точки кривой. Если при некотором  $t = t_0$  одновременно  $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ , то кривая в окрестности рассматриваемой точки может не иметь явного представления, поэтому такая точка требует особого исследования.

Предположим, что при  $t = t_0$  хотя бы одна из производных второго порядка, например  $x''_{tt}$ , отлична от нуля. Проведём



секущую через точки  $(x_0, y_0), (x, y)$ , отвечающие значениям  $t_0$  и  $t$  параметра  $t$ :

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0}.$$

Используя формулу Тейлора и учитывая, что  $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ ,

получим: 
$$x = x_0 + \frac{1}{2} x''(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2),$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2} y''(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2),$$

или, принимая во внимание, что  $o((t - t_0)^2) = \alpha \cdot (t - t_0)^2$ , где

$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha = 0$ , будем иметь: 
$$x - x_0 = \frac{1}{2} (x''(t_0) + \alpha) \cdot (t - t_0)^2,$$

$$y - y_0 = \frac{1}{2} (y''(t_0) + \beta) \cdot (t - t_0)^2.$$

Тогда уравнение секущей запишется в виде

$$\frac{X - x_0}{x''(t_0) + \alpha} = \frac{Y - y_0}{y''(t_0) + \beta}.$$

Переходя здесь к пределу при  $t \rightarrow t_0$ , получим уравнение касательной (ввиду непрерывности функций  $x(t), y(t)$  стремление  $t \rightarrow t_0$  равносильно тому, что точка  $(x, y)$  стремится к точке  $(x_0, y_0)$ ):

$$Y - y_0 = \frac{y''(t_0)}{x''(t_0)} (X - x_0).$$

Если теперь предположить, что  $x''(t_0) > 0$ , то функция  $x(t)$  при  $t = t_0$  будет иметь минимум, т.е. при значениях  $t$ , достаточно близких к  $t_0$ , как при  $t > t_0$ , так и при  $t < t_0$  будет  $x > x_0$ .

Следовательно, в точке  $(x_0, y_0)$  смыкаются две ветви кривой, имеющие общую касательную и расположенные вправо от вертикали  $x = x_0$ . Подобная точка называется точкой возврата (или точкой заострения). В зависимости от того, лежат ли обе встречающиеся в ней ветви по разные стороны от общей касательной или по одну сторону, различают точки возврата

первого и второго рода. Для исследования таких точек необходимо привлечь третьи производные:

$$x - x_0 = \frac{1}{2} x''(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} (x'''(t_0) + \bar{\alpha})(t - t_0)^3,$$

$$y - y_0 = \frac{1}{2} y''(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} (y'''(t_0) + \bar{\beta})(t - t_0)^3,$$

где  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  бесконечно малые при  $t \rightarrow t_0$ .

Вычислим, используя уравнение касательной, ординату  $Y$  точки касательной с абсциссой  $x$ :

$$Y - y_0 = \frac{y''(t_0)}{x''(t_0)} (x - x_0) = \frac{1}{2} y''(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{y''(t_0)}{x''(t_0)} \cdot (x'''(t_0) + \bar{\alpha})(t - t_0)^3.$$

Тогда разность ординат  $Y$  (касательной) и  $y$  (точки кривой), отвечающих одной и той же абсциссе  $x$ , равна:

$$Y - y = \frac{1}{6} \left( \frac{x'''(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'''(t_0)}{x''(t_0)} + \bar{\gamma} \right) (t - t_0)^3,$$

где  $\bar{\gamma}$  некоторая бесконечно малая при  $t \rightarrow t_0$ . Если теперь  $x'''(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'''(t_0) \neq 0$ , то, ограничиваясь значениями  $t$ , достаточно близкими к  $t_0$ , получим, что для данных ветвей кривой, встречающихся в точке  $(x_0, y_0)$ , разность  $Y - y$  будет разных знаков при  $t < t_0$  и  $t > t_0$ . Следовательно, ветви располагаются по разные стороны от касательной, и мы имеем точку возврата первого рода. В качестве примеров подобных особенностей можно назвать циклоиду, астроиду, кардиоиду. Если же  $x'''(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'''(t_0) = 0$ , то разложение  $Y - y$  по степеням  $(t - t_0)$  будет начинаться с четвёртой или ещё более высокой степени. В случае, когда эта степень чётная, рассматриваемая особая точка является точкой возврата второго рода, ибо обе ветви будут расположены по одну сторону касательной. Отметим, что условие  $x'''(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'''(t_0) \neq 0$  означает неколлинеарность векторов  $\bar{r}''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0))$  и  $\bar{r}'''(t_0)$ .

Если  $\bar{r}''(t_0) = \bar{0}$ , но  $\bar{r}'''(t_0) \neq \bar{0}$ , то повторяя проделанные рассуждения, для уравнения касательной в предположении, что



$x'''(t_0) \neq 0$ , получим:  $Y - y = \frac{y'''(t_0)}{x'''(t_0)}(X - x)$ . В этом случае

функция  $x(t)$  не имеет экстремума в точке  $t = t_0$ , т.е. кривая расположена как слева, так и справа от точки  $x_0 = x(t_0)$ , и в окрестности этой точки кривая имеет такой же вид, как и в окрестности точки обыкновенной.

Итак, подводя итоги, можно сделать следующие выводы: если  $r^{(p)}(t_0)$  - первая, отличная от нуля производная, а  $r^{(q)}(t_0)$

первая из производных, не коллинеарных вектору  $r^{(p)}(t_0)$ , то возможны следующие случаи:

- 1)  $p$  - нечётное и в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  кривая имеет вид, как и в окрестности регулярной точки;
- 2)  $p$  - чётное,  $q$  - нечётное, тогда рассматриваемая точка есть точка возврата первого рода;
- 3)  $p$  - чётное,  $q$  - чётное, тогда имеем точку возврата второго рода.

Пример 5. Построить график функции

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = \frac{2}{3}t(3 - t^2).$$

Область определения функции  $x \geq 0$ ;  $y = 0$  если  $t = 0, t = \pm\sqrt{3}$ .

Из условий, что  $x(-t) = x(t), y(-t) = -y(t)$ , следует, что график симметричен относительно оси  $OX$ .

Решая систему уравнений  $t_1^2 = t_2^2, t_1(3 - t_1) = t_2(3 - t_2)$ , получим:

$t_1 = \sqrt{3}, t_2 = -\sqrt{3}$ , этим значениям отвечает одна и та же точка  $M(3, 0)$  - точка самопересечения.

Функция не имеет асимптот, т.к.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \infty$ . Исследуем

поведение кривой при  $t \rightarrow \pm\infty$ . В этом случае  $x(t) = t^2 \rightarrow +\infty$ , а

$y(t) \cong -\frac{2}{3}t^3 \rightarrow -\infty$ , отсюда следует, что  $y \cong -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$  при  $t \rightarrow -\infty$  и

$y \cong \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$  при  $t \rightarrow +\infty$ , т.е. при  $x \rightarrow +\infty$  функция ведёт себя как полукубическая парабола. Если же  $t \rightarrow 0$ , то  $x = t^2 \rightarrow 0, y \cong 2t \rightarrow 0$ , т.е.  $y \cong \pm 2\sqrt{x}$  и в начале координат поведение кривой аналогично поведению параболы  $y^2 = 4x$ .

Найдём первую производную:  $y'_x = \frac{1-t^2}{t}$ . На промежутках  $(-\infty, -1), (0, 1)$  функция  $y(x)$  возрастает, а на промежутках  $(-1, 0), (1, +\infty)$  убывает, в точке  $M_1\left(1, \frac{4}{3}\right)$  реализуется максимум, а в точке  $M_2\left(1, -\frac{4}{3}\right)$  - минимум, касательные в этих точках параллельны оси ОХ. В точке  $O(0, 0)$ , которая соответствует  $t = 0$ , касательная совпадает с осью ординат. Отметим также, что в точке  $M(3, 0)$  угловые коэффициенты касательных различны:

$$y'_x|_{t=-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, y'_x|_{t=\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ищем вторую производную:  $y''_{xx} = -\frac{1+t^2}{2t^3}$ .

Таким образом, при  $t < 0$  функция выпукла вниз, а при  $t > 0$  функция выпукла вверх.

Таблица значений функции:

$t$	0	0.25	0.5	1	$\sqrt{3}$	2	3
$x$	0	0.0625	0.25	1	3	4	9
$y$	0	0.49	0.92	1.33	0	-1.33	-12

График данной функции изображён на рис. 5.



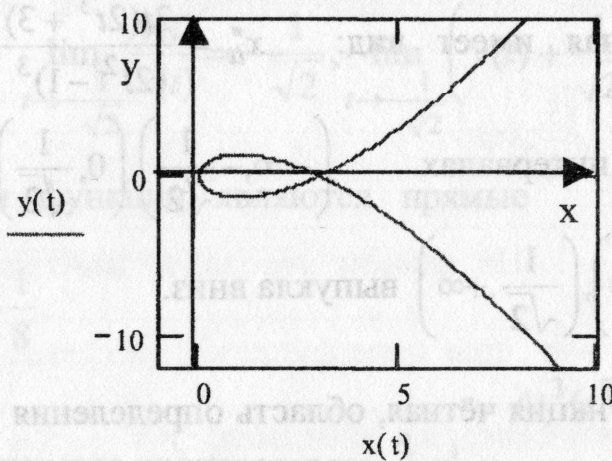


Рис. 5.

Пример 6. Построить график функции

$$x(t) = \frac{t^3}{2t^2 - 1}, y(t) = \frac{t^4}{2t^2 - 1}.$$

Построим сначала вспомогательные графики  $x = x(t), y = y(t)$ .

1.  $x(t) = \frac{t^3}{2t^2 - 1}$ . Функция нечётная, область её определения -

$t \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , при этом  $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \pm 0} x(t) = \pm \infty$ . Ищем асимптоты:

$$k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{t} = \frac{1}{2}, \quad b = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( x(t) - \frac{1}{2}t \right) = 0, \quad \text{поэтому прямые } y = \frac{x}{2}$$

и  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  являются асимптотами данной функции.

Находим первую производную:  $x'_t = \frac{t^2(2t^2 - 3)}{(2t^2 - 1)^2}$ . На

интервалах  $\left( -\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right), \left( \sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty \right)$  функция возрастает, на

интервале  $\left( -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$  - убывает, в точке  $\left( -\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \right)$  имеет

максимум, в точке  $\left( \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \right)$  - минимум.

Вторая производная имеет вид:  $x''_{tt} = \frac{2t(2t^3 + 3)}{(2t^2 - 1)^3}$ , функция  
 выпукла вверх на интервалах  $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , а на  
 интервалах  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$  выпукла вниз.

2.  $y(t) = \frac{t^4}{2t^2 - 1}$ . Функция чётная, область определения  $t \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  
 причём  $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \pm 0} y(t) = \pm \infty$ . Наклонных и горизонтальных асимптот  
 нет, т.к.  $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} y(t) = +\infty$ .

Находим первую производную:  $y'_t = \frac{4t^3(t^2 - 1)}{(2t^2 - 1)^2}$ , функция  
 убывает на интервалах  $(-\infty, -1), (0, 1)$ , возрастает на интервалах  
 $(-1, 0), (1, +\infty)$ , в точках  $(-1, 1), (1, 1)$  имеет минимум.

Вторая производная равна:  $y''_{tt} = \frac{8t^6 - 12t^4 + 12t^2}{(2t^2 - 1)^3}$ , на  
 интервалах  $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$  функция выпукла вниз, а на  
 интервале  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  - вверх.

3. Перейдём к исследованию и построению графика функции  $y(x)$ .

Область определения функции - вся вещественная ось, область  
 значений -  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ . Единственный нуль -  $(0, 0)$ . Так как  
 $x(-t) = -x(t)$ , а  $y(-t) = y(t)$ , то функция чётная.

Ищем асимптоты: во-первых,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} t = \infty$ , во-вторых,

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \left( y(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} x(t) \right) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{\sqrt{2}(\sqrt{2}t + 1)} = \frac{1}{8},$$



аналогично  $\lim_{t \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( y(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} x(t) \right) = \frac{1}{8}$ , поэтому

асимптотами функции являются прямые  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{8}$  и

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{8}.$$

Находим первую производную:  $y'_x = \frac{4t^3(t^2 - 1)}{t^2(2t^2 - 3)}$ .

В точке  $t = 0$  производные  $x'_t$  и  $y'_t$  одновременно обращаются в нуль, следовательно, данная точка требует дополнительного исследования. В этой точке вторые производные также равны нулю:  $x''_{tt}(0) = 0, y''_{tt}(0) = 0$ , кроме того,  $y'''_{ttt}(0) = 0$ , но

$$x'''_{ttt} = \frac{-6(4t^4 + 12t^2 + 1)}{(2t^2 - 1)^4} \neq 0 \text{ при } t = 0, \text{ а значит рассматриваемая}$$

точка не является точкой возврата, и образ кривой имеет такой же вид, как и в окрестности регулярной точки, а уравнение касательной -  $y = 0$ .

Функция имеет минимумы в точках  $(-1,1), (1,1)$ , что соответствует  $t = \pm 1$ , и максимум в точке  $(0,0)$ . В точках

$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$  касательная к графику функции параллельна оси  $OY$ .

Ищем вторую производную:  $y''_{xx} = \frac{2(2t^2 - 1)^3(t^2 - 3)}{t^2(2t^2 - 3)^3}$ . При

изменении  $t$  в интервалах  $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{3}\right)$

функция выпукла вверх, а в интервалах  $(-\infty, -\sqrt{3}), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (\sqrt{3}, +\infty)$  выпукла вниз.

Построим функцию  $y(x)$  для значений  $t > 0$ , а для  $t < 0$  воспользуемся чётностью. Для этого рассмотрим 3 интервала  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ .

Пусть  $t \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . На данном интервале значения  $x$  и  $y$  убывают от 0 до  $-\infty$ , при этом функция  $y(x)$  выпукла вверх и при  $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - 0$  приближается к асимптоте  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{8}$ .

Пусть теперь  $t \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ . Здесь  $x$  убывает от  $+\infty$  до  $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 0.9186$ , а  $y$  сначала убывает от  $+\infty$  до 1, затем возрастает до 1.125 (при  $t = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ). На этом участке функция

выпукла вниз и при  $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + 0$  приближается к асимптоте  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{8}$ .

Если  $t \in \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ , то  $x$  растёт от 0.9186 до  $+\infty$ , а  $y$  возрастает от 1.125 до  $+\infty$ , при этом в точке (0.9186, 1.125), что соответствует  $t = \sqrt{\frac{3}{2}}$ , касательная параллельна оси  $OY$ . На

интервале  $t \in \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{3}\right)$  функция выпукла вверх, а на промежутке  $(\sqrt{3}, +\infty)$  - выпукла вниз.

Точка  $\left(\frac{3\sqrt{3}}{5}, \frac{9}{5}\right)$  является точкой перегиба. Отметим, что при

$t \rightarrow +\infty$   $x \cong \frac{t}{2}$ , а  $y \cong \frac{t^2}{2}$ , т.е.  $y \cong 2x^2$ .



Для более точного построения будем использовать таблицу:

$t$	0.5	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	1	1.225	$\sqrt{3}$	2	4
$x$	-0.25	-0.77	-1.77	-17.2	3.375	1.82	1	0.92	1.03	1.143	2.065
$y$	-0.125	-0.46	-1.15	-12	2.531	1.46	1	1.125	1.8	2.286	8.258

График функции изображён на рис. 6.

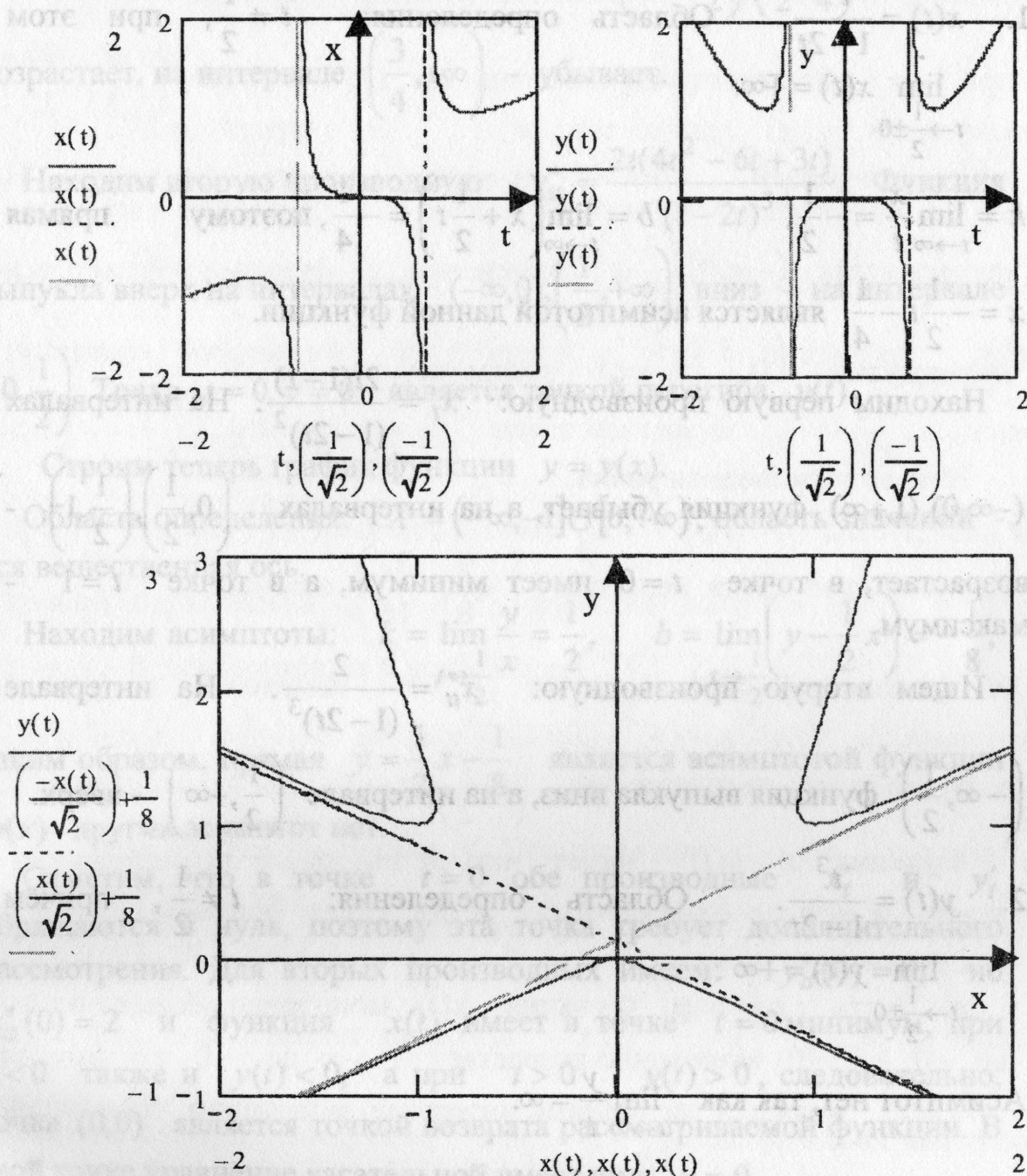


Рис. 6.

Пример 7. Построить график функции

$$x(t) = \frac{t^2}{1-2t}, y(t) = \frac{t^3}{1-2t}.$$

Построим сначала графики вспомогательных функций  $x(t)$  и  $y(t)$ .

1.  $x(t) = \frac{t^2}{1-2t}$ . Область определения:  $t \neq \frac{1}{2}$ , при этом  $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2} \pm 0} x(t) = \mp \infty$ .

$k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x}{t} = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( x + \frac{1}{2}t \right) = -\frac{1}{4}$ , поэтому прямая

$x = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$  является асимптотой данной функции.

Находим первую производную:  $x'_t = \frac{2t(1-t)}{(1-2t)^2}$ . На интервалах

$(-\infty, 0), (1, +\infty)$  функция убывает, а на интервалах  $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  - возрастает, в точке  $t=0$  имеет минимум, а в точке  $t=1$  - максимум.

Ищем вторую производную:  $x''_{tt} = \frac{2}{(1-2t)^3}$ . На интервале

$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$  функция выпукла вниз, а на интервале  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$  - вверх.

2.  $y(t) = \frac{t^3}{1-2t}$ . Область определения:  $t \neq \frac{1}{2}$ , причём  $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2} \pm 0} y(t) = \mp \infty$ .

Асимптот нет, так как  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{t} = \infty$ .



Первая производная равна:  $y'_t = \frac{t^2(3-4t)}{(1-2t)^2}$ . Функция имеет максимум при  $t = \frac{3}{4}$ , в точке  $t = 0$  касательная к графику совпадает с осью  $OX$ , на интервалах  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$  функция возрастает, на интервале  $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$  - убывает.

Находим вторую производную:  $y''_{tt} = \frac{2t(4t^2 - 6t + 3t)}{(1-2t)^3}$ . Функция выпукла вверх на интервалах  $(-\infty, 0), \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , вниз - на интервале  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ . Точка  $t = 0, y = 0$  является точкой перегиба  $y(t)$ .

3. Строим теперь график функции  $y = y(x)$ .

Область определения:  $X = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ , область значений - вся вещественная ось.

Находим асимптоты:  $k = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ ,  $b = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \left(y - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{8}$ ,

таким образом, прямая  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$  является асимптотой функции  $y(x)$  других асимптот нет.

Отметим, что в точке  $t = 0$  обе производные  $x'_t$  и  $y'_t$  обращаются в нуль, поэтому эта точка требует дополнительного рассмотрения. Для вторых производных имеем:  $y''_{tt}(0) = 0$ , но  $x''_{tt}(0) = 2$  и функция  $x(t)$  имеет в точке  $t = 0$  минимум, при  $t < 0$  также и  $y(t) < 0$ , а при  $t > 0$   $y(t) > 0$ , следовательно, точка  $(0, 0)$  является точкой возврата рассматриваемой функции. В этой точке уравнение касательной имеет вид  $y = 0$ .

Используя метод выделения главной части, получим, что при  $t \rightarrow 0$   $x \cong t^2, y \cong t^3$ , поэтому при  $t \rightarrow -0$   $y \cong -x^{\frac{3}{2}}$ , а при  $t \rightarrow +0$   $y \cong x^{\frac{3}{2}}$ .

Запишем первую производную:  $y'_x = \frac{t(3-4t)}{2(1-t)}$ . В точке  $(-1, -1)$  при  $t = 1$  касательная параллельна оси  $OY$ , в точке  $\left(-\frac{9}{8}, -\frac{27}{32}\right)$ ,

соответствующей  $t = \frac{3}{4}$ , функция имеет максимум. На промежутках  $(-\infty, 0), \left(\frac{3}{4}, 1\right)$  изменения  $t$  функция убывает, а на промежутках  $\left(0, \frac{3}{4}\right), (1, +\infty)$  - возрастает.

Вторая производная равна:  $y''_{xx} = -\frac{(2t-3)(1-2t)^3}{4t(1-t)^3}$ .

Единственная точка перегиба  $\left(-\frac{9}{8}, -\frac{27}{16}\right)$  отвечает  $t = \frac{3}{2}$ . На интервалах  $(-\infty, 0), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  и  $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$  изменения  $t$  функция выпукла вверх, на интервалах  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  и  $\left(1, \frac{3}{2}\right)$  - выпукла вниз.

Функция  $x = x(t)$  имеет четыре интервала монотонности, а значит и четыре однозначных ветви имеет функция  $y = y(t)$ . Построим каждую из них.

а) Пусть  $t \in (-\infty, 0)$ . Функция  $x(t)$  монотонно убывает от  $+\infty$  до  $+0$ , а  $y(t)$  монотонно возрастает от  $-\infty$  до  $-0$ , т.е. функция  $y = y(x)$  является на данном интервале монотонно убывающей.

Функция выпукла вверх, при этом при  $t \rightarrow -\infty$   $x \cong -\frac{t}{2}, y \cong -\frac{t^2}{2}$ ,

поэтому  $y \cong -2x^2$ , а при  $t \rightarrow -0$   $y \cong -x^{\frac{3}{2}}$ .



б) Пусть  $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ . Тогда и  $x(t)$ , и  $y(t)$  возрастают от  $+0$  до  $+\infty$ , следовательно, и функция  $y(x)$  является возрастающей на этом интервале изменения  $t$ . При  $t \rightarrow +0$   $y \cong x^{\frac{3}{2}}$ , а при  $t \rightarrow \frac{1}{2} - 0$  график функции приближается к асимптоте, функция выпукла вниз.

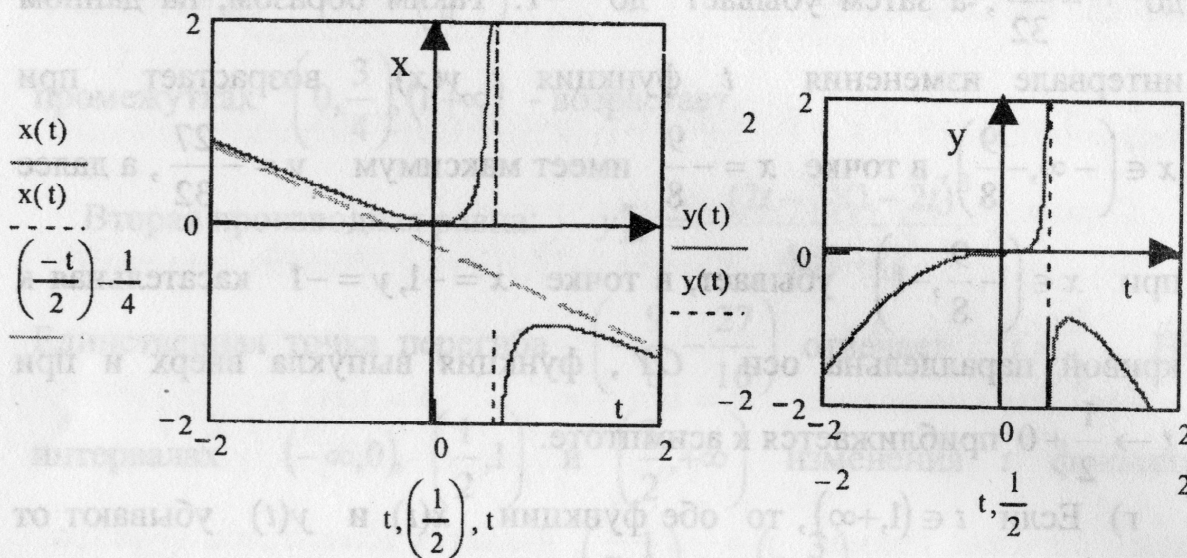
в) Пусть теперь  $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ . В этом случае  $x(t)$  монотонно возрастает от  $-\infty$  до  $-1$ , а  $y(t)$  сначала также возрастает от  $-\infty$  до  $-\frac{27}{32}$ , а затем убывает до  $-1$ . Таким образом, на данном интервале изменения  $t$  функция  $y(x)$  возрастает при  $x \in \left(-\infty, -\frac{9}{8}\right)$ , в точке  $x = -\frac{9}{8}$  имеет максимум  $y = -\frac{27}{32}$ , а далее при  $x \in \left(-\frac{9}{8}, -1\right)$  убывает, в точке  $x = -1, y = -1$  касательная к кривой параллельна оси  $OY$ , функция выпукла вверх и при  $t \rightarrow \frac{1}{2} + 0$  приближается к асимптоте.

г) Если  $t \in (1, +\infty)$ , то обе функции  $x(t)$  и  $y(t)$  убывают от  $-1$  до  $-\infty$ , а значит функция  $y(x)$  является возрастающей на данном интервале изменения  $t$ . При этом при  $t \rightarrow +\infty$   $y \cong -2x^2$ , точка  $\left(-\frac{9}{8}, -\frac{27}{16}\right)$ , соответствующая  $t = \frac{3}{2}$ , является точкой перегиба, она отделяет интервал  $x \in \left(-\frac{9}{8}, -1\right)$ , где функция выпукла вниз, от интервала  $x \in \left(-\infty, -\frac{9}{8}\right)$ , где функция выпукла вверх.

При построении будем использовать следующую таблицу:

$t$	-5	-4	-3	-2.5	-2	-1	-0.5	-0.25	0	0.125
$x$	2.27	1.78	1.29	1.04	0.8	0.33	0.125	0.04	0	0.02
$y$	-11.4	-7.1	-3.86	-2.6	-1.6	-0.33	-0.06	-0.01	0	0.0026
$t$	0.25	0.375	0.625	0.75	1	1.5	2	3	4	5
$x$	0.125	0.56	-1.56	-1.125	-1	-1.125	-1.33	-1.8	-2.3	-2.78
$y$	0.03	0.21	-0.975	-0.844	-1	-1.69	-2.66	-5.4	-9.1	-13.8

График функции изображён на рис. 7.





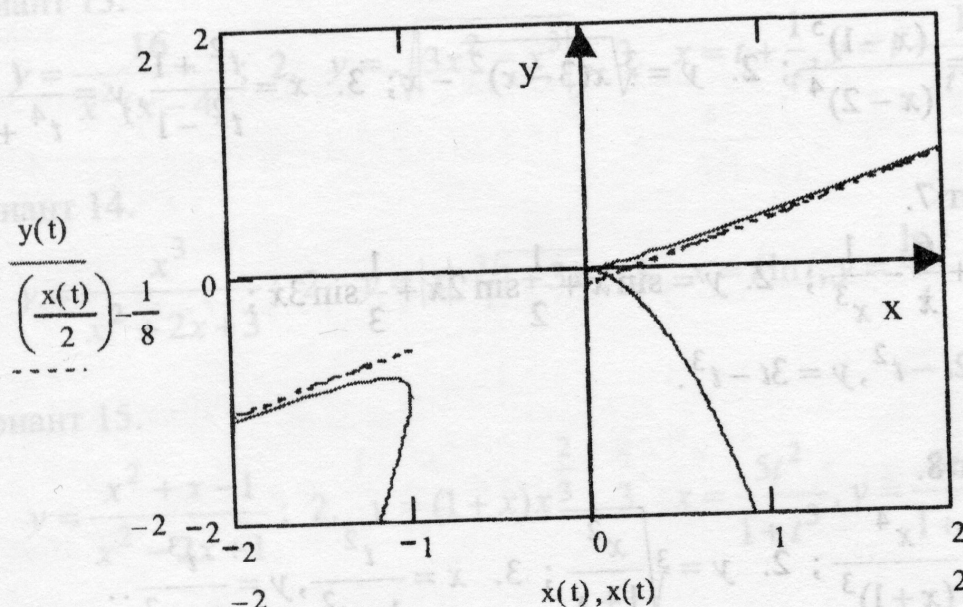


Рис. 7.

## Индивидуальное задание

Вариант 1.

1.  $y = \frac{x^5}{(x^2 - 1)^2}$ ; 2.  $y = \cos x - \cos^2 x$ ; 3.  $x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}$ .

Вариант 2.

1.  $y = 32x^2(x^2 - 1)^3$ ; 2.  $y = \frac{\cos 2x}{\cos x}$ ; 3.  $x = te^t, y = te^{-t}$ .

Вариант 3.

1.  $y = x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}$ ; 2.  $y = e^{8x - x^2 - 14}$ ; 3.  $x = a \cos^3 t, y = a \sin t, a$

Вариант 4.

$y = (x + 1) \left( \frac{x - 1}{x - 2} \right)^2$ ; 2.  $y = e^{\arcsin \sqrt{x}}$ ; 3.  $x = t^3 - 3\pi, y = t^3 - 6 \arctg t$ .

Вариант 5.

1.  $y = \frac{x^3 + 2x^2}{(x - 1)^2}$ ; 2.  $y = \cos 3x + 3 \cos x$ ; 3.  $x = \frac{t^5}{10 \cdot (1 - t)}, y = t^3$ .

Вариант 6.

1.  $y = \frac{(x-1)^5}{(x-2)^4}$ ; 2.  $y = \sqrt[3]{x(3-x)^2} - x$ ; 3.  $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, y = \frac{t}{t^4+1}$ .

Вариант 7.

$y = 3x + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}$ ; 2.  $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$ ;

3.  $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$ .

Вариант 8.

1.  $y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$ ; 2.  $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{1+x}}$ ; 3.  $x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{t^3}{1-t^2}$ .

Вариант 9.

1.  $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ ; 2.  $y = \frac{4\sqrt{|x-1|}}{x-2}$ ; 3.  $x = \frac{t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3-t}{1+t^2}$ .

Вариант 10.

1.  $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ ; 2.  $y = \arcsin(1 - \sqrt[3]{x^2})$ ; 3.  $x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, y = \frac{(t-2)^2}{t-1}$ .

Вариант 11.

1.  $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ ; 2.  $y = \cos x \cdot \cos 2x$ ; 3.  $x = \frac{2t}{1-t^2}, y = \frac{t^2}{1-t^2}$ .

Вариант 12.

1.  $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$ ; 2.  $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$ ;

3.  $x = \frac{t}{1-t^2}, y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$ .



Вариант 13.

1.  $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$ ; 2.  $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$ ; 3.  $x = t + \frac{1}{t}, y = t + \frac{1}{t^2}$ .

Вариант 14.

1.  $y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$ ; 2.  $y = |x| \cdot \sqrt[3]{1+3x}$ ; 3.  $x = t \ln t, y = \frac{\ln t}{t}$ .

Вариант 15.

1.  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ ; 2.  $y = (1+x)x^{\frac{2}{3}}$ ; 3.  $x = \frac{5t^2}{1+t^3}, y = \frac{5t^3}{1+t^3}$ .

Вариант 16.

1.  $y = \frac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}$ ; 2.  $y = (x+1)^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$ ; 3.  $x = \frac{t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3 + 2t}{1+t^2}$ .

Вариант 17.

1.  $y = x + \frac{\ln x}{x}$ ; 2.  $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ ; 3.  $x = \frac{(t+1)^2}{4}, y = \frac{(t-1)^2}{4}$ .

Вариант 18.

1.  $y = \frac{5x^2 + 42x + 77}{x^2 + 7x + 14}$ ; 2.  $y = (x^2 + 8x + 12)^{\frac{2}{3}}$ ; 3.  $x = \frac{4t}{1-t^4}, y = \frac{4t^2}{1-t^4}$ .

Вариант 19.

1.  $y = \frac{1+x^2}{1+(x-2)^2}$ ; 2.  $y = \sin x + \sin 2x$ ; 3.  $x = \frac{t^2}{1-t}, y = \frac{t^3}{1-t^2}$ .

Вариант 20.

1.  $y = \frac{(x-5)^3}{(x-7)^2}$ ; 2.  $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$ ; 3.  $x = \frac{t^2}{t^2 - 1}, y = \frac{t^2 + 1}{t + 2}$ .

Вариант 21.

1.  $y = \frac{x^4}{x^3 + 2}$ ; 2.  $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ ; 3.  $x = a \cos 2t, y = a \cos 3t$ .

Вариант 22.

1.  $y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x}$ ; 2.  $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}$ ; 3.  $x = t + t^2, y = t - t^2$ .

Вариант 23.

1.  $y = e^{\frac{1}{x}} - x$ ; 2.  $y = \frac{x^5 - 8}{x^4}$ ; 3.  $x = \frac{t^2 + 1}{4(1-t)}, y = \frac{t}{t+1}$ .

Вариант 24.

1.  $y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$ ; 2.  $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$ ; 3.  $x = \frac{2t-1}{t^3(t-1)}, y = \frac{2t-1}{t^2(t-1)}$ .

Вариант 25.

1.  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ ; 2.  $y = \sqrt[3]{x^2|2-x|}$ ; 3.  $x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^2}$ .

Вариант 26

1.  $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ ; 2.  $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$ ; 3.  $x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{t^3}{1-t^2}$ .

Вариант 27

1.  $y = \frac{x-1}{x^2-4}$ ; 2.  $y = x + \ln(x^2 - 4)$ ; 3.  $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ .

Вариант 28

1.  $y = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ ; 2.  $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x$ ; 3.  $x = 2 + t^2, y = t - \frac{t}{t+1}$ .



Вариант 29

$$1. y = x + \frac{2x}{x^2 - 1}; \quad 2. y = \ln(x^2 - 2x + 2); \quad 3. x = \frac{t^2 + 1}{4(1-t)}, \quad y = \frac{t}{t+1}.$$

Вариант 30

$$1. y = 2x - \arcsin(x); \quad 2. y = \ln \frac{x-1}{x+2}; \quad 3. x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \quad y = \frac{t^4}{t^4 + 1}.$$

Вариант 31

$$1. y = \sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}; \quad 2. y = \frac{1-x^3}{x^2}; \quad 3. x = \frac{t}{1-t^2}, \quad y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}.$$

Вариант 32

$$1. y = \ln(x^2 - 4); \quad 2. y = \frac{2}{x^2 - 4}; \quad 3. x = \frac{t^2}{t^2 - 1}, \quad y = \frac{t^2 + 1}{t + 2}.$$

Вариант 33

$$1. y = \frac{x^3 - 1}{x^3}; \quad 2. y = (x+2)e^{2x}; \quad 3. x = \frac{t}{1+t^3}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

Вариант 34

$$1. y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}; \quad 2. y = e^{\frac{1}{3-x}}; \quad 3. x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t.$$

Вариант 35

$$1. y = \frac{x-1}{x^2 - 2x}; \quad 2. y = \ln(x^2 - 4x + 8); \quad 3. x = \cos 2t, \quad y = \sin 3t.$$

Вариант 36

$$1. y = x - \sqrt[3]{x^2}; \quad 2. y = \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^2; \quad 3. x = \frac{t^2}{t^2-1}, \quad y = \frac{t^2}{t^3+1}.$$

Вариант 37

$$1. y = \frac{1}{e^{2x}-1}; \quad 2. y = x^2 - 2 \ln x; \quad 3. x = \frac{1}{4}(t+1)^2, \quad y = \frac{1}{4}(t-1)^2.$$

Вариант 38

$$1. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}; \quad 2. y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}; \quad 3. x = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{1}{1+t^2}.$$

Вариант 39

$$1. y = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2; \quad 2. y = \ln(2x^2+3); \quad 3. x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1}.$$

Вариант 40

$$1. y = \frac{x^3-1}{4x^2}; \quad 2. y = \ln \frac{x+1}{x-1}; \quad 3. x = -5t^2 + 2t^5, \quad y = -3t^2 + 2t^3.$$

Вариант 41.

$$1. y = \ln \frac{x+1}{x+2}; \quad 2. y = e^{2x-x^2}; \quad 3. x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \quad y = \frac{(t-2)^2}{t-1}.$$

Вариант 42

$$1. y = \sqrt[3]{x^3-3x}; \quad 2. y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; \quad 3. x = \frac{t-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t^2-t^3}{1+t^2}.$$



Вариант 43

$$1. y = \ln \frac{x}{x-1}; \quad 2. y = x^3 e^{-x}; \quad 3. x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}.$$

Вариант 44

$$1. y = \frac{4x}{1+x^2}; \quad 2. y = x \ln|x|; \quad 3. x = t^3 + 3t + 1, y = t^3 - 3t + 1.$$

Вариант 45

$$1. y = \frac{4x}{(1+x^2)^2}; \quad 2. y = e^{\frac{1}{x+2}}; \quad 3. x = t^3 - 3\pi, y = t^3 - 6 \arctgt.$$

Вариант 46

$$1. y = \frac{1}{(x-2)(x^2-1)}; \quad 2. y = x\sqrt{1-x^2}; \quad 3. x = \frac{t^3}{1+t^2}, y = \frac{t^3-2t^2}{1+t^2}.$$

Вариант 47

$$1. y = e^{\frac{1}{2-x}}; \quad 2. y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x; \quad 3. x = t^3 + 2t + t, y = -2 + 3t - t^3.$$

Вариант 48

$$1. y = \frac{x^2-1}{x^2+2}; \quad 2. y = x^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{x^2}{3}}; \quad 3. x = (t-1)^2(t-2),$$

$$y = (t-1)^2(t-3).$$

Вариант 49

$$1. y = \frac{3x^2-7x-16}{x^2-x-6}; \quad 2. y = x e^{2x-1}; \quad 3. x = \frac{1}{t(t+1)}, y = \frac{(t+1)^2}{t}.$$

Вариант 50

$$1. y = \sqrt[3]{1-x^3}; \quad 2. y = \ln \frac{x-1}{x+1}; \quad 3. x = \frac{t^2}{t-1}; \quad y = \frac{t^2-1}{t}.$$



### Литература

1. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость, М. 1984, 592 с.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М. 1977, 527 с.
3. Райхмист Р.Б. Графики и функции, М. 1991, 159 с.
4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, М. 2000, 724 с.

Одобрено на заседании кафедры  
Ученый совет факультета  
1991 г. 02.08 от 20 декабря 1991 г.

Закл. № 88 "22" 04 2003 г. Индекс 100

- Литература
1. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Рухов В.Н., Швабман М.Н. Сборник задач по математическому анализу. Предварительная, дифференциальная, интегральная. М. 1984, 292 с.
  2. Демидов Е.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М. 1977, 327 с.
  3. Рашков Р.Б. Функции и функции. М. 1991, 129 с.
  4. Виноградова Н.А., Овчиник С.Н., Савинский В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. М. 2000, 224 с.

Отпечатано на участке оперативной полиграфии  
 Редакционно-издательского отдела ТГУ  
 Лицензия ПД № 00208 от 20 декабря 1999 г.

---

Заказ № 58 "25" 04 2003 г. Тираж 100 экз.